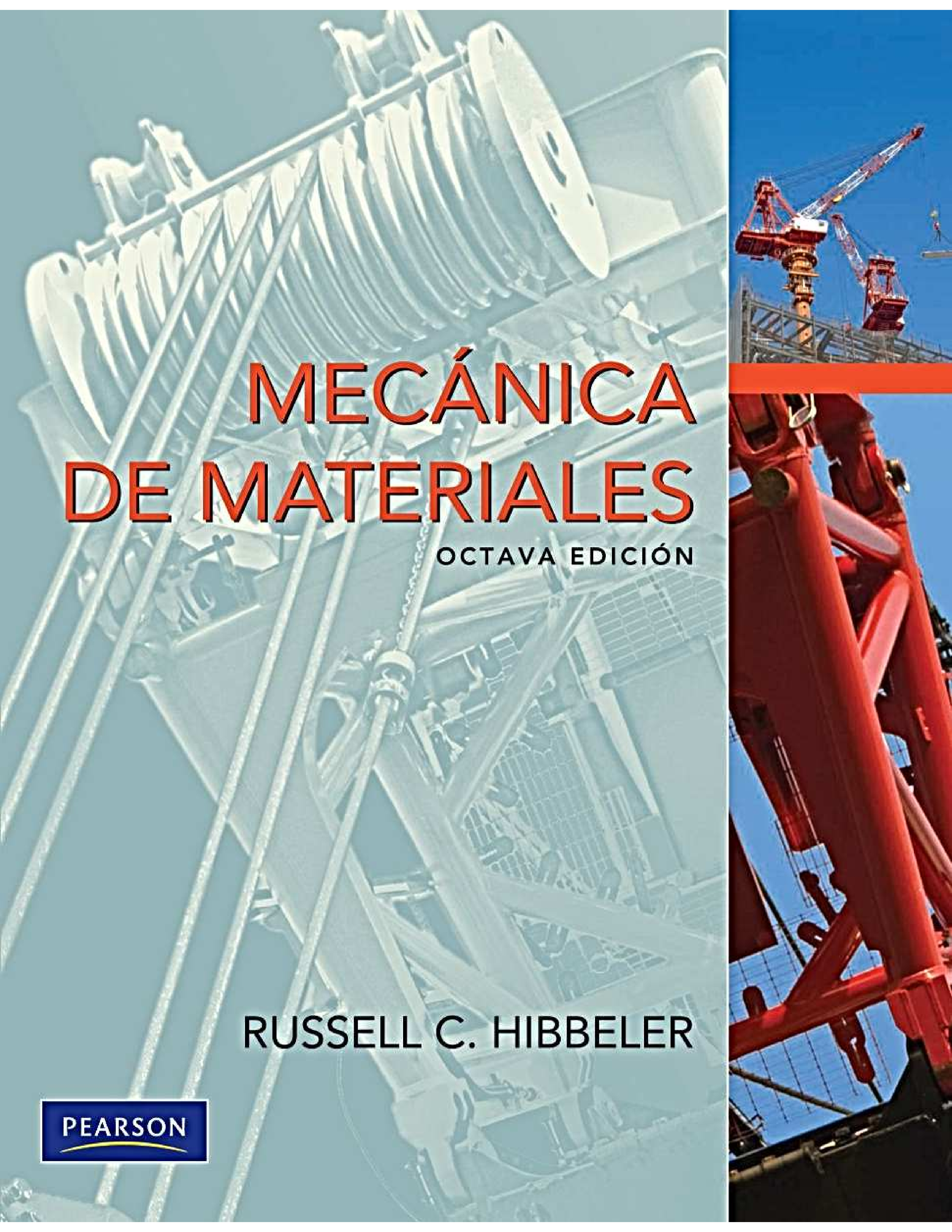

MECÁNICA
DE MATERIALES
OCTAVA EDICIÓN
RUSSELL C. HIBBELER
PEARSON

Ecuaciones fundamentales de la mecánica de materiales

Carga axial

Esfuerzo normal

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Desplazamiento

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E}$$

$$\delta = \Sigma \frac{PL}{AE}$$

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

Torsión

Esfuerzo cortante en un eje circular

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

donde

$$J = \frac{\pi}{2}c^4 \text{ sección transversal sólida}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4) \text{ sección transversal tubular}$$

Potencia

$$P = T\omega = 2\pi f T$$

Ángulo de giro

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}$$

$$\phi = \Sigma \frac{TL}{JG}$$

Esfuerzo cortante promedio en un tubo de pared delgada

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{T}{2tA_m}$$

Flujo cortante

$$q = \tau_{\text{prom}} t = \frac{T}{2A_m}$$

Flexión

Esfuerzo normal

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Flexión asimétrica

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}, \qquad \tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

Cortante

Esfuerzo cortante directo promedio

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{A}$$

Esfuerzo cortante transversal

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Flujo cortante

$$q = \tau t = \frac{VQ}{I}$$

Esfuerzo en recipientes a presión con pared delgada

Cilindro

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Esfera

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Ecuaciones de transformación del esfuerzo

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Esfuerzo principal

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esfuerzo cortante máximo en el plano

$$\tan 2\theta_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Esfuerzo cortante máximo absoluto

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{abs}}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} + \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

Relaciones entre las propiedades del material

Razón de Poisson

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}}$$

Ley de Hooke generalizada

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

donde

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Relaciones entre *w*, *V*, *M*

$$\frac{dV}{dx} = -w(x), \qquad \frac{dM}{dx} = V$$

Curva elástica

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -w(x)$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

Pandeo

Curva axial crítica

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

Esfuerzo crítico

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}, \; r = \sqrt{I/A}$$

Fórmula secante

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

Métodos de energía

Conservación de la energía

$$U_e = U_i$$

Energía de deformación

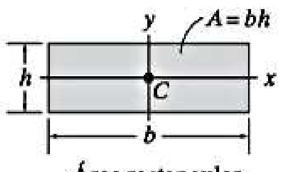
$$U_i = \frac{N^2L}{2AE} \quad \textit{carga axial constante}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2dx}{EI} \quad \textit{momento flexionante}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{f_sV^2dx}{2GA} \quad \textit{cortante transversal}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{T^2dx}{2GJ} \quad \textit{momento de torsión}$$

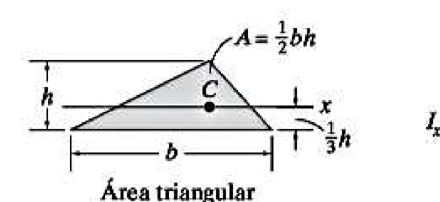
Propiedades geométricas de elementos de área



$I_x = \frac{1}{12}bh^3$

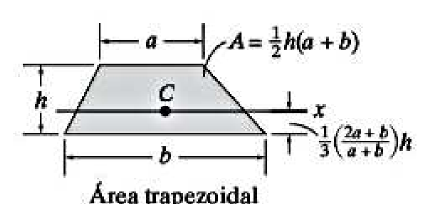
$I_y = \frac{1}{12}hb^3$

Área rectangular

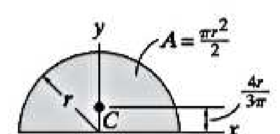


$I_x = \frac{1}{36}bh^3$

Área triangular



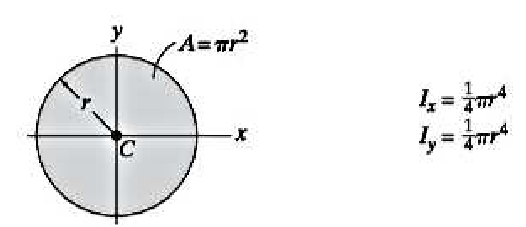
Área trapezoidal



$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$

$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$

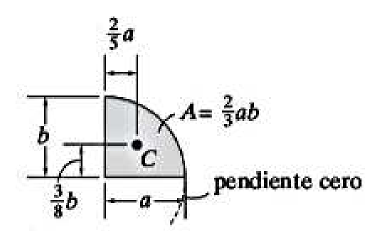
Área semicircular



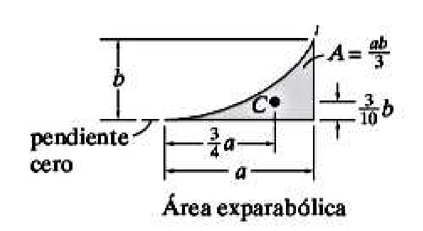
$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$

$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$

Área circular



Área semiparabólica



Área exparabólica

MECÁNICA DE MATERIALES

OCTAVA EDICIÓN

RUSSELL C. HIBBELER

Traducción

Jesús Elmer Murrieta Murrieta
Maestro en Investigación de Operaciones
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Revisión técnica

Juan Óscar Molina Solís
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Sergio Saldaña Sánchez
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Zacatenco

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Hibbeler, Russell C.

Mecánica de materiales. Octava edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2011

ISBN: 978-607-32-0559-7
Área: Ingeniería

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 880

Edición en español
Editor: Luis Miguel Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

OCTAVA EDICIÓN, 2011

D.R. © 2011 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.
Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

ISBN 978-607-32-0559-7
ISBN e-book 978-607-32-0560-3
ISBN e-chapter 978-607-32-0561-0

PRIMERA IMPRESIÓN
Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 14 13 12 11

Prentice Hall
es una marca de



www.pearsoneducacion.net **ISBN 978-607-32-0559-7**

Al estudiante

Con la esperanza de que esta obra estimule
su interés por la Ingeniería Mecánica
y proporcione una guía aceptable
hacia su comprensión.

PREFACIO

El propósito de este libro es proporcionar al estudiante una presentación clara y completa de la teoría y las aplicaciones de los principios de la mecánica de materiales. Para lograr dicho objetivo, esta obra ha ido tomando forma mediante los comentarios y las sugerencias de cientos de revisores que se dedican a la enseñanza, así como muchos de los alumnos del autor. Esta edición ha sido mejorada de manera significativa en relación con la anterior, por lo que esperamos que tanto profesor como estudiante se beneficien en gran medida.

Lo nuevo en esta edición

- **Contenido actualizado.** Algunas partes del libro se han reescrito a fin de lograr mayor claridad. A este respecto, se han agregado ejemplos nuevos y algunos de los existentes se han modificado para dar mayor énfasis a la aplicación de conceptos importantes. Además, se han mejorado las ilustraciones en todo el libro a fin de dar soporte a dichos cambios.
- **Fotos nuevas.** La importancia de conocer el objeto de estudio se refleja en las aplicaciones del mundo real mostradas en 44 fotos nuevas o actualizadas a lo largo del libro. Por lo general, estas fotos se utilizan para explicar la manera en que se aplican los principios más importantes en situaciones reales y la forma en que se comportan los materiales bajo una carga.
- **Problemas fundamentales.** Esta serie de problemas se localiza justo después de los problemas de ejemplo de cada capítulo y ofrece a los estudiantes aplicaciones simples de los conceptos, por lo que les da la oportunidad de desarrollar sus habilidades antes de intentar solucionar algunos de los problemas estándar que siguen. Esta sección puede considerarse como ejemplos extendidos puesto que todos los problemas tienen soluciones parciales y respuestas que se proporcionan en la sección final del libro. De manera adicional, estos problemas ofrecen un medio excelente para estudiar antes de los exámenes, y pueden usarse posteriormente como una preparación para algún examen de certificación en ingeniería.
- **Problemas conceptuales.** A lo largo del libro, por lo general al final de cada capítulo, hemos incluido una serie de problemas que involucran situaciones conceptuales relacionadas con la aplicación de los principios contenidos en el texto. Estos problemas de análisis y diseño están planteados para que los estudiantes razonen sobre una situación de la vida real ejemplificada en una fotografía. Los problemas pueden asignarse después de que los estudiantes hayan desarrollado cierta experiencia en el tema estudiado y se pueden resolver como proyectos individuales o en equipo.
- **Problemas nuevos.** En esta edición se han agregado aproximadamente 550 problemas nuevos, o 35 por ciento del total, incluyendo aplicaciones a muchos campos diferentes de la ingeniería. Asimismo,

esta nueva edición tiene alrededor de 134 problemas más que la edición anterior.

- **Problemas con sugerencias.** Con los problemas de tarea adicionales en esta nueva edición, todos los problemas indicados con una viñeta (•) antes del número del problema incluyen una recomendación, ecuación clave o resultado numérico adicional que se proporciona junto con la respuesta al final del libro. Estos problemas motivan mucho a los estudiantes para resolver problemas por su cuenta al proporcionarles formas adicionales de verificar la solución.

Contenido

El libro está organizado en 14 capítulos. El capítulo 1 comienza con una revisión de los conceptos importantes de la estática, seguida por una definición formal de los esfuerzos normal y cortante, y un análisis del esfuerzo normal en elementos cargados de manera axial y el esfuerzo cortante promedio causado por el cortante directo.

En el capítulo 2 se definen las deformaciones normal y cortante, y en el capítulo 3 se proporciona un análisis de algunas de las propiedades mecánicas importantes de los materiales. En los capítulos 4, 5 y 6, respectivamente, se presenta el estudio por separado de la carga axial, la torsión y la flexión. En cada uno de estos capítulos se considera el comportamiento lineal tanto elástico como plástico del material. Además se incluyen temas relacionados con las concentraciones del esfuerzo y el esfuerzo residual. En el capítulo 7 se analiza el esfuerzo cortante transversal, junto con un estudio de los tubos de pared delgada, el flujo cortante y el centro cortante. El capítulo 8 incluye un análisis de recipientes a presión con pared delgada y se proporciona un repaso parcial del material cubierto en los capítulos anteriores, puesto que el estado de esfuerzo resulta de cargas combinadas. En el capítulo 9 se presentan los conceptos para transformar estados de esfuerzo multiaxial. De manera similar, en el capítulo 10 se analizan los métodos para la transformación de deformaciones, incluyendo la aplicación de diferentes teorías de falla. El capítulo 11 proporciona un medio para realizar un resumen y un repaso adicionales del material anterior al cubrir aplicaciones de diseño de vigas y ejes. El capítulo 12 cubre diferentes métodos para calcular las deflexiones de vigas y ejes; también se incluye un estudio para determinar las reacciones en estos elementos si son estáticamente indeterminados. En el capítulo 13 se proporciona un análisis del pandeo de columnas y, por último, en el capítulo 14 se considera el problema del impacto y la aplicación de diferentes métodos de energía para calcular deflexiones.

Las secciones del libro que contienen material más avanzado se indican mediante un asterisco (*). Si el tiempo lo permite, algunos de estos temas podrían incluirse en el curso. Además, este material proporciona una referencia adecuada para los principios básicos cuando éstos se cubren en otros cursos, y puede utilizarse como base para la asignación de proyectos especiales.

Método de cobertura alternativo. Algunos profesores prefieren cubrir *primero* las transformaciones de esfuerzo y deformación,

antes de analizar las aplicaciones específicas de la carga axial, la torsión, la flexión y la cortante. Un método posible para hacer esto sería estudiar primero el esfuerzo y su transformación, capítulos 1 y 9, seguidos por la deformación y su transformación, capítulo 2 y la primera parte del 10. El análisis y los problemas de ejemplo en estos últimos capítulos están redactados de manera que sea posible seguir este método. Además, las series de problemas se han subdividido de forma que este material pueda verse sin conocimiento previo de los capítulos que intervienen. Los capítulos 3 a 8 pueden verse sin pérdida de continuidad.

Elementos particulares

Organización y enfoque. Cada capítulo está organizado en secciones bien definidas que tienen una explicación de temas específicos, problemas de ejemplo ilustrativos y series de problemas de tarea. Los temas dentro de cada sección se colocan en subgrupos definidos mediante títulos. El propósito es presentar un método estructurado para introducir cada nueva definición o concepto y que el libro conserve una secuencia como referencia y para repasos posteriores.

Contenido de cada capítulo. Cada capítulo comienza con una ilustración a página completa que muestra una extensa aplicación del material incluido. Después se presentan los "objetivos del capítulo" como una visión general del material que se cubrirá en éste.

Procedimientos para el análisis. Esta característica única, que se encuentran al final de muchas de las secciones del libro, proporciona al estudiante un método lógico y ordenado que puede seguir al aplicar la teoría. Los problemas de ejemplo se resuelven utilizando este método esquemático a fin de clarificar su aplicación numérica. Sin embargo, se entiende que al dominar los principios relevantes y al haber obtenido confianza y juicio en el método, el estudiante puede desarrollar sus propios procedimientos para la resolución de problemas.

Fotografías. A lo largo del libro se utilizan muchas fotografías para mejorar la comprensión y la explicación conceptual de cómo se aplican los principios de la mecánica de materiales en situaciones del mundo real.

Puntos importantes. Esta característica proporciona un repaso o resumen de los conceptos más importantes en una sección y resalta los puntos más significativos que deben observarse al aplicar la teoría para la resolución de problemas.

Problemas de ejemplo. Todos los problemas de ejemplo se presentan de manera concisa y con una redacción fácil de entender.

Problemas de tarea. Muchos de los problemas del libro presentan situaciones realistas que pueden encontrarse en la práctica de la ingeniería. Se espera que esto estimule los intereses del estudiante en la materia y proporcione un medio con el cual desarrolle sus habilidades para reducir cualquier problema, desde su descripción física hasta un modelo

o representación simbólica a la que puedan aplicarse los principios. A lo largo del libro existe un equilibrio aproximado entre los problemas que utilizan unidades del Sistema Inglés y los que usan el Sistema Decimal. Además, en todas las series, se ha hecho un esfuerzo por colocar los problemas en un orden de dificultad creciente. Las respuestas a todos los problemas, con la excepción de cada cuarto problema, se presentan al final del libro. A fin de alertar al usuario acerca de un problema en el que no se incluya respuesta, hemos colocado un asterisco (*) antes de su número. Las respuestas se proporcionan con tres cifras significativas, incluso cuando los datos para las propiedades del material pueden conocerse con menor exactitud. Aunque ésta podría parecer una práctica incorrecta, se realiza simplemente por consistencia y para darle al estudiante una mayor oportunidad de validar su solución. Un cuadrado negro (■) identifica los problemas que requieren un análisis numérico o una aplicación en computadora.

Apéndices. Los apéndices del libro proporcionan una fuente para repaso y un listado de datos tabulares. El apéndice A proporciona información del centroide y el momento de inercia de un área. En los apéndices B y C encontrará datos tabulares para figuras estructurales, y la deflexión y las pendientes de varios tipos de vigas y ejes.

Verificación de la exactitud. Esta octava edición ha sido sometida a nuestra rigurosa revisión de la exactitud en tres fases. Además de la revisión realizada por el autor en todas las figuras y páginas, el texto fue verificado por las siguientes personas:

- Scott Hendricks, Virginia Polytechnic University
- Karim Nohra, University of South Florida
- Kurt Norlin, Laurel Tech Integrated Publishing Services
- Kai Beng Yap, Consultor en Ingeniería

Reconocimientos

A través de los años este texto ha tomado forma con las sugerencias y comentarios de muchos de mis colegas en la profesión de la enseñanza. Aprecio su motivación y deseo de proporcionar una crítica constructiva y espero que acepten este reconocimiento anónimo. Doy una nota de agradecimiento a los siguientes revisores.

Akthem Al-Manaseer, *San Jose State University*
Yabin Liao, *Arizona State University*
Cliff Lissenden, *Penn State*
Gregory M. Odergard, *Michigan Technological University*
John Oyler, *University of Pittsburg*
Roy Xu, *Vanderbilt University*
Paul Ziehl, *University of South Carolina*

Considero que hay algunas personas que merecen un reconocimiento particular. Mi amigo y socio de hace mucho tiempo, Kai Beng Yap, fue de gran apoyo al revisar todo el manuscrito y ayudarme a preparar las solu-

ciones de los problemas. A este respecto, también doy una nota de agradecimiento especial a Kurt Nolin de Laurel Tech Integrated Publishing Services. Agradezco la ayuda de Rose Kernan, mi editora de producción durante muchos años, y a mi esposa, Conny, y mi hija, Mary Ann, por su colaboración con las lecturas de prueba y la escritura necesarias para preparar el manuscrito durante el proceso de producción.

También me gustaría agradecer a todos mis alumnos que usaron la edición anterior y han hecho comentarios para mejorar el contenido de ésta.

Estaré muy agradecido si recibo de ustedes algún comentario o sugerencia en relación con el contenido de esta edición.

Russell Charles Hibbeler
hibbeler@bellsouth.net

Recursos para el profesor (en inglés)

- **Manual de soluciones para el profesor.** El autor preparó un manual de soluciones para el profesor, el cual incluye listas de asignación de tareas; también fue revisado como parte del programa de verificación de la exactitud.

- **Recursos para presentación.** Todas las ilustraciones del libro están disponibles en diapositivas de PowerPoint y formato JPEG (en inglés). Estos archivos pueden bajarse desde el centro de recursos para el profesor en http://www.pearsoneducacion.net/hibbeler. Si tiene le necesidad de obtener un nombre de usuario y una contraseña para este sitio, por favor contacte a su representante local de Pearson.

CONTENIDO



6 Flexión 255



7 Esfuerzo cortante transversal 359



8 Cargas combinadas 405



9 Transformación de esfuerzo 437



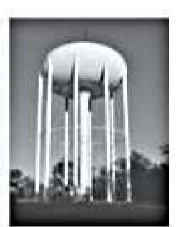
10 Transformación de la deformación 485



11 Diseño de vigas y ejes 537



12 Deflexión de vigas y ejes 569



13 Pandeo de columnas 657

14 Métodos de energía 715



Apéndices

CRÉDITOS

Capítulo 1, Acercamiento a largueros de hierro. Jack Sullivan\Alamy Images.

Capítulo 2, Fenómeno fotoelástico: tensión en un montaje con tornillos. Alfred Pasieka\Alamy Images.

Capítulo 3, Mujer parada cerca de un puente que colapsó en una de las zonas con mayor afectación por el terremoto que golpeó la ciudad de Yingxiu en el condado de Wenchuan, de la provincia suroccidental de Sichuan, China, el 2 de junio de 2008. La secretaria de Estado de Estados Unidos, Condoleezza Rice, se reunió el 29 de junio con niños que quedaron sin hogar por el devastador terremoto que azotó el suroeste de China y elogió la respuesta del país al desastre. LIU JIN/Stringer\Getty Images, Inc. AFP.

Capítulo 3 del texto, Copa y cono de acero. Alamy Images.

Capítulo 4, Broca giratoria en un equipo portátil para perforación petrolera. © Lowell Georgia/CORBIS. Todos los derechos reservados.

Capítulo 5, Vapor emergiendo del suelo y vástago hueco giratorio del barreno. Alamy Images.

Capítulo 6, Estructura de acero en un sitio de construcción. Corbis RF.

Capítulo 7, Ruedas de un tren en marcha. Jill Stephenson\Alamy Images.

Capítulo 7 del texto, Carretera elevada. Gari Wyn Williams\Alamy Images.

Capítulo 8, Telesilla con montañas cubiertas de nieve en el fondo. Shutterstock.

Capítulo 9, Hélices de una turbina. Chris Pearsall\Alamy Images.

Capítulo 10, Esfuerzos complejos desarrollados dentro del ala de un avión. Cortesía de Measurements Group, Inc. Raleigh, Carolina del Norte, 27611, EUA.

Capítulo 11, Bastidor de metal y una grúa amarilla. Stephen Finn\Alamy Images.

Capítulo 12, Hombre con pértiga saltando en el desierto. © Patrick Giardino/CORBIS. Todos los derechos reservados.

Capítulo 13, Torre de almacenamiento de agua. John Dorado\Shutterstock.

Capítulo 14, Toma de un transportador de pilotes y una grúa flotante. John MacCooey\Alamy Images.

Las imágenes restantes fueron proporcionadas por el autor.

MECÁNICA DE MATERIALES



Los pernos usados para las conexiones de esta estructura de acero se encuentran sometidos a esfuerzo. En el presente capítulo se estudiará la forma en que los ingenieros diseñan estas conexiones y sus elementos de sujeción.

Esfuerzo

1

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se repasarán algunos de los principios más importantes de la estática y se mostrará cómo utilizarlos para determinar las cargas internas resultantes en un cuerpo. Después, se presentarán los conceptos de esfuerzo normal y cortante, y se analizarán las aplicaciones específicas del análisis y diseño de los elementos sometidos a una carga axial o cortante directa.

1.1 Introducción

La ***mecánica de materiales*** es una rama de la mecánica que estudia los efectos internos del esfuerzo y la deformación en un cuerpo sólido que está sometido a una carga externa. El esfuerzo se encuentra asociado con la resistencia del material del que está hecho el cuerpo, mientras que la deformación es una medida de la elongación (cambio en tamaño y forma) que experimenta éste. Además, la mecánica de materiales incluye el estudio de estabilidad de los cuerpos, como en el caso de una columna que se encuentra sometida a una carga de compresión. La comprensión completa de los fundamentos de este tema es de vital importancia, puesto que muchas fórmulas y reglas de diseño mencionados en los manuales de ingeniería se basan en los principios de esta materia.

Desarrollo histórico. El origen de la mecánica de materiales se remonta a los comienzos del siglo XVII, cuando Galileo realizó experimentos para estudiar los efectos de las cargas en barras y vigas fabricadas con diferentes materiales. Sin embargo, a inicios del siglo XVIII, se mejoraron en gran medida los métodos experimentales para realizar pruebas en materiales. En ese tiempo, científicos notables como Saint-Venant, Poisson, Lamé y Navier realizaron muchos estudios experimentales y teóricos sobre este tema, principalmente en Francia.

Con el paso de los años, cuando muchos de los problemas fundamentales de la mecánica de materiales se habían resuelto, fue necesario el uso de matemáticas avanzadas y técnicas de computación para resolver problemas más complejos. En consecuencia, este tema se expandió a otras áreas de la mecánica, como la *teoría de la elasticidad* y la *teoría de la plasticidad*. La investigación en estos campos se encuentra en desarrollo y tiene el propósito de resolver problemas de ingeniería más avanzados.

1.2 Equilibrio de un cuerpo deformable

La estática juega un papel importante en el desarrollo y la aplicación de la mecánica de materiales; por ello, es esencial tener un buen entendimiento de sus fundamentos. A continuación repasaremos algunos de los principios esenciales de la estática que se utilizarán a lo largo de este libro.

Cargas externas. Un cuerpo puede estar sometido a dos tipos de cargas externas, es decir, las fuerzas de superficie o las fuerzas de cuerpo. Vea la figura 1-1.

Fuerzas de superficie. Las ***fuerzas de superficie*** son causadas por el contacto directo de un cuerpo con la superficie de otro. En todos los casos esas fuerzas están distribuidas sobre el *área* de contacto entre los cuerpos. Si esta área es pequeña en comparación con el área de la superficie total del cuerpo, entonces la fuerza de superficie puede *idealizarse* como una sola ***fuerza concentrada***, que se aplica a un *punto* sobre el cuerpo. Por ejemplo, la fuerza del suelo sobre las ruedas de una bicicleta puede considerarse como una fuerza concentrada. Si la carga de la superficie se aplica a lo largo de un área estrecha o línea, la carga puede *idealizarse* como una ***carga linealmente distribuida***, $w(s)$. Aquí la carga se mide como si tuviese una intensidad de fuerza/longitud a lo largo de la línea y se representa de manera gráfica como una serie de flechas a lo largo de la línea *s*. ***La fuerza resultante*** $\mathbf{F}_R$ ***de*** $w(s)$ ***es equivalente al área bajo la curva de la carga distribuida, y esta resultante actúa a través del centroide C (o centro geométrico) de dicha área.*** Las cargas ubicadas en toda la longitud de una viga es un ejemplo típico en el que, a menudo, se aplica esta idealización.

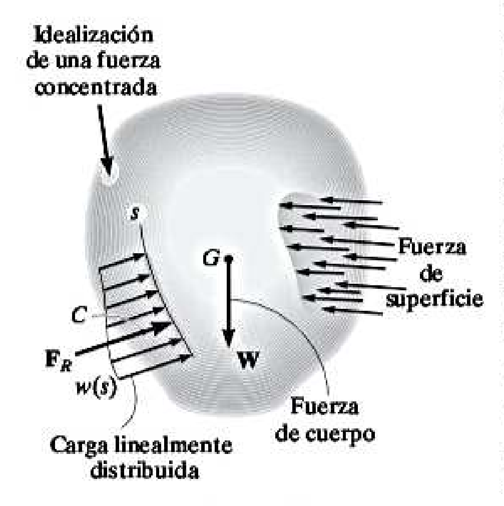


Figura 1-1

Fuerzas de cuerpo. Una ***fuerza de cuerpo*** se desarrolla cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo sin contacto físico directo entre éstos. Entre algunos ejemplos se encuentran los efectos causados por la gravitación de la Tierra o por su campo electromagnético. Aunque las fuerzas de cuerpo afectan cada una de las partículas que lo forman, estas fuerzas se representan por una sola fuerza concentrada que actúa sobre el cuerpo. En el caso de la gravitación, esta fuerza se llama el ***peso*** del cuerpo y actúa a través del centro de gravedad del mismo.



Muchos elementos de máquina están conectados mediante pernos para permitir la rotación libre en sus conexiones. Estos soportes ejercen una fuerza sobre un elemento, pero no un momento.

Reacciones en los soportes (apoyos). Las fuerzas de superficie que se desarrollan en los soportes o puntos de contacto entre los cuerpos se llaman ***reacciones***. En la tabla 1-1 se muestran los soportes más comunes para los problemas bidimensionales, es decir, para cuerpos sometidos a sistemas de fuerzas coplanares. Observe con cuidado el símbolo utilizado para representar cada soporte y el tipo de reacciones que ejerce sobre el elemento con el que está en contacto. Como regla general, ***si el soporte impide la traslación en una dirección dada, entonces debe desarrollarse una fuerza sobre el elemento en esa dirección. Del mismo modo, si se impide la rotación, debe ejercerse un momento sobre el elemento.*** Por ejemplo, un soporte de rodillo sólo puede impedir la traslación perpendicular o normal a la superficie. Por consiguiente, el rodillo ejerce una fuerza normal **F** sobre el elemento en el punto de contacto. Como el elemento puede girar libremente con respecto al rodillo, no puede desarrollarse un momento sobre el elemento.

TABLA 1-1

Tipo de conexión	Reacción	Tipo de conexión	Reacción
Cable	Una incógnita: F	Pasador externo	Dos incógnitas: F_x, F_y
Rodillo	Una incógnita: F	Pasador interno	Dos incógnitas: F_x, F_y
Soporte liso	Una incógnita: F	Soporte fijo	Tres incógnitas: F_x, F_y, M

1

Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio de un cuerpo requiere un ***balance de fuerzas*** para impedir que el cuerpo se traslade o tenga movimiento acelerado a lo largo de una trayectoria recta o curva, y un ***balance de momentos*** para impedir que el cuerpo gire. Estas condiciones pueden expresarse de manera matemática mediante dos ecuaciones vectoriales

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \tag{1-1}$$

Aquí, $\Sigma \mathbf{F}$ representa la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma \mathbf{M}_O$ es la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier punto O ya sea sobre o fuera del cuerpo. Si se fija un sistema de coordenadas x, y, z con el origen en el punto O, los vectores de fuerza y de momento pueden separarse en componentes a lo largo de los ejes coordenados y en las dos ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma escalar como seis ecuaciones, consideradas como,

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array} \tag{1-2}$$

Con frecuencia, en la práctica de la ingeniería, la carga sobre un cuerpo puede representarse como un sistema de *fuerzas coplanares*. Si éste es el caso, y las fuerzas se encuentran en el plano x-y, entonces las condiciones para el equilibrio del cuerpo pueden especificarse mediante sólo tres ecuaciones escalares de equilibrio, que son:

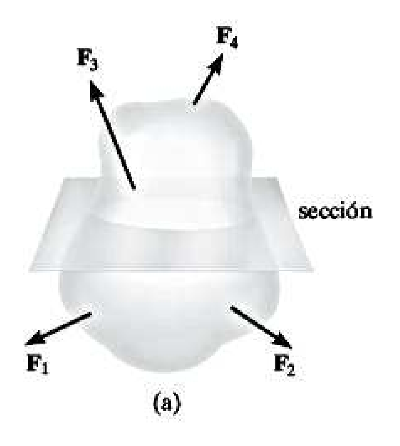
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \tag{1-3}$$

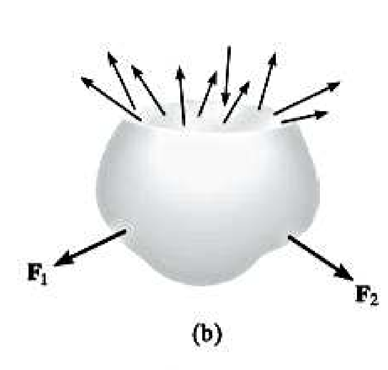


Para diseñar los elementos horizontales de la estructura de este edificio, primero deben determinarse las cargas internas en diferentes puntos a lo largo de su longitud.

Aquí todos los momentos se suman con respecto al punto O, y éstos estarán dirigidos a lo largo del eje z.

La aplicación exitosa de las ecuaciones de equilibrio requiere la especificación completa de todas las fuerzas conocidas y desconocidas que actúan sobre el cuerpo, por lo que ***la mejor manera de tomar en cuenta todas esas fuerzas es dibujar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo.***





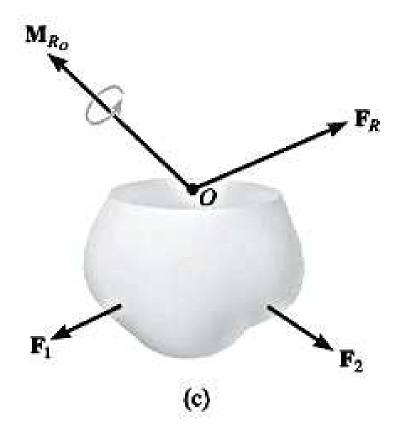


Figura 1-2

Cargas internas resultantes. En la mecánica de materiales, la estática se usa principalmente para determinar las cargas resultantes que actúan dentro de un cuerpo. Por ejemplo, considere el cuerpo que se muestra en la figura 1-2*a*, que se mantiene en equilibrio mediante las cuatro fuerzas externas.* A fin de obtener las cargas internas que actúan sobre una región específica dentro del cuerpo, es necesario hacer una sección imaginaria o "corte" a través de la región donde van a determinarse las cargas internas. Después, las dos partes del cuerpo se separan y se dibuja un diagrama de cuerpo libre de una de las partes, figura 1-2*b*. Observe que en realidad existe una distribución de la fuerza interna que actúa sobre el área "expuesta" de la sección. Esas fuerzas representan los efectos del material de la parte superior del cuerpo que actúa sobre el material adyacente de la parte inferior.

Aunque la distribución exacta de la carga interna puede ser *desconocida*, pueden usarse las ecuaciones de equilibrio para relacionar las fuerzas externas sobre la parte inferior del cuerpo con *la fuerza y el momento resultantes* de la distribución, $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{M}_{R_O}$, *en cualquier punto específico O* sobre el área seccionada, figura 1-2*c*. Más adelante se mostrará que el punto *O* suele escogerse en el *centroide* del área seccionada, y así se le considerará aquí a menos que se indique lo contrario. Además, si un elemento es largo y delgado, como en el caso de una barra o una viga, la sección que debe considerarse se toma *perpendicular* al eje longitudinal del elemento. A esta sección se le llama ***sección transversal***.

*El peso del cuerpo no se muestra, porque se supone que es muy pequeño y, por lo tanto, insignificante en comparación con las otras cargas.

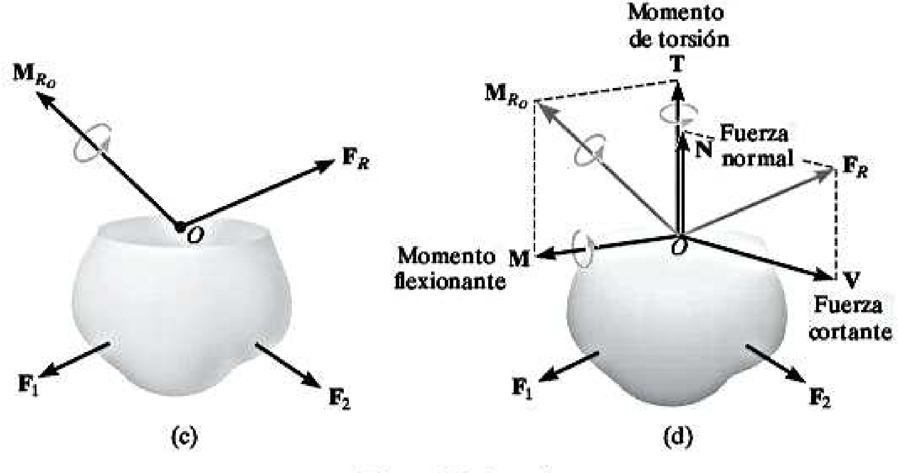


Figura 1-2 (cont.)

Tres dimensiones. Más adelante se mostrará la manera de relacionar las cargas resultantes, $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{M}_{R_O}$, con la *distribución de fuerza* en el área seccionada y se desarrollarán ecuaciones que puedan usarse para el análisis y diseño del cuerpo. Sin embargo, para hacer esto deben considerarse las componentes de $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{M}_{R_O}$ actuando de forma normal o perpendicular al área seccionada, figura 1-2*d*. Entonces, pueden definirse cuatro diferentes tipos de cargas resultantes de la manera siguiente:

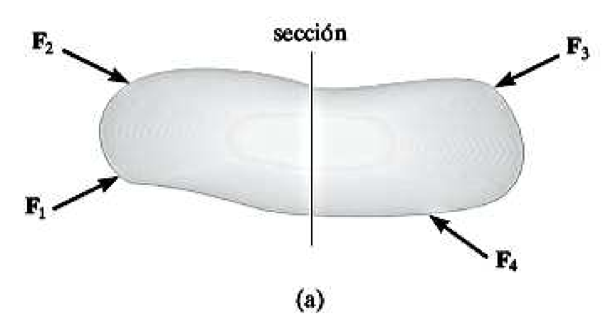
Fuerza normal, N. Esta fuerza actúa perpendicularmente al área. Se desarrolla siempre que las cargas externas tienden a empujar o jalar sobre los dos segmentos del cuerpo.

Esfuerzo cortante, V. El esfuerzo cortante se encuentra en el plano del área y se desarrolla cuando las cargas externas tienden a ocasionar que los dos segmentos del cuerpo se deslicen uno sobre el otro.

Momento de torsión o torque, T. Este efecto se desarrolla cuando las cargas externas tienden a torcer un segmento del cuerpo con respecto al otro alrededor de un eje perpendicular al área.

Momento flexionante, M. El momento flexionante es causado por las cargas externas que tienden a flexionar el cuerpo respecto a un eje que se encuentra dentro del plano del área.

Observe que en este texto la representación gráfica de un momento o torque se muestra en tres dimensiones como un vector con una rotacional (flecha curva) asociada. Mediante la *regla de la mano derecha*, el pulgar proporciona el sentido de la flecha del vector y la curva o los dedos indican la tendencia de rotación (torsión o flexión).



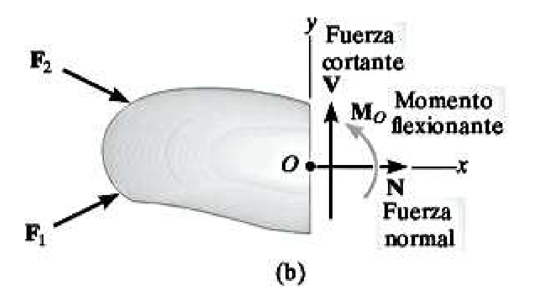


Figura 1-3

Cargas coplanares. Si el cuerpo está sometido a un *sistema de fuerzas coplanares*, figura 1-3*a*, entonces en la sección sólo existen componentes de fuerza normal, de fuerza cortante y de momento flexionante, figura 1-3*b*. Si se usan los ejes coordenados x, y, z, como se muestra en el segmento de la izquierda, entonces **N** puede obtenerse al aplicar $\Sigma F_x = 0$ y **V** se puede obtener de $\Sigma F_y = 0$. Por último, el momento flexionante $\mathbf{M}_O$ se puede determinar mediante la suma de momentos respecto al punto O (el eje z), $\Sigma M_O = 0$, a fin de eliminar los momentos causados por las incógnitas **N** y **V**.

Puntos importantes

- La *mecánica de materiales* es un estudio de la relación entre las cargas externas aplicadas a un cuerpo y el esfuerzo y la deformación causadas por las cargas internas dentro del cuerpo.
- Las fuerzas externas pueden aplicarse a un cuerpo como *cargas de superficie distribuidas* o *concentradas*, o bien como *fuerzas de cuerpo* que actúan a través del volumen del cuerpo.
- Las cargas linealmente distribuidas producen una *fuerza resultante* con una *magnitud* igual al *área* bajo el diagrama de carga, y con una *ubicación* que pasa a través del *centroide* de esta área.
- Un soporte produce una *fuerza* en una dirección particular sobre el elemento al que se encuentra unido si *impide la traslación* del elemento en esa dirección, y produce un *momento* sobre el elemento si *impide su rotación*.
- Para evitar la traslación de un cuerpo con movimiento acelerado, así como su rotación, deben cumplirse las ecuaciones de equilibrio $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$.
- Al aplicar estas ecuaciones, es importante dibujar primero el diagrama de cuerpo libre, a fin de tomar en cuenta todos los términos incluidos en las ecuaciones.
- El método de las secciones se utiliza para determinar las cargas internas resultantes que actúan sobre la superficie del cuerpo seccionado. En general, estas resultantes consisten en una fuerza normal, la fuerza cortante y los momentos de torsión y flexionante.

Procedimiento de análisis

Las cargas resultantes *internas* en un punto situado sobre la sección transversal de un cuerpo pueden obtenerse usando el método de las secciones. Para ello, es necesario realizar los siguientes pasos.

Reacciones en los soportes.

- Primero decida qué segmento del cuerpo debe ser considerado. Si el segmento tiene un soporte o una conexión a otro cuerpo, entonces *antes* de seccionar el cuerpo será necesario determinar las reacciones que actúan sobre el segmento escogido. Para hacerlo, dibuje el diagrama de cuerpo libre de *todo el cuerpo* y luego aplique las ecuaciones de equilibrio necesarias para obtener esas reacciones.

Diagrama de cuerpo libre.

- Mantenga todas las cargas externas distribuidas, los momentos, los pares de torsión y las fuerzas en sus *ubicaciones exactas*, antes de hacer una sección imaginaria a través del cuerpo en el punto donde deben determinarse las cargas internas resultantes.
- Dibuje un diagrama de cuerpo libre de uno de los segmentos "cortados" e indique las resultantes desconocidas **N**, **V**, **M** y **T** en la sección. Éstas suelen colocarse en el punto que representa el centro geométrico o *centroide* del área seccionada.
- Si el elemento está sometido a un sistema de fuerzas *coplanares*, sólo **N**, **V** y **M** actúan en el centroide.
- Establezca los ejes coordenados x, y, z con origen en el centroide y muestre las cargas internas resultantes que actúan a lo largo de los ejes.

Ecuaciones de equilibrio.

- Los momentos deben sumarse en la sección, con respecto a cada uno de los ejes coordenados donde actúan las resultantes. Al hacer esto se eliminan las fuerzas desconocidas **N** y **V**, y es posible obtener una solución directa para **M** (y **T**).
- Si al resolver la resultante mediante las ecuaciones de equilibrio se obtiene un valor negativo, la *dirección* de la resultante se asume *opuesta* a la mostrada en el diagrama de cuerpo libre.

Con los siguientes ejemplos se ilustra este procedimiento en forma numérica y se hace un repaso de algunos de los principios importantes de la estática.

EJEMPLO 1.1

Determine las cargas internas resultantes que actúan en C sobre la sección transversal de la viga en voladizo que se muestra en la figura 1-4a.

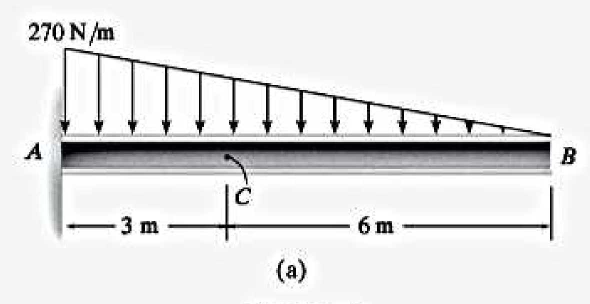
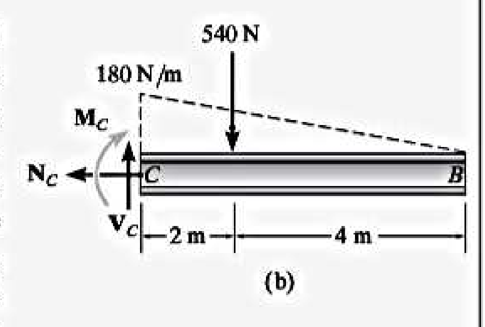


Figura 1-4

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Si se considera el segmento CB no es necesario determinar las reacciones en A.

Diagrama de cuerpo libre. En la figura 1-4b, se muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento CB. Es importante mantener la carga distribuida sobre el segmento hasta *después* de hacer la sección. Sólo entonces esta carga debe sustituirse por una sola fuerza resultante. Observe que la intensidad de la carga distribuida en C se encuentra mediante proporciones, es decir, a partir de la figura 1-4a, $w/6\text{ m} = (270\text{ N/m})/9\text{ m}$, $w = 180\text{ N/m}$. La magnitud de la resultante de la carga distribuida es igual al área bajo la curva de carga (triángulo) y actúa a través del centroide de esta área. Así, $F = \frac{1}{2}(180\text{ N/m})(6\text{ m}) = 540\text{ N}$, que actúa a $\frac{1}{3}(6\text{ m}) = 2\text{ m}$ de C como se muestra en la figura 1-4b.



Ecuaciones de equilibrio. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad -N_C = 0$$

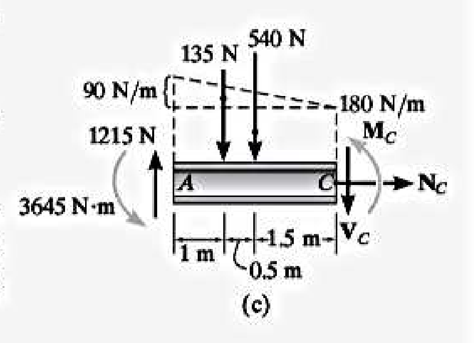
$$N_C = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V_C - 540\text{ N} = 0$$

$$V_C = 540\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -M_C - 540\text{ N}(2\text{ m}) = 0$$

$$M_C = -1080\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



NOTA: El signo negativo indica que $\mathbf{M}_C$ actúa en la dirección opuesta a la mostrada en el diagrama de cuerpo libre. Intente resolver este problema usando el segmento AC, al obtener primero las reacciones en el soporte A, que se dan en la figura 1-4c.

1

EJEMPLO 1.2

Determine las cargas internas resultantes que actúan en C sobre la sección transversal de la flecha de la máquina mostrada en la figura 1-5*a*. La flecha está soportada por chumaceras en A y B, las cuales ejercen sólo fuerzas verticales sobre la flecha.

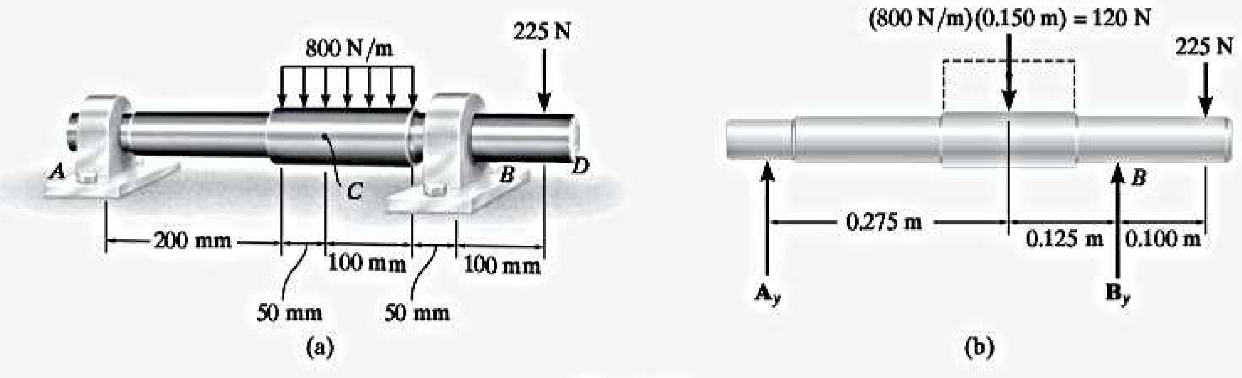


Figura 1-5

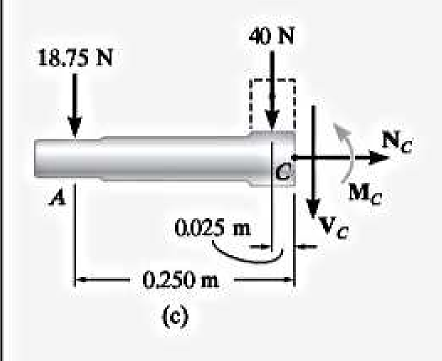
SOLUCIÓN

Este problema se resolverá usando el segmento AC de la flecha.

Reacciones en los soportes. En la figura 1-5*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de toda la flecha. Puesto que se considerará el segmento AC, sólo debe determinarse la reacción en A. ¿Por qué?

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad -A_y(0.400\text{ m}) + 120\text{ N}(0.125\text{ m}) - 225\text{ N}(0.100\text{ m}) = 0$$

$$A_y = -18.75\text{ N}$$



El signo negativo indica que $\mathbf{A}_y$ actúa en el *sentido opuesto* al mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

Diagrama de cuerpo libre. En la figura 1-5*c* se muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento AC.

Ecuaciones de equilibrio.

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad N_C = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -18.75\text{ N} - 40\text{ N} - V_C = 0$$

$$V_C = -58.8\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad M_C + 40\text{ N}(0.025\text{ m}) + 18.75\text{ N}(0.250\text{ m}) = 0$$

$$M_C = -5.69\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

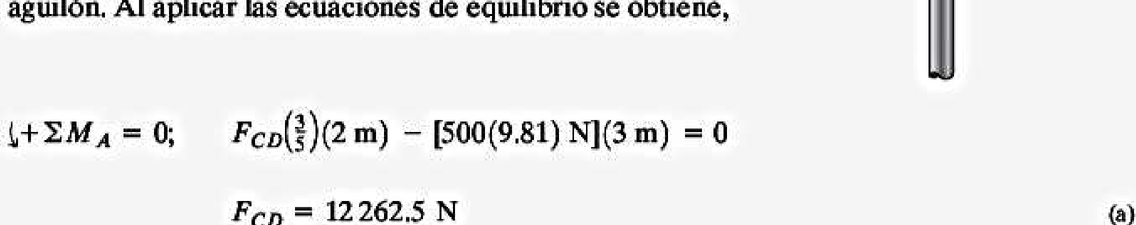
NOTA: Los signos negativos para V_C y M_C indican que actúan en las direcciones opuestas a las mostradas en el diagrama de cuerpo libre. A modo de ejercicio, calcule la reacción en B e intente obtener los mismos resultados usando el segmento CBD del eje.

EJEMPLO 1.3

Un motor de 500 kg está suspendido del aguilón de una grúa como se muestra en la figura 1-6*a*. Determine las cargas resultantes internas que actúan sobre la sección transversal del aguilón en el punto *E*.

SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Se considerará el segmento *AE* del aguilón, por lo que primero deben determinarse las reacciones del pasador en *A*. Observe que el elemento *CD* es un elemento de dos fuerzas. En la figura 1-6*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre del aguilón. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se obtiene,



(a)

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad F_{CD}\left(\tfrac{3}{5}\right)(2\text{ m}) - [500(9.81)\text{ N}](3\text{ m}) = 0$$

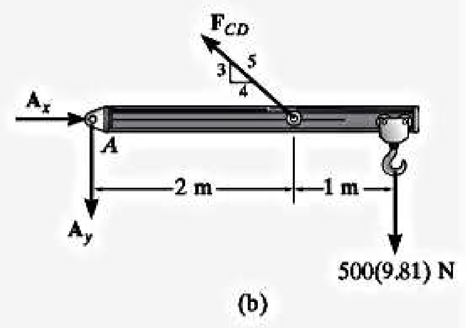
$$F_{CD} = 12\,262.5\text{ N}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad A_x - (12\,262.5\text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0$$

$$A_x = 9810\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -A_y + (12\,262.5\text{ N})\left(\tfrac{3}{5}\right) - 500(9.81)\text{ N} = 0$$

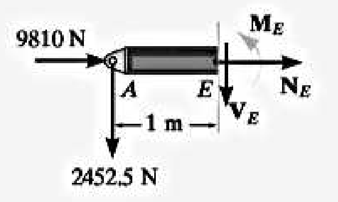
$$A_y = 2452.5\text{ N}$$



(b)

Diagrama de cuerpo libre. En la figura 1-6*c* se muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento *AE*.

Ecuaciones de equilibrio.



(c)

Figura 1-6

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad N_E + 9810\text{ N} = 0$$

$$N_E = -9810\text{ N} = -9.81\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V_E - 2452.5\text{ N} = 0$$

$$V_E = -2452.5\text{ N} = -2.45\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_E = 0; \quad M_E + (2452.5\text{ N})(1\text{ m}) = 0$$

$$M_E = -2452.5\text{ N}\cdot\text{m} = -2.45\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

1

EJEMPLO 1.4

Determine las cargas internas resultantes que actúan en G sobre la sección transversal de la viga mostrada en la figura 1-7*a*. Cada uno de los nodos está conectado mediante pasadores.

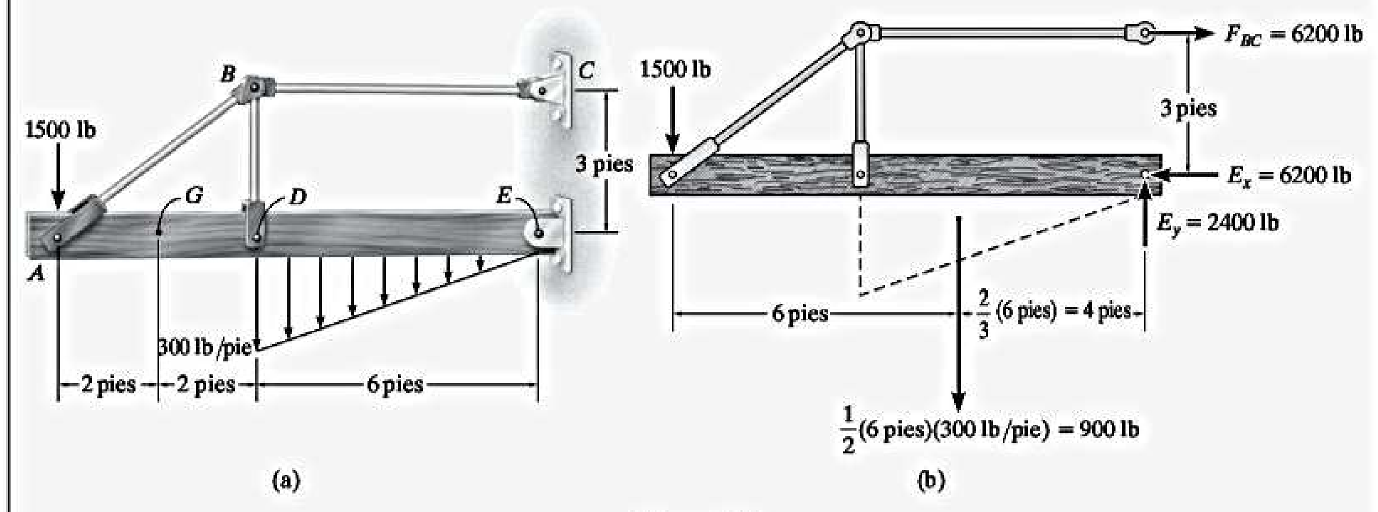
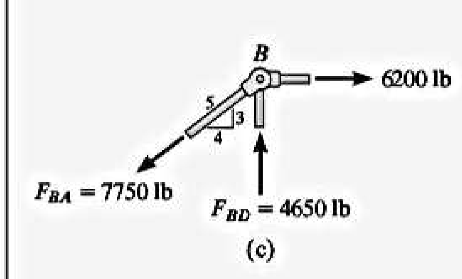
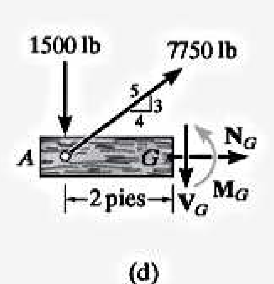


Figura 1-7





SOLUCIÓN

Reacciones en los soportes. Aquí se considerará el segmento AG. En la figura 1-7*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de *toda* la estructura. Verifique las reacciones calculadas en E y C. En particular, considere que BC es un *elemento de dos fuerzas* puesto que sólo dos fuerzas actúan sobre él. Por esta razón la fuerza en C debe actuar a lo largo de BC, que se encuentra en posición horizontal como se muestra en la figura.

Como BA y BD también son elementos de dos fuerzas, el diagrama de cuerpo libre del nodo B es como se muestra en la figura 1-7*c*. De nuevo, verifique las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_{BA}$ y $\mathbf{F}_{BD}$.

Diagrama de cuerpo libre. Si se utiliza el resultado obtenido para $\mathbf{F}_{BA}$, el diagrama de cuerpo libre del segmento AG es como se muestra en la figura 1-7*d*.

Ecuaciones de equilibrio.

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 7750 \text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right) + N_G = 0 \qquad N_G = -6200 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -1500 \text{ lb} + 7750 \text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right) - V_G = 0$$

$$V_G = 3150 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad M_G - (7750 \text{ lb})\left(\tfrac{3}{5}\right)(2 \text{ pies}) + 1500 \text{ lb}(2 \text{ pies}) = 0$$

$$M_G = 6300 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 1.5

Determine las cargas internas resultantes que actúan en B sobre la sección transversal del tubo mostrado en la figura 1-8*a*. El tubo tiene una masa de 2 kg/m y está sometido, tanto a una fuerza vertical de 50 N, como a un momento de 70 N · m en su extremo A. El tubo está empotrado en la pared en C.

SOLUCIÓN

El problema se puede resolver considerando el segmento AB, por lo que no es necesario calcular las reacciones del soporte en C.

Diagrama de cuerpo libre. Los ejes x, y, z se fijan en B y el diagrama de cuerpo libre del segmento AB es como se muestra en la figura 1-8*b*. Se supone que las componentes de la fuerza y momento resultantes actúan en las direcciones coordenadas positivas y que pasan a través del *centroide* del área transversal en B. El peso de cada segmento de tubo se calcula de la siguiente manera:

$$W_{BD} = (2\,\text{kg/m})(0.5\,\text{m})(9.81\,\text{N/kg}) = 9.81\,\text{N}$$

$$W_{AD} = (2\,\text{kg/m})(1.25\,\text{m})(9.81\,\text{N/kg}) = 24.525\,\text{N}$$

Estas fuerzas actúan a través del centro de gravedad de cada segmento.

Ecuaciones de equilibrio. Al aplicar las seis ecuaciones escalares de equilibrio se obtiene*

$\Sigma F_x = 0;\quad (F_B)_x = 0$ *Resp.*

$\Sigma F_y = 0;\quad (F_B)_y = 0$ *Resp.*

$\Sigma F_z = 0;\quad (F_B)_z - 9.81\,\text{N} - 24.525\,\text{N} - 50\,\text{N} = 0$

$(F_B)_z = 84.3\,\text{N}$ *Resp.*

$\Sigma (M_B)_x = 0;\quad (M_B)_x + 70\,\text{N}\cdot\text{m} - 50\,\text{N}\,(0.5\,\text{m}) - 24.525\,\text{N}\,(0.5\,\text{m}) - 9.81\,\text{N}\,(0.25\,\text{m}) = 0$

$(M_B)_x = -30.3\,\text{N}\cdot\text{m}$ *Resp.*

$\Sigma (M_B)_y = 0;\quad (M_B)_y + 24.525\,\text{N}\,(0.625\,\text{m}) + 50\,\text{N}\,(1.25\,\text{m}) = 0$

$(M_B)_y = -77.8\,\text{N}\cdot\text{m}$ *Resp.*

$\Sigma (M_B)_z = 0;\quad (M_B)_z = 0$ *Resp.*

NOTA: ¿Qué indican los signos negativos de $(M_B)_x$ y $(M_B)_y$? Observe que la fuerza normal $N_B = (F_B)_y = 0$, mientras que la fuerza cortante es $V_B = \sqrt{(0)^2 + (84.3)^2} = 84.3$ N. Además, el momento de torsión es $T_B = (M_B)_y = 77.8$ N · m y el momento flexionante es $M_B = \sqrt{(30.3)^2 + (0)^2} = 30.3\,\text{N}\cdot\text{m}$.

* La *magnitud* de cada momento con respecto a un eje es igual a la magnitud de cada fuerza multiplicada por la distancia perpendicular desde el eje hasta la línea de acción de la fuerza. La *dirección* de cada momento se determina mediante la regla de la mano derecha, con momentos positivos (pulgar) dirigidos a lo largo de los ejes coordenados positivos.

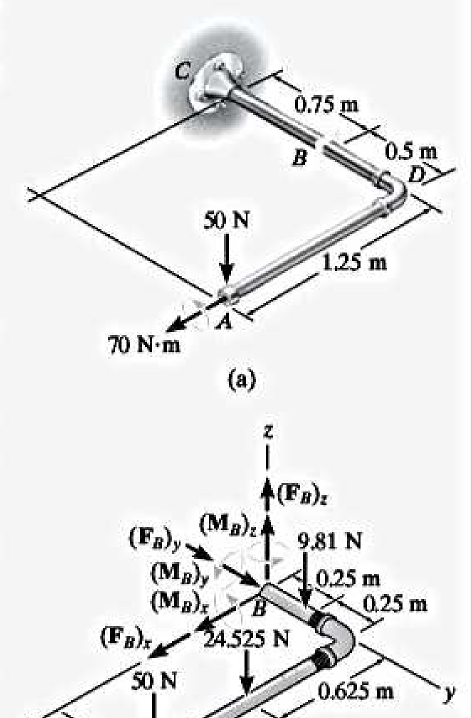
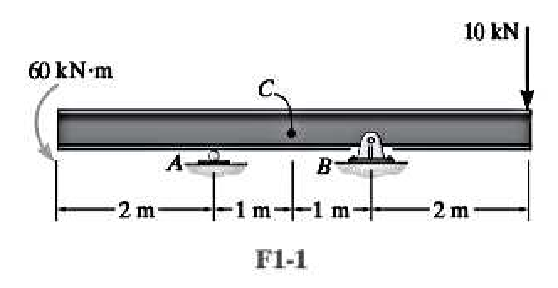


Figura 1-8

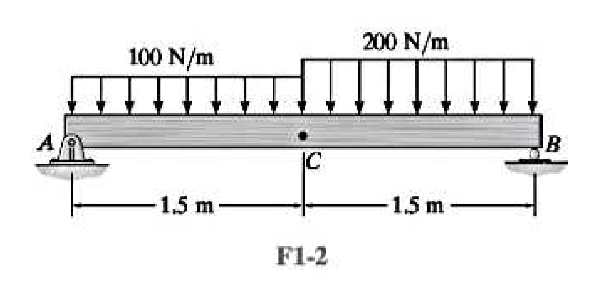
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F1-1. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto C de la viga.



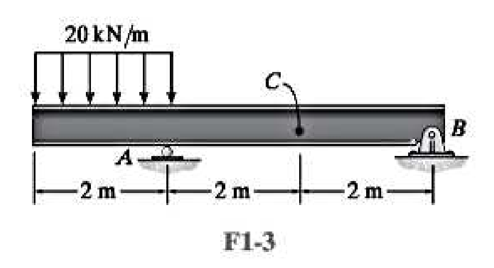
F1-1

F1-2. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto C de la viga.



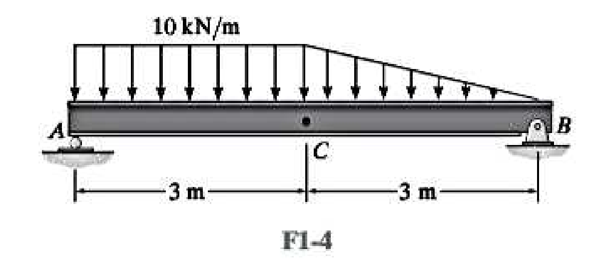
F1-2

F1-3. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto C de la viga.

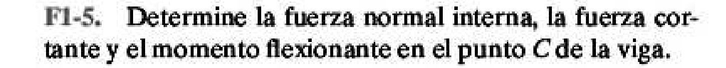


F1-3

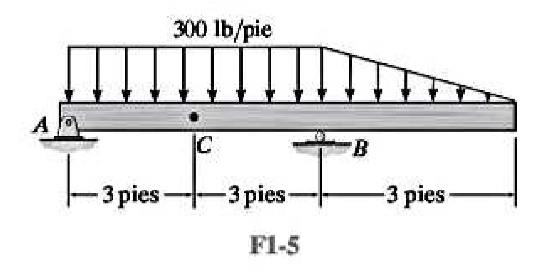
F1-4. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto C de la viga.



F1-4

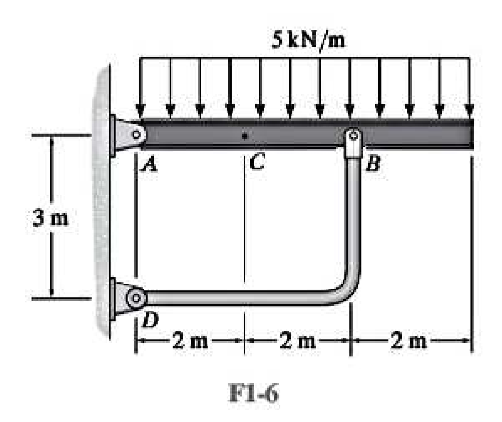


F1-5. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto C de la viga.



F1-5

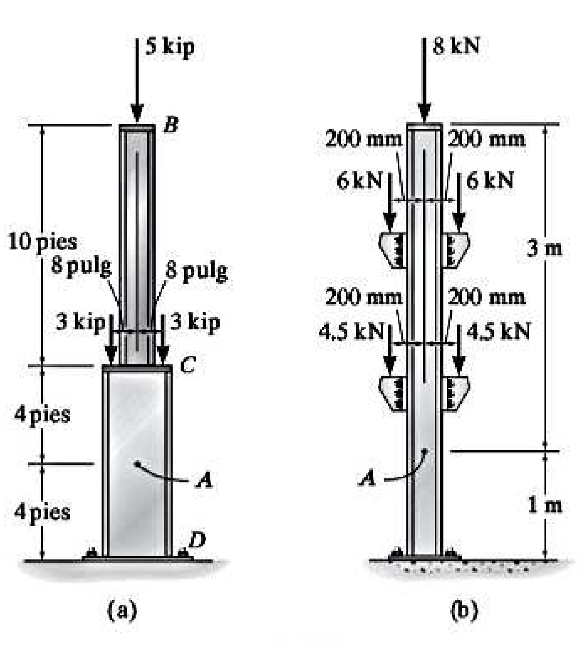
F1-6. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto C de la viga.



F1-6

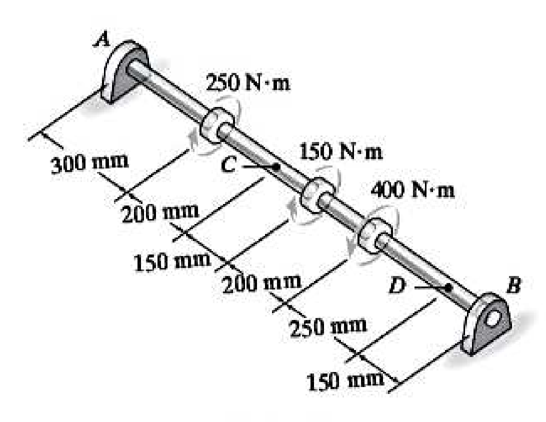
PROBLEMAS

1-1. Para cada columna, determine la fuerza normal interna resultante que actúa sobre la sección transversal a través del punto *A*. En (a), el segmento *BC* pesa 180 lb/pie y el segmento *CD* pesa 250 lb/pie. En (b), la columna tiene una masa de 200 kg/m.



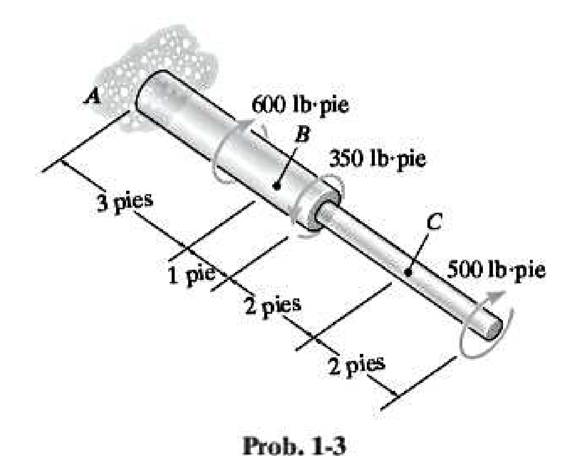
Prob. 1-1

1-2. Determine el par de torsión interno resultante que actúa sobre las secciones transversales a través de los puntos *C* y *D*. Los cojinetes de soporte en *A* y *B* permiten que el eje gire libremente.



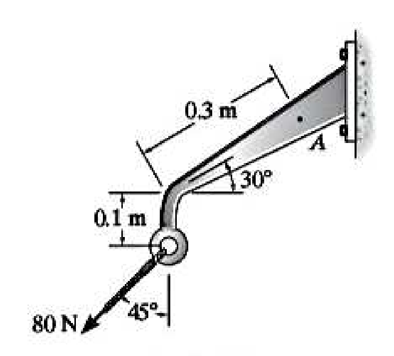
Prob. 1-2

1-3. Determine el par de torsión interno resultante que actúa sobre las secciones transversales a través de los puntos *B* y *C*.



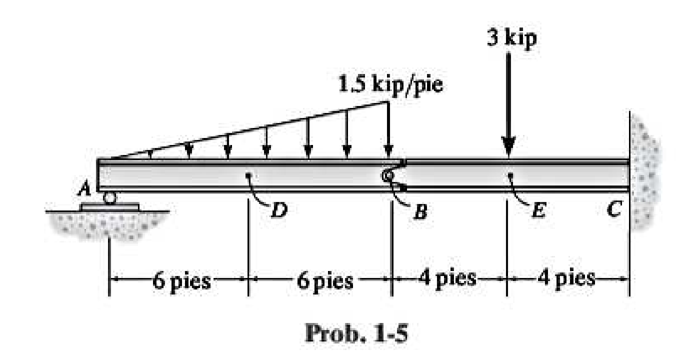
Prob. 1-3

***1-4.** Una ménsula soporta una fuerza de 80 N como se muestra en la figura. Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección a través del punto *A*.



Prob. 1-4

•1-5. Determine las cargas internas resultantes de la viga mostrada en las secciones transversales a través de los puntos *D* y *E*. El punto *E* se encuentra justo a la derecha de la carga de 3 kip.

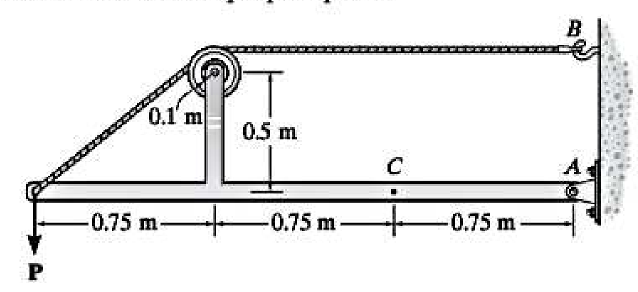


Prob. 1-5

1

1-6. Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento en una sección que pasa por el punto C. Considere que $P = 8$ kN.

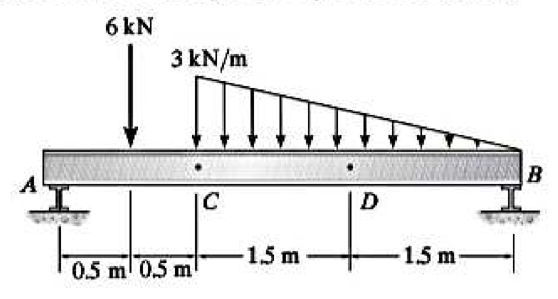
1-7. El cable mostrado fallará cuando se someta a una tensión de 2 kN. Determine la mayor carga vertical P que puede soportar el bastidor y, para esa carga, calcule la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento en la sección transversal que pasa por C.



Probs. 1-6/7

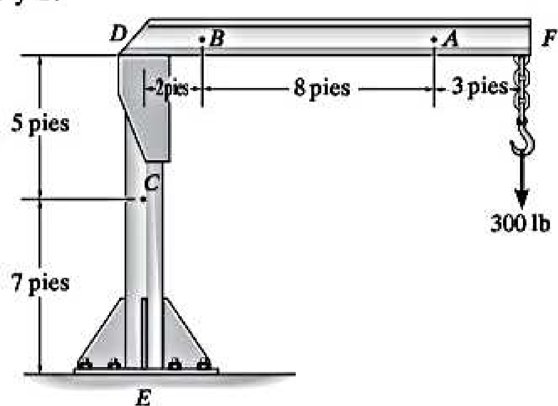
***1-8.** Determine las cargas internas resultantes sobre la sección transversal que pasa por el punto C. Suponga que las reacciones en los soportes A y B son verticales.

•1-9. Determine las cargas internas resultantes sobre la sección transversal que pasa por el punto D. Suponga que las reacciones en los soportes A y B son verticales.



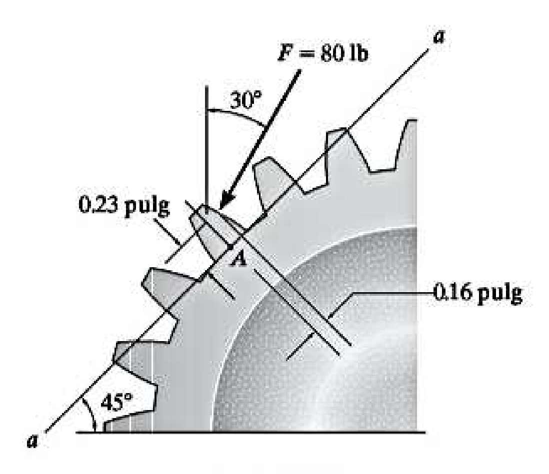
Probs. 1-8/9

1-10. El aguilón DF de la grúa y la columna DE tienen un peso uniforme de 50 lb/pie. Si el gancho y la carga pesan 300 lb, determine las cargas internas resultantes en la grúa sobre las secciones transversales que pasan por los puntos A, B y C.



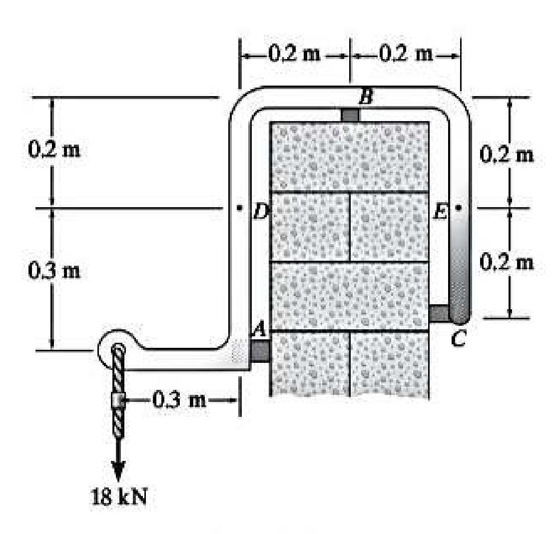
Prob. 1-10

1-11. La fuerza $F = 80$ lb actúa sobre el diente del engrane. Determine las cargas internas resultantes sobre la raíz del diente, es decir, en el centroide A de la sección a-a.



Prob. 1-11

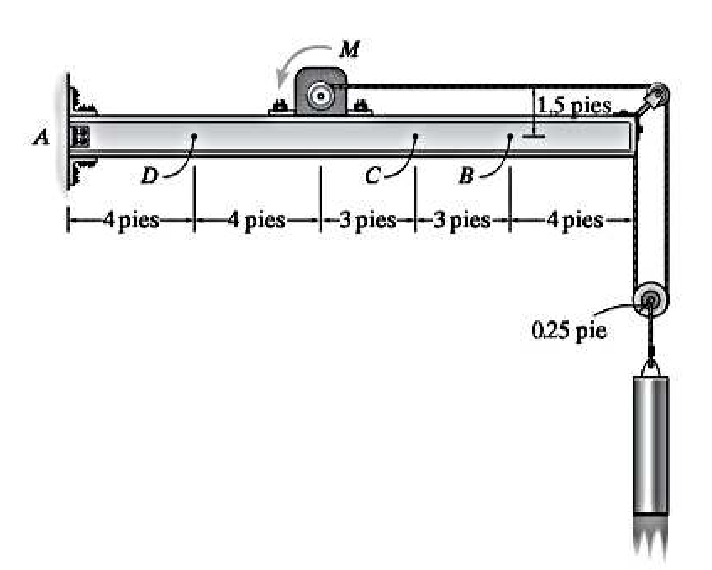
***1-12.** El gancho se utiliza para sostener el cable de un andamio sobre el costado de un edificio. Si éste consiste en una varilla lisa que hace contacto con el parapeto de una pared en los puntos A, B y C, determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento sobre la sección transversal en los puntos D y E.



Prob. 1-12

•**1-13.** La carga de 800 lb se está izando a una velocidad constante mediante el motor *M*, el cual tiene un peso de 90 lb. Determine las cargas internas resultantes que actúan en la viga sobre la sección transversal a través del punto *B*. La viga tiene un peso de 40 lb/pie y está fija a la pared en *A*.

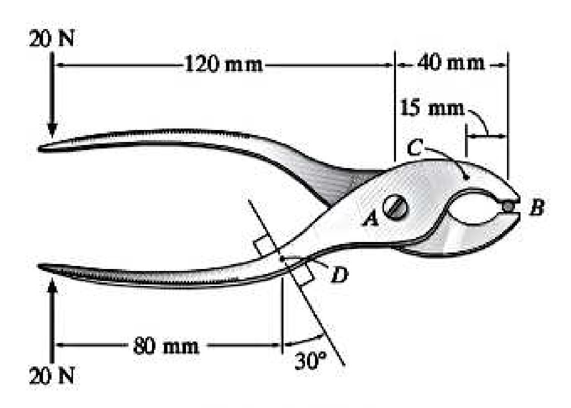
1-14. Determine las cargas internas resultantes que actúan en la viga del Prob. 1-13, sobre la sección transversal a través de los puntos *C* y *D*.



Probs. 1-13/14

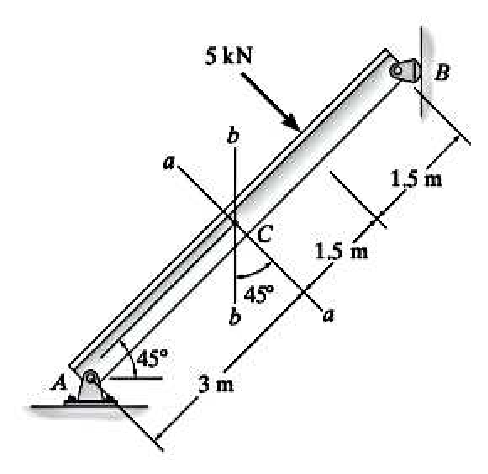
1-15. Determine la carga interna resultante sobre la sección transversal que pasa por el punto *C* de las pinzas. Existe un pasador en *A*, y las quijadas en *B* son lisas.

***1-16.** Determine la carga interna resultante sobre la sección transversal que pasa por el punto *D* de las pinzas.



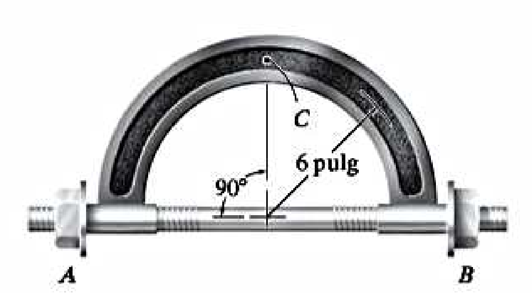
Probs. 1-15/16

•**1-17.** Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección *a*-*a* y la sección *b*-*b*. Cada una de las secciones pasa a través de la línea central en el punto *C*.



Prob. 1-17

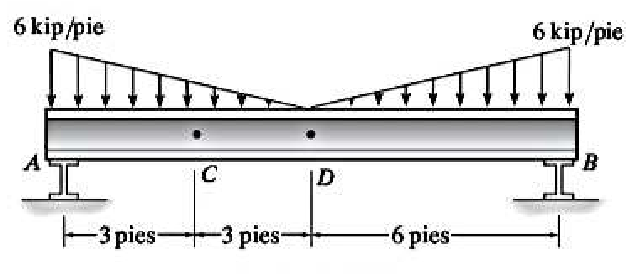
1-18. El vástago del perno está sometido a una tensión de 80 lb. Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal en el punto *C*.



Prob. 1-18

1-19. Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal a través del punto *C*. Suponga que las reacciones en los soportes *A* y *B* son verticales.

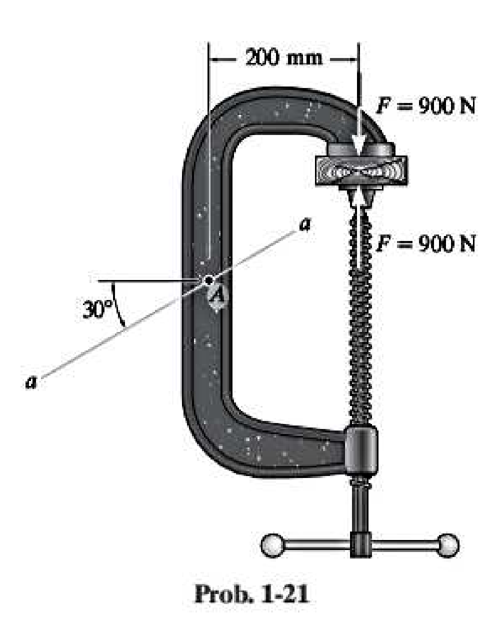
***1-20.** Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal a través del punto *D*. Suponga que las reacciones en los soportes *A* y *B* son verticales.



Probs. 1-19/20

1

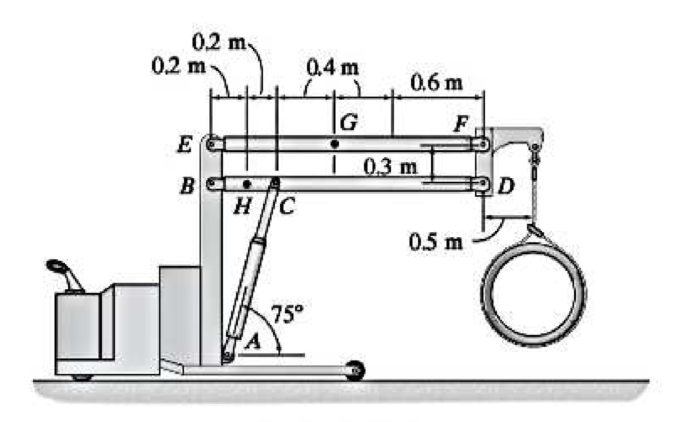
•**1-21.** La mordaza de acero forjado ejerce una fuerza de $F = 900$ N sobre el bloque de madera. Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección *a-a* que pasa por el punto *A*.



Prob. 1-21

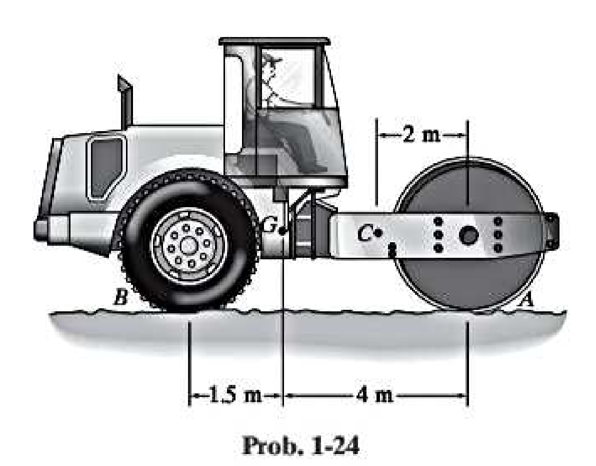
1-22. La grúa de piso se utiliza para levantar un tubo de concreto de 600 kg. Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal en *G*.

1-23. La grúa de piso se utiliza para levantar un tubo de concreto de 600 kg. Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal en *H*.



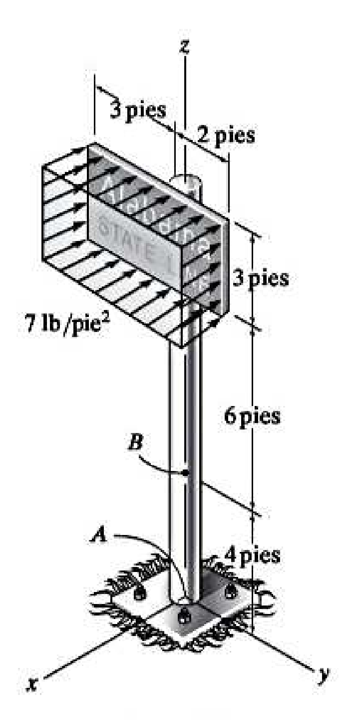
Probs. 1-22/23

***1-24.** La máquina se mueve con una velocidad constante. Tiene una masa total de 20 Mg, y su centro de masa se ubica en *G*, sin incluir el rodillo delantero. Si el rodillo delantero tiene una masa de 5 Mg, determine las cargas internas resultantes que actúan sobre el punto *C* de cada uno de los dos elementos laterales que sostienen al rodillo. No tome en cuenta la masa de los elementos laterales. El rodillo delantero rueda libremente.



Prob. 1-24

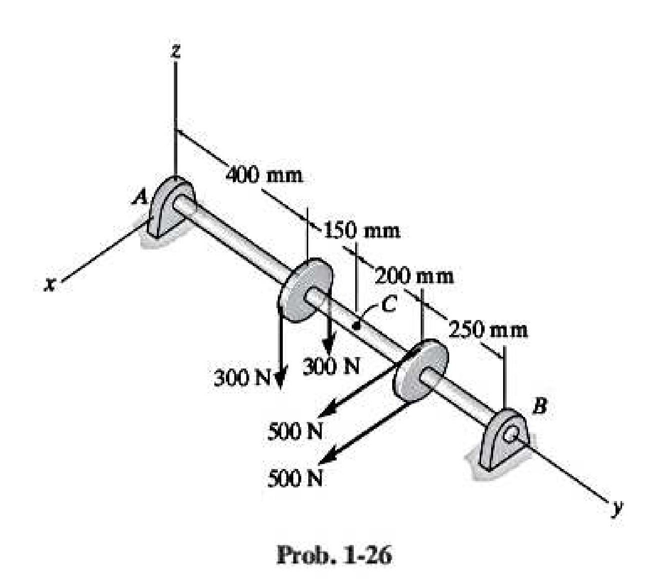
•**1-25.** Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal a través del punto *B* del poste de señalización. El poste está fijo al suelo y sobre la señalización actúa una presión uniforme de 7 lb/pie^2, perpendicular a la señal.



Prob. 1-25

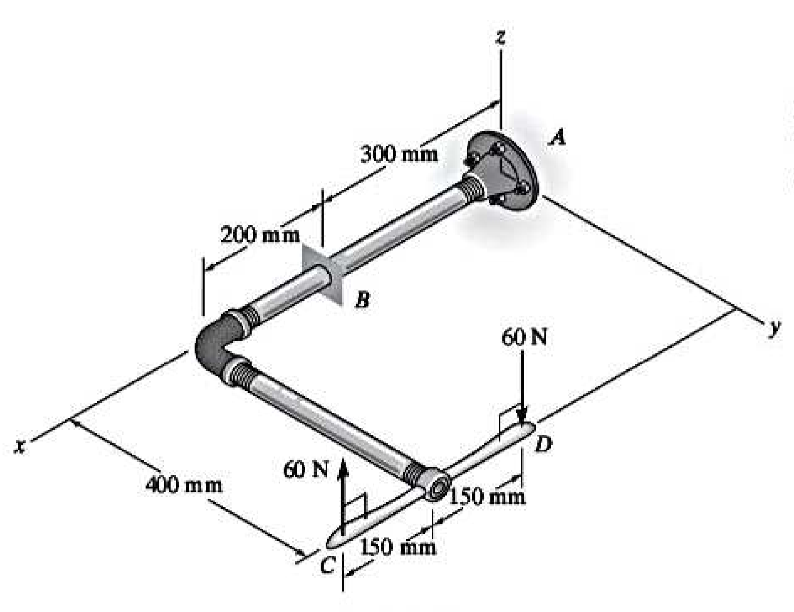
1

1-26. La flecha está soportada en sus extremos por dos cojinetes A y B y está sometida a las fuerzas aplicadas a las poleas fijas al eje. Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal ubicada en el punto C. Las fuerzas de 300 N actúan en la dirección $-z$ y las fuerzas de 500 N actúan en la dirección $+x$. Los cojinetes en A y B sólo ejercen componentes de fuerza x y z sobre el eje.



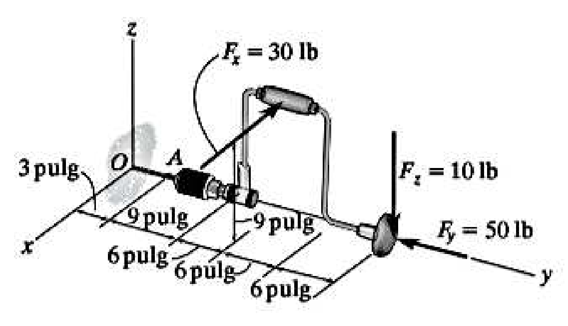
Prob. 1-26

1-27. El tubo tiene una masa de 12 kg/m. Si está fijo a la pared en A, determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal en B. No tome en cuenta el peso de la llave CD.



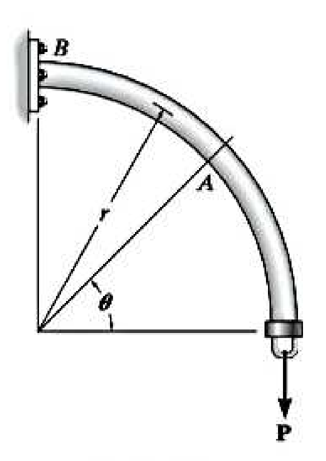
Prob. 1-27

***1-28.** El berbiquí y la broca se utilizan para taladrar un orificio en O. Si la broca se atasca cuando el berbiquí está sometido a las fuerzas mostradas, determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal de la broca en A.



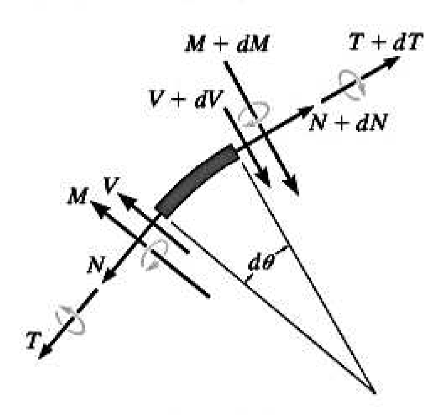
Prob. 1-28

•1-29. La barra curva tiene un radio r y está fija a la pared en B. Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre la sección transversal a través de A, la cual se ubica a un ángulo θ respecto de la horizontal.



Prob. 1-29

1-30. En la figura se muestra un elemento diferencial tomado de una barra curva. Demuestre que $dN/d\theta = V$, $dV/d\theta = -N$, $dM/d\theta = -T$ y $dT/d\theta = M$.



Prob. 1-30

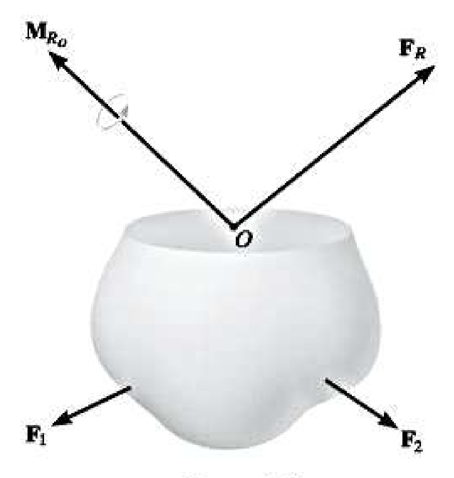


Figura 1-9

1.3 Esfuerzo

En la sección 1.2 se mostró que la fuerza y el momento que actúan en un punto específico O sobre el área seccionada de un cuerpo, figura 1-9, representan los efectos resultantes de la *distribución de fuerza* verdadera que actúa sobre el área seccionada, figura 1-10*a*. La obtención de esta *distribución* tiene una importancia primordial en la mecánica de materiales. Para resolver este problema es necesario establecer el concepto de esfuerzo.

Se considerará en primer lugar que el área seccionada está subdividida en áreas pequeñas, tal como el área ΔA mostrada en la figura 1-10*a*. Al reducir ΔA a un tamaño cada vez más pequeño, deben adoptarse dos suposiciones respecto a las propiedades del material. Se considerará que el material es ***continuo***, es decir, que consiste en una distribución uniforme o *continua* de materia que no contiene huecos. Además, el material debe ser ***cohesivo***, lo que significa que todas sus partes están conectadas entre sí, sin fracturas, grietas o separaciones. En la figura 1-10*a* se muestra una fuerza típica finita pero muy pequeña $\Delta \mathbf{F}$, la cual actúa sobre su área asociada ΔA. Esta fuerza, como todas las demás, tendrá una dirección única, pero para el análisis que se presenta a continuación se remplazará por sus *tres componentes*, $\Delta \mathbf{F}_x$, $\Delta \mathbf{F}_y$ y $\Delta \mathbf{F}_z$, que se toman tangente, tangente y normal al área, respectivamente. Cuando ΔA se aproxima a cero, tanto $\Delta \mathbf{F}$ y sus componentes hacen lo mismo; sin embargo, el cociente de la fuerza y el área tenderán en general a un límite finito. Este cociente se llama *esfuerzo* y describe la *intensidad de la fuerza interna* sobre un *plano específico* (área) que pasa a través de un punto.

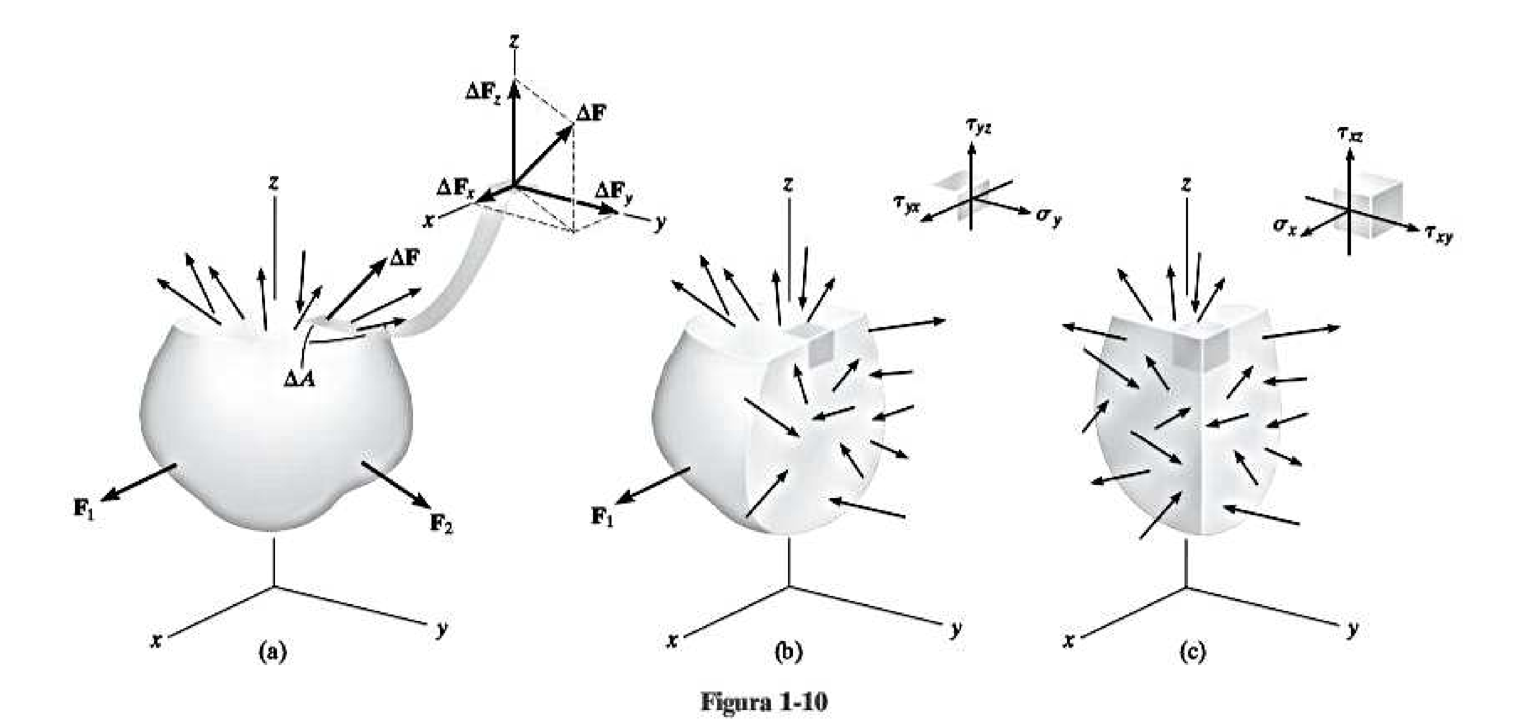


Figura 1-10

Esfuerzo normal. La *intensidad* de la fuerza que actúa en forma normal a ΔA se define como el ***esfuerzo normal***, σ (sigma). Como $\Delta \mathbf{F}_z$ es normal al área, entonces

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \tag{1-4}$$

Si la fuerza o el esfuerzo normal "jala" al elemento ΔA, como se muestra en la figura 1-10*a*, se le denomina *esfuerzo de tensión*, mientras que si "empuja" a ΔA se le llama *esfuerzo de compresión.*

Esfuerzo cortante. La intensidad de la fuerza que actúa tangente a ΔA se llama ***esfuerzo cortante***, τ (tau). A continuación se presentan las componentes del esfuerzo cortante.

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \\ \tau_{zy} &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \end{aligned} \tag{1-5}$$

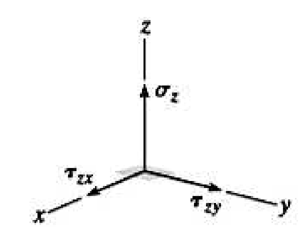


Figura 1-11

Observe que en esta notación el subíndice z indica la orientación del área ΔA, figura 1-11, y que x y y se usan para especificar los ejes a lo largo de los cuales actúa cada esfuerzo cortante.

Estado general de esfuerzo. Si el cuerpo está seccionado adicionalmente por planos paralelos al plano *x-z*, figura 1-10*b*, y al plano *y-z*, figura 1-10*c*, entonces es posible "separar" un elemento cúbico de volumen de material en el que se representa el ***estado de esfuerzo*** que actúa alrededor del punto elegido en el cuerpo. De tal manera, este estado de esfuerzo se caracteriza mediante tres componentes que actúan sobre cada cara del elemento, figura 1-12.

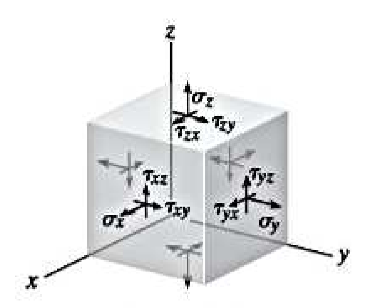


Figura 1-12

Unidades. Como el esfuerzo representa una fuerza por unidad de área, en el Sistema Internacional de Unidades o SI, las magnitudes de los esfuerzos normal y cortante se especifican en las unidades básicas de newtons por metro cuadrado (N/m^2). Esta unidad, denominada pascal ($1\ Pa = 1\ N/m^2$) es algo pequeña y en trabajos de ingeniería se usan prefijos como kilo- (10^3), simbolizado por k, mega- (10^6), simbolizado por M o giga- (10^9), simbolizado por G, para representar valores más realistas de esfuerzo.* Del mismo modo, en el sistema inglés de unidades, los ingenieros suelen expresar el esfuerzo en libras por pulgada cuadrada (psi) o kilolibras por pulgada cuadrada (ksi), donde 1 kilolibra (kip) = 1000 lb.

*En ocasiones, el esfuerzo se expresa en unidades de N/mm^2, donde $1\ mm = 10^{-3}\ m$. Sin embargo, en el sistema SI no se permiten prefijos en el denominador de una fracción, por lo tanto es mejor usar el equivalente $1\ N/mm^2 = 1\ MN/m^2 = 1\ MPa$.

P

P

Región de deformación uniforme de la barra

P P

(a) (b)

1.4 Esfuerzo normal promedio en una barra cargada axialmente

En esta sección se determinará la distribución del esfuerzo promedio que actúa sobre el área de la sección transversal de una barra cargada axialmente, como la que se muestra en la figura 1-13*a*. Esta barra es **prismática** porque todas las secciones transversales son iguales en toda su longitud. Cuando la carga P se aplica a la barra a través del centroide del área de su sección transversal, la barra se deformará de manera uniforme en toda la región central de su longitud, como se muestra en la figura 1-13*b*, siempre y cuando el material de la barra sea homogéneo e isotrópico.

Un ***material homogéneo*** tiene las mismas propiedades físicas y mecánicas en todo su volumen, y un ***material isotrópico*** tiene estas mismas propiedades en todas las direcciones. Muchos materiales de ingeniería pueden aproximarse a ser homogéneos e isotrópicos como se supone aquí. Por ejemplo, el acero contiene miles de cristales orientados aleatoriamente en cada milímetro cúbico de su volumen, y como la mayoría de los problemas que involucran este material tienen un tamaño físico que es mucho mayor a un solo cristal, la hipótesis anterior sobre la composición del material es bastante realista.

Tenga en cuenta que los materiales anisótropicos como la madera tienen propiedades distintas en diferentes direcciones, y aunque este sea el caso, si la anisotropía de la madera está orientada a lo largo del eje de la barra, está también se deformará de manera uniforme cuando se someta a la carga axial P.

Distribución del esfuerzo normal promedio. Si se pasa una sección través de la barra y se separa en dos partes, entonces el equilibrio requiere que la fuerza normal resultante en la sección sea P, figura 1-13*c*. Dada la deformación *uniforme* del material, es necesario que la sección transversal esté sometida a una *distribución del esfuerzo normal constante*, figura 1-13*d*.

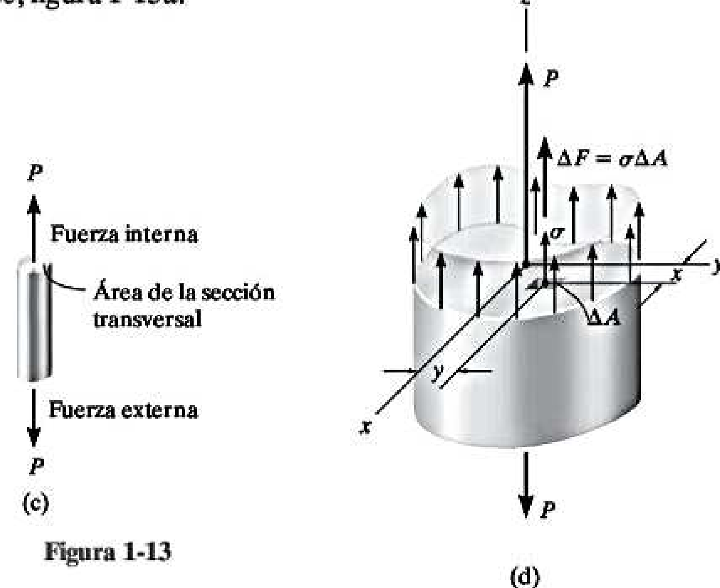


Figura 1-13

En consecuencia, cada pequeña área ΔA en la sección transversal está sometida a una fuerza $\Delta F = \sigma\ \Delta A$, y la *suma* de estas fuerzas que actúan sobre toda el área de la sección transversal debe ser equivalente a la fuerza interna resultante **P** en la sección. Si se hace que $\Delta A \rightarrow dA$ y por consiguiente $\Delta F \rightarrow dF$, entonces como σ es *constante*, se tiene

$$+\uparrow F_{Rz} = \Sigma F_z; \qquad \int dF = \int_A \sigma\, dA$$

$$P = \sigma A$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}} \tag{1-6}$$

Aquí

σ = esfuerzo normal promedio en cualquier punto del área de la sección transversal.

P = *fuerza normal interna resultante*, que actúa a través del *centroide* del área de la sección transversal. P se determina usando el método de las secciones y las ecuaciones de equilibrio.

A = área de la sección transversal de la barra, donde se determina σ.

Como la carga interna P pasa por el centroide de la sección transversal, la distribución uniforme del esfuerzo producirá momentos nulos respecto a los ejes x y y que pasan a través de este punto, figura 1-13*d*. Para demostrar esto, se requiere que el momento de P respecto a cada eje sea igual al momento de la distribución del esfuerzo respecto a los ejes, es decir,

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad 0 = \int_A y\, dF = \int_A y\sigma\, dA = \sigma \int_A y\, dA$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad 0 = -\int_A x\, dF = -\int_A x\sigma\, dA = -\sigma \int_A x\, dA$$

Estas ecuaciones se satisfacen, ya que por definición del centroide $\int y\, dA = 0$ y $\int x\, dA = 0$ (vea el apéndice A).

Equilibrio. Debería ser evidente que sólo existe esfuerzo normal en cualquier pequeño elemento de volumen de material ubicado en cada punto sobre la sección transversal de una barra cargada axialmente. Si se considera el equilibrio vertical del elemento, figura 1-14, entonces al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas,

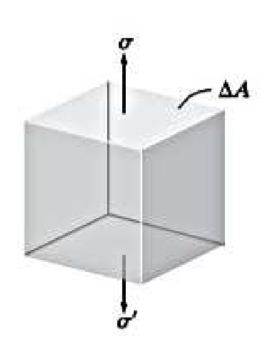


Figura 1-14

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \sigma(\Delta A) - \sigma'(\Delta A) = 0$$

$$\sigma = \sigma'$$

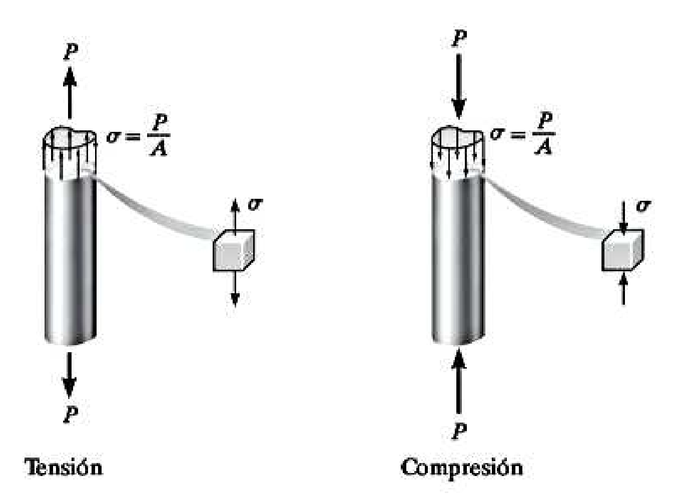


Figura 1-15

En otras palabras, las dos componentes del esfuerzo normal sobre el elemento deben ser iguales en magnitud pero opuestas en dirección. A esto se le llama *esfuerzo uniaxial.*

El análisis anterior se aplica a elementos sometidos a tensión o a compresión, como se muestra en la figura 1-15. Como una interpretación gráfica, la ***magnitud*** de la fuerza interna resultante **P** es ***equivalente*** al ***volumen*** bajo el diagrama de esfuerzo; es decir, $P = \sigma A$ (volumen = altura × base). Además, como consecuencia del equilibrio de momentos, ***esta resultante pasa por el centroide de este volumen.***

Aunque este análisis se ha desarrollado para barras *prismáticas*, esta suposición puede ser un poco flexible a fin de incluir las barras que tengan un *pequeño ahusamiento*. Por ejemplo, puede demostrarse, mediante un análisis más exacto de la teoría de la elasticidad, que para una barra con sección transversal rectangular ahusada, en la cual el ángulo entre dos lados adyacentes es de 15°, el esfuerzo normal promedio, calculado según $\sigma = P/A$, es sólo 2.2% *menor* que el valor calculado con la teoría de la elasticidad.



Esta barra de acero se usa como soporte para suspender una porción de una escalera, por ello está sometida a un esfuerzo de tensión.

Esfuerzo normal promedio máximo. En el análisis previo, tanto la fuerza interna P como el área A de la sección transversal se consideraron *constantes* a lo largo del eje longitudinal de la barra y, por consiguiente, se obtuvo un esfuerzo normal $\sigma = P/A$ también *constante* en toda la longitud de la barra. Sin embargo, en ocasiones la barra puede estar sometida a *varias* cargas externas a lo largo de su eje, o puede ocurrir un cambio en el área de su sección transversal. En consecuencia, el esfuerzo normal dentro de la barra podría ser diferente de una sección a otra y, si debe calcularse el esfuerzo normal promedio *máximo*, entonces se vuelve importante determinar la ubicación donde la razón P/A sea *máxima*. Para esto es necesario determinar la fuerza interna P en diferentes secciones a lo largo de la barra. Aquí puede resultar útil mostrar esta variación dibujando un ***diagrama de fuerza normal o axial***. En específico, este diagrama es una gráfica de la fuerza normal P en función de su posición x a lo largo de la longitud de la barra. A manera de convención de signos, P será positiva si causa tensión en el elemento y será negativa si produce compresión. Una vez que se conozca la carga interna en toda la barra, podrá identificarse la razón máxima de P/A.

Puntos importantes

- Cuando se secciona un cuerpo sometido a cargas externas, existe una distribución de fuerza que actúa sobre el área seccionada, la cual mantiene en equilibrio a cada segmento del cuerpo. La intensidad de esta fuerza interna en un punto del cuerpo se conoce como *esfuerzo*.
- El esfuerzo es el valor límite de la fuerza por unidad de área, cuando el área se aproxima a cero. Para esta definición, se considera que el material es continuo y cohesivo.
- La magnitud de las componentes de esfuerzo en un punto depende del tipo de carga que actúa sobre el cuerpo, y de la orientación del elemento en el punto.
- Cuando una barra prismática está hecha de un material homogéneo e isotrópico, y se encuentra sometida a una fuerza axial que actúa a través del centroide del área de su sección transversal, entonces la región central de la barra se deformará de manera uniforme. En consecuencia, el material estará sometido *sólo a esfuerzo normal*. Este esfuerzo es uniforme o *un promedio* sobre toda el área de la sección transversal.

Procedimiento de análisis

La ecuación $\sigma = P/A$ proporciona el esfuerzo normal *promedio* en el área de la sección transversal de un elemento cuando la sección está sometida a una fuerza normal interna resultante **P**. Para aplicar esta ecuación a elementos cargados axialmente, deben realizarse los siguientes pasos.

Cargas internas.

- Seccione el elemento en forma *perpendicular* a su eje longitudinal en el punto donde debe determinarse el esfuerzo normal y utilice el diagrama de cuerpo libre necesario y la ecuación de equilibrio de fuerzas para obtener la *fuerza axial interna* **P** en la sección.

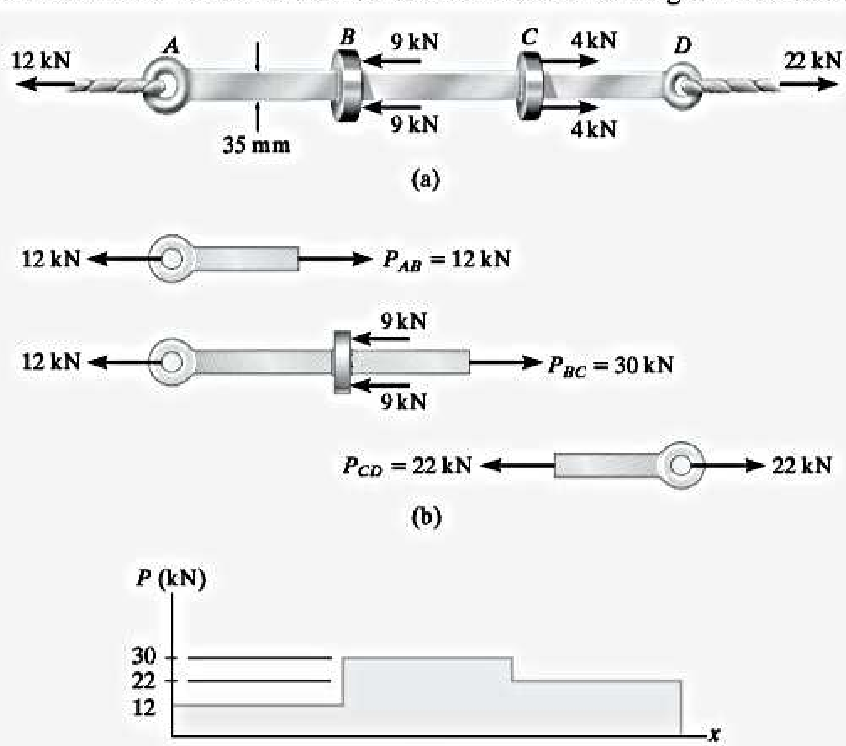
Esfuerzo normal promedio.

- Determine el área de la sección transversal del elemento y calcule el esfuerzo normal promedio $\sigma = P/A$.
- Se sugiere mostrar a σ actuando sobre un pequeño elemento de volumen del material, que se encuentre en el punto de la sección donde se va a calcular el esfuerzo. Para ello, primero dibuje σ en la cara del elemento coincidente con el área seccionada A. Aquí σ actúa en la *misma dirección* que la fuerza interna **P** ya que todos los esfuerzos normales en la sección transversal desarrollan esta resultante. El esfuerzo normal σ sobre la otra cara del elemento actúa en la dirección opuesta.

1

EJEMPLO 1.6

La barra que se muestra en la figura 1-16*a* tiene un ancho constante de 35 mm y un espesor de 10 mm. Determine el esfuerzo normal promedio máximo en la barra cuando está sometida a las cargas mostradas.



SOLUCIÓN

Cargas internas. Por inspección, las fuerzas axiales internas en las regiones AB, BC y CD son todas constantes aunque con magnitudes diferentes. Estas cargas se determinan usando el método de las secciones como se muestra en la figura 1-16*b*; y el diagrama de fuerza normal que representa estos resultados de manera gráfica se muestra en la figura 1-16*c*. La mayor carga se encuentra en la región BC, donde $P_{BC} = 30$ kN. Como el área de la sección transversal de la barra es *constante*, el mayor esfuerzo normal promedio también ocurre dentro de esta región de la barra.

Esfuerzo normal promedio. Al aplicar la ecuación 1-6, se tiene

$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{30(10^3)\text{ N}}{(0.035\text{ m})(0.010\text{ m})} = 85.7\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: En la figura 1-16*d* se muestra la distribución de esfuerzo que actúa sobre una sección transversal arbitraria de la barra, dentro de la región BC. De manera gráfica, el *volumen* (o "bloque"), representado por esta distribución es equivalente a la carga de 30 kN; es decir, 30 kN = (85.7 MPa)(35 mm)(10 mm).

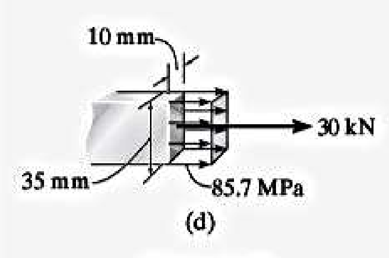


Figura 1-16

EJEMPLO 1.7

La lámpara de 80 kg está sostenida por dos barras AB y BC como se muestra en la figura 1-17a. Si AB tiene un diámetro de 10 mm y BC un diámetro de 8 mm, determine el esfuerzo normal promedio en cada barra.

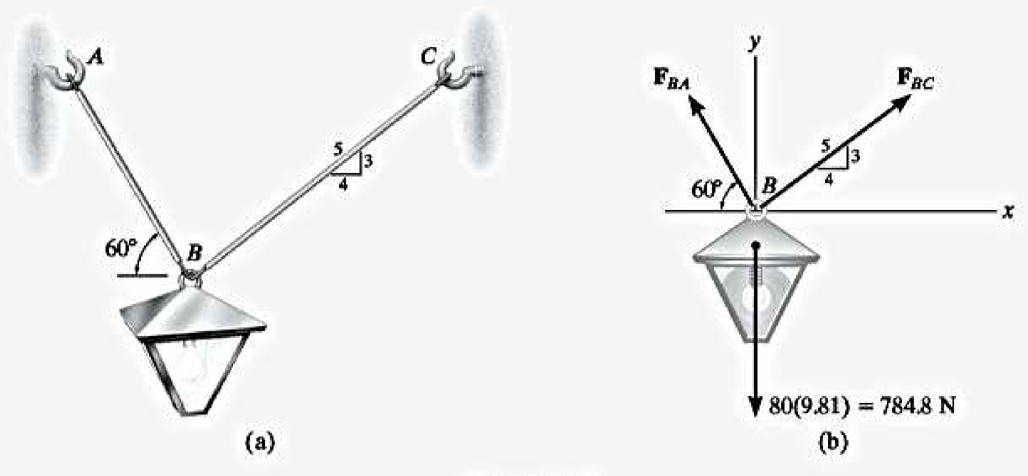


Figura 1-17

SOLUCIÓN

Carga interna. Primero se debe determinar la fuerza axial en cada barra. En la figura 1-17b se muestra un diagrama de cuerpo libre de la lámpara. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, se obtiene

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{BC}\left(\tfrac{4}{5}\right) - F_{BA}\cos 60^\circ = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BC}\left(\tfrac{3}{5}\right) + F_{BA}\,\text{sen}\,60^\circ - 784.8\text{ N} = 0$$

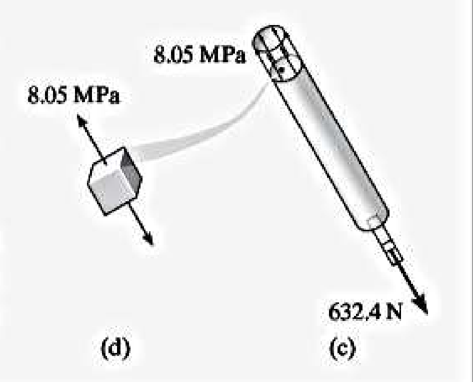
$$F_{BC} = 395.2\text{ N}, \qquad F_{BA} = 632.4\text{ N}$$

Por la tercera ley de Newton, de la acción igual pero reacción opuesta, estas fuerzas someten a las barras a tensión en toda su longitud.

Esfuerzo normal promedio. Aplicando la ecuación 1-6,

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395.2\text{ N}}{\pi(0.004\text{ m})^2} = 7.86\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632.4\text{ N}}{\pi(0.005\text{ m})^2} = 8.05\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$



NOTA: En la figura 1.17c se muestra la distribución del esfuerzo normal promedio que actúa sobre una sección transversal de la barra AB y, en cualquier punto de esta sección transversal, un elemento de material está sujeto a esfuerzo como se muestra en la figura 1-17d.

EJEMPLO 1.8

La pieza fundida que se muestra en la figura 1-18*a* está hecha de acero con un peso específico de $\gamma_{ac} = 490$ lb/pie³. Determine el esfuerzo de compresión promedio que actúa en los puntos A y B.

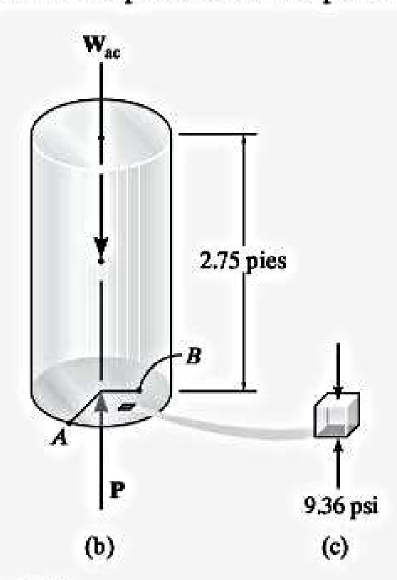


Figura 1-18

SOLUCIÓN

Carga interna. En la figura 1-18*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento superior de la pieza, donde la sección pasa por los puntos A y B. El peso de este segmento se determina a partir de $W_{ac} = \gamma_{ac}V_{ac}$. Así, la fuerza axial interna P en la sección es

$$+\uparrow \Sigma F_z = 0; \qquad P - W_{ac} = 0$$

$$P - (490 \text{ lb/pie}^3)(2.75 \text{ pies})[\pi(0.75 \text{ pie})^2] = 0$$

$$P = 2381 \text{ lb}$$

Esfuerzo de compresión promedio. El área de la sección transversal en la sección es $A = \pi(0.75 \text{ pie})^2$, por lo que el esfuerzo de compresión promedio resulta

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2381 \text{ lb}}{\pi(0.75 \text{ pie})^2} = 1347.5 \text{ lb/pie}^2$$

$$\sigma = 1347.5 \text{ lb/pie}^2 (1 \text{ pie}^2/144 \text{ pies}^2) = 9.36 \text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: El esfuerzo mostrado sobre el elemento de volumen de material en la figura 1-18*c* es representativo de las condiciones en cualquiera de los puntos A o B. Observe que este esfuerzo actúa *hacia arriba* en la parte inferior, o la cara sombreada del elemento, puesto que esta cara forma parte del área superficial inferior de la sección y, sobre esta superficie, la fuerza interna resultante **P** empuja hacia arriba.

EJEMPLO 1.9

El elemento AC que se muestra en la figura 1-19*a* está sometido a una fuerza vertical de 3 kN. Determine la posición x de esta fuerza de manera que el esfuerzo de compresión promedio en el soporte liso C sea igual al esfuerzo de tensión promedio en el tirante AB. Este tirante tiene un área en su sección transversal de 400 mm^2 y el área de contacto en C es de 650 mm^2.

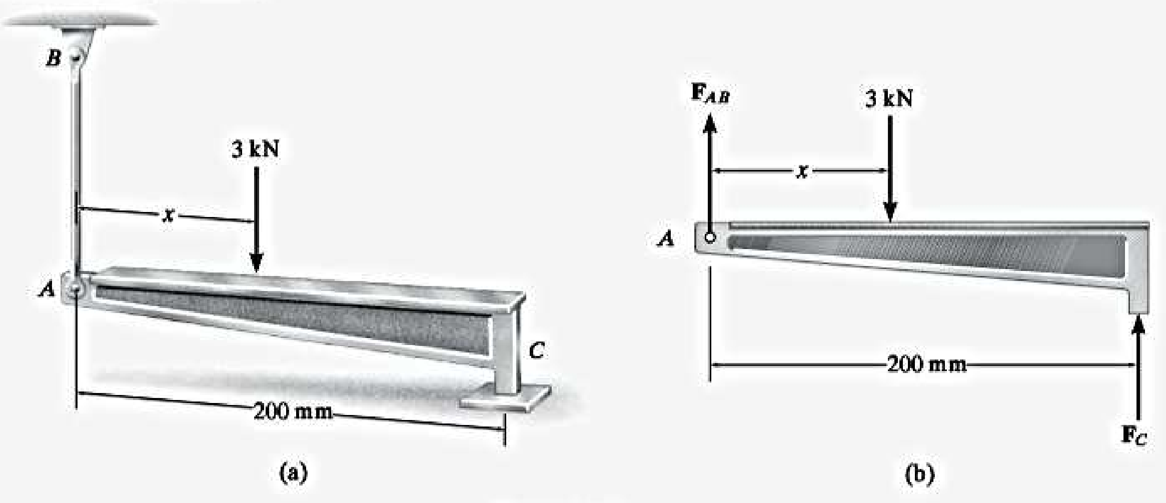


Figura 1-19

SOLUCIÓN

Carga interna. Las fuerzas en A y C pueden relacionarse al considerar el diagrama de cuerpo libre del elemento AC, figura 1-19*b*. Existen tres incógnitas, éstas son: F_{AB}, F_C y x. En la solución de este problema se usarán unidades de newtons y milímetros.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{AB} + F_C - 3000\ \text{N} = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad -3000\ \text{N}(x) + F_C(200\ \text{mm}) = 0 \qquad (2)$$

Esfuerzo normal promedio. Se puede escribir una tercera ecuación necesaria, la cual requiere que el esfuerzo de tensión en la barra AB y el esfuerzo de compresión en C sean equivalentes, es decir,

$$\sigma = \frac{F_{AB}}{400\ \text{mm}^2} = \frac{F_C}{650\ \text{mm}^2}$$

$$F_C = 1.625 F_{AB}$$

Al sustituir esto en la ecuación 1, despejar F_{AB} y después despejar F_C, se obtiene

$$F_{AB} = 1143\ \text{N}$$

$$F_C = 1857\ \text{N}$$

La posición de la carga aplicada se determina a partir de la ecuación 2,

$$x = 124\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: $0 < x < 200$ mm, de acuerdo con lo requerido.

1.5 Esfuerzo cortante promedio

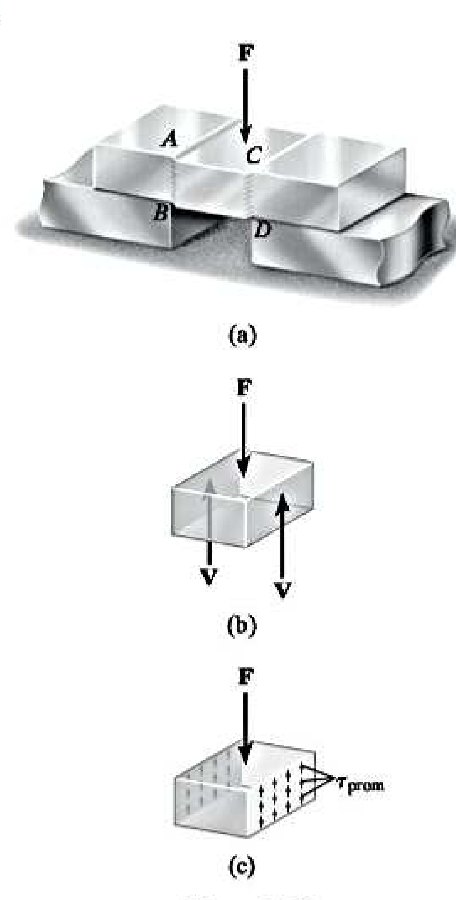


Figura 1-20

El esfuerzo cortante se ha definido en la sección 1.3 como la componente del esfuerzo que actúa *en el plano* del área seccionada. Para mostrar cómo puede desarrollarse este esfuerzo, considere el efecto de aplicar una fuerza **F** a la barra mostrada en la figura 1-20*a*. Si se consideran que los soportes son rígidos, y que **F** es suficientemente grande, ésta ocasionará que el material de la barra se deforme y falle a lo largo de los planos identificados como AB y CD. Un diagrama de cuerpo libre del segmento central de la barra que no tiene soporte, figura 1-20*b*, indica que la fuerza cortante $V = F/2$ debe aplicarse en cada una de las secciones a fin de mantener al segmento en equilibrio. El ***esfuerzo cortante promedio*** distribuido en cada área seccionada que desarrolla esta fuerza cortante está definido por

$$\boxed{\tau_{prom} = \frac{V}{A}} \tag{1-7}$$

Aquí

τ_{prom} = esfuerzo cortante promedio en la sección, que se supone es *igual* en cada punto situado en la sección
V = fuerza cortante interna resultante en la sección determinada a partir de las ecuaciones de equilibrio
A = área en la sección

En la figura 1-20*c* se muestra la distribución del esfuerzo cortante promedio que actúa sobre las secciones. Observe que τ_{prom} está en la *misma dirección* que **V**, ya que el esfuerzo cortante debe crear fuerzas asociadas, todas las cuales contribuyen a la fuerza interna resultante **V** en la sección.

El tipo de carga analizado aquí es un ejemplo de ***cortante simple o directa***, puesto que la cortante se debe a la *acción directa* de la carga **F** aplicada. Este tipo de cortante se produce con frecuencia en diversos tipos de conexiones simples que usan pernos, pasadores, materiales soldados, etcétera. Sin embargo, en todos estos casos la aplicación de la ecuación 1-7 es *sólo aproximada*. Una investigación más precisa de la distribución del esfuerzo cortante sobre la sección revela que se producen esfuerzos cortantes mucho mayores en el material que los predichos por esta ecuación. Aunque esto sea el caso, la aplicación de la ecuación 1-7 es aceptable para muchos problemas de diseño y análisis en ingeniería. Por ejemplo, los códigos de ingeniería permiten su uso cuando se consideran las dimensiones de diseño para elementos de fijación como pernos y para obtener la fuerza de adhesión de juntas pegadas que están sometidas a cargas cortantes.

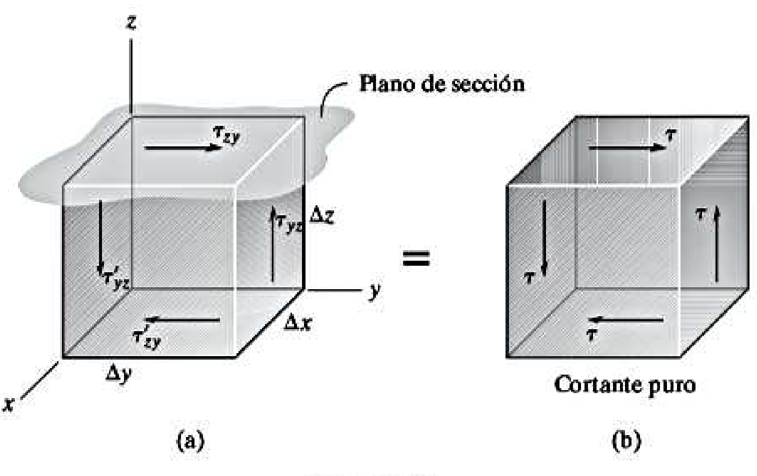


Figura 1-21

Equilibrio del esfuerzo cortante. En la figura 1-21*a* se muestra un elemento de volumen de material tomado en un punto situado sobre la superficie de un área seccionada, la cual está sometida a un esfuerzo cortante τ_{zy}. El equilibrio de fuerzas y momentos requiere que el esfuerzo cortante que actúa en esta cara del elemento esté acompañado por el esfuerzo cortante que actúa en otras tres caras. Para mostrar esto, primero se considerará el equilibrio de fuerzas en la dirección y. Entonces

$$\Sigma F_y = 0; \qquad \overbrace{\underbrace{\tau_{zy}}_{\text{esfuerzo}}\underbrace{(\Delta x\,\Delta y)}_{\text{área}}}^{\text{fuerza}} - \tau'_{zy}\,\Delta x\,\Delta y = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy}$$

De manera similar, el equilibrio de fuerzas en la dirección z genera $\tau_{yz} = \tau'_{yz}$. Por último, si se toman los momentos respecto al eje x,

$$\Sigma M_x = 0; \qquad \overbrace{\overbrace{-\underbrace{\tau_{zy}}_{\text{esfuerzo}}\underbrace{(\Delta x\,\Delta y)}_{\text{área}}}^{\text{fuerza}}\underbrace{\Delta z}_{\text{brazo}}}^{\text{momento}} + \tau_{yz}(\Delta x\,\Delta z)\,\Delta y = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

de modo que

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} = \tau_{yz} = \tau'_{yz} = \tau$$

En otras palabras, ***los cuatro esfuerzos cortantes deben tener igual magnitud y cada uno debe estar dirigido hacia otro de ellos o en el sentido contrario en bordes opuestos del elemento***, figura 1-21*b*. Esto se conoce como la *propiedad complementaria del cortante* y bajo las condiciones indicadas en la figura 1-21, el material está sometido a *cortante puro*.

Puntos importantes

- Si dos partes *delgadas* o *pequeñas* se unen entre sí, las cargas aplicadas pueden causar un corte al material con flexión insignificante. Si éste es el caso, por lo general se supone que un *esfuerzo cortante promedio* actúa sobre el área de la sección transversal.
- Cuando el esfuerzo cortante τ actúa sobre un plano, entonces el equilibrio de un elemento de volumen de material en un punto sobre el plano requiere que esfuerzos cortantes asociados de la misma magnitud actúen en tres lados adyacentes del elemento.

Procedimiento de análisis

La ecuación $\tau_{\text{prom}} = V/A$ se usa para determinar el *esfuerzo cortante promedio* en el material. Su aplicación requiere los siguientes pasos.

Cortante interno.

- Seccione el elemento en el punto donde debe determinarse el esfuerzo cortante promedio.
- Dibuje el diagrama de cuerpo libre necesario y calcule la fuerza cortante interna **V** que actúa en la sección y que es necesaria para mantener la parte en equilibrio.

Esfuerzo cortante promedio.

- Determine el área seccionada A y determine el esfuerzo cortante promedio $\tau_{\text{prom}} = V/A$.
- Se sugiere que τ_{prom} se muestre en un pequeño elemento de volumen de material que se encuentre en un punto de la sección donde se determinó. Para hacer esto, primero dibuje τ_{prom} en la cara del elemento, coincidente con el área seccionada A. Este esfuerzo actúa en la *misma dirección* que **V**. Entonces, los esfuerzos cortantes que actúan sobre los tres planos adyacentes pueden dibujarse en sus direcciones apropiadas siguiendo el esquema mostrado en la figura 1-21.

EJEMPLO 1.10

Determine el esfuerzo cortante promedio en el pasador de 20 mm de diámetro ubicado en A y en el pasador de 30 mm de diámetro que está en B, los cuales soportan la viga de la figura 1-22*a*.

(a)

SOLUCIÓN

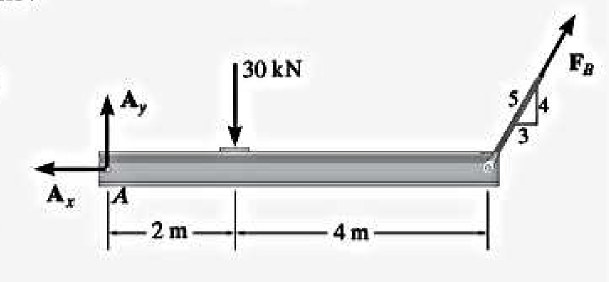
Cargas internas. Las fuerzas sobre los pasadores pueden obtenerse al considerar el equilibrio de la viga, figura 1-22*b*.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad F_B\left(\frac{4}{5}\right)(6\text{ m}) - 30\text{ kN}(2\text{ m}) = 0 \quad F_B = 12.5\text{ kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad (12.5\text{ kN})\left(\frac{3}{5}\right) - A_x = 0 \quad A_x = 7.50\text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + (12.5\text{ kN})\left(\frac{4}{5}\right) - 30\text{ kN} = 0$$

$$A_y = 20\text{ kN}$$



(b)

Así, la fuerza resultante que actúa sobre el pasador A es

$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(7.50\text{ kN})^2 + (20\text{ kN})^2} = 21.36\text{ kN}$$

El pasador en A se sostiene mediante dos "hojas" fijas, por consiguiente el diagrama de cuerpo libre del segmento central del perno, mostrado en la figura 1-22*c*, tiene *dos* superficies cortantes entre la viga y cada hoja. Así, la fuerza de la viga (21.36 kN) que actúa sobre el pasador está soportada por fuerzas cortantes en cada una de las superficies mencionadas. Este caso se llama *cortante doble*. Por lo tanto,

(c)

$$V_A = \frac{F_A}{2} = \frac{21.36\text{ kN}}{2} = 10.68\text{ kN}$$

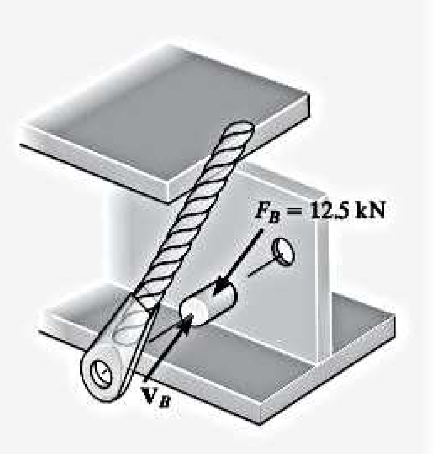
En la figura 1-22*a*, observe que el pasador B está sometido a *cortante simple*, el cual ocurre en la sección comprendida entre el cable y la viga, figura 1-22*d*. Para este segmento de pasador,

$$V_B = F_B = 12.5\text{ kN}$$

Esfuerzo cortante promedio.

$$(\tau_A)_{\text{prom}} = \frac{V_A}{A_A} = \frac{10.68(10^3)\text{ N}}{\frac{\pi}{4}(0.02\text{ m})^2} = 34.0\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$(\tau_B)_{\text{prom}} = \frac{V_B}{A_B} = \frac{12.5(10^3)\text{ N}}{\frac{\pi}{4}(0.03\text{ m})^2} = 17.7\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$



(d)

Figura 1-22

EJEMPLO 1.11

Si la junta de madera que se muestra en la figura 1-23*a* tiene 150 mm de ancho, determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado a lo largo de los planos cortantes *a-a* y *b-b*. Para cada plano, represente el estado de esfuerzo sobre un elemento del material.

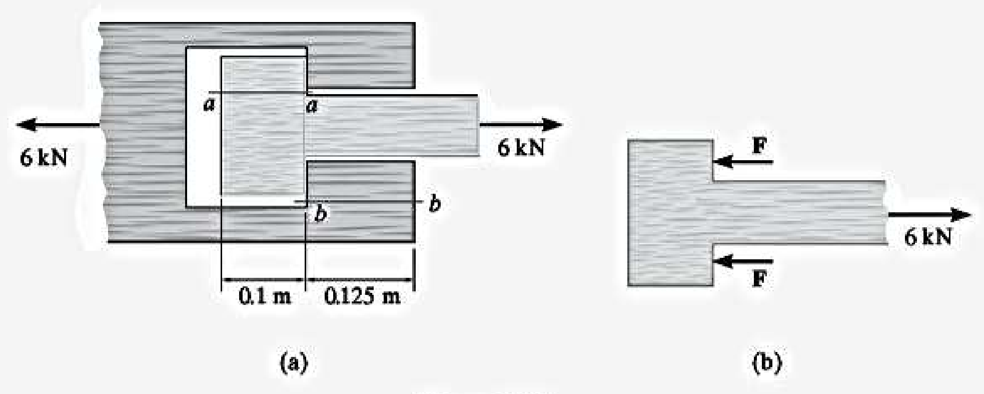


Figura 1-23

SOLUCIÓN

Cargas internas. En referencia al diagrama de cuerpo libre del elemento, figura 1-23*b*,

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad 6 \text{ kN} - F - F = 0 \qquad F = 3 \text{ kN}$$

Ahora considere el equilibrio de los segmentos cortados a través de los planos cortantes *a-a* y *b-b*, que se muestran en las figuras 1-23*c* y 1-23*d*.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad V_a - 3 \text{ kN} = 0 \qquad V_a = 3 \text{ kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad 3 \text{ kN} - V_b = 0 \qquad V_b = 3 \text{ kN}$$

3 kN
$\tau_a = 200$ kPa
V_a

(c)

Esfuerzo cortante promedio.

$$(\tau_a)_{\text{prom}} = \frac{V_a}{A_a} = \frac{3(10^3) \text{ N}}{(0.1 \text{ m})(0.15 \text{ m})} = 200 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$(\tau_b)_{\text{prom}} = \frac{V_b}{A_b} = \frac{3(10^3) \text{ N}}{(0.125 \text{ m})(0.15 \text{ m})} = 160 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp.}$$

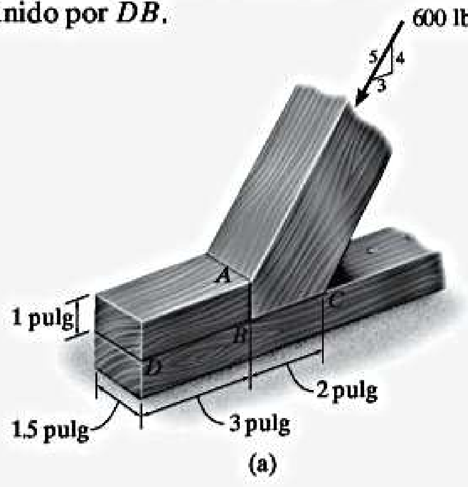
3 kN
$\tau_b = 160$ kPa
V_b

(d)

El estado de esfuerzo sobre los elementos situados en las secciones *a-a* y *b-b* se muestra en las figuras 1-23*c* y 1-23*d*, respectivamente.

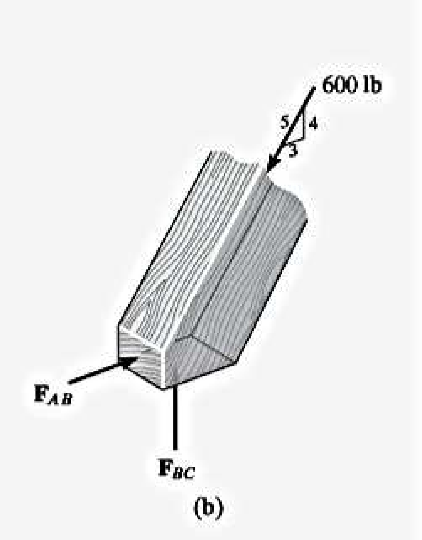
EJEMPLO 1.12

El elemento inclinado que se muestra en la figura 1-24*a* está sometido a una fuerza de compresión de 600 lb. Determine el esfuerzo de compresión promedio a lo largo de las áreas de contacto lisas definidas por *AB* y *BC*, así como el esfuerzo cortante promedio a lo largo del plano horizontal definido por *DB*.



(a)

Figura 1-24



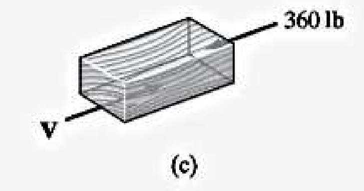
(b)

SOLUCIÓN

Cargas internas. En la figura 1-24*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento inclinado. Las fuerzas de compresión que actúan sobre las áreas de contacto son

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{AB} - 600\text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \qquad F_{AB} = 360\text{ lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{BC} - 600\text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 \qquad F_{BC} = 480\text{ lb}$$



(c)

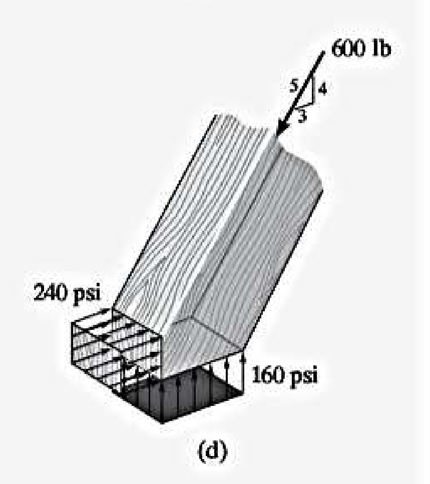
Además, a partir del diagrama de cuerpo libre del segmento superior *ABD* del elemento inferior, figura 1-24*c*, la fuerza cortante que actúa sobre el plano horizontal seccionado *DB* es

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad V = 360\text{ lb}$$

Esfuerzo promedio. Los esfuerzos de compresión promedio a lo largo de los planos horizontal y vertical de los elementos inclinados son

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{360\text{ lb}}{(1\text{ pulg})(1.5\text{ pulg})} = 240\text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{480\text{ lb}}{(2\text{ pulg})(1.5\text{ pulg})} = 160\text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$

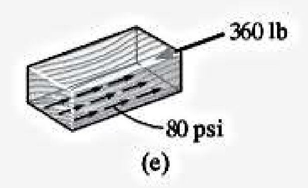


(d)

Estas distribuciones de esfuerzo se muestran en la figura 1-24*d*.

El esfuerzo cortante promedio que actúa sobre el plano horizontal definido por *DB* es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{360\text{ lb}}{(3\text{ pulg})(1.5\text{ pulg})} = 80\text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$



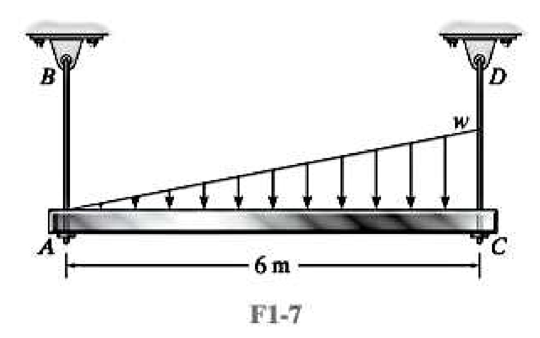
(e)

En la figura 1-24*e*, este esfuerzo se muestra uniformemente distribuido sobre el área seccionada.

1

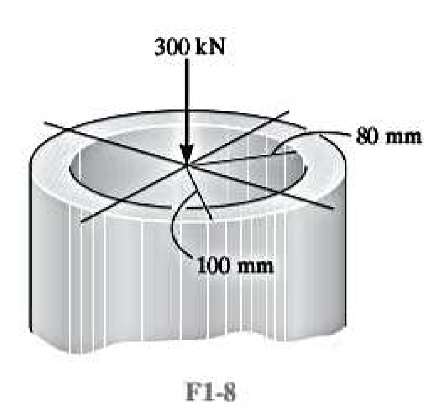
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F1-7. La viga uniforme está sostenida por dos barras AB y CD que tienen áreas de sección transversal de 10 mm² y 15 mm², respectivamente. Determine la intensidad w de la carga distribuida de modo que el esfuerzo normal promedio en cada barra no sea superior a 300 kPa.



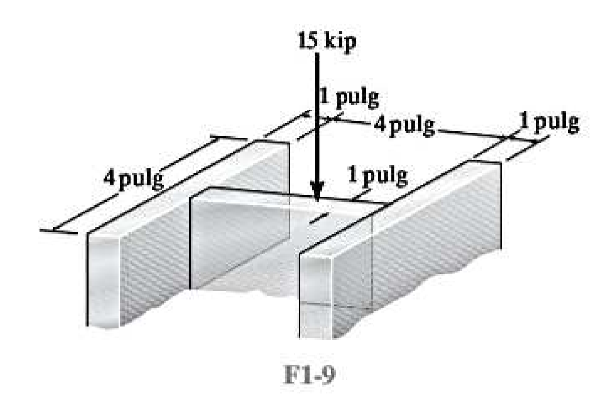
F1-7

F1-8. Determine el esfuerzo normal promedio desarrollado sobre la sección transversal. Dibuje la distribución del esfuerzo normal sobre la sección transversal.



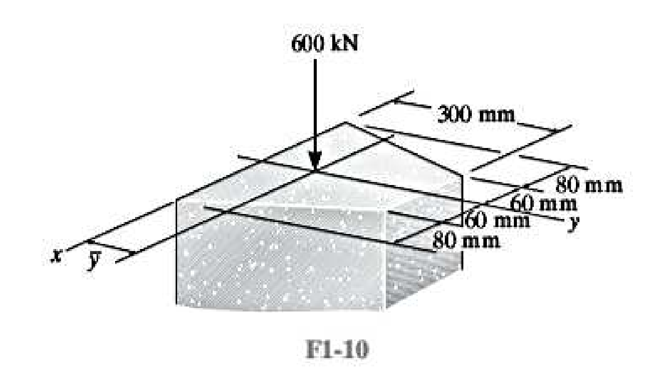
F1-8

F1-9. Determine el esfuerzo normal promedio desarrollado sobre la sección transversal. Dibuje la distribución del esfuerzo normal sobre la sección transversal.



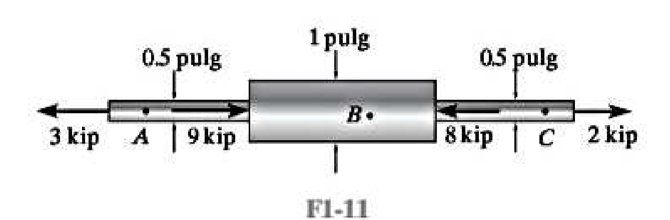
F1-9

F1-10. Si la fuerza de 600 kN actúa a través del centroide de la sección transversal, determine la ubicación $\bar{y}$ del centroide y el esfuerzo normal promedio desarrollado en la sección transversal. Además, dibuje la distribución del esfuerzo normal sobre la sección transversal.



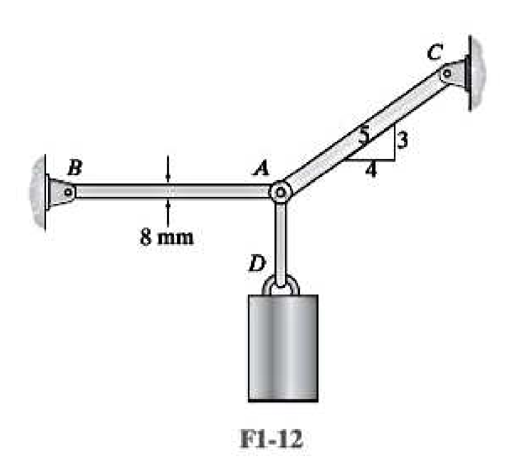
F1-10

F1-11. Determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en los puntos A, B y C. El diámetro de cada segmento se indica en la figura.



F1-11

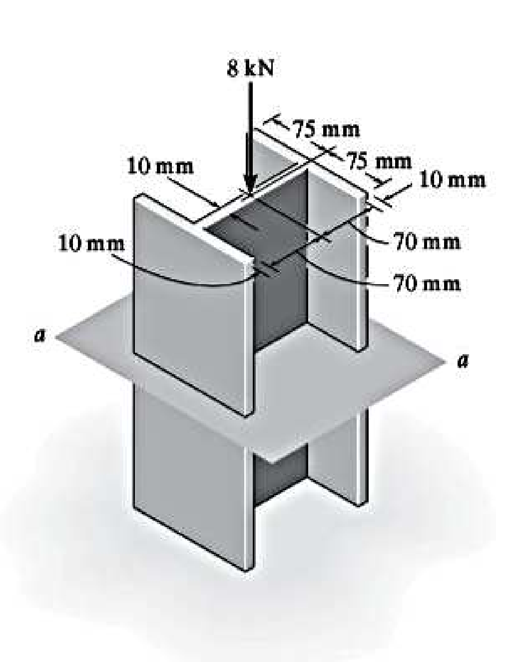
F1-12. Determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en la barra AB si la carga tiene una masa de 50 kg. El diámetro de la barra AB es de 8 mm.



F1-12

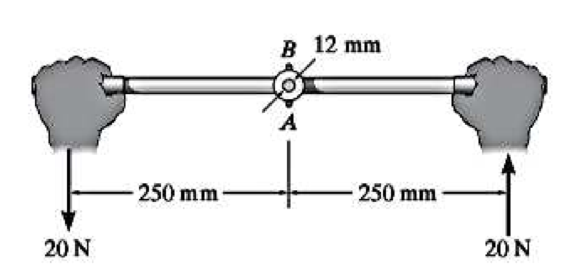
PROBLEMAS

1-31. La columna está sometida a una fuerza axial de 8 kN, la cual se aplica a través del centroide del área de la sección transversal. Determine el esfuerzo normal promedio que actúa en la sección *a-a*. Muestre esta distribución del esfuerzo actuando sobre el área de la sección transversal.



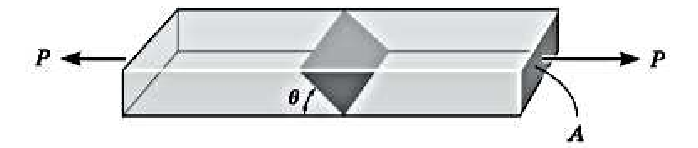
Prob. 1-31

***1-32.** La palanca está unida a una flecha fija mediante un pasador ahusado AB que tiene un diámetro medio de 6mm. Si se aplica un par de torsión a la palanca, determine el esfuerzo cortante promedio en el pasador entre el pasador y la palanca.



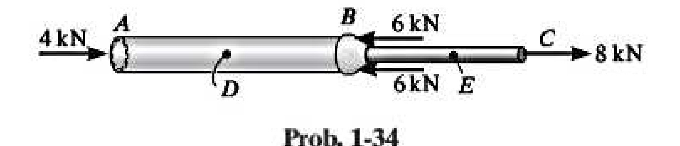
Prob. 1-32

•**1-33.** La barra tiene un área de sección transversal A y está sometida a la carga axial P. Determine los esfuerzos normal promedio y cortante promedio que actúan sobre la sección sombreada, la cual está orientada en un ángulo θ respecto a la horizontal. Grafique la variación de estos esfuerzos como una función de θ $(0 \leq \theta \leq 90°)$.



Prob. 1-33

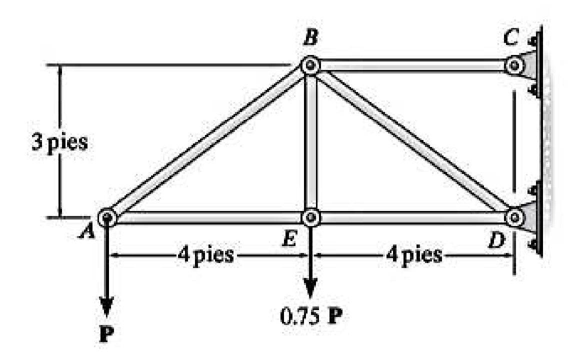
1-34. El eje compuesto consiste en un tubo AB y una barra sólida BC. El tubo tiene un diámetro interno de 20 mm y un diámetro externo de 28 mm. El diámetro de la barra es de 12 mm. Determine el esfuerzo normal promedio en los puntos D y E y represente el esfuerzo sobre un elemento de volumen ubicado en cada uno de estos puntos.



Prob. 1-34

1-35. Cada una de las barras de la armadura tiene un área de sección transversal de 1.25 pulg². Determine el esfuerzo normal promedio en cada elemento debido a la carga P = 8 kip. Determine si el esfuerzo es de tensión o de compresión.

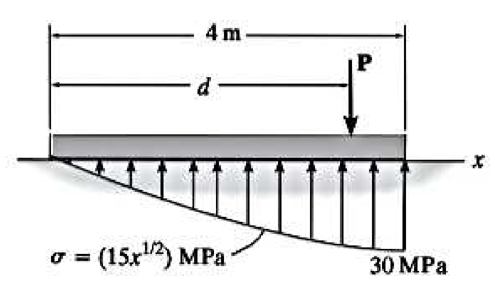
***1-36.** Cada una de las barras de la armadura tiene un área de sección transversal de 1.25 pulg². Si el esfuerzo normal promedio máximo en cualquier barra no debe exceder 20 ksi, determine la magnitud máxima P de las cargas que pueden aplicarse a la armadura.



Probs. 1-35/36

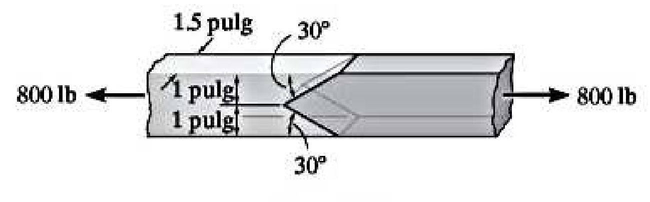
1

•1-37. La placa tiene un ancho de 0.5 m. Si la distribución del esfuerzo en el soporte varía como se muestra en la figura, determine la fuerza **P** aplicada a la placa y la distancia d al punto donde se aplica.



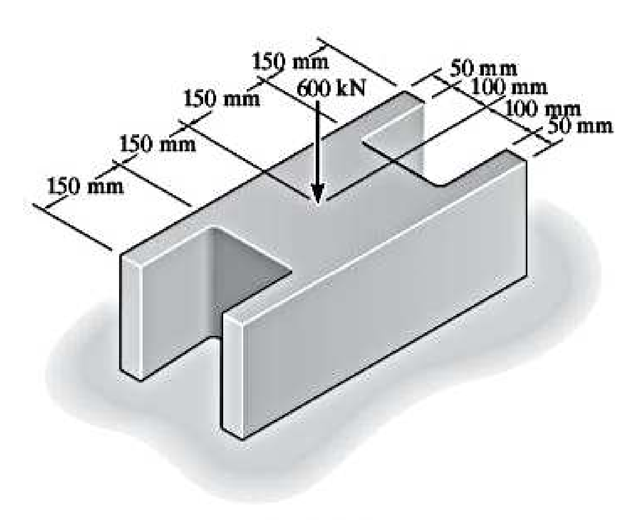
Prob. 1-37

1-38. Los dos elementos usados en la construcción de un fuselaje para avión se unen entre sí mediante una soldadura "boca de pez" a 30°. Determine el esfuerzo normal promedio y cortante promedio sobre el plano de cada soldadura. Suponga que cada plano inclinado soporta una fuerza horizontal de 400 lb.



Prob. 1-38

1-39. Si el bloque está sometido a una fuerza centralmente aplicada de 600 kN, determine el esfuerzo normal promedio en el material. Muestre el esfuerzo actuando sobre un elemento diferencial de volumen del material.



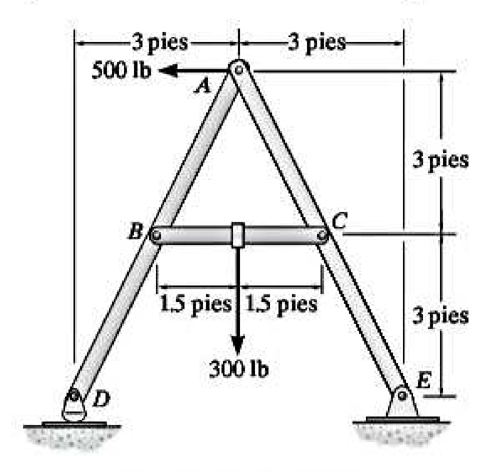
Prob. 1-39

*1-40. Cada uno de los pasadores del bastidor ubicados en B y C tienen un diámetro de 0.25 pulg. Si estos pasadores están sometidos a *cortante doble*, determine el esfuerzo cortante promedio en cada pasador.

•1-41. Resuelva el problema 1-40 suponiendo que los pasadores B y C están sometidos a *cortante simple*.

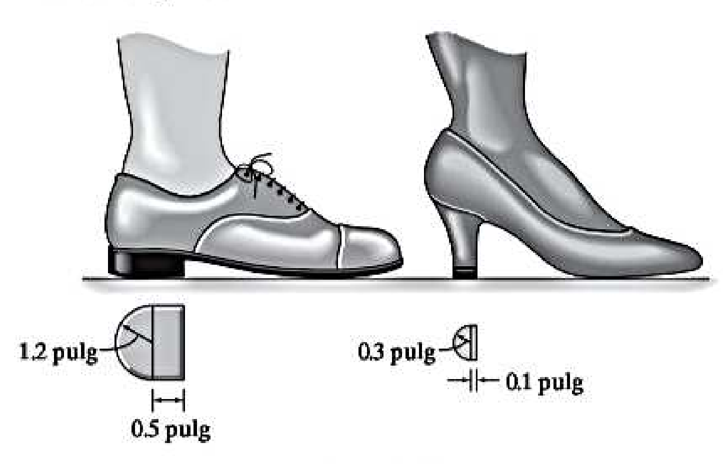
1-42. Cada uno de los pasadores del bastidor ubicados en D y E tienen un diámetro de 0.25 pulg. Si estos pasadores están sometidos a *cortante doble*, determine el esfuerzo cortante promedio en cada pasador.

1-43. Resuelva el problema 1-42 suponiendo que los pasadores D y E están sometidos a *cortante simple*.



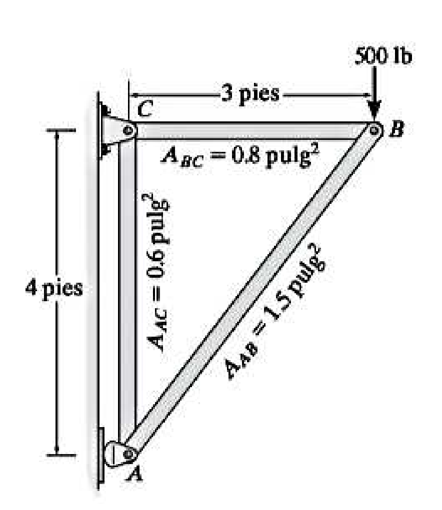
Probs. 1-40/41/42/43

*1-44. Una mujer de 175 libras está parada sobre un piso de vinilo usando zapatos de tacón alto. Si el tacón tiene las dimensiones mostradas, determine el esfuerzo normal promedio que ejerce sobre el piso y compárelo con el esfuerzo normal promedio que se desarrolla cuando un hombre del mismo peso está sobre el mismo piso usando zapatos de tacón bajo. Suponga que la carga se aplica lentamente, de modo que los efectos dinámicos sean insignificantes. Además, suponga que todo el peso se apoya sobre el tacón de un solo zapato.



Prob. 1-44

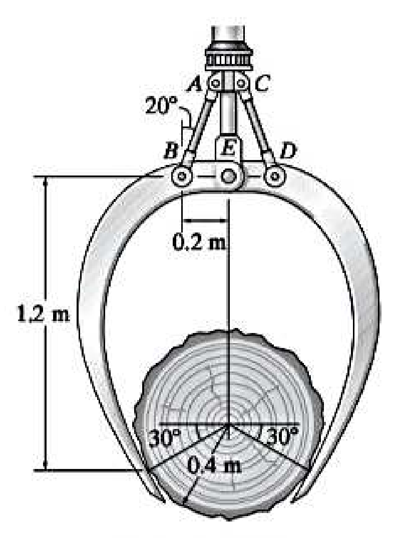
•1-45. La armadura está hecha de tres elementos conectados por pasadores que tienen las áreas de sección transversal mostradas en la figura. Determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en cada elemento si la armadura está sometida a la carga que se muestra. Establezca si el esfuerzo es de tensión o compresión.



Prob. 1-45

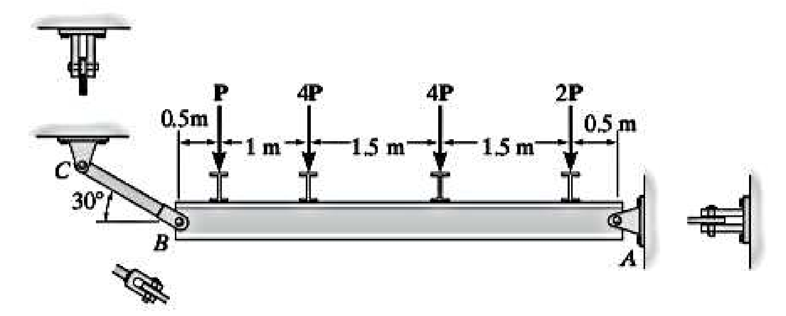
1-46. Determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en los eslabones AB y CD de la tenaza lisa que sostiene a un tronco con masa de 3 Mg. El área de la sección transversal de cada eslabón es de 400 mm².

1-47. Determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en los pasadores A y B de la tenaza lisa que sostiene a un tronco con una masa de 3 Mg. Cada pasador tiene un diámetro de 25 mm y está sometido a cortante doble.



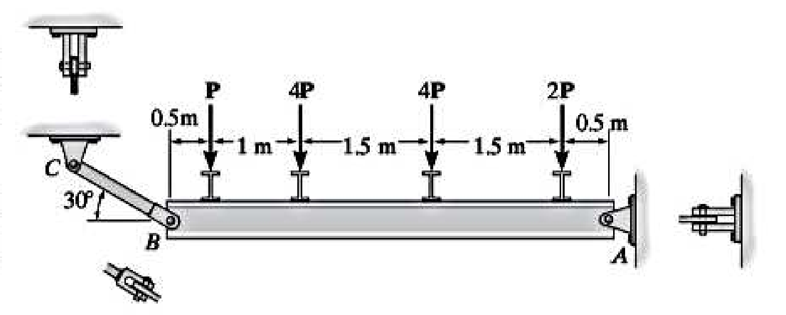
Probs. 1-46/47

*1-48. La viga se sostiene mediante un pasador en A y un eslabón corto BC. Si $P = 15$ kN, determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en los pasadores A, B y C. Como se muestra en la figura, todos los pasadores están en cortante doble como se muestra y cada uno tiene un diámetro de 18 mm.



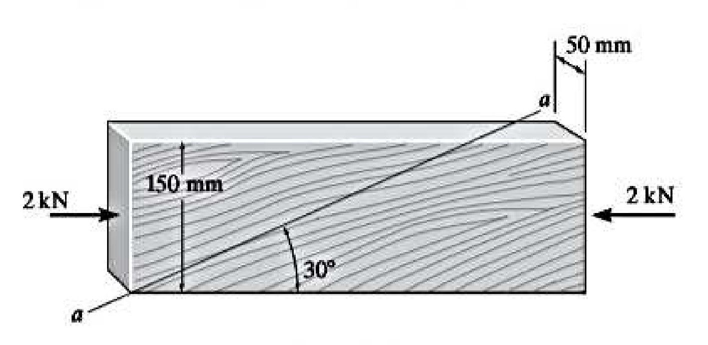
Prob. 1-48

•1-49. La viga se sostiene mediante un pasador en A y un eslabón corto BC. Determine la magnitud máxima P de las cargas que puede soportar la viga si el esfuerzo cortante promedio en cada pasador no debe exceder 80 MPa. Todos los pasadores están en cortante doble, como se muestra en la figura, y cada uno de ellos tiene un diámetro de 18 mm.



Prob. 1-49

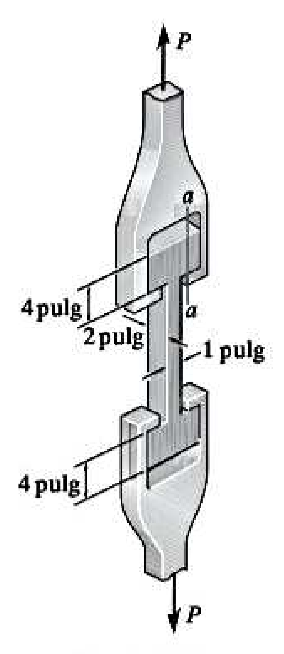
1-50. El bloque está sometido a una fuerza de compresión de 2 kN. Determine los esfuerzos normal promedio y cortante promedio desarrollados en las fibras de madera que están orientadas a lo largo de la sección a-a, formando un ángulo de 30° respecto al eje del bloque.



Prob. 1-50

1

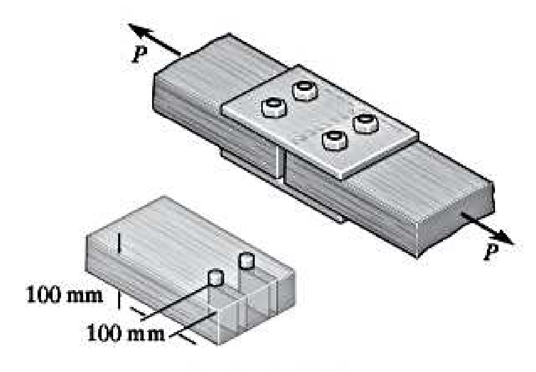
1-51. Durante un ensayo de tensión, la probeta de madera se somete a un esfuerzo normal promedio de 2 ksi. Determine la fuerza axial **P** aplicada a la probeta. Además, encuentre el esfuerzo cortante promedio desarrollado a lo largo de la sección *a-a* de la probeta.



Prob. 1-51

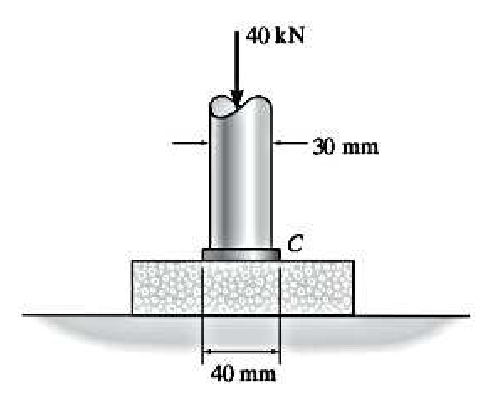
***1-52.** Si la junta está sometida a una fuerza axial de $P = 9$ kN, determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en cada uno de los pernos de 6 mm de diámetro entre las placas y los elementos, así como a lo largo de cada uno de los cuatro planos cortantes sombreados.

•**1-53.** Los esfuerzos cortantes promedio en cada uno de los pernos de 6 mm de diámetro y a lo largo de cada uno de los cuatro planos cortantes sombreados no deben ser mayores a 80 MPa y 500 kPa, respectivamente. Determine la máxima fuerza axial **P** que puede aplicarse a la junta.



Probs. 1-52/53

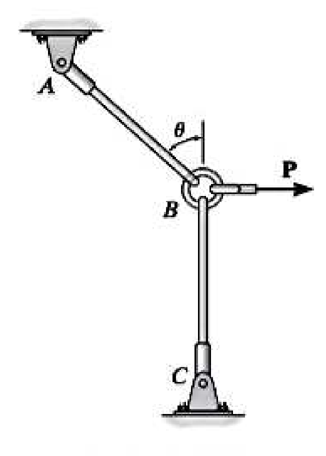
1-54. El eje está sometido a una fuerza axial de 40 kN. Determine el esfuerzo cortante promedio que actúa sobre el collarín *C* y el esfuerzo normal en el eje.



Prob. 1-54

1-55. Cada una de las varillas *AB* y *BC* tiene un diámetro de 5 mm. Si se aplica una carga de $P = 2$ kN sobre el anillo, determine el esfuerzo normal promedio en cada varilla si $\theta = 60°$.

***1-56.** Cada una de las varillas *AB* y *BC* tiene un diámetro de 5 mm. Determine el ángulo θ de la varilla *BC* de tal forma que el esfuerzo normal promedio en la varilla *AB* sea 1.5 veces mayor que el de la varilla *BC*. ¿Qué carga **P** ocasionará que suceda esto si el esfuerzo normal promedio en cada varilla no debe exceder 100 MPa?



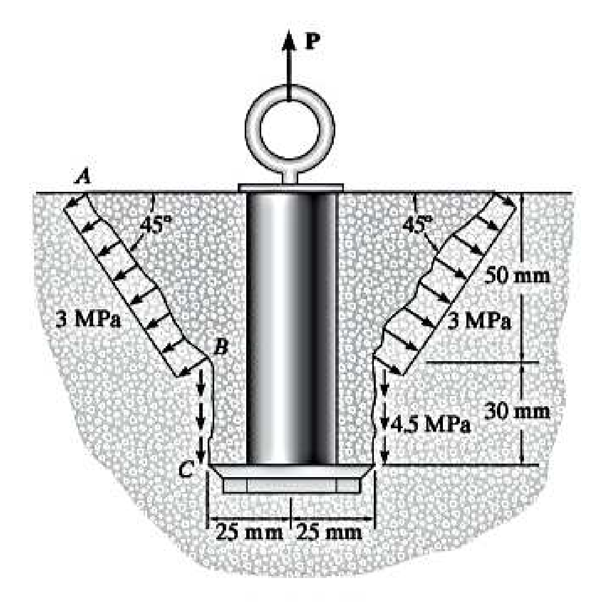
Probs. 1-55/56

•**1-57.** La probeta falló en un ensayo de tensión a un ángulo de 52°, cuando la carga axial era de 19.80 kip. Si la probeta tiene un diámetro de 0.5 pulg, determine los esfuerzos normal promedio y cortante promedio que actuaron sobre el área del plano de falla inclinado. Además, ¿cuál era el esfuerzo normal promedio que actuaba sobre la *sección transversal* cuando se produjo la falla?



Prob. 1-57

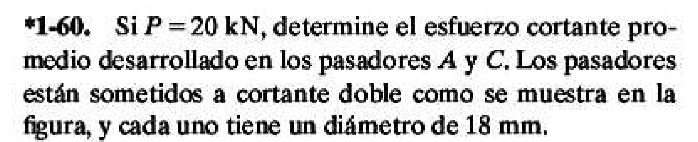
1-58. El perno de anclaje se sacó de la pared de concreto y la superficie de rotura formó un cono truncado y un cilindro. Esto indica que ocurrió una falla de corte a lo largo del cilindro BC y una falla de tensión a lo largo del cono truncado AB. Si los esfuerzos normal y cortante a lo largo de estas superficies tienen las magnitudes mostradas, determine la fuerza **P** que debió aplicarse al perno.



Prob. 1-58

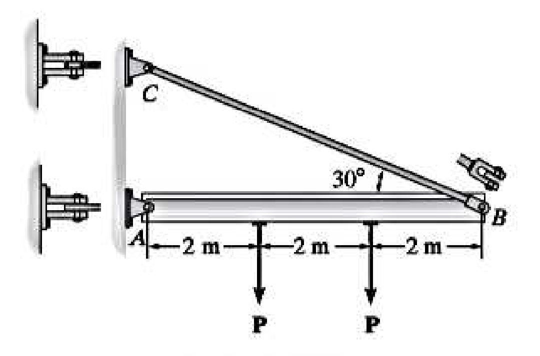
1-59. La junta a tope cuadrada y abierta se usa para transferir una fuerza de 50 kip de una placa a la otra. Determine los esfuerzos normal promedio y cortante promedio que crea esta carga sobre la cara de la soldadura, sección AB.

Prob. 1-59



***1-60.** Si $P = 20$ kN, determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en los pasadores A y C. Los pasadores están sometidos a cortante doble como se muestra en la figura, y cada uno tiene un diámetro de 18 mm.

•**1-61.** Determine la máxima magnitud P de la carga que puede soportar la viga si el esfuerzo cortante promedio en cada pasador no debe exceder 60 MPa. Todos los pasadores están sometidos a cortante doble como se muestra en la figura, y cada uno tiene un diámetro de 18 mm.

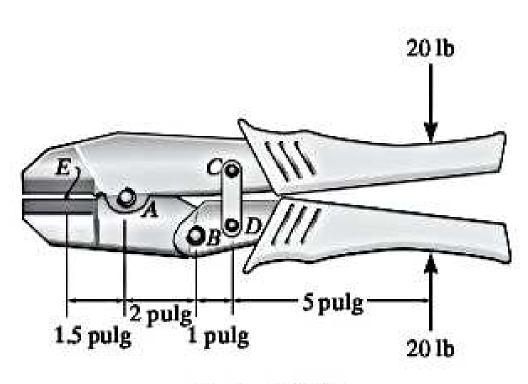


Probs. 1-60/61

1

1-62. La herramienta de prensado se utiliza para doblar el extremo del alambre E. Si se aplica una fuerza de 20 kg sobre los mangos, determine el esfuerzo cortante promedio en el pasador A. El pasador está sometido a cortante doble y tiene un diámetro de 0.2 pulg. Sobre el alambre sólo se ejerce una fuerza vertical.

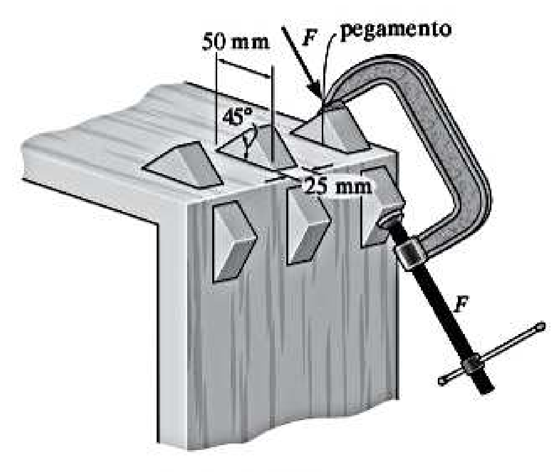
1-63. Resuelva el problema 1-62 para el pasador B. El pasador está sometido a cortante doble y tiene un diámetro de 0.2 pulg.



Probs. 1-62/63

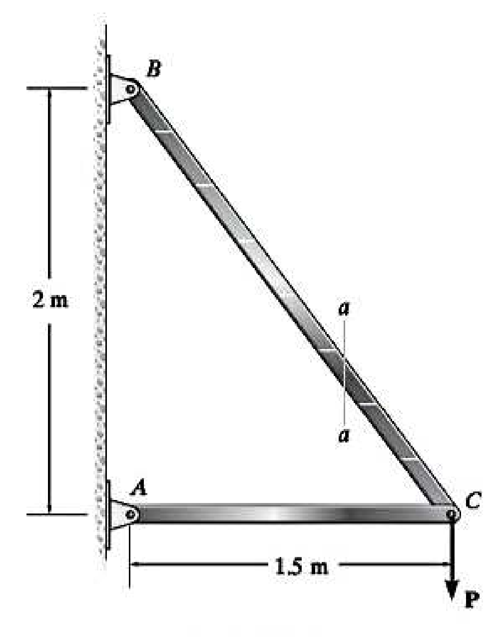
***1-64.** Los bloques triangulares están pegados a lo largo de cada lado de la junta. Una mordaza en C, colocada entre dos de los bloques, se usa para unir fuertemente la junta. Si el pegamento puede soportar un esfuerzo cortante promedio máximo de 800 kPa, determine la fuerza de sujeción **F** máxima permisible.

•1-65. Los bloques triangulares están pegados a lo largo de cada lado de la junta. Una mordaza en C, colocada entre dos de los bloques, se usa para unir fuertemente la junta. Si la fuerza de sujeción es $F = 900$ N, determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en el pegamento.



Probs. 1-64/65

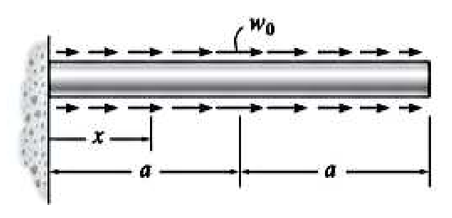
1-66. Determine la mayor carga **P** que puede aplicarse a la estructura sin causar que el esfuerzo normal promedio ni el esfuerzo cortante promedio en la sección a-a excedan $\sigma = 150$ MPa y $\tau = 60$ MPa, respectivamente. El elemento CB tiene una sección transversal cuadrada de 25 mm por lado.



Prob. 1-66

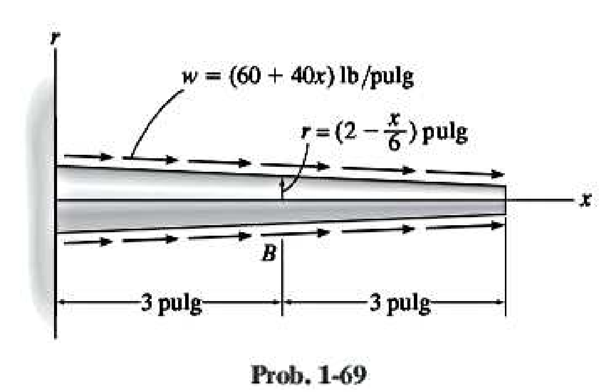
1-67. La barra prismática tiene un área de sección transversal A. Si se somete a una carga axial distribuida que aumenta linealmente desde $w = 0$ en $x = 0$ hasta $w = w_0$ para $x = a$ y luego disminuye linealmente hasta $w = 0$ en $x = 2a$, determine el esfuerzo normal promedio en la barra como una función de x para $0 \leq x < a$.

***1-68.** La barra prismática tiene un área de sección transversal A. Si se somete a una carga axial distribuida que aumenta linealmente desde $w = 0$ en $x = 0$ hasta $w = w_0$ para $x = a$ y luego disminuye linealmente hasta $w = 0$ en $x = 2a$, determine el esfuerzo normal promedio en la barra como una función de x para $a < x \leq 2a$.



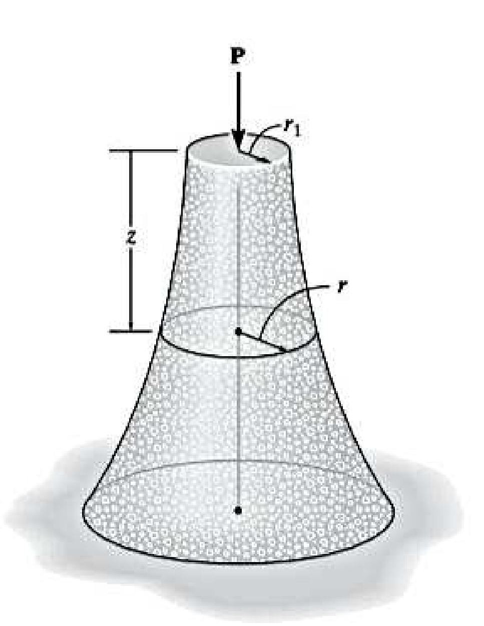
Probs. 1-67/68

•1-69. La barra ahusada tiene un radio de $r = (2 - x/6)$ pulg y está sometida a una carga distribuida de $w = (60 + 40x)$ lb/pulg. Determine el esfuerzo normal promedio en el centro B de la barra.



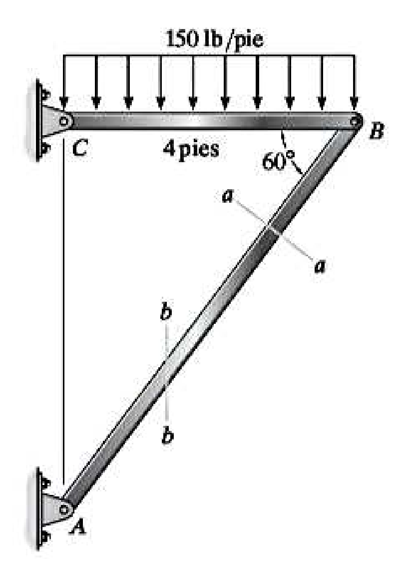
Prob. 1-69

1-70. El pedestal soporta una carga **P** en su centro. Si el material tiene una densidad de masa ρ, determine la dimensión radial r en función de z de modo que el esfuerzo promedio normal en el pedestal permanezca constante. La sección transversal es circular.



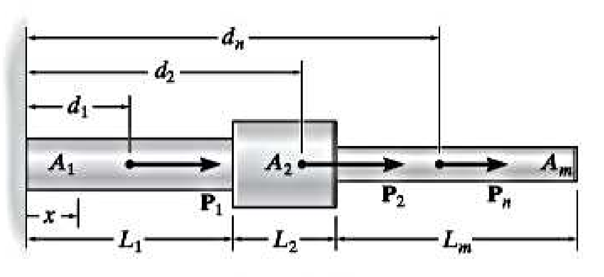
Prob. 1-70

1-71. Determine el esfuerzo normal promedio en la sección a-a y el esfuerzo cortante promedio en la sección b-b del elemento AB. La sección transversal es cuadrada con 0.5 pulg por lado.



Prob. 1-71

*1-72. Considere el problema general de una barra formada por m segmentos, cada uno de los cuales tiene un área de sección transversal A_m y una longitud L_m. Si hay n cargas sobre la barra como se muestra en la figura, escriba un programa de computadora que pueda usarse para determinar el esfuerzo normal promedio en cualquier ubicación específica x. Muestre una aplicación del programa usando los valores $L_1 = 4$ pies, $d_1 = 2$ pies, $P_1 = 400$ lb, $A_1 = 3$ pulg^2, $L_2 = 2$ pies, $d_2 = 6$ pies, $P_2 = -300$ lb, $A_2 = 1$ pulg^2.



Prob. 1-72

1

1.6 Esfuerzo permisible

Para *diseñar* correctamente un elemento estructural o mecánico es necesario limitar el esfuerzo en el material hasta un nivel que sea seguro. Por lo tanto, para garantizar esta seguridad se requiere elegir un esfuerzo permisible que restrinja la carga aplicada a un valor que sea *menor* a la máxima carga que el elemento puede soportar. Hay muchas razones para hacer esto. Por ejemplo, la carga para la que se diseña el elemento puede ser diferente a las cargas reales que se colocan sobre él. Las medidas propuestas de una estructura o máquina pueden no ser exactas debido a errores en la fabricación o en el montaje de las piezas que lo componen. También pueden ocurrir vibraciones, impactos o cargas accidentales desconocidos que no hayan sido tomados en cuenta para el diseño. La corrosión atmosférica, el desgaste o la exposición a la intemperie tienden a causar que los materiales se deterioren durante su uso. Por último, algunos materiales como la madera, el concreto o los compuestos reforzados con fibra, pueden tener una alta variabilidad en sus propiedades mecánicas.

Un método para especificar la carga permisible en un elemento consiste en usar un número llamado factor de seguridad. El ***factor de seguridad*** (F.S.) es una razón de la carga de falla F_{falla} sobre la carga permisible F_{perm}. Aquí F_{falla} se determina mediante ensayos experimentales del material, y el factor de seguridad se selecciona con base en la experiencia, de modo que las incertidumbres mencionadas anteriormente se toman en cuenta cuando el elemento se usa bajo las mismas condiciones de carga y geometría. Escrito de manera matemática,

$$\text{F.S.} = \frac{F_{falla}}{F_{perm}} \tag{1-8}$$

Si la carga aplicada al elemento se *relaciona linealmente* con el esfuerzo desarrollado en dicho miembro, como cuando se usa $\sigma = P/A$ y $\tau_{prom} = V/A$, entonces el factor de seguridad puede expresarse como una razón del esfuerzo de falla σ_{falla} (o τ_{falla}) sobre el esfuerzo permisible σ_{perm} (o bien τ_{perm});* es decir,

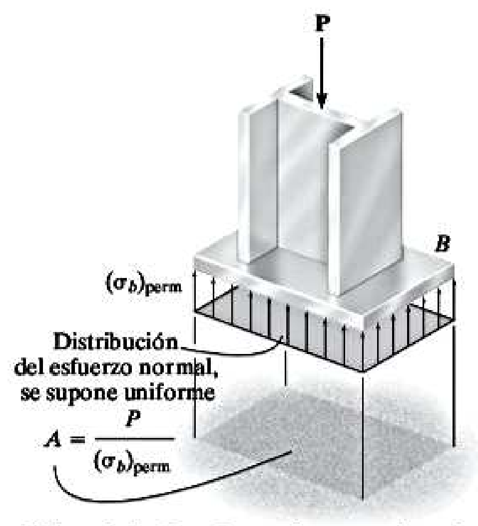
$$\text{F.S.} = \frac{\sigma_{falla}}{\sigma_{perm}} \tag{1-9}$$

o

$$\text{F.S.} = \frac{\tau_{falla}}{\tau_{perm}} \tag{1-10}$$

*En algunos casos, como el de las columnas, la carga aplicada no se relaciona linealmente con el esfuerzo y, por ende, sólo puede usarse la ecuación 1.8 para determinar el factor de seguridad. Vea el capítulo 13.

En cualquiera de estas ecuaciones, el factor de seguridad debe ser *mayor* que 1 a fin de evitar la posibilidad de falla. Los valores específicos dependen de los tipos de materiales a utilizar y el propósito de la estructura o máquina. Por ejemplo, el F.S. usado en el diseño de componentes de aviones o vehículos espaciales puede estar cerca de 1 para reducir el peso del vehículo. O en el caso de una planta de energía nuclear, el factor de seguridad para algunos de sus componentes puede ser de hasta 3 debido a las incertidumbres en la carga o el comportamiento del material. Muchas veces, el factor de seguridad para un caso específico puede encontrarse en los códigos de diseño y manuales de ingeniería. Estos valores están destinados a formar un balance para proteger la seguridad pública y ambiental y para proporcionar una solución económicamente razonable en el diseño.



El área de la placa *B*, que sirve como base de la columna, se determina a partir del esfuerzo de aplastamiento promedio para el concreto.

1.7 Diseño de conexiones simples

Si se simplifican los supuestos sobre el comportamiento del material, con frecuencia se pueden utilizar las ecuaciones $\sigma = P/A$ y $\tau_{prom} = V/A$ para analizar o diseñar una conexión simple o un elemento mecánico. En particular, si un elemento está sometido a *fuerza normal* en una sección, el área requerida en su sección se determina a partir de

$$A = \frac{P}{\sigma_{prom}} \tag{1-11}$$

Por otro lado, si la sección está sometida a una *fuerza cortante* promedio, entonces el área requerida en la sección es

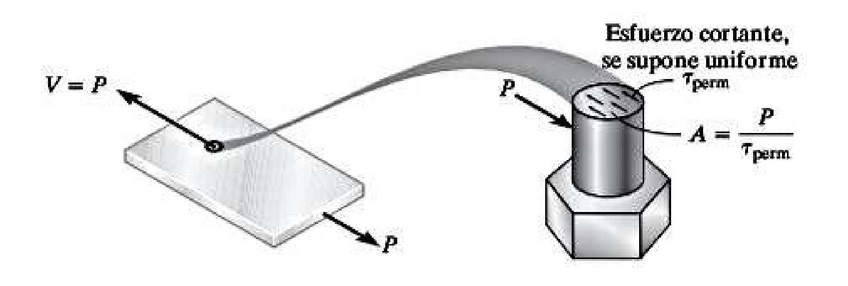
$$A = \frac{V}{\tau_{perm}} \tag{1-12}$$

Como se analizó en la sección 1.6, el esfuerzo permisible empleado en cada una de estas ecuaciones se determina ya sea al aplicar un factor de seguridad al esfuerzo de falla cortante o normal del material, o bien al determinar directamente estos esfuerzos con un código de diseño adecuado.

En la figura 1-25 se muestran tres ejemplos en los que se aplican las ecuaciones anteriores



La longitud *l* de esta barra empotrada en concreto puede determinarse usando el esfuerzo cortante permisible del pegamento de la unión.





El área del perno para esta junta sobrepuesta se determina a partir del esfuerzo cortante, el cual es mayor entre las placas.

Figura 1-25

1

Punto importante

- El diseño de la resistencia de un elemento se basa en la selección de un esfuerzo permisible que le deje soportar con seguridad la carga para la que está destinado. Como hay muchos factores desconocidos que pueden influir en el esfuerzo real de un elemento, entonces se aplica un *factor de seguridad* que depende del uso que se dará al miembro, para obtener la carga permisible que el elemento puede soportar.

Procedimiento de análisis

Cuando se resuelven problemas usando las ecuaciones del esfuerzo normal promedio y cortante promedio, primero debe hacerse una consideración cuidadosa para elegir la sección sobre la que actúa el esfuerzo crítico. Una vez determinada esta sección, debe diseñarse el elemento de forma que tenga un área suficiente en la sección para resistir el esfuerzo que actúa sobre él. Esta área se determina mediante los siguientes pasos.

Carga interna.

- Seccione el elemento a través del área y trace un diagrama de cuerpo libre de un segmento del elemento. Después determine la fuerza interna resultante en la sección, mediante las ecuaciones de equilibrio.

Área requerida.

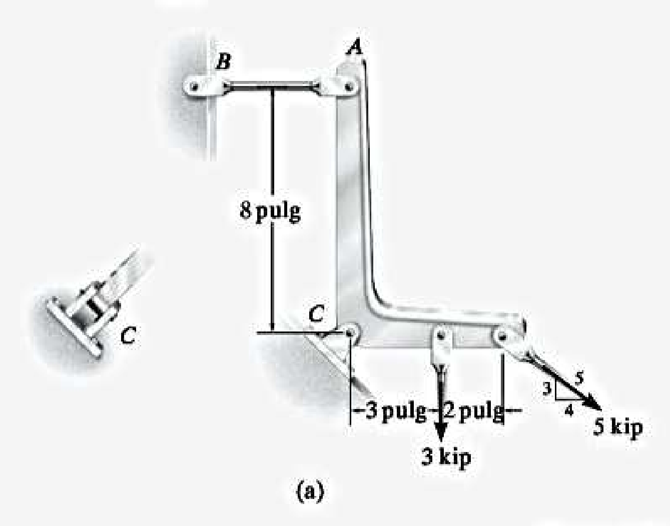
- Siempre que el esfuerzo permisible se conozca o pueda determinarse, el área requerida necesaria para sostener la carga en la sección se determina a partir de $A = P/\sigma_{perm}$ o $A = V/\tau_{perm}$.



Al diseñar grúas y cables que se utilizan para trasladar cargas pesadas, deben considerarse factores de seguridad adecuados.

EJEMPLO 1.13

El brazo de control está sometido a la carga mostrada en la figura 1-26*a*. Determine el diámetro requerido, con una aproximación de $\frac{1}{4}$ pulg, para el pasador de acero en *C* si el esfuerzo cortante permisible para el acero es $\tau_{perm} = 8$ ksi.



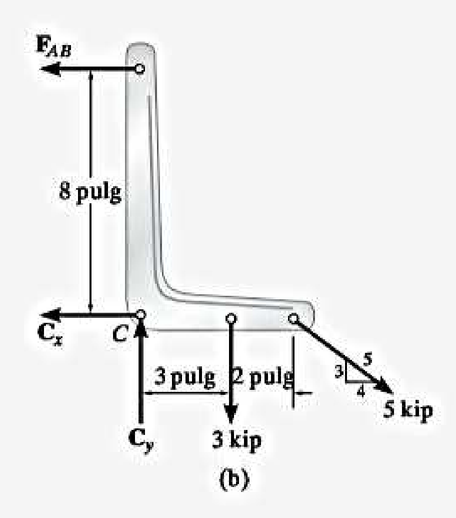


Figura 1-26

SOLUCIÓN

Fuerza cortante interna. En la figura 1-26*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del brazo. Por equilibrio, se tiene

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad F_{AB}(8 \text{ pulg}) - 3 \text{ kip } (3 \text{ pulg}) - 5 \text{ kip } \left(\tfrac{3}{5}\right)(5 \text{ pulg}) = 0$$

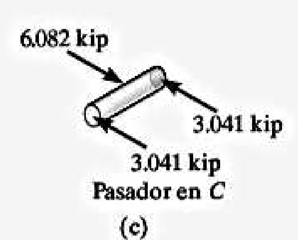
$$F_{AB} = 3 \text{ kip}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -3 \text{ kip} - C_x + 5 \text{ kip } \left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 \qquad C_x = 1 \text{ kip}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad C_y - 3 \text{ kip} - 5 \text{ kip } \left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \qquad C_y = 6 \text{ kip}$$

El pasador en *C* resiste la fuerza resultante en *C*, que es

$$F_C = \sqrt{(1 \text{ kip})^2 + (6 \text{ kip})^2} = 6.082 \text{ kip}$$



Pasador en *C*

(c)

Como el pasador está sometido a cortante doble, una fuerza cortante de 3.041 kip actúa sobre el área de su sección transversal *entre* el brazo y cada hoja de soporte para el pasador, figura 1-26*c*.

Área requerida. Se tiene

$$A = \frac{V}{\tau_{perm}} = \frac{3.041 \text{ kip}}{8 \text{ kip/pulg}^2} = 0.3802 \text{ pulg}^2$$

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0.3802 \text{ pulg}^2$$

$$d = 0.696 \text{ pulg}$$

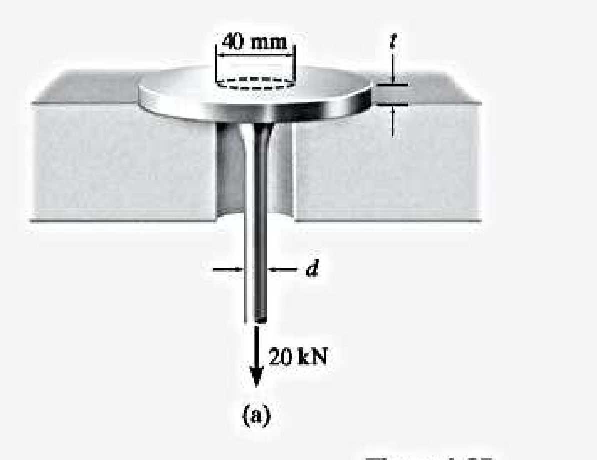
Se usará un pasador con diámetro de

$$d = \tfrac{3}{4} \text{ pulg} = 0.750 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

1

EJEMPLO 1.14

La barra colgante está suspendida en su extremo por un disco circular rígidamente unido a ella, como se muestra en la figura 1-27*a*. Si la barra pasa por un agujero con diámetro de 40 mm, determine el diámetro mínimo requerido de la barra y el espesor mínimo del disco necesario para soportar la carga de 20 kN. El esfuerzo normal permisible para la barra es $\sigma_{\text{perm}} = 60$ MPa y el esfuerzo cortante permisible para el disco es $\tau_{\text{perm}} = 35$ MPa.



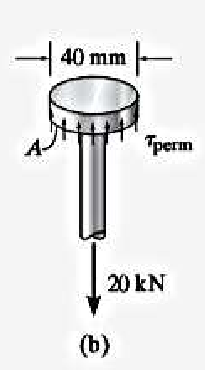


Figura 1-27

SOLUCIÓN

Diámetro de la barra. Por inspección, la fuerza axial en la barra es de 20 kN. Así, el área requerida para la sección transversal de la barra es

$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{perm}}}; \qquad \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{20(10^3)\text{ N}}{60(10^6)\text{ N/m}^2}$$

de modo que

$$d = 0.0206 \text{ m} = 20.6 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Espesor del disco. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 1-27*b*, el material en el área seccionada del disco debe resistir un *esfuerzo cortante* para impedir el movimiento del disco a través del agujero. Si se *supone* que este esfuerzo cortante está uniformemente distribuido sobre el área seccionada, entonces, como $V = 20$ kN, se tiene

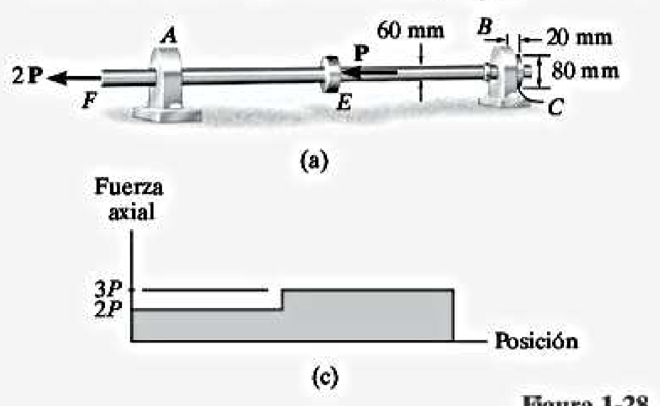
$$A = \frac{V}{\tau_{\text{perm}}}; \qquad 2\pi(0.02\text{ m})(t) = \frac{20(10^3)\text{ N}}{35(10^6)\text{ N/m}^2}$$

$$t = 4.55(10^{-3})\text{ m} = 4.55 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

1

EJEMPLO 1.15

El eje de la figura 1-28*a* se sostiene mediante el collarín en *C*, que está unido al eje y se sitúa del lado derecho del cojinete en *B*. Determine el mayor valor de *P* para las fuerzas axiales en *E* y *F* de manera que el esfuerzo de aplastamiento en el collarín no sea superior a un esfuerzo permisible de $(\sigma_b)_{perm} = 75$ MPa, y el esfuerzo normal promedio en el eje no exceda un esfuerzo permisible de $(\sigma_t)_{perm} = 55$ MPa.



2 P P 3P

(b)

Figura 1-28

SOLUCIÓN

Para resolver el problema se determinará *P* para cada posible condición de falla. Después se elegirá el valor *más pequeño*. ¿Por qué?

Esfuerzo normal. Usando el método de las secciones, la carga axial dentro de la región *FE* del eje es 2*P*, siempre que la *mayor* fuerza axial, 3*P*, ocurra dentro de la región *CE*, figura 1-28*b*. La variación de la carga interna se muestra claramente en el diagrama de fuerza normal de la figura 1-28*c*. Como el área de la sección transversal de todo el eje es constante, la región *CE* está sometida al máximo esfuerzo normal promedio. Al aplicar la ecuación 1-11, se tiene

$$A = \frac{P}{\sigma_{perm}}; \qquad \pi(0.03\text{ m})^2 = \frac{3P}{55(10^6)\text{ N/m}^2}$$

$$P = 51.8\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Esfuerzo de aplastamiento. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 1-28*d*, el collarín en *C* debe resistir la carga de 3*P*, que actúa sobre un área de apoyo $A_b = [\pi(0.04\text{ m})^2 - \pi(0.03\text{ m})^2] = 2.199(10^{-3})\text{ m}^2$. Por lo tanto,

3P C

(d)

$$A = \frac{P}{\sigma_{perm}}; \qquad 2.199(10^{-3})\text{ m}^2 = \frac{3P}{75(10^6)\text{ N/m}^2}$$

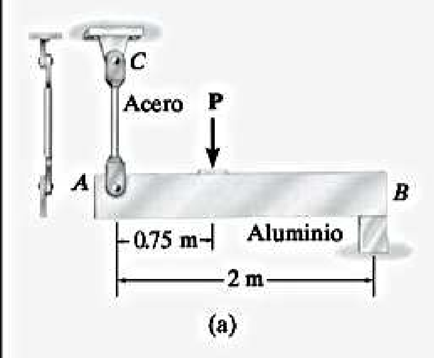
$$P = 55.0\text{ kN}$$

Por comparación, la carga máxima que puede aplicarse al eje es $P = 51.8$ kN, ya que cualquier carga más grande que ésta, provocará que se exceda el esfuerzo normal permisible en el eje.

NOTA: Aquí no se ha considerado una posible falla por cortante en el collarín como en el ejemplo 1.14.

1

EJEMPLO 1.16



La barra rígida AB que se muestra en la figura 1-29*a* la soporta una barra de acero AC que tiene un diámetro de 20 mm y un bloque de aluminio con un área transversal de 1800 mm². Los pasadores de 18 mm de diámetro en A y C están sometidos a *cortante simple*. Si el esfuerzo de falla para el acero y el aluminio es $(\sigma_{ac})_{falla} = 680$ MPa y $(\tau_{al})_{falla} = 70$ MPa, respectivamente, y el esfuerzo cortante de falla para cada pasador es $\tau_{falla} = 900$ MPa, determine la carga máxima P que puede aplicarse a la barra. Aplique un factor de seguridad F.S. = 2.

SOLUCIÓN

Mediante las ecuaciones 1-9 y 1-10, los esfuerzos permisibles son

$$(\sigma_{ac})_{perm} = \frac{(\sigma_{ac})_{falla}}{\text{F.S.}} = \frac{680 \text{ MPa}}{2} = 340 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_{al})_{perm} = \frac{(\sigma_{al})_{falla}}{\text{F.S.}} = \frac{70 \text{ MPa}}{2} = 35 \text{ MPa}$$

$$\tau_{perm} = \frac{\tau_{falla}}{\text{F.S.}} = \frac{900 \text{ MPa}}{2} = 450 \text{ MPa}$$

En la figura 1-29*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre para la barra. Existen tres incógnitas. Aquí se aplicarán las ecuaciones de equilibrio para expresar F_{AC} y F_B en términos de la carga P aplicada. Se tiene

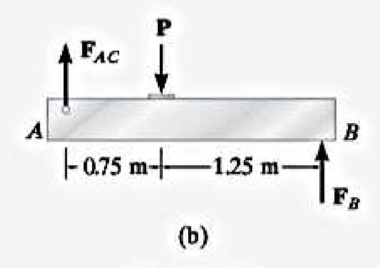


Figura 1-29

$$\circlearrowleft+\Sigma M_B = 0; \qquad P(1.25 \text{ m}) - F_{AC}(2 \text{ m}) = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_A = 0; \qquad F_B(2 \text{ m}) - P(0.75 \text{ m}) = 0 \qquad (2)$$

Ahora se determinará cada valor de P que genera el esfuerzo permisible en la barra, el bloque y los pasadores, respectivamente.

Barra *AC*. Se requiere

$$F_{AC} = (\sigma_{ac})_{perm}(A_{AC}) = 340(10^6) \text{ N/m}^2 [\pi(0.01 \text{ m})^2] = 106.8 \text{ kN}$$

Usando la ecuación 1,

$$P = \frac{(106.8 \text{ kN})(2 \text{ m})}{1.25 \text{ m}} = 171 \text{ kN}$$

Bloque *B*. En este caso,

$$F_B = (\sigma_{al})_{perm} A_B = 35(10^6) \text{ N/m}^2 [1800 \text{ mm}^2 (10^{-6}) \text{ m}^2/\text{mm}^2] = 63.0 \text{ kN}$$

Usando la ecuación 2,

$$P = \frac{(63.0 \text{ kN})(2 \text{ m})}{0.75 \text{ m}} = 168 \text{ kN}$$

Pasador *A* o *C*. Debido al cortante simple,

$$F_{AC} = V = \tau_{prom} A = 450(10^6) \text{ N/m}^2 [\pi(0.009 \text{ m})^2] = 114.5 \text{ kN}$$

A partir de la ecuación 1,

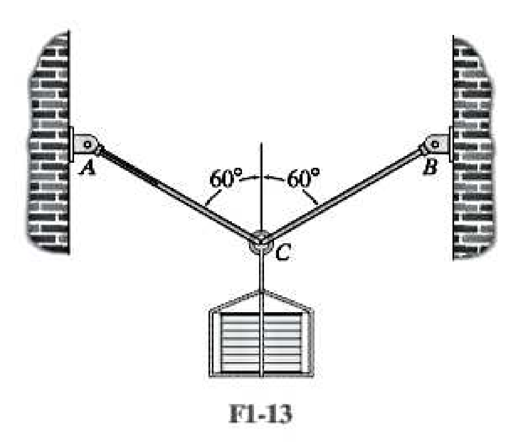
$$P = \frac{114.5 \text{ kN } (2 \text{ m})}{1.25 \text{ m}} = 183 \text{ kN}$$

Por comparación, cuando P alcanza su *valor más pequeño* (168 kN), el esfuerzo normal permisible se desarrollará primero en el bloque de aluminio. Por consiguiente,

$$P = 168 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

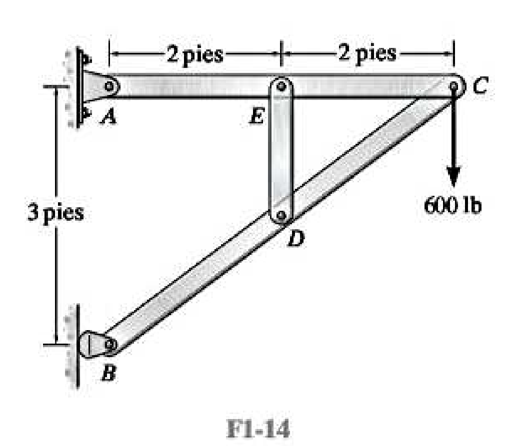
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F1-13. Las varillas AC y BC se usan para suspender la masa de 200 kg. Si cada varilla está fabricada de un material para el cual el esfuerzo normal promedio no puede superar 150 MPa, determine el diámetro mínimo requerido para cada varilla con una precisión de 1 mm.



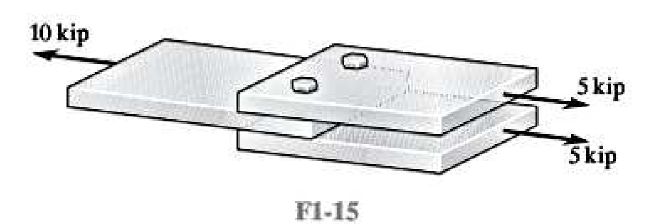
F1-13

F1-14. El bastidor soporta la carga indicada. El pasador en A tiene un diámetro de 0.25 pulg. Si está sometido a cortante doble, determine el esfuerzo cortante promedio en el pasador.



F1-14

F1-15. Determine el máximo esfuerzo cortante promedio desarrollado en cada pasador de $\frac{3}{4}$ de pulg de diámetro.



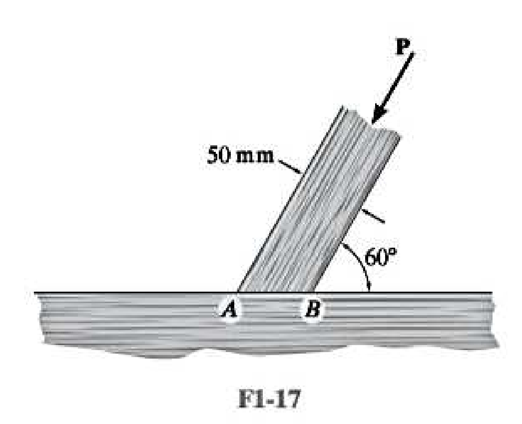
F1-15

F1-16. Si cada uno de los tres clavos tiene un diámetro de 4 mm y puede soportar un esfuerzo cortante promedio de 60 MPa, determine la máxima fuerza permisible **P** que puede aplicarse a la tabla.



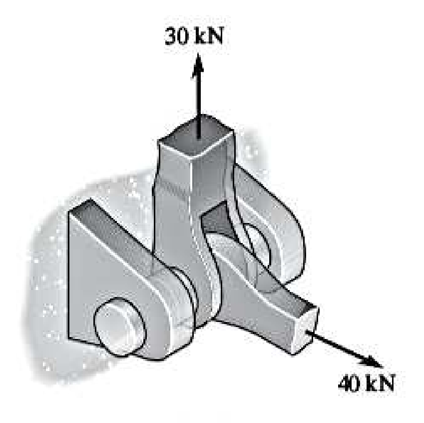
F1-16

F1-17. El puntal está pegado al elemento horizontal en la superficie AB. Si el puntal tiene un espesor de 25 mm y el pegamento puede soportar un esfuerzo cortante promedio de 600 kPa, determine la máxima fuerza **P** que puede aplicarse al puntal.



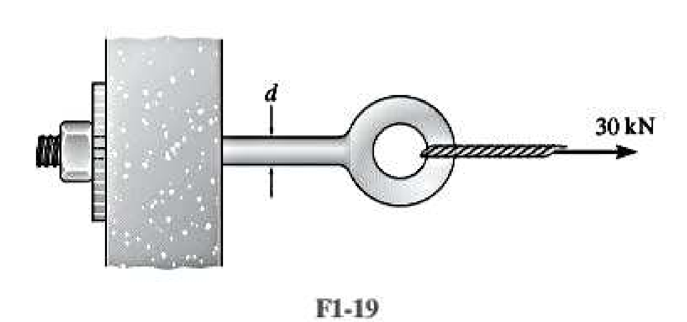
F1-17

F1-18. Determine el máximo esfuerzo cortante promedio desarrollado en el pasador de 30 mm de diámetro.



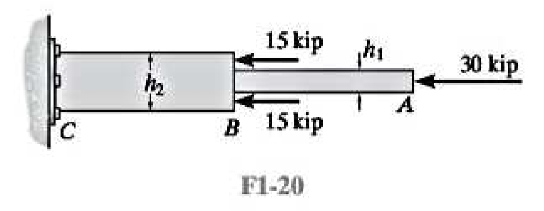
F1-18

F1-19. Si la armella está fabricada de un material que tiene un esfuerzo de cedencia $\sigma_Y = 250$ MPa, determine el diámetro mínimo d requerido en su vástago. Aplique un factor de seguridad F.S. = 1.5 contra la cedencia.



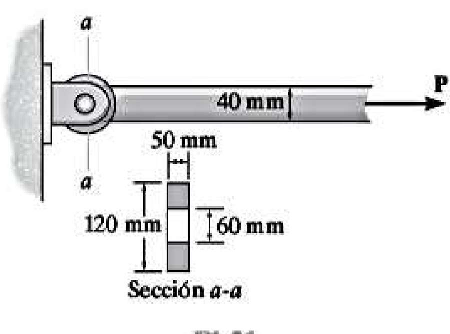
F1-19

F1-20. Si la barra compuesta está fabricada de un material que tiene un esfuerzo de cedencia $\sigma_Y = 50$ ksi, determine las dimensiones mínimas requeridas h_1 y h_2 con una precisión de 1/8 de pulgada. Aplique un factor de seguridad F.S. = 1.5 contra la cedencia. Cada barra tiene un espesor de 0.5 pulg.



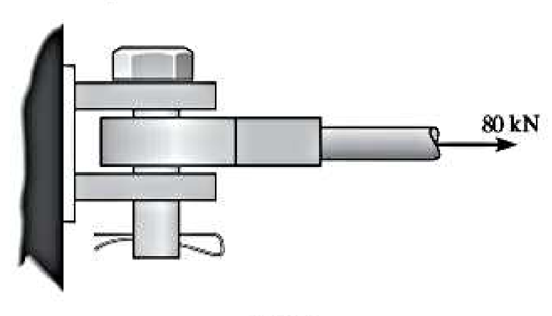
F1-20

F1-21. Determine la máxima fuerza **P** que puede aplicarse a la barra si está fabricada de un material con un esfuerzo de cedencia $\sigma_Y = 250$ MPa. Considere la posibilidad de que ocurra una falla en la barra, en la sección *a-a*. Aplique un factor de seguridad F.S. = 2 contra la cedencia.



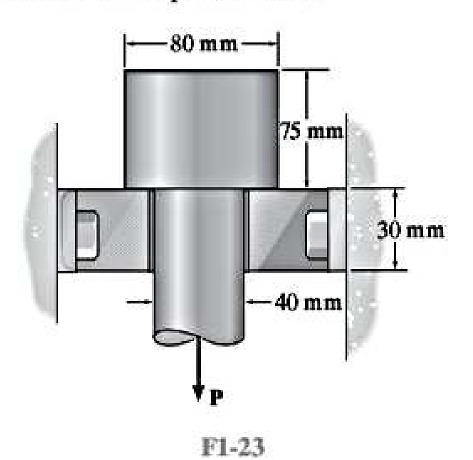
F1-21

F1-22. El pasador está fabricado de un material que tiene un esfuerzo cortante de falla $\tau_{falla} = 100$ MPa. Determine el diámetro mínimo requerido para el perno con una precisión de 1 mm. Aplique un factor de seguridad F.S. = 2.5 contra la falla por cortante.



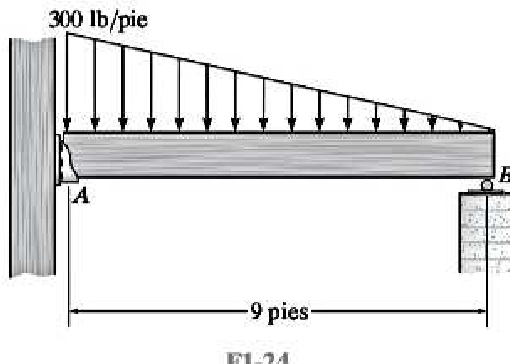
F1-22

F1-23. Si la cabeza del perno y la ménsula de apoyo están fabricadas del mismo material con un esfuerzo cortante de falla $\tau_{falla} = 120$ MPa, determine la fuerza máxima permisible **P** que puede aplicarse al perno, de modo que éste no pase a través de la placa. Aplique un factor de seguridad F.S. = 2.5 contra la falla por cortante.



F1-23

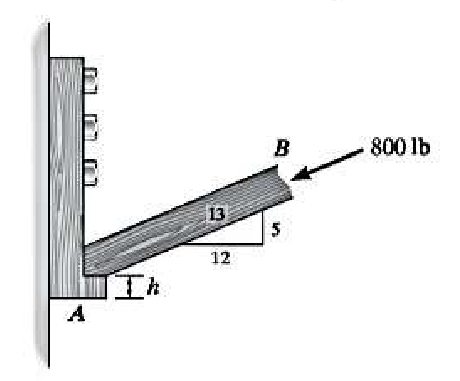
F1-24. Se usan seis clavos para sostener el soporte en *A* contra la columna. Determine el diámetro mínimo requerido de cada clavo con una precisión de 1/16 pulg si está fabricado de un material que tiene $\tau_{falla} = 16$ ksi. Aplique un factor de seguridad F.S. = 2 contra la falla por cortante.



F1-24

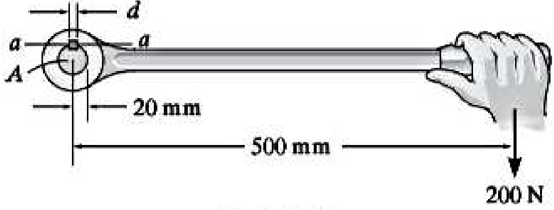
PROBLEMAS

• **1-73.** El elemento B está sometido a una fuerza de compresión de 800 lb. Si A y B están fabricados de madera y tienen $\frac{3}{8}$ de pulg de espesor, determine con una precisión de $\frac{1}{4}$ de pulg la mínima dimensión h del segmento horizontal de tal forma que no falle por cortante. El esfuerzo cortante promedio permisible para el segmento es $\tau_{perm} = 300$ psi.



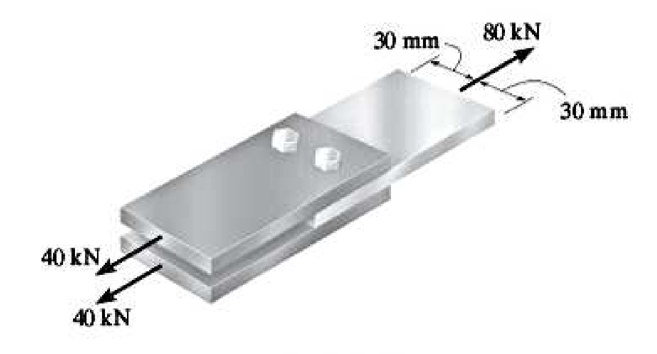
Prob. 1-73

1-74. La palanca está unida al eje A por medio de una cuña que tiene un ancho d y una longitud de 25 mm. Si el eje está fijo y se aplica una fuerza vertical de 200 N en forma perpendicular al mango, determine la dimensión d si el esfuerzo cortante permisible para la cuña es $\tau_{perm} =$ 35 MPa.



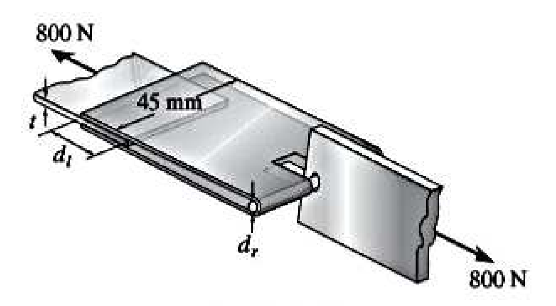
Prob. 1-74

1-75. La junta se mantiene sujeta mediante dos pernos. Determine el diámetro requerido de los pernos si el esfuerzo cortante de falla para éstos es $\tau_{falla} = 350$ MPa. Use un factor de seguridad para cortante F.S. = 2.5.



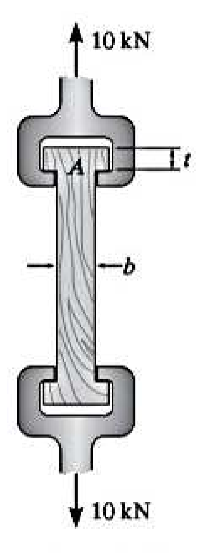
Prob. 1-75

* **1-76.** El empalme de banda estará sometido a una fuerza de 800 N. Determine (a) el espesor t requerido de la banda si el esfuerzo de tensión permisible para el material es $(\sigma_t)_{perm} = 10$ MPa, (b) la longitud requerida d_l del empalme si el pegamento puede soportar un esfuerzo cortante permisible $(\tau_{perm})_g = 0.75$ MPa y (c) el diámetro requerido d_r del pasador si el esfuerzo cortante permisible para éste es $(\tau_{perm})_p = 30$ MPa.



Prob. 1-76

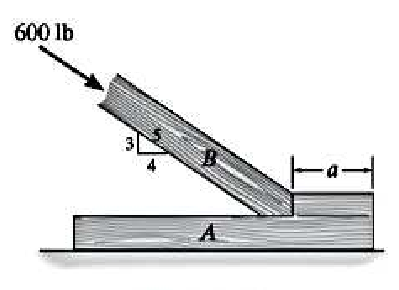
•**1-77.** La probeta de madera está sometida a una fuerza de tensión de 10 kN en una máquina de ensayo de tensión. Si el esfuerzo normal permisible para la madera es $(\sigma_t)_{perm} = 12$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} =$ 1.2 MPa, determine las dimensiones requeridas b y t de modo que la probeta alcance estos esfuerzos de manera simultánea. La probeta tiene un ancho de 25 mm.



Prob. 1-77

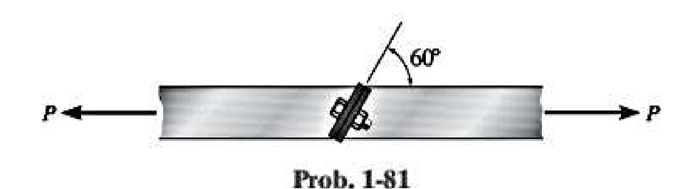
1

1-78. El elemento B está sometido a una fuerza de compresión de 600 lb. Si A y B son de madera y tienen 1.5 pulg de espesor, determine con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg la menor dimensión a del soporte de tal forma que el esfuerzo cortante promedio a lo largo de la línea gris en a no exceda $\tau_{perm} = 50$ psi. No tome en cuenta la fricción.



Prob. 1-78

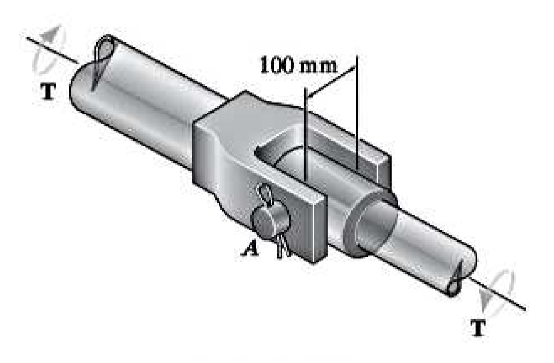
•1-81. El elemento a tensión se mantiene sujeto mediante *dos* pernos, uno a cada lado del elemento, como se muestra en la figura. Cada perno tiene un diámetro de 0.3 pulg. Determine la carga máxima P que puede aplicarse a los elementos si el esfuerzo cortante permisible para los pernos es $\tau_{perm} = 12$ ksi y el esfuerzo normal promedio permisible es $\sigma_{perm} = 20$ ksi.



Prob. 1-81

1-79. La articulación se utiliza para transmitir un momento de torsión $T = 3$ kN · m. Determine el diámetro mínimo requerido del pasador cortable A si está hecho de un material con esfuerzo cortante de falla de $\tau_{falla} = 150$ MPa. Aplique un factor de seguridad de 3 contra la falla.

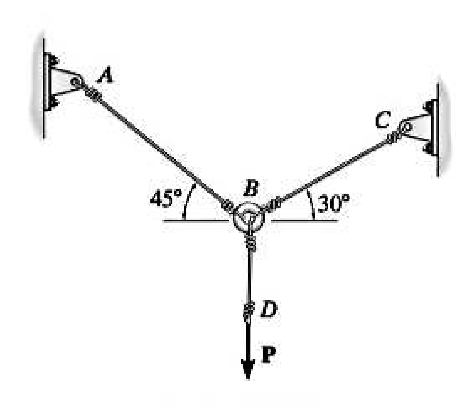
***1-80.** Determine el máximo momento de torsión permisible T que puede transmitirse mediante la junta. El pasador cortante A tiene un diámetro de 25 mm y está fabricado de un material con esfuerzo cortante de falla $\tau_{falla} = 150$ MPa. Aplique un factor de seguridad de 3 contra la falla.



Probs. 1-79/80

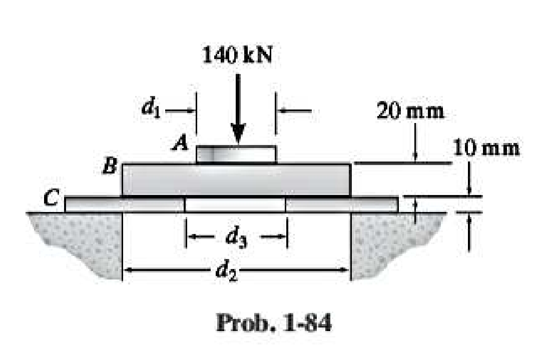
1-82. Los tres cables de acero se usan para sostener la carga. Si los cables tienen un esfuerzo de tensión permisible de $\sigma_{perm} = 165$ MPa, determine el diámetro requerido para cada cable si la carga aplicada es $P = 6$ kN.

1-83. Los tres cables de acero se usan para sostener la carga. Si los cables tienen un esfuerzo de tensión permisible de $\sigma_{perm} = 165$ MPa y el cable AB tiene un diámetro de 6 mm, BC un diámetro de 5 mm y BD un diámetro de 7 mm, determine la mayor fuerza P que puede aplicarse antes de que cualquiera de los cables falle.



Probs. 1-82/83

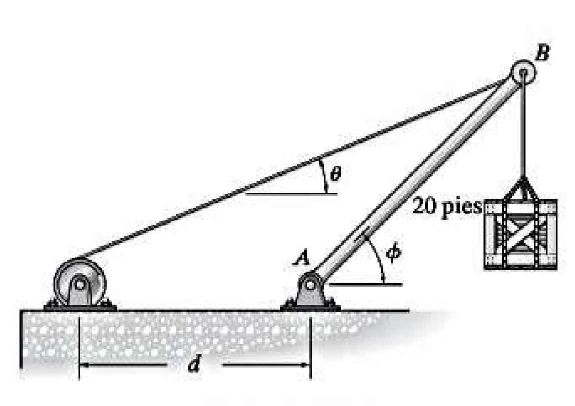
***1-84.** El ensamble consta de tres discos A, B y C que se usan para soportar la carga de 140 kN. Determine el diámetro más pequeño d_1 del disco superior, el diámetro d_2 dentro del espacio de apoyo y el diámetro d_3 del agujero en el disco inferior. El esfuerzo cortante permisible para el material es $(\sigma_{perm})_b = 350$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 125$ MPa.



Prob. 1-84

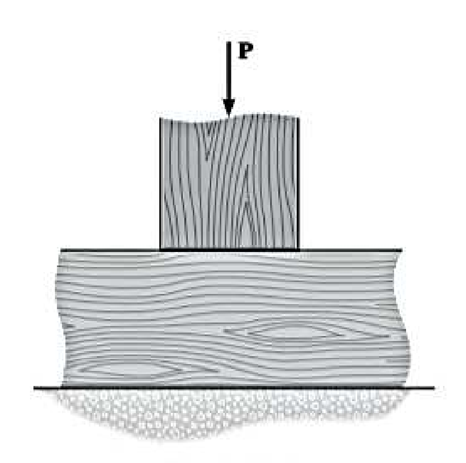
•**1-85.** El aguilón se sostiene mediante un cable de malacate con un diámetro de 0.25 pulg y un esfuerzo normal permisible $\sigma_{perm} = 24$ ksi. Determine la carga máxima que se puede soportar sin ocasionar que el cable falle cuando $\theta = 30°$ y $\phi = 45°$. No tome en cuenta el tamaño del malacate.

1-86. El aguilón se sostiene mediante un cable de malacate que tiene un esfuerzo normal permisible $\sigma_{perm} = 24$ ksi. Si se requiere que éste sea capaz de levantar lentamente 5000 lb, desde $\theta = 20°$ hasta $\theta = 50°$, determine el diámetro mínimo del cable con una precisión de $\frac{1}{16}$ de pulg. El aguilón AB tiene una longitud de 20 pies. No tome en cuenta el tamaño del malacate. Considere que $d = 12$ pies.



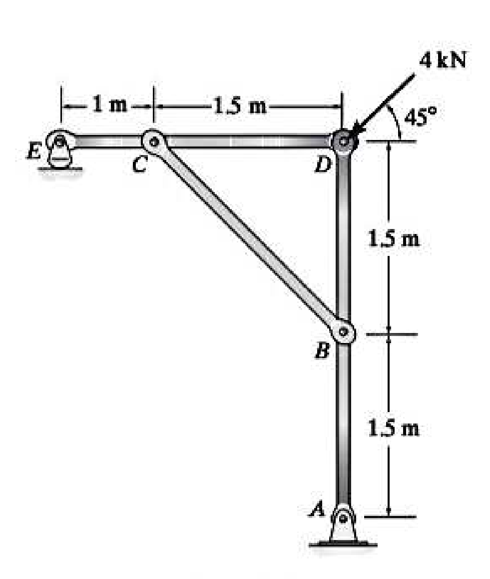
Probs. 1-85/86

1-87. El poste de roble de 60 mm × 60 mm se sostiene sobre el bloque de pino. Si el esfuerzo de aplastamiento permisible para estos materiales es $\sigma_{roble} = 43$ MPa y $\sigma_{pino} = 25$ MPa, determine la mayor carga P que pueden soportar. Si entre estos materiales se usa una placa rígida de apoyo, determine su área requerida de tal forma que puedan soportar la carga máxima P. ¿Cuál es esta carga?



Prob. 1-87

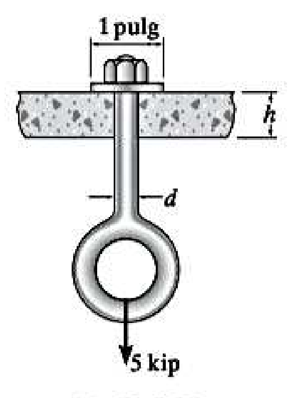
***1-88.** El bastidor está sometido a una carga de 4 kN que actúa sobre el elemento ABD en D. Determine el diámetro requerido de los pernos en D y C si el esfuerzo cortante permisible para el material es $\tau_{perm} = 40$ MPa. El pasador C está sometido a cortante doble mientras que el pasador D está sometido a cortante simple.



Prob. 1-88

1

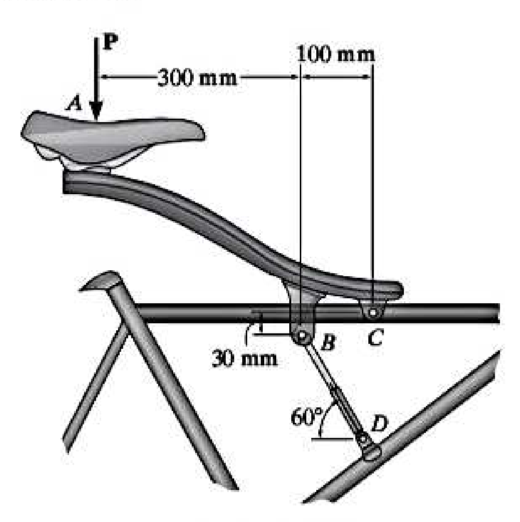
•**1-89.** La armella se usa para soportar una carga de 5 kip. Determine con una precisión de $\frac{1}{2}$ de pulg su diámetro d y el espesor requerido h del soporte, de tal forma que la rondana no lo penetre o corte. El esfuerzo normal permisible para el perno es $\sigma_{perm} = 21$ ksi y el esfuerzo cortante permisible para el material de apoyo es $\tau_{perm} = 5$ ksi.



Prob. 1-89

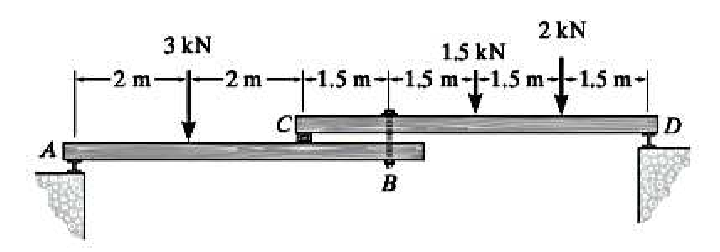
1-90. El sistema de suspensión de manejo suave de la bicicleta de montaña está articulado en C y se encuentra apoyado por el amortiguador BD. Si está diseñado para soportar una carga $P = 1500$ N, determine el diámetro mínimo requerido de los pasadores B y C. Use un factor de seguridad de 2 contra la falla. Los pasadores son de un material con esfuerzo cortante de falla $\tau_{falla} = 150$ MPa y cada uno de ellos está sometido a cortante doble.

1-91. El sistema de suspensión de manejo suave de la bicicleta de montaña está articulado en C y se encuentra apoyado por el amortiguador BD. Si está diseñado para soportar una carga $P = 1500$ N, determine el factor de seguridad de los pasadores B y C contra la falla si están hechos de un material con esfuerzo cortante de falla $\tau_{falla} = 150$ MPa. El pasador B tiene un diámetro de 7.5 mm, y el pasador de C de 6.5 mm. Ambos pasadores están sometidos a cortante doble.



Probs. 1-90/91

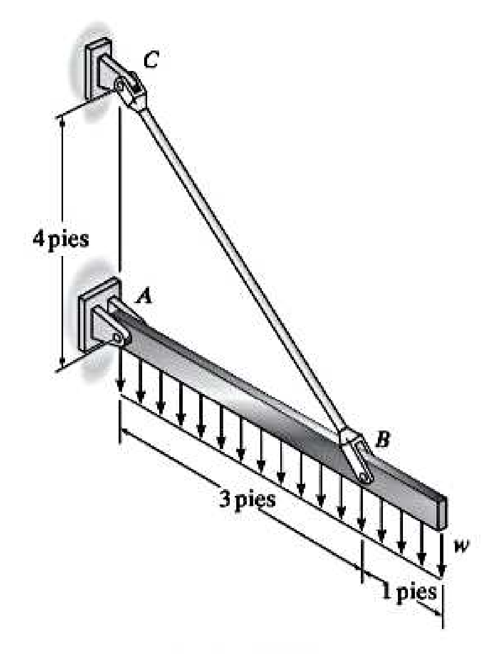
***1-92.** La viga compuesta de madera se mantiene sujeta mediante un perno en B. Si se supone que las conexiones en A, B, C y D sólo ejercen fuerzas verticales sobre la viga, determine el diámetro requerido del perno en B y el diámetro exterior requerido de sus rondanas si el esfuerzo de tensión permisible para el perno es $(\sigma_t)_{perm} = 150$ MPa y el esfuerzo de aplastamiento permisible para la madera es $(\sigma_b)_{perm} = 28$ MPa. Suponga que el orificio de las rondanas tiene el mismo diámetro que el perno.



Prob. 1-92

•**1-93.** El ensamble se usa para soportar la carga distribuida de $w = 500$ lb/pie. Determine el factor de seguridad con respecto a la cedencia para la barra de acero BC y los pasadores en B y C si el esfuerzo de cedencia para el acero en tensión es $\sigma_y = 36$ ksi y en cortante $\tau_y = 18$ ksi. La barra tiene un diámetro de 0.40 pulg y cada uno de los pernos tiene un diámetro de 0.30 pulg.

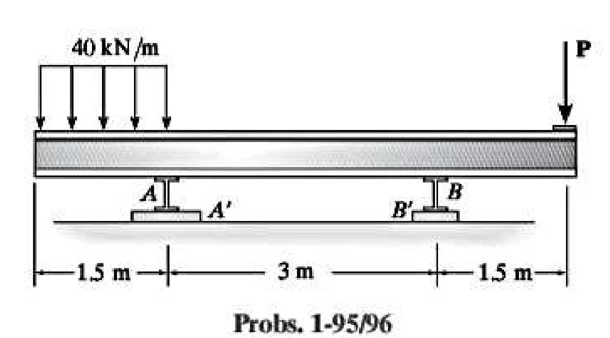
1-94. Si el esfuerzo cortante permisible para cada uno de los pernos de acero de 0.30 pulg de diámetro en A, B y C es $\tau_{perm} = 12.5$ ksi y el esfuerzo normal permisible para la barra de 0.40 pulg de diámetro es $\sigma_{perm} = 22$ ksi, determine la máxima intensidad w de la carga uniformemente distribuida que puede suspenderse de la viga.



Probs. 1-93/94

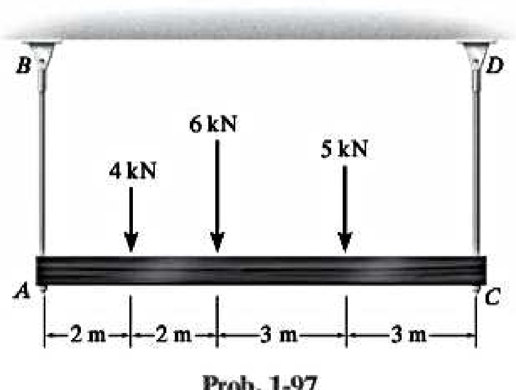
1-95. Si el esfuerzo de aplastamiento permisible para el material que se encuentra bajo los soportes en A y B es $(\sigma_b)_{\text{perm}} = 1.5$ MPa, determine el tamaño de las placas *cuadradas* de apoyo A' y B' necesarias para soportar la carga. Determine las dimensiones de las placas con una precisión de 1 mm. Las reacciones en los soportes son verticales. Considere que $P = 100$ kN.

***1-96.** Si el esfuerzo de aplastamiento permisible para el material que se encuentra bajo los soportes en A y B es $(\sigma_b)_{\text{perm}} = 1.5$ MPa, determine la carga máxima P que puede aplicarse a la viga. Las placas de apoyo A' y B' tienen secciones transversales cuadradas de 150 mm × 150 mm y 250 mm × 250 mm, respectivamente.



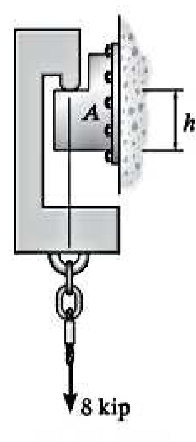
Probs. 1-95/96

•**1-97.** Las barras AB y CD son de acero con un esfuerzo de tensión de falla $\sigma_{\text{falla}} = 510$ MPa. Usando un factor de seguridad F.S. = 1.75 para la tensión, determine sus diámetros mínimos para que puedan soportar la carga mostrada. Se supone que la viga está conectada mediante pasadores en A y C.



Prob. 1-97

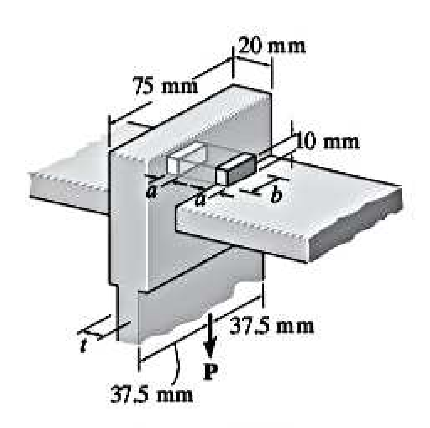
1-98. La ménsula de aluminio A se usa para soportar la carga centralmente aplicada de 8 kip. Si tiene un espesor constante de 0.5 pulg, determine la altura mínima h necesaria para evitar una falla por cortante. El esfuerzo cortante de falla es $\tau_{\text{falla}} = 23$ ksi. Use un factor de seguridad F.S. = 2.5.



Prob. 1-98

1-99. El soporte se sostiene mediante un pasador rectangular. Determine la magnitud de la carga suspendida permisible **P** si el esfuerzo de aplastamiento permisible es $(\sigma_b)_{\text{perm}} = 220$ MPa, el esfuerzo de tensión permisible es $(\sigma_t)_{\text{perm}} = 150$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{perm}} = 130$ MPa. Considere que $t = 6$ mm, $a = 5$ mm y $b = 25$ mm.

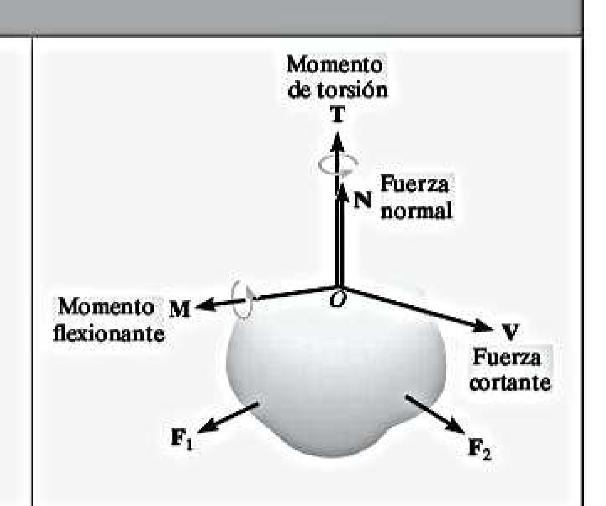
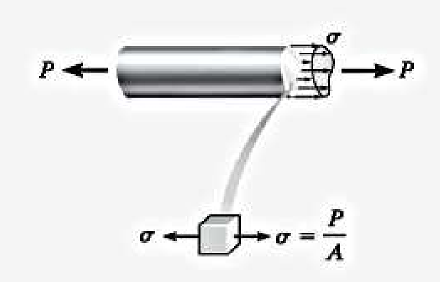
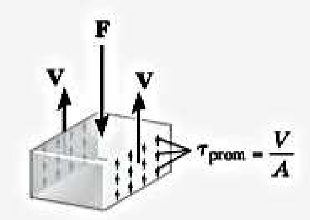
***1-100.** El soporte se sostiene mediante un pasador rectangular. Determine el espesor requerido t del soporte, y las dimensiones necesarias a y b si la carga suspendida es $P = 60$ kN. El esfuerzo de tensión permisible es $(\sigma_t)_{\text{perm}} = 150$ MPa, el esfuerzo de aplastamiento permisible es $(\sigma_b)_{\text{perm}} = 290$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{perm}} = 125$ MPa.



Probs. 1-99/100

1

REPASO DE CAPÍTULO

Las cargas internas en un cuerpo consisten en una fuerza normal, una fuerza cortante, un momento flexionante y un momento de torsión. Representan las resultantes de las distribuciones de esfuerzo normal y cortante que actúan sobre la sección transversal. Para obtener estas resultantes, use el método de las secciones y las ecuaciones de equilibrio.	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$	
Si una barra está fabricada de un material homogéneo e isotrópico y está sometida a una serie de cargas axiales externas que pasan por el centroide de la sección transversal, entonces una distribución de esfuerzo normal uniforme actúa sobre la sección transversal. Este esfuerzo normal promedio puede determinarse a partir de $\sigma = P/A$, donde P es la carga axial interna en la sección.	$\sigma = \dfrac{P}{A}$	
El esfuerzo cortante promedio puede determinarse mediante $\tau_{prom} = V/A$, donde V es la fuerza cortante que actúa sobre el área de la sección transversal A. Con frecuencia, esta fórmula se utiliza para encontrar el esfuerzo cortante promedio en sujetadores o en partes utilizadas en conexiones.	$\tau_{prom} = \dfrac{V}{A}$	
El diseño de cualquier conexión sencilla requiere que el esfuerzo promedio a lo largo de cualquier sección transversal no exceda un esfuerzo permisible de σ_{perm} o τ_{perm}. Estos valores se presentan en los códigos y se consideran seguros con base en experimentos o a través de la experiencia. En ocasiones, un factor de seguridad se declara siempre que se conozca el esfuerzo máximo.	$\text{F.S.} = \dfrac{\sigma_{falla}}{\sigma_{perm}} = \dfrac{\tau_{falla}}{\tau_{perm}}$	

PROBLEMAS CONCEPTUALES



P1-1

P1-1. Aquí, los vientos huracanados ocasionaron fractura de este señalamiento carretero. Si se supone que el viento crea una presión uniforme de 2 kPa sobre la señal, use dimensiones razonables para el señalamiento y determine la fuerza cortante y el momento resultantes en las dos conexiones donde se produjo el daño.



P1-2

P1-2. Los dos tubos estructurales se conectan mediante un pasador que los atraviesa. Si la carga vertical que soportan es de 100 kN, dibuje un diagrama de cuerpo libre del pasador y después utilice el método de las secciones para encontrar la fuerza cortante promedio máxima que actúa sobre él. Si el pasador tiene un diámetro de 50 mm, ¿cuál es el esfuerzo cortante promedio máximo en éste?



P1-3

P1-3. El cilindro hidráulico H aplica una fuerza horizontal F sobre el pasador en A. Dibuje un diagrama de cuerpo libre del pasador y muestre las fuerzas que actúan sobre él. Usando el método de las secciones, explique por qué el esfuerzo cortante promedio en el pasador es mayor en la secciones que pasan por las boquillas D y E, y no en alguna sección intermedia.



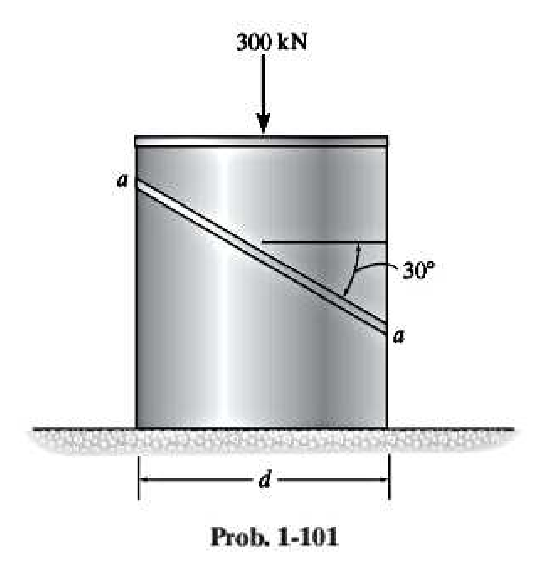
P1-4

P1-4. La carga vertical en el gancho es de 1000 lb. Dibuje los diagramas de cuerpo libre adecuados y determine la fuerza cortante promedio en los pasadores A, B y C. Observe que por simetría se usan cuatro ruedas para soportar la carga sobre el riel.

1

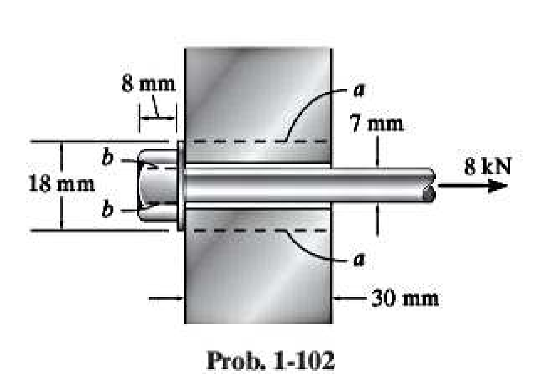
PROBLEMAS DE REPASO

•**1-101.** El cilindro de aluminio de 200 mm de diámetro soporta una carga de compresión de 300 kN. Determine los esfuerzos normal promedio y cortante promedio que actúan sobre la sección *a-a*. Muestre los resultados sobre un elemento diferencial situado en la sección.



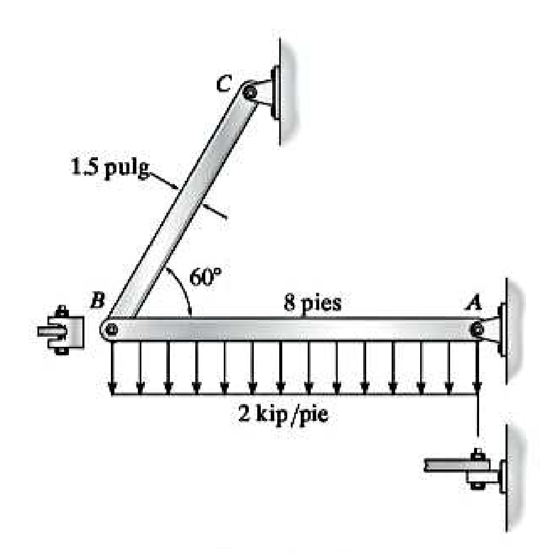
Prob. 1-101

1-102. Un perno largo pasa por la placa de 30 mm de espesor. Si la fuerza en el vástago del perno es de 8 kN, determine el esfuerzo normal promedio en el vástago, el esfuerzo cortante promedio a lo largo del área cilíndrica de la placa definida por la línea de corte *a-a*, y el esfuerzo cortante promedio en la cabeza del perno a lo largo del área cilíndrica definida por la línea de corte *b-b*.



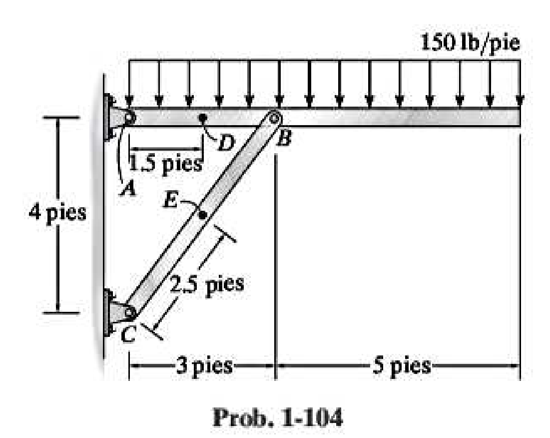
Prob. 1-102

1-103. Determine el espesor requerido del elemento *BC* y el diámetro de los pasadores en *A* y *B* si el esfuerzo normal permisible para el elemento *BC* es $\sigma_{perm} = 29$ ksi y el esfuerzo cortante permisible para los pasadores es $\tau_{perm} = 10$ ksi.



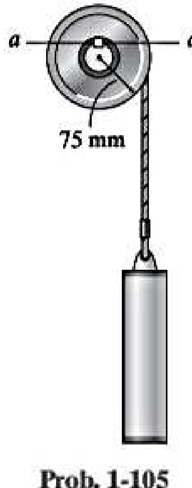
Prob. 1-103

***1-104.** Determine las cargas internas resultantes que actúan sobre las secciones transversales ubicadas a través de los puntos *D* y *E* del bastidor.



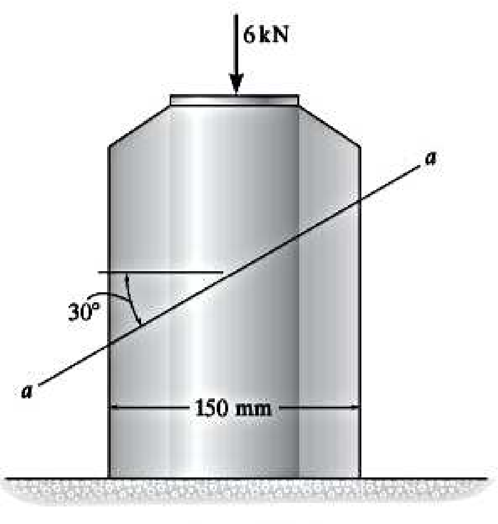
Prob. 1-104

•1-105. La polea se mantiene fija al eje de 20 mm de diámetro mediante una cuña que se ajusta dentro de una ranura ubicada tanto en la polea como en el eje. Si la carga suspendida tiene una masa de 50 kg, determine el esfuerzo cortante promedio en la cuña a lo largo de la sección *a-a*. La cuña tiene una sección cuadrada de 5 mm por 5 mm y una longitud de 12 mm.



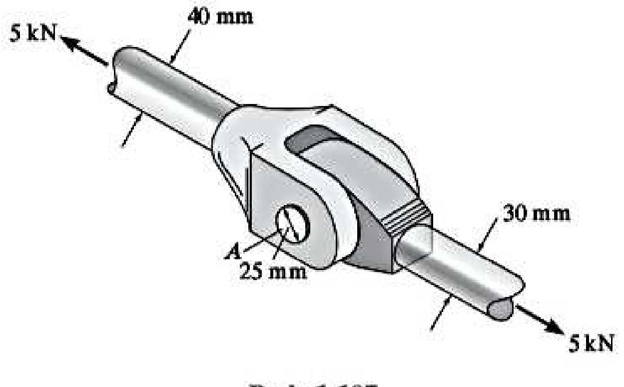
Prob. 1-105

1-106. La almohadilla de apoyo consiste en un bloque de aluminio de 150 mm por 150 mm que soporta una carga de compresión de 6 kN. Determine los esfuerzos normal promedio y cortante promedio que actúan sobre el plano que pasa por la sección *a-a*. Muestre los resultados sobre un elemento diferencial de volumen ubicado en el plano.



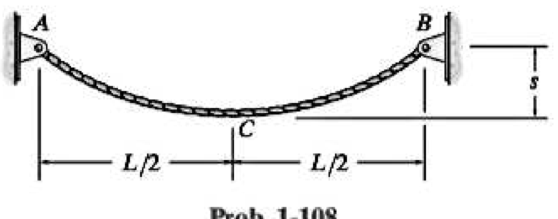
Prob. 1-106

1-107. La conexión de horqueta y barra está sometida a una fuerza de tensión de 5 kN. Determine el esfuerzo normal promedio en cada barra y el esfuerzo cortante promedio en el pasador *A* ubicado entre los elementos.

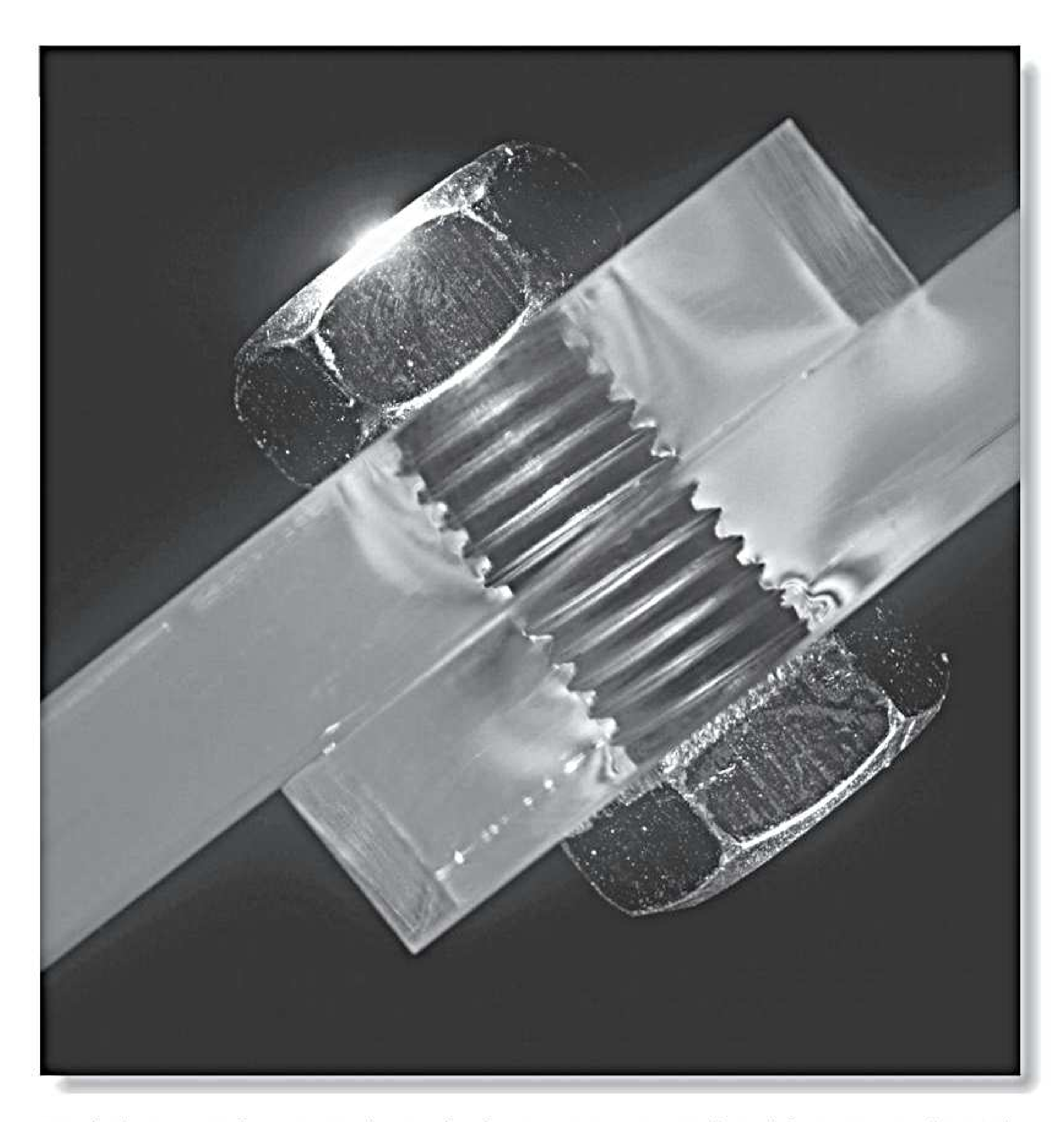


Prob. 1-107

*1-108. El cable tiene un peso específico γ (peso/volumen) y un área de sección transversal *A*. Si el pandeo *s* es pequeño, de modo que su longitud sea aproximadamente *L* y su peso se pueda distribuir de manera uniforme a lo largo del eje horizontal, determine el esfuerzo normal promedio del cable en su punto más bajo *C*.



Prob. 1-108



Cuando el perno causa la compresión de estas dos placas transparentes, se producen deformaciones en el material, las cuales se manifiestan como un espectro de colores bajo una luz polarizada. Estas deformaciones pueden relacionarse con el esfuerzo del material.

Deformación

2

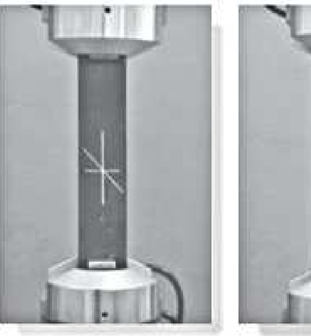
OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En ingeniería, la deformación de un cuerpo se especifica mediante los conceptos de deformación unitaria normal y cortante. En este capítulo se definirán estas cantidades y se mostrará cómo pueden determinarse en distintos tipos de problemas.

2.1 Deformación

Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, ésta tiende a cambiar la forma y el tamaño del cuerpo. Estos cambios se conocen como ***deformación***, la cual puede ser muy visible o casi imperceptible. Por ejemplo, una banda de goma (liga) experimentará una deformación muy grande al estirarse. En cambio, en un edificio sólo ocurren deformaciones ligeras en sus elementos estructurales cuando las personas caminan dentro de él. La deformación de un cuerpo también puede ocurrir cuando cambia su temperatura. Un ejemplo típico es la expansión o contracción térmica de un techo provocada por el clima.

En un sentido general, la deformación de un cuerpo no será uniforme en todo su volumen, por lo que el cambio en la geometría de cualquier segmento de línea dentro del cuerpo puede variar de forma considerable a lo largo de su longitud. Por lo tanto, para estudiar los cambios por deformación de una manera más uniforme, se considerarán segmentos de línea muy cortos, ubicados en las cercanías de un punto. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que estos cambios también dependerán de la orientación del segmento en dicho punto. Por ejemplo, un segmento de línea puede alargarse si está orientado en una dirección y puede contraerse si apunta a otra.



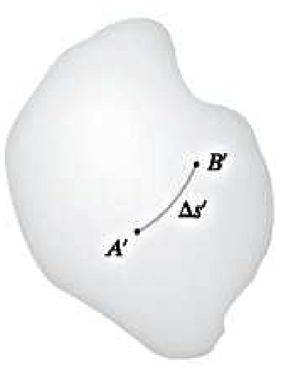


Observe las posiciones antes y después de tres segmentos de línea diferentes sobre esta membrana de goma sometida a tensión. La línea vertical se alarga, la línea horizontal se acorta y la línea inclinada cambia de longitud y gira.

2.2 Deformación unitaria

A fin de describir la deformación de un cuerpo mediante cambios en la longitud de los segmentos de línea y cambios en los ángulos que existen entre ellos, se desarrollará el concepto de deformación unitaria. La medición real de la deformación unitaria se hace por medio de experimentos, y una vez que se haya obtenido la deformación unitaria, en el siguiente capítulo se mostrará cómo puede relacionarse con el esfuerzo que actúa dentro del cuerpo.

Cuerpo no deformado
(a)



Cuerpo deformado
(b)

Figura 2-1

Deformación unitaria normal. Si se define la deformación unitaria normal como el cambio en la longitud de una línea por unidad de longitud, entonces no habrá necesidad de especificar la *longitud real* de cualquier segmento de línea en particular. Por ejemplo, considere la línea AB que está contenida dentro del cuerpo sin deformar de la figura 2-1*a*. Esta línea se ubica a lo largo del eje n y tiene una longitud inicial Δs. Después de la deformación, los puntos A y B se desplazan a los puntos A' y B', y la línea recta se convierte en una curva con una longitud de $\Delta s'$, figura 2-1*b*. El cambio en la longitud de la línea es entonces $\Delta s' - \Delta s$. Si se define la *deformación unitaria normal promedio* mediante el símbolo ϵ_{prom} (épsilon), entonces

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \qquad (2\text{-}1)$$

A medida que el punto B se elige cada vez más cerca del punto A, la longitud de la línea se hace cada vez menor, de manera que $\Delta s \rightarrow 0$. Además, esto causa que B' se aproxime a A', de modo que $\Delta s' \rightarrow 0$. Por consiguiente, en el límite, la deformación unitaria normal en el punto A y en la dirección de n es

$$\epsilon = \lim_{B \rightarrow A \text{ a lo largo de } n} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \qquad (2\text{-}2)$$

Por consiguiente, cuando ϵ (o ϵ_{prom}) es positiva, la línea inicial se alargará mientras que si ϵ es negativa, la línea se contrae.

Observe que la deformación unitaria normal es una *cantidad adimensional*, puesto que es una relación de dos longitudes. Aunque éste sea el caso, en ocasiones se establece en términos de una relación de unidades de longitud. Si se utiliza el sistema SI, entonces la unidad básica para la longitud es el metro (m). Por lo general, en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería ϵ será muy pequeña, por lo que las mediciones de la deformación unitaria se dan en micrometros por metro (μm/m), donde

$1\ \mu m = 10^{-6}$ m. En el sistema pie-libra-segundo la deformación unitaria suele establecerse en unidades de pulgadas por pulgada (pulg/pulg). A veces, para el trabajo experimental, la deformación unitaria se expresa como un porcentaje, por ejemplo, 0.001 m/m = 0.1%. A modo de ejemplo, una deformación unitaria normal de $480(10^{-6})$ se puede expresar como $480(10^{-6})$ pulg/pulg, 480 μm/m o 0.0480%. Asimismo, esta respuesta se puede establecer simplemente como 480 μ (480 "micras").

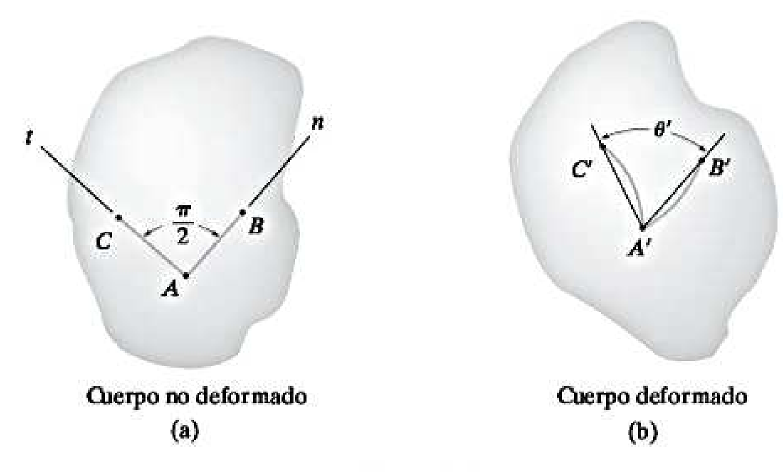
2

Deformación unitaria cortante.

Las deformaciones no sólo causan que los segmentos de línea se alarguen o contraigan, sino también hacen que cambien de dirección. Si se seleccionan dos segmentos de línea que en un principio eran perpendiculares entre sí, entonces el cambio en el ángulo que ocurre entre estos dos segmentos de línea se denomina ***deformación unitaria cortante***. Este ángulo se denota por γ (gamma) y siempre se mide en radianes (rad), que son unidades adimensionales. Por ejemplo, considere los segmentos de recta AB y AC que parten desde un mismo punto A en un cuerpo, y que están dirigidos a lo largo de los ejes perpendiculares n y t, figura 2-2a. Después de la deformación, los extremos de ambas líneas se desplazan, y las mismas líneas se vuelven curvas, de manera que el ángulo entre ellas en A es θ', figura 2-2b. Por consiguiente, la deformación unitaria cortante en el punto A que está asociada a los ejes n y T se convierte en

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{B \to A \text{ a lo largo de } n \\ C \to A \text{ a lo largo de } t}} \theta' \qquad (2\text{-}3)$$

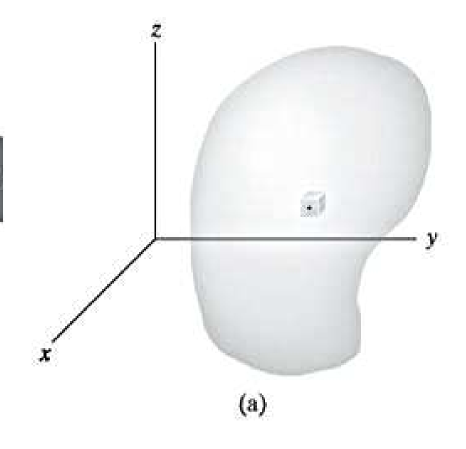
Observe que si θ' es menor que $\pi/2$, la deformación unitaria cortante es positiva, mientras que si θ' es mayor que $\pi/2$, la deformación unitaria cortante es negativa.



Cuerpo no deformado
(a)

Cuerpo deformado
(b)

Figura 2-2



(a)

2

Componentes cartesianas de la deformación unitaria.

Usando las definiciones de la deformación unitaria normal y cortante, ahora se mostrarán cómo pueden utilizarse para describir la deformación del cuerpo en la figura 2-3*a*. Para hacerlo, imagine que el cuerpo se subdivide en pequeños elementos como el que se muestra en la figura 2-3*b*. Este elemento es rectangular, tiene dimensiones no deformadas Δx, Δy y Δz, y se encuentra cerca de un punto en el cuerpo, figura 2-3*a*. Si las dimensiones del elemento son muy pequeñas, entonces su forma deformada será la de un paralelepípedo, figura 2-3*c*, ya que los segmentos de línea muy pequeños se mantendrán aproximadamente rectos después que el cuerpo se haya deformado. A fin de obtener esta deformación, se considerará primero la manera en que la deformación unitaria normal cambia la longitud de los lados del elemento rectangular, y después el modo en que la deformación unitaria cortante cambia los ángulos de cada lado. Por ejemplo, Δx se alarga a $\epsilon_x \Delta x$ y entonces su nueva longitud es $\Delta x + \epsilon_x \Delta x$. En consecuencia, las longitudes aproximadas de los tres lados del paralelepípedo son

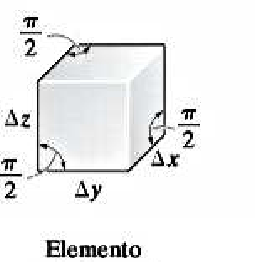
$$(1 + \epsilon_x)\,\Delta x \qquad (1 + \epsilon_y)\,\Delta y \qquad (1 + \epsilon_z)\,\Delta z$$

Y los ángulos aproximados entre estos lados son

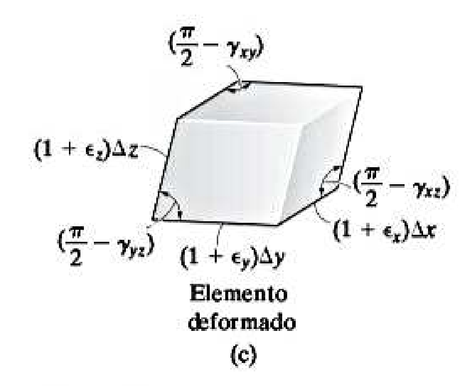
$$\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma_{xz}$$

Observe que las ***deformaciones unitarias normales causan un cambio en el volumen*** del elemento, mientras que las ***deformaciones unitarias cortantes causan un cambio en su forma***. Por supuesto, ambos cambios ocurren al mismo tiempo durante la deformación.

En resumen, el *estado de deformación unitaria* en un punto del cuerpo requiere que se especifiquen tres deformaciones unitarias normales, ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, y tres deformaciones unitarias cortantes γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}. Estas deformaciones unitarias describen por completo la deformación de un elemento de volumen rectangular de material ubicado en el punto y orientada de manera que sus lados sean originalmente paralelos a los ejes x, y y z. Una vez que se hayan definido estas deformaciones unitarias en todos los puntos del cuerpo, entonces se puede determinar la forma deformada del cuerpo.



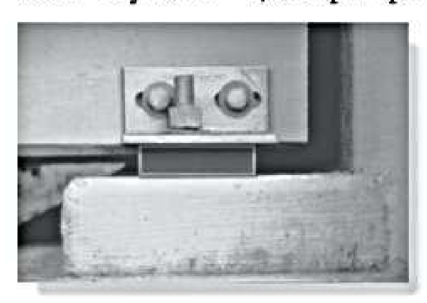
Elemento
no deformado
(b)



Elemento
deformado
(c)

Figura 2-3

Análisis de pequeñas deformaciones unitarias. La mayor parte de los diseños de ingeniería implican aplicaciones para las cuales sólo se admiten *deformaciones pequeñas*. Por lo tanto, en este libro se supondrá que las deformaciones que se producen dentro de un cuerpo son casi infinitesimales. En particular, las *deformaciones unitarias normales* que ocurren dentro del material son *muy pequeñas* en comparación con 1, es decir que $\epsilon \ll 1$. Este supuesto tiene una amplia aplicación práctica en la ingeniería, y a menudo se conoce como un *análisis de deformaciones unitarias pequeñas*. Por ejemplo, puede usarse para aproximar sen $\theta = \theta$, cos $\theta = 1$ y tan $\theta = \theta$, siempre que θ sea muy pequeño.



El soporte de goma bajo esta trabe de un puente de concreto está sometido a deformaciones unitarias normales y cortantes. La deformación unitaria normal es causada por el peso y las cargas del puente sobre la trabe, y la deformación cortante se debe al movimiento horizontal de la trabe por cambios en la temperatura.

Puntos importantes

- Las cargas hacen que todos los cuerpos materiales se deformen y, en consecuencia, los puntos en un cuerpo experimentarán *desplazamientos* o *cambios de posición*.
- La *deformación unitaria normal* es una medida por unidad de longitud de la elongación o contracción de un segmento de línea pequeño en el cuerpo, mientras que la *deformación unitaria cortante* es una medida del cambio en el ángulo que se produce entre dos pequeños segmentos de línea que originalmente eran perpendiculares entre sí.
- El estado de deformación unitaria en un punto se caracteriza por seis componentes de deformación: tres deformaciones normales ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, y tres de deformaciones cortantes γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}. Estos componentes dependen de la orientación original de los segmentos de línea y su ubicación en el cuerpo.
- La deformación unitaria es la cantidad geométrica que se mide mediante técnicas experimentales. Una vez obtenida, es posible determinar el esfuerzo en el cuerpo a partir de las relaciones entre las propiedades del material, tal como se analizará en el próximo capítulo.
- La mayoría de los materiales de ingeniería sufren deformaciones muy pequeñas, por lo que la deformación unitaria normal $\epsilon \ll 1$. Este supuesto del "análisis de deformaciones pequeñas" permite simplificar los cálculos de la deformación unitaria normal, ya que las aproximaciones de primer orden se pueden hacer con respecto a su tamaño.

EJEMPLO 2.1

2

La barra delgada mostrada en la figura 2-4 está sometida a un incremento de temperatura a lo largo de su eje, el cual produce una deformación unitaria normal en ésta de $\epsilon_z = 40(10^{-3})z^{1/2}$, donde z se expresa en metros. Determine (*a*) el desplazamiento del extremo B de la barra debido al aumento de la temperatura, y (*b*) la deformación unitaria normal promedio en la barra.

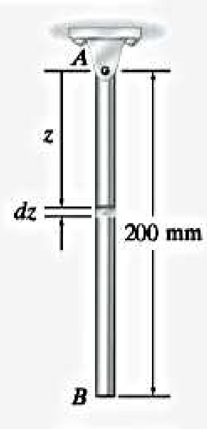


Figura 2-4

SOLUCIÓN

Parte (a). Como la deformación unitaria normal se da en cada punto a lo largo de la barra, un segmento diferencial dz, ubicado en la posición z, figura 2-4, tiene una longitud deformada que puede determinarse con la ecuación 2-1; esto es,

$$dz' = dz + \epsilon_z\, dz$$

$$dz' = \left[1 + 40(10^{-3})z^{1/2}\right] dz$$

Al sumar estos segmentos a lo largo del eje se obtiene la *longitud deformada* de la barra, es decir,

$$z' = \int_0^{0.2\text{ m}} \left[1 + 40(10^{-3})z^{1/2}\right] dz$$

$$= \left[z + 40(10^{-3})\,\tfrac{2}{3}z^{3/2}\right]\Big|_0^{0.2\text{ m}}$$

$$= 0.20239\text{ m}$$

Por lo tanto, el desplazamiento del extremo de la barra es

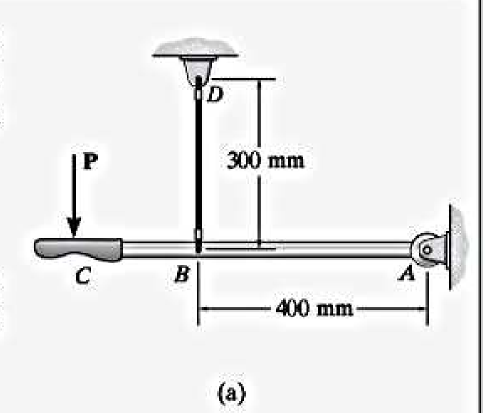
$$\Delta_B = 0.20239\text{ m} - 0.2\text{ m} = 0.00239\text{ m} = 2.39\text{ mm} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). La deformación unitaria normal promedio de la barra se determina a partir de la ecuación 2-1, la cual supone que la barra o "el segmento de línea" tiene un longitud original de 200 mm y un cambio de longitud de 2.39 mm. Por consiguiente,

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \frac{2.39\text{ mm}}{200\text{ mm}} = 0.0119\text{ mm/mm} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 2.2

Cuando la fuerza **P** se aplica al mango de la palanca rígida ABC que se muestra en la figura 2-5a, el brazo gira en sentido antihorario alrededor del pasador A un ángulo de 0.05°. Determine la deformación unitaria normal desarrollada en el alambre BD.



(a)

SOLUCIÓN I

Geometría. La orientación del brazo de la palanca después de que gira alrededor del punto A se muestra en la figura 2-5b. A partir de la geometría de esta figura,



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{400 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}\right) = 53.1301°$$



Entonces

$$\phi = 90° - \alpha + 0.05° = 90° - 53.1301° + 0.05° = 36.92°$$

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo ABD se obtiene

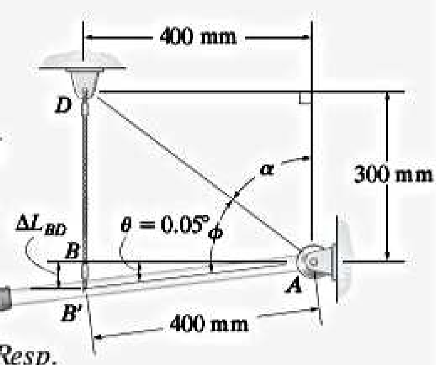
$$L_{AD} = \sqrt{(300 \text{ mm})^2 + (400 \text{ mm})^2} = 500 \text{ mm}$$

Utilizando este resultado y aplicando la ley de cosenos al triángulo $AB'D$,

$$\begin{aligned} L_{B'D} &= \sqrt{L_{AD}^2 + L_{AB'}^2 - 2(L_{AD})(L_{AB'})\cos\phi} \\ &= \sqrt{(500 \text{ mm})^2 + (400 \text{ mm})^2 - 2(500 \text{ mm})(400 \text{ mm})\cos 36.92°} \\ &= 300.3491 \text{ mm} \end{aligned}$$

Deformación unitaria normal.

$$\epsilon_{BD} = \frac{L_{B'D} - L_{BD}}{L_{BD}} = \frac{300.3491 \text{ mm} - 300 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = 0.00116 \text{ mm/mm} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Figura 2-5

SOLUCIÓN II

Como la deformación unitaria es pequeña, este mismo resultado puede obtenerse al aproximar el alargamiento del alambre BD como ΔL_{BD}, figura 2-5b. Aquí,

$$\Delta L_{BD} = \theta L_{AB} = \left[\left(\frac{0.05°}{180°}\right)(\pi \text{ rad})\right](400 \text{ mm}) = 0.3491 \text{ mm}$$

Por lo tanto,

$$\epsilon_{BD} = \frac{\Delta L_{BD}}{L_{BD}} = \frac{0.3491 \text{ mm}}{300 \text{ mm}} = 0.00116 \text{ mm/mm} \qquad \textit{Resp.}$$

2

EJEMPLO 2.3

Debido a una carga, la placa se deforma como lo indica la línea discontinua de la figura 2-6*a*. Determine (a) la deformación unitaria normal promedio a lo largo del lado AB, y (b) la deformación unitaria cortante promedio en la placa en A relativa a los ejes x y y.

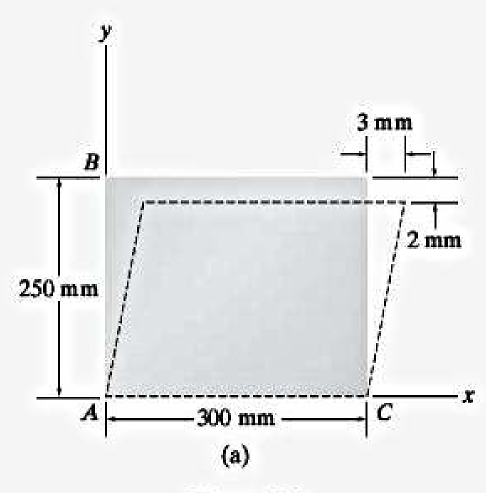
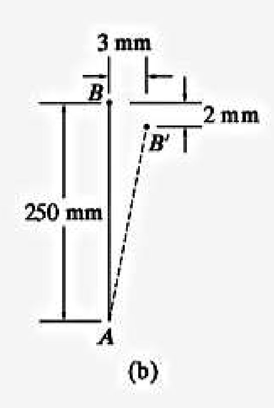


Figura 2-6

SOLUCIÓN

Parte (a). Línea AB, coincidente con el eje y, se convierte en la línea AB' después de la deformación, como se muestra en la figura 2-6*b*. La longitud de AB' es



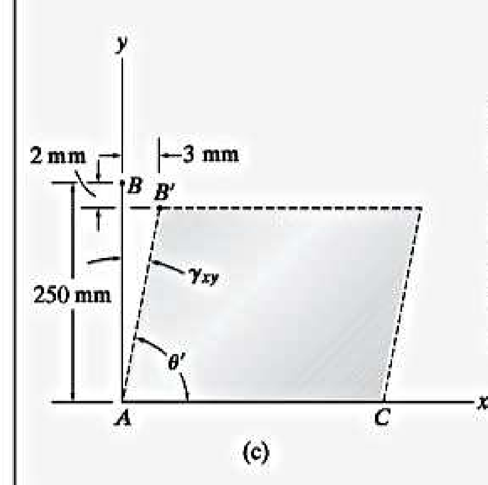
$$AB' = \sqrt{(250 \text{ mm} - 2 \text{ mm})^2 + (3 \text{ mm})^2} = 248.018 \text{ mm}$$

Por lo tanto, la deformación unitaria normal para AB es

$$(\epsilon_{AB})_{\text{prom}} = \frac{AB' - AB}{AB} = \frac{248.018 \text{ mm} - 250 \text{ mm}}{250 \text{ mm}}$$

$$= -7.93(10^{-3}) \text{ mm/mm} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que la deformación unitaria provoca una contracción de AB.



Parte (b). Como se observa en la figura 2-6*c*, el ángulo BCA que alguna vez fue de 90° entre los lados de la placa en A cambia a θ' debido al desplazamiento de B a B'. Como $\gamma_{xy} = \pi/2 - \theta'$, entonces γ_{xy} es el ángulo que se muestra en la figura. Por lo tanto,

$$\gamma_{xy} = \tan^{-1}\left(\frac{3 \text{ mm}}{250 \text{ mm} - 2 \text{ mm}}\right) = 0.0121 \text{ rad} \qquad \textit{Resp.}$$

2

EJEMPLO 2.4

La placa que se muestra en la figura 2-7*a* está conectada de manera fija a lo largo de AB y se sostiene sobre las guías horizontales en sus partes superior e inferior, AD y BC. Si experimenta un desplazamiento horizontal uniforme de 2 mm en su lado derecho CD, determine (a) la deformación unitaria normal promedio a lo largo de la diagonal AC y (b) la deformación unitaria cortante en E respecto a los ejes x, y.

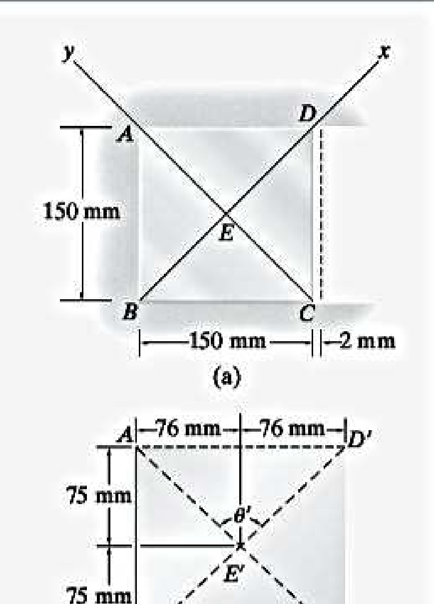


Figura 2-7

SOLUCIÓN

Parte (a). Cuando la placa se deforma, la diagonal AC se convierte en AC', figura 2-7*b*. La longitud de las diagonales AC y AC' puede determinarse a partir del teorema de Pitágoras. Se tiene

$$AC = \sqrt{(0.150\text{ m})^2 + (0.150\text{ m})^2} = 0.21213\text{ m}$$
$$AC' = \sqrt{(0.150\text{ m})^2 + (0.152\text{ m})^2} = 0.21355\text{ m}$$

Por lo tanto, la deformación unitaria normal promedio a lo largo de la diagonal es

$$(\epsilon_{AC})_{\text{prom}} = \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{0.21355\text{ m} - 0.21213\text{ m}}{0.21213\text{ m}}$$
$$= 0.00669\text{ mm/mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). Para encontrar la deformación unitaria cortante en E con respecto a los ejes x y y, primero es necesario determinar el ángulo θ' después de la deformación, figura 2-7*b*. Se tiene

$$\tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \frac{76\text{ mm}}{75\text{ mm}}$$
$$\theta' = 90.759° = \left(\frac{\pi}{180°}\right)(90.759°) = 1.58404\text{ rad}$$

Aplicando la ecuación 2-3, se obtiene que la deformación unitaria cortante en E es

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - 1.58404\text{ rad} = -0.0132\text{ rad} \qquad \textit{Resp.}$$

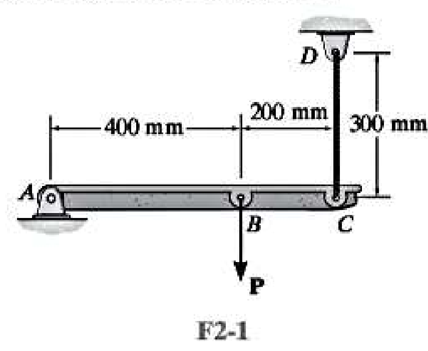
El *signo negativo* indica que el ángulo θ' es *mayor* de 90°.

NOTA: Si los ejes x y y fueran horizontal y vertical en el punto E, entonces el ángulo de 90° entre los ejes no cambiaría debido a la deformación, y así $\gamma_{xy} = 0$ en el punto E.

2

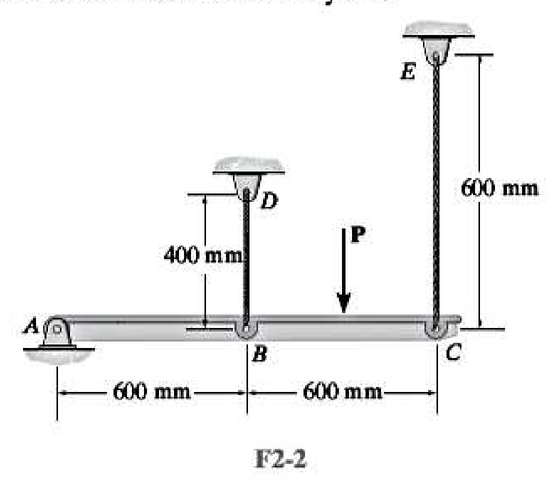
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F2-1. Cuando la fuerza **P** se aplica al brazo rígido *ABC*, el punto *B* se desplaza de manera vertical hacia abajo una distancia de 0.2 mm. Determine la deformación unitaria normal desarrollada en el alambre *CD*.



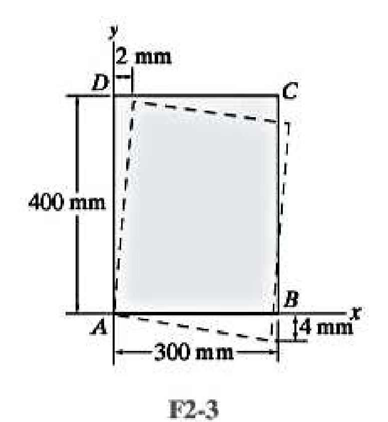
F2-1

F2-2. Si la fuerza **P** aplicada hace que el brazo rígido *ABC* gire en sentido horario alrededor del pasador *A* un ángulo de 0.02°, determine la deformación unitaria normal desarrollada en los alambres *BD* y *CE*.



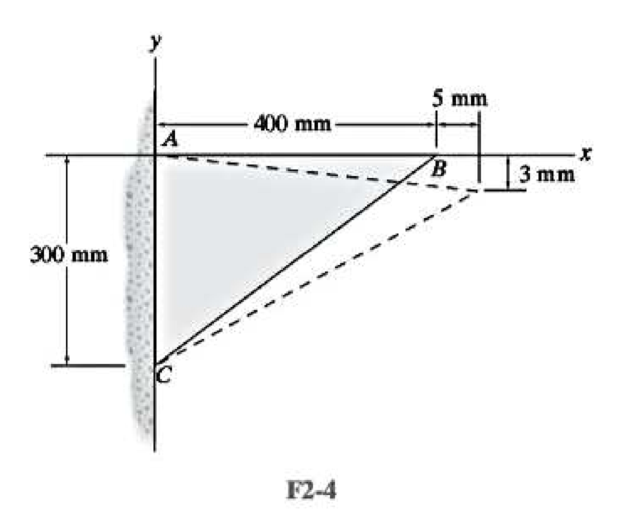
F2-2

F2-3. La placa rectangular se deforma como un rombo según lo muestra la línea discontinua de la figura. Determine la deformación unitaria cortante promedio en la esquina *A* con respecto a los ejes *x* y *y*.



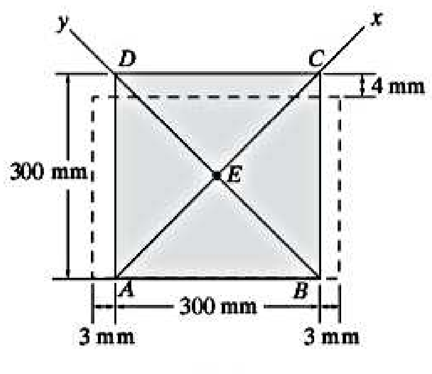
F2-3

F2-4. La placa triangular se deforma como lo indica la línea discontinua de la figura. Determine la deformación unitaria normal desarrollada a lo largo del borde *BC* y la deformación unitaria cortante promedio en la esquina *A* con respecto a los ejes *x* y *y*.



F2-4

F2-5. La placa cuadrada se deforma según lo muestra la línea discontinua de la figura. Determine la deformación unitaria normal promedio a lo largo de la diagonal *AC* y la deformación unitaria cortante del punto *E* respecto a los ejes *x* y *y*.



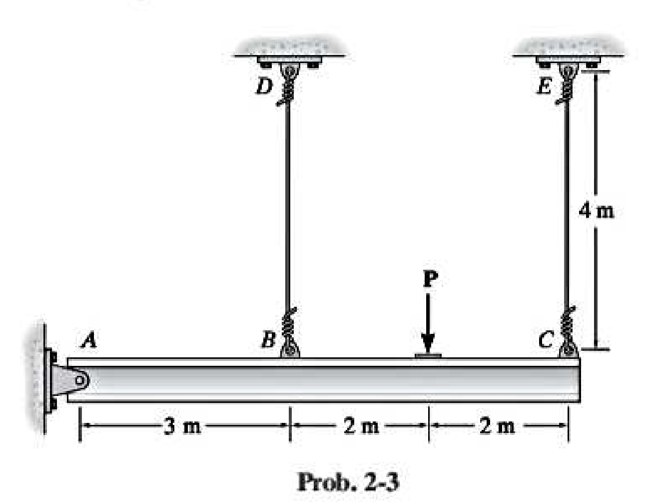
F2-5

PROBLEMAS

2-1. Una pelota de hule llena de aire tiene un diámetro de 6 pulg. Si la presión del aire en su interior se incrementa hasta que el diámetro de la pelota sea de 7 pulg, determine la deformación unitaria normal promedio en el hule.

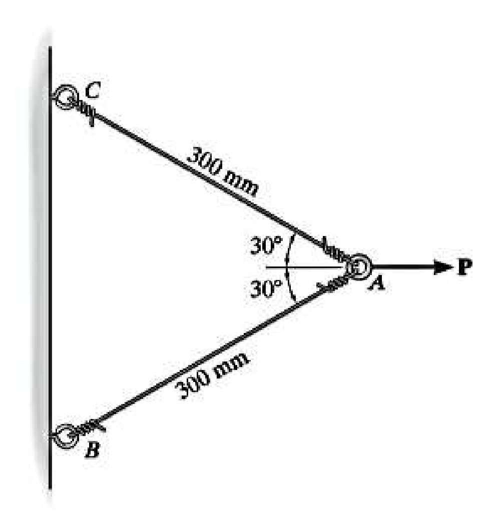
2-2. Una tira delgada de hule tiene una longitud sin estirar de 15 pulg. Si se estira alrededor de un tubo con un diámetro exterior de 5 pulg, determine la deformación unitaria normal promedio en la tira.

2-3. La viga rígida se sostiene mediante un pasador en *A* y por los alambres *BD* y *CE*. Si la carga **P** sobre la viga hace que el extremo *C* se desplace 10 mm hacia abajo, determine la deformación unitaria normal desarrollada en los cables *CE* y *BD*.



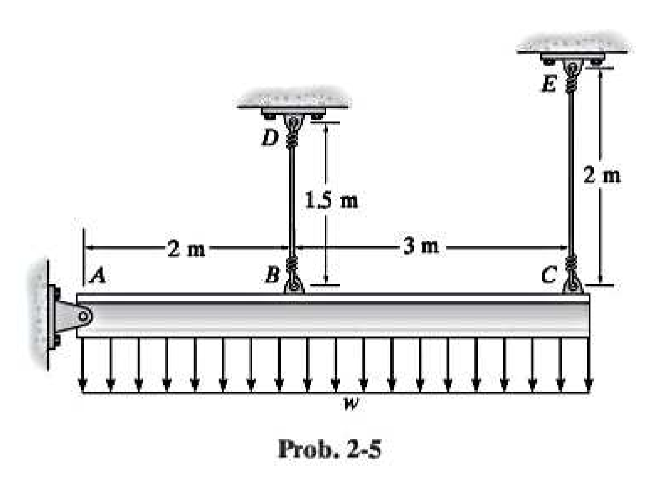
Prob. 2-3

•2-4. Los dos alambres están conectados entre sí en *A*. Si la fuerza **P** ocasiona que el punto *A* se desplace 2 mm en forma horizontal, determine la deformación unitaria normal desarrollada en cada alambre.



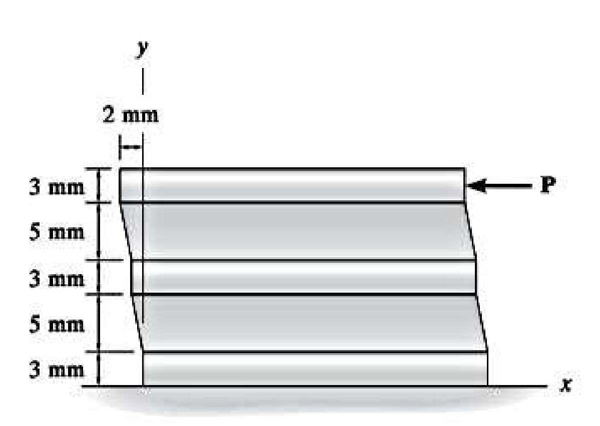
Prob. 2-4

•2-5. La viga rígida se sostiene mediante un pasador en *A* y por medio de los alambres *BD* y *CE*. Si la carga distribuida ocasiona que el extremo *C* se desplace 10 mm hacia abajo, determine la deformación unitaria normal desarrollada en los alambres *CE* y *BD*.



Prob. 2-5

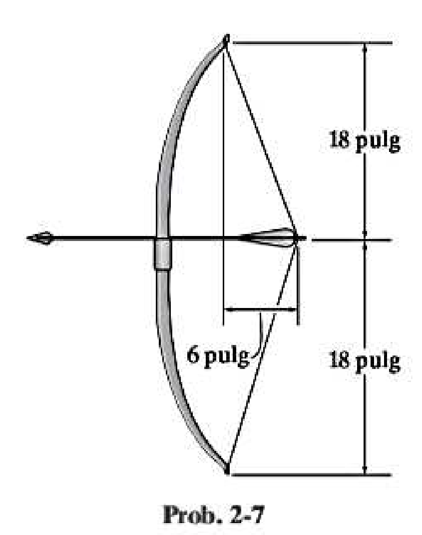
2-6. Unas tiras de nylon se funden y se pegan a placas de vidrio. Al calentarlo de manera moderada, el nylon se vuelve blando mientras que el vidrio se mantiene aproximadamente rígido. Determine la deformación unitaria cortante promedio en el nylon debida a la carga **P**, cuando el ensamble se deforma como lo indica la figura.



Prob. 2-6

2

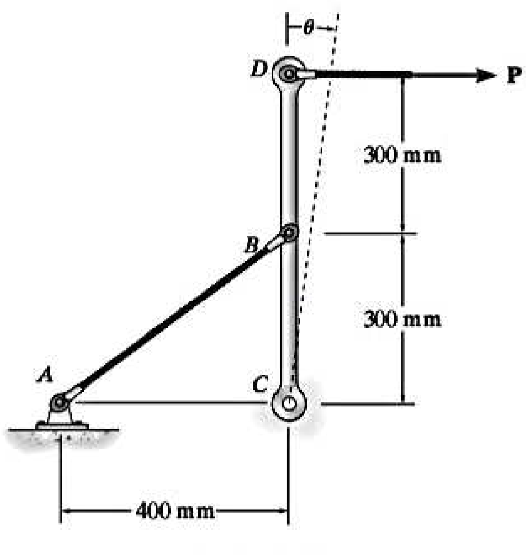
2-7. Si la longitud no estirada de la cuerda del arco es 35.5 pulg, determine la deformación unitaria normal promedio de la cuerda cuando se estira hasta la posición indicada.



Prob. 2-7

***2-8.** Parte de un mecanismo de control para un avión consiste en un elemento rígido *CBD* y un cable flexible *AB*. Si se aplica una fuerza al extremo *D* del elemento y hace que éste gire un ángulo $\theta = 0.3°$, determine la deformación unitaria normal en el cable. En un inicio, el cable no está estirado.

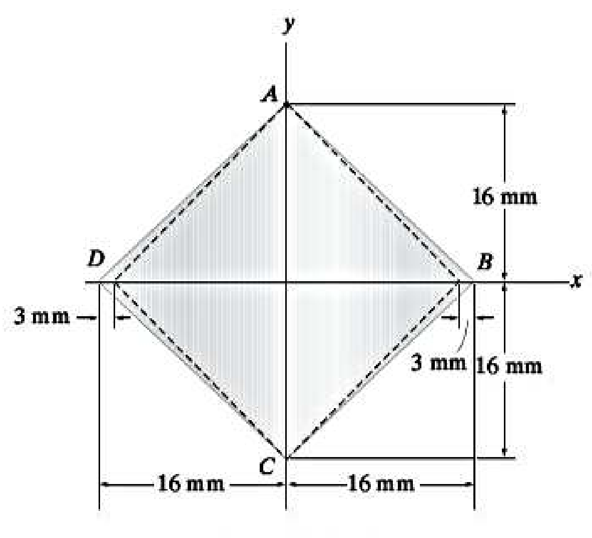
•2-9. Parte de un mecanismo de control para un avión consiste en un elemento rígido *CBD* y un cable flexible *AB*. Si se aplica una fuerza al extremo *D* del elemento y se produce una deformación unitaria normal en el cable de 0.0035 mm/mm, determine el desplazamiento del punto *D*. En un inicio, el cable no está estirado.



Probs. 2-8/9

2-10. Las esquinas *B* y *D* de la placa cuadrada reciben los desplazamientos indicados. Determine las deformaciones unitarias cortantes en *A* y *B*.

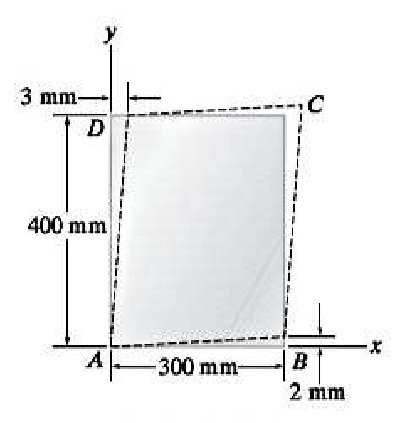
2-11. Las esquinas *B* y *D* de la placa cuadrada reciben los desplazamientos indicados. Determine las deformaciones unitarias normales promedio a lo largo del lado *AB* y de la diagonal *DB*.



Probs. 2-10/11

***2-12.** La pieza de hule es en un principio rectangular. Determine la deformación unitaria cortante promedio γ_{xy} en *A* si las esquinas *B* y *D* se someten a desplazamientos que ocasionan la distorsión del hule en la forma mostrada por las líneas discontinuas.

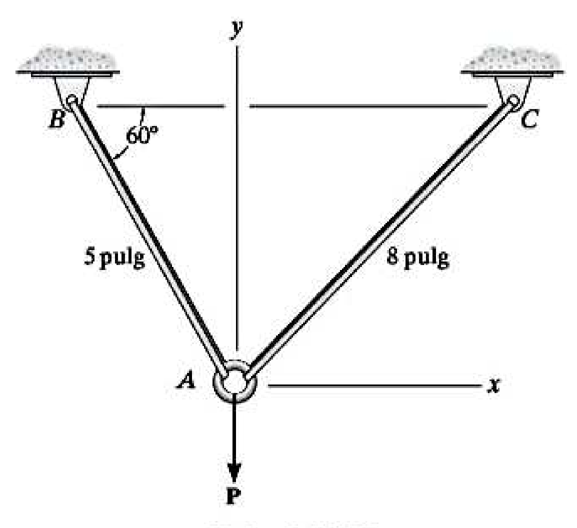
•2-13. La pieza de hule es en un principio rectangular y está sometida a la deformación mostrada por las líneas discontinuas. Determine la deformación unitaria normal promedio a lo largo de la diagonal *DB* y del lado *AD*.



Probs. 2-12/13

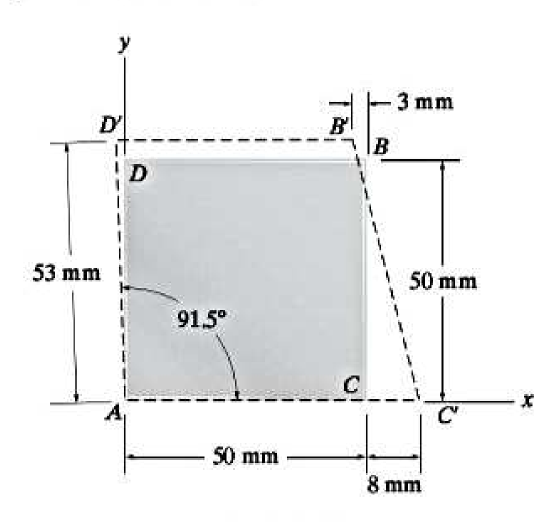
2-14. Dos barras se utilizan para soportar una carga. Cuando está descargada, la longitud de AB es de 5 pulg, la de AC es de 8 pulg y el anillo en A tiene las coordenadas (0, 0). Si una carga **P** actúa sobre el anillo en A, la deformación unitaria normal en AB se convierte en $\epsilon_{AB} = 0.02$ pulg/pulg y la deformación unitaria normal en AC se vuelve $\epsilon_{AC} = 0.035$ pulg/pulg. Determine la posición coordenada del anillo debida a la carga.

2-15. Dos barras se utilizan para soportar una carga **P**. Cuando está descargada, la longitud de AB es de 5 pulg, la de AC es de 8 pulg y el anillo en A tiene las coordenadas (0, 0). Si se aplica una carga al anillo en A, de manera que se mueve a la posición de coordenadas (0.25 pulg, −0.73 pulg), determine la deformación unitaria normal en cada barra.



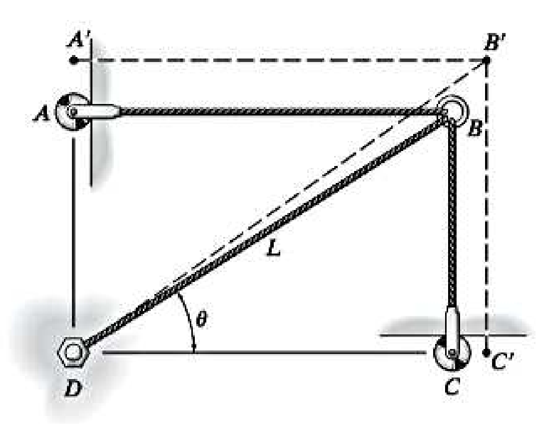
Probs. 2-14/15

•**2-16.** El cuadrado se deforma hasta la posición indicada por las líneas discontinuas. Determine la deformación unitaria normal a lo largo de cada diagonal AB y CD. El lado $D'B'$ permanece horizontal.



Prob. 2-16

•**2-17.** Las tres cuerdas están unidas al anillo en B. Cuando se aplica una fuerza al anillo éste se mueve al punto B', de modo que la deformación unitaria normal en AB es ϵ_{AB} y la deformación unitaria normal en CB es ϵ_{CB}. Si estas deformaciones son pequeñas, determine la deformación unitaria normal en DB. Observe que, debido a las guías de rodillo en A y C, AB y CB permanecen horizontal y vertical, respectivamente.

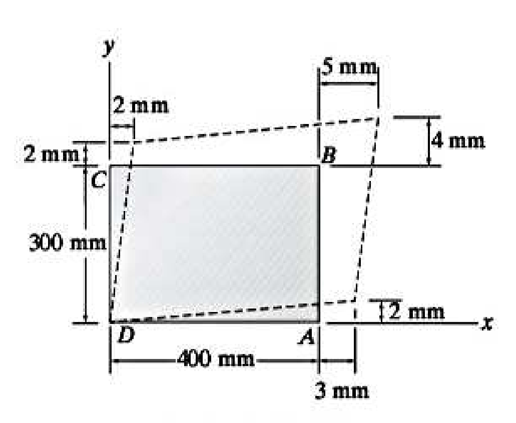


Prob. 2-17

2-18. La pieza de plástico es en un principio rectangular. Determine la deformación unitaria cortante γ_{xy} en las esquinas A y B si el plástico se distorsiona como lo muestran las líneas discontinuas.

2-19. La pieza de plástico es en un principio rectangular. Determine la deformación unitaria cortante γ_{xy} en las esquinas D y C si el plástico se distorsiona como lo muestran las líneas discontinuas.

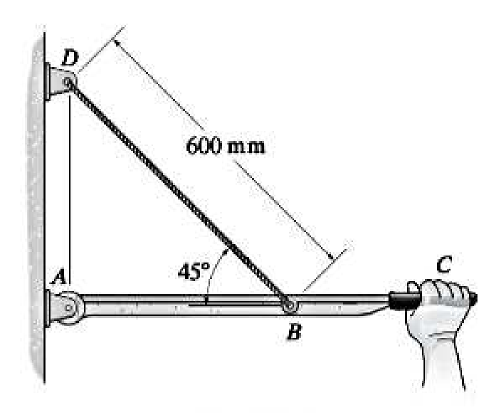
*__2-20.__ La pieza de plástico es en un principio rectangular. Determine la deformación unitaria normal promedio que ocurre a lo largo de las diagonales AC y DB.



Probs. 2-18/19/20

2

•**2-21.** La fuerza aplicada sobre el mango del brazo de la palanca rígida hace que el brazo gire en sentido horario un ángulo de 3° alrededor del pasador A. Determine la deformación unitaria normal promedio desarrollada en el alambre. En un inicio, el alambre no está estirado.

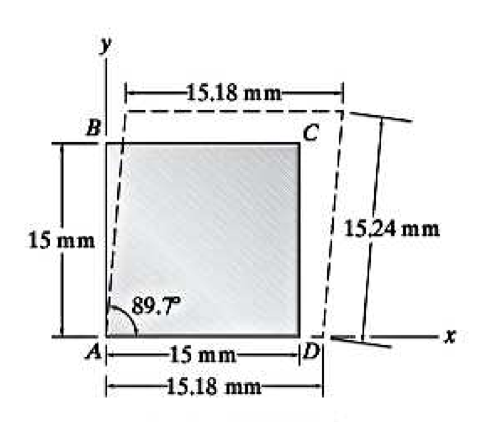


Prob. 2-21

2-22. Una pieza cuadrada de material se deforma hasta la posición que marca la línea discontinua. Determine la deformación unitaria cortante γ_{xy} en A.

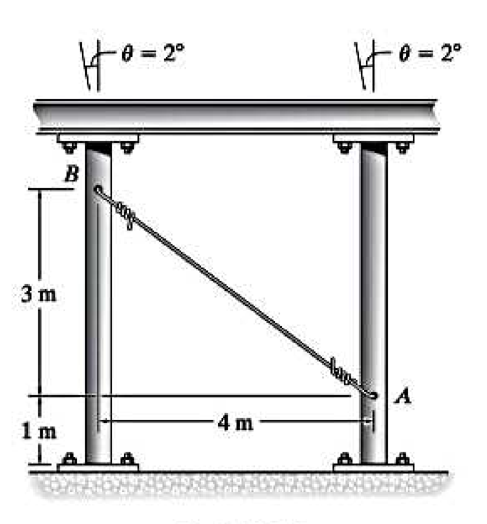
2-23. Una pieza cuadrada de material se deforma en un paralelogramo como lo indica la línea discontinua. Determine la deformación unitaria normal promedio que se produce a lo largo de las diagonales AC y BD.

***2-24.** Una pieza cuadrada de material se deforma hasta la posición que marca la línea discontinua. Determine la deformación unitaria cortante γ_{xy} en C.



Probs. 2-22/23/24

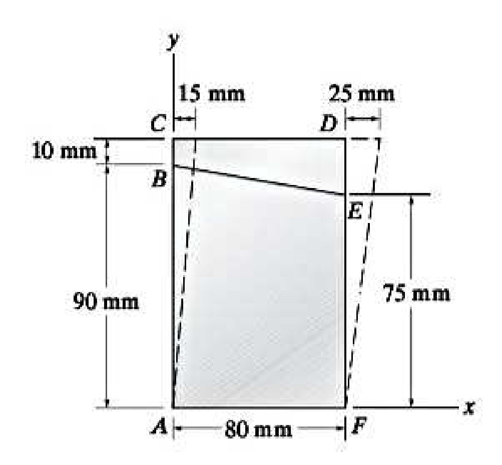
•**2-25.** El alambre de retenida AB en el bastidor de un edificio está en un principio sin estirar. Debido a un terremoto, las dos columnas del bastidor se inclinan un ángulo $\theta = 2°$. Determine la deformación unitaria normal aproximada en el alambre cuando el bastidor se encuentra en esta posición. Suponga que las columnas son rígidas y que giran alrededor de sus soportes inferiores.



Prob. 2-25

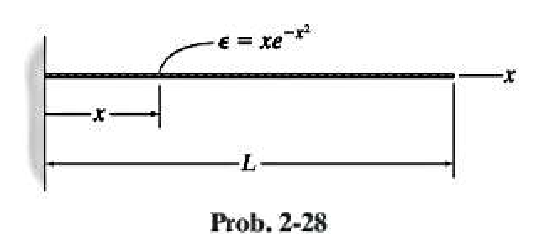
2-26. El material se distorsiona hasta la posición que indica la línea punteada. Determine (a) la deformación unitaria normal promedio a lo largo de los lados AC y CD y la deformación unitaria cortante γ_{xy} en F, así como (b) la deformación unitaria normal promedio de a lo largo de la línea BE.

2-27. El material se distorsiona hasta la posición que indica la línea punteada. Determine la deformación unitaria normal promedio que se produce a lo largo de las diagonales AD y CF.



Probs. 2–26/27

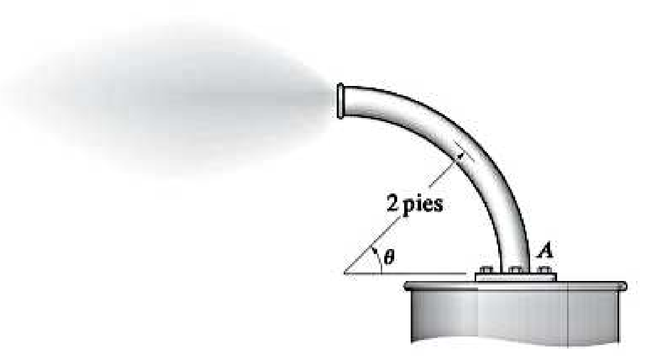
•2-28. El alambre está sometido a una deformación unitaria normal definida por $\epsilon = xe^{-x^2}$, donde x se expresa en milímetros. Si el alambre tiene una longitud inicial L, determinar el aumento de su longitud.



Prob. 2-28

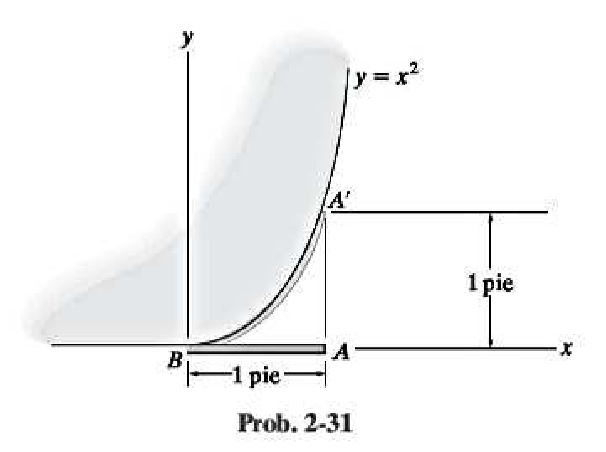
•2-29. El tubo curvo tiene un radio original de 2 pies. Si se calienta de manera no uniforme y la deformación unitaria normal a lo largo de su longitud es $\epsilon = 0.05 \cos \theta$, determine el aumento en la longitud del tubo.

2-30. Resuelva el problema 2-29 si $\epsilon = 0.08 \operatorname{sen} \theta$.



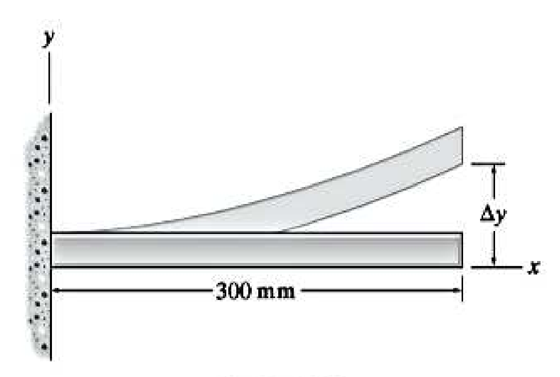
Probs. 2-29/30

2-31. La banda de hule AB tiene una longitud sin estirar de 1 pie. Si se encuentra fija en B y está unida a la superficie en el punto A', determine la deformación unitaria normal promedio en la banda. La superficie está definida por la función $y = (x^2)$ pies, donde x se expresa en pies.



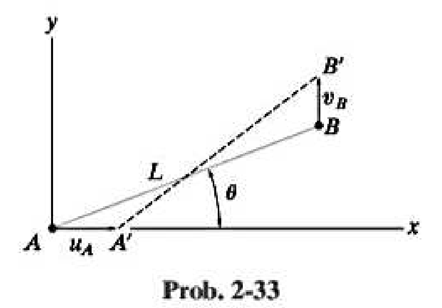
Prob. 2-31

*2-32. La barra tiene en un principio 300 mm de largo cuando está en posición horizontal. Si se somete a una deformación unitaria cortante definida por $\gamma_{xy} = 0.02x$ donde x se expresa en metros, determine el desplazamiento Δy en el extremo de su borde inferior. La barra se distorsiona hasta la forma mostrada y no se presenta ninguna elongación en la dirección x.



Prob. 2-32

•2-33. La fibra AB tiene una longitud L y una orientación θ. Si sus extremos A y B experimentan desplazamientos muy pequeños u_A y v_B, respectivamente, determine la deformación unitaria normal en la fibra cuando se encuentra en la posición $A'B'$.



Prob. 2-33

2-34. Si la deformación unitaria normal se define en referencia a la longitud final, es decir,

$$\epsilon'_n = \lim_{p \to p'} \left(\frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s'} \right)$$

en vez de hacer referencia a la longitud original, ecuación 2-2, demuestre que la diferencia entre estas deformaciones unitarias se representa como un término de segundo orden, a saber, $\epsilon_n - \epsilon'_n = \epsilon_n \epsilon'_n$.



Los desplazamientos horizontales de tierra causados por un terremoto produjeron grandes deformaciones en los pilares de este puente al grado que se fracturó. Los ingenieros deben conocer las propiedades materiales del concreto y el refuerzo de acero para poder diseñar de manera adecuada las estructuras y con ello evitar este tipo de fallas.

Propiedades mecánicas de los materiales

3

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Después de haber estudiado los conceptos básicos del esfuerzo y la deformación unitaria,[1] en este capítulo se mostrará cómo puede relacionarse el esfuerzo con la deformación mediante el uso de métodos experimentales para determinar el diagrama esfuerzo-deformación en un material específico. Después, se analizará el comportamiento descrito por este diagrama para los materiales que se usan con mayor frecuencia en ingeniería. Además, se estudiarán las propiedades mecánicas y otros ensayos relacionados con el desarrollo de la mecánica de materiales.

3.1 Ensayos de tensión y compresión

La resistencia de un material depende de su capacidad para soportar una carga excesiva sin presentar deformación o falla. Esta propiedad es inherente al propio material y debe determinarse mediante la *experimentación*. Una de las pruebas más importantes a este respecto es el ***ensayo de tensión o compresión***. Aunque a partir de esta prueba se pueden establecer varias propiedades mecánicas importantes de un material, se utiliza principalmente para determinar la relación entre el esfuerzo normal promedio y la deformación normal promedio en muchos materiales de ingeniería como metales, cerámicas, polímeros y materiales compuestos.

[1] Para simplificar, en el resto del libro nos referiremos a la deformación unitaria sólo como deformación.

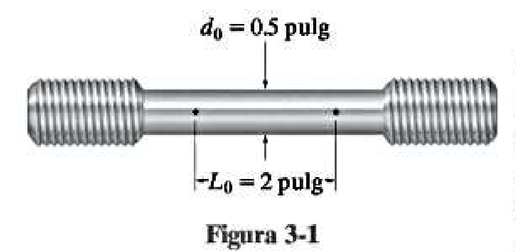


Figura 3-1



Probeta de acero típica con un medidor (galga) de deformación cementado.

Para realizar un ensayo de tensión o compresión, se fabrica una probeta del material con forma y tamaño "estándar". La probeta tiene una sección transversal circular constante con extremos más grandes, de modo que la falla no se produzca en las empuñaduras. Antes de realizar el ensayo, con la ayuda de un punzón, se hacen dos pequeñas marcas sobre la longitud uniforme de la probeta. Se hacen mediciones tanto del área de la sección transversal inicial de la probeta, A_0, como de la ***longitud calibrada*** L_0 entre las marcas. Por ejemplo, cuando se utiliza una probeta de metal en un ensayo de tensión, por lo general ésta tiene un diámetro inicial $d_0 = 0.5$ pulg (13 mm) y una longitud calibrada $L_0 = 2$ pulg (50 mm), figura 3-1. A fin de aplicar una carga axial sin que la probeta se flexione, los extremos suelen asentarse en las juntas de rótula. Después se utiliza una máquina de ensayos como la que aparece en la figura 3-2 para estirar la probeta a una velocidad lenta y constante hasta que ésta falla. La máquina está diseñada para leer la carga que se requiere para mantener este estiramiento uniforme.

Durante la prueba se registran los datos de la carga aplicada P a intervalos frecuentes, la información se lee en la pantalla de la máquina o se toma de un lector digital. Además, se mide el alargamiento $\delta = L - L_0$ entre las marcas hechas en la probeta utilizando un calibrador o bien un dispositivo óptico o mecánico llamado ***extensómetro***. Este valor de δ (delta) se utiliza para calcular la deformación normal promedio en la probeta. Sin embargo, en ocasiones esta medida no se toma porque también es posible leer la deformación de manera *directa* mediante un ***medidor de deformación de resistencia eléctrica*** similar al que se muestra en la figura 3-3. La operación de este medidor se basa en el cambio en la resistencia eléctrica de un alambre u hoja de metal muy delgada que se encuentra bajo deformación. En esencia, el medidor se adhiere o cementa a lo largo de la probeta. Si el pegamento es muy fuerte en comparación con el medidor, entonces éste formará en efecto parte integral de la probeta, de modo que cuando la muestra se deforma en la dirección del medidor, el alambre y la probeta experimentarán la misma deformación. Al medir la resistencia eléctrica del alambre, el medidor puede calibrarse para leer los valores de deformación normal de manera directa.

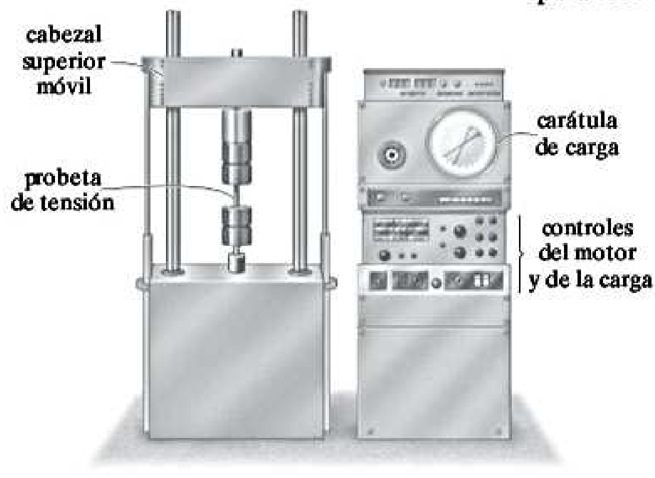


Figura 3-2



Medidor de deformación de resistencia eléctrica

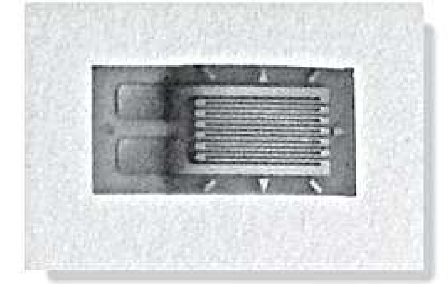


Figura 3-3

3.2 Diagrama de esfuerzo-deformación

Para la realización de los ensayos, no es posible preparar una probeta que coincida con los tamaños A_0 y L_0 de cada elemento estructural. En su lugar, los resultados de los ensayos deben reportarse de manera que puedan aplicarse a un elemento de *cualquier tamaño*. Para lograr este objetivo, los datos de la carga y la deformación correspondiente se utilizan para calcular distintos valores del esfuerzo y las correspondientes deformaciones en la probeta. La representación gráfica de los resultados produce una curva llamada ***diagrama esfuerzo-deformación***. Por lo general, hay dos maneras de describir este diagrama.

Diagrama esfuerzo-deformación convencional. Se puede determinar el ***esfuerzo nominal*** o ***de ingeniería*** al dividir la carga aplicada P entre el área A_0 de la sección transversal *original* de la probeta. En este cálculo se supone que el esfuerzo es *constante* en la sección transversal y en toda la longitud calibrada. Se tiene

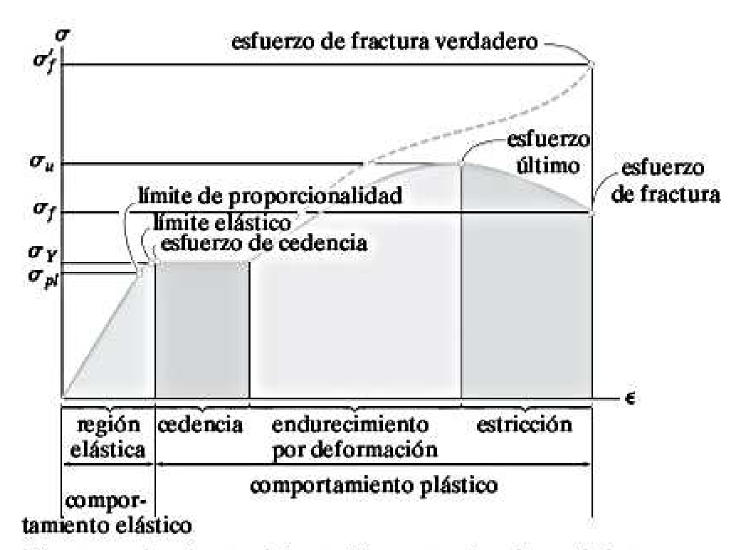
$$\sigma = \frac{P}{A_0} \tag{3-1}$$

Del mismo modo, la ***deformación nominal*** o ***de ingeniería*** se determina de manera directa al leer el medidor de deformación, o al dividir el cambio δ en la longitud calibrada de la probeta entre la longitud calibrada original L_0 de la probeta. Aquí se supone que la deformación es constante a lo largo de la región entre los puntos marcados. Por lo tanto,

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} \tag{3-2}$$

Si los valores correspondientes de σ y ϵ se trazan de manera que el eje vertical sea el esfuerzo y el eje horizontal sea la deformación, la curva resultante se llama ***diagrama de esfuerzo-deformación convencional***. Sin embargo, tenga en cuenta que dos diagramas de esfuerzo-deformación para un material particular serán muy similares pero nunca exactamente iguales. Esto se debe a que los resultados en realidad dependen de variables tales como la composición del material, imperfecciones microscópicas, la forma en que se fabrica, la rapidez con que se aplica la carga y la temperatura durante la realización del ensayo.

A continuación se analizarán las características de la curva de esfuerzo-deformación convencional para el *acero*, un material que se usa de manera frecuente para fabricar elementos estructurales y mecánicos. Empleando el método descrito con anterioridad, el diagrama de esfuerzo-deformación característico para el ensayo de acero es el que se muestra en la figura 3-4. A partir de esta curva se pueden identificar cuatro diferentes formas en que se comporta el material, en función de la deformación inducida en éste.



Diagramas de esfuerzo-deformación convencional y verdadero para un material dúctil (acero) (no se presenta a escala)

Figura 3-4

Comportamiento elástico. El comportamiento elástico del material se produce cuando las deformaciones en la probeta están dentro de la región triangular (en gris claro) que se muestra en la figura 3-4. Aquí la curva es en realidad una *línea recta* en la mayor parte de la región, de modo que el esfuerzo es *proporcional* a la deformación. Se dice que el material contenido en esta región es *elástico lineal*. El límite superior del esfuerzo para esta relación lineal se denomina ***límite de proporcionalidad***, σ_{pl}. Si el esfuerzo excede ligeramente el límite de proporcionalidad, la curva tiende a doblarse y aplanarse como se muestra en la figura. Esto continúa hasta que el esfuerzo alcanza el ***límite elástico***. En este punto, si se retira la carga, la probeta recuperará de nuevo su forma original. Sin embargo, el límite elástico para el acero se determina en muy pocas ocasiones, debido que se encuentra muy próximo al límite de proporcionalidad y, por lo tanto, es muy difícil de detectar.

Cedencia. Un ligero aumento en el esfuerzo por encima del límite elástico generará un rompimiento del material y ocasionará que *éste se deforme de manera permanente*. Este comportamiento se denomina ***cedencia***, y está indicado por la región rectangular (adyacente a la región triangular) de la curva. El esfuerzo que causa la cedencia se llama ***esfuerzo de cedencia*** o ***punto de cedencia***, σ_Y, y la deformación que se produce se denomina ***deformación plástica***. Aunque no se muestra en la figura 3-4, para los aceros al bajo carbono o aceros laminados en caliente, el punto de cedencia suele caracterizarse mediante dos valores. El ***punto de cedencia superior*** ocurre primero, seguido de una disminución súbita de la capacidad de carga hasta el ***punto de cedencia inferior***. Observe que después de haber alcanzado el punto de cedencia, la probeta seguirá alargándose (deformándose) *sin ningún incremento en la carga*, como se muestra en la figura 3-4. Con frecuencia, cuando el material se encuentra en este estado se dice que es ***perfectamente plástico***.

Endurecimiento por deformación. Cuando termina la cedencia, la probeta puede soportar un aumento de la carga, lo que resulta en una curva que asciende continuamente pero que se vuelve más plana hasta llegar a un esfuerzo máximo conocido como ***esfuerzo último***, σ_u. Este incremento en la curva se llama ***endurecimiento por deformación*** y se identifica en la figura 3-4 como la región curva más clara.

Estricción. Mientras la probeta se alarga hasta llegar al esfuerzo último, el área de su sección transversal se reduce. Esta reducción es bastante *uniforme* en toda la longitud calibrada de la probeta; sin embargo, justo después del esfuerzo último, el área de la sección transversal comenzará a disminuir en una región *localizada* de la probeta. En consecuencia, suele formarse una constricción o "cuello" en dicha región a medida que la probeta se alarga aún más, figura 3-5*a*. En la figura 3-4, esta región, debido a la estricción, se indica en un tono más oscuro al final de la curva. Aquí el diagrama esfuerzo-deformación tiende a curvarse hacia abajo hasta que la probeta se rompe en el ***esfuerzo de fractura***, σ_f, figura 3-5*b*.



Patrón de estricción típico que ocurre en una probeta de acero justo antes de la fractura.

Diagrama esfuerzo-deformación verdadero. En lugar de emplear siempre el área de la sección transversal y la longitud *originales* de la probeta para calcular el esfuerzo y la deformación (de ingeniería), se podría utilizar el área de la sección transversal y la longitud *reales* de la probeta en el *instante* en que se mide la carga. Los valores de esfuerzo y deformación encontrados en estas mediciones se denominan *esfuerzo verdadero* y *deformación verdadera*, y una gráfica de sus valores se llama ***diagrama de esfuerzo-deformación verdadero***. Este diagrama tiene la forma mostrada por una línea discontinua en la figura 3-4. Observe que los diagramas σ-ϵ convencional y verdadero son prácticamente coincidentes cuando la deformación es pequeña. Las diferencias entre los diagramas comienzan a aparecer en el rango de endurecimiento por deformación, donde la magnitud de la deformación se vuelve más significativa. En particular, existe una amplia divergencia dentro de la región de estricción. Aquí puede verse en el diagrama σ-ϵ convencional que la probeta *realmente* soporta una *carga decreciente*, ya que A_0 es constante en el cálculo del esfuerzo de ingeniería, $\sigma = P/A_0$. Sin embargo, en el diagrama σ-ϵ verdadero, el área real A dentro de la región de estricción siempre es decreciente hasta la fractura, σ'_f, por lo que el material soporta en realidad un *esfuerzo creciente*, ya que $\sigma = P/A$.



En esta probeta de acero se observa con claridad la estricción que ocurre justo antes de su falla. Lo anterior ocasiona una fractura típica de "copa y cono", la cual es característica de los materiales dúctiles.

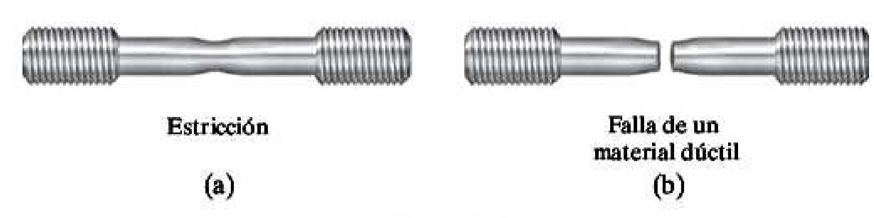


Figura 3-5

Aunque los diagramas de esfuerzo-deformación verdadero y convencional son diferentes, la mayor parte del diseño de ingeniería se hace para que el material soporte un esfuerzo dentro del rango elástico. Lo anterior es para que la deformación del material no sea muy severa y éste recupere su forma al retirarse la carga. La deformación verdadera hasta el límite elástico permanecerá lo suficientemente pequeña para que el error al usar valores de ingeniería de σ y ϵ sea pequeño (aproximadamente 0.1 por ciento) en comparación con sus valores verdaderos. Ésta es una de las principales razones por las que se usan diagramas de esfuerzo-deformación convencionales.

Los conceptos anteriores se pueden resumir haciendo referencia a la figura 3-6, donde se muestra un diagrama de esfuerzo-deformación convencional real para una probeta de acero de bajo carbono. Con el fin de destacar los detalles, la región elástica de la curva se muestra en un tono gris usando una escala de deformación exagerada, que se muestra en el mismo tono gris. Al evaluar el comportamiento, se observa que el límite de proporcionalidad se alcanza en $\sigma_{pl} = 35$ ksi (241 MPa), donde $\epsilon_{pl} =$ 0.0012 pulg/pulg, seguido de un punto de cedencia superior de $(\sigma_Y)_u = 38$ ksi (262 MPa), después se presenta el punto de cedencia inferior $(\sigma_Y)_l =$ 36 ksi (248 MPa). El fin de la cedencia se produce con una deformación $\epsilon_Y = 0.030$ pulg/pulg, ¡que es 25 veces mayor a la deformación en el límite de proporcionalidad! A continuación, la probeta experimenta endurecimiento por deformación hasta llegar al esfuerzo último $\sigma_u = 63$ ksi (434 MPa), después comienza a presentarse la estricción hasta que se produce una fractura, $\sigma_f = 47$ ksi (324 MPa). Por comparación, la deformación a la falla, $\epsilon_f = 0.380$ pulg/pulg, es ¡317 veces mayor que ϵ_{pl}!

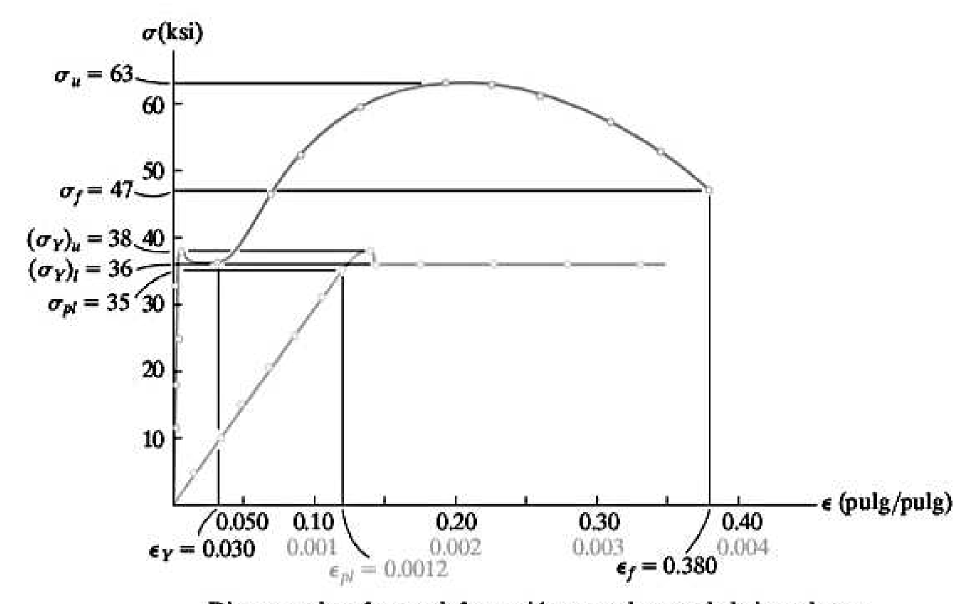


Diagrama de esfuerzo-deformación para el acero de bajo carbono

Figura 3-6

3.3 Comportamiento esfuerzo-deformación en materiales dúctiles y frágiles

Los materiales pueden clasificarse como dúctiles o frágiles en función de sus características esfuerzo-deformación.

Materiales dúctiles. Cualquier material que pueda someterse a grandes deformaciones antes de fracturarse se denomina ***material dúctil***. El acero de bajo carbono, como se ha dicho anteriormente, es un ejemplo típico. Los ingenieros suelen elegir materiales dúctiles para el diseño porque son capaces de absorber los impactos o la energía, y si se sobrecargan, por lo general presentan grandes deformaciones antes de fallar.

Una manera de especificar la ductilidad de un material es registrar su porcentaje de elongación o porcentaje de reducción en área al momento de la fractura. El ***porcentaje de elongación*** es la deformación a la fractura expresada en porcentaje. Por lo tanto, si la longitud calibrada original de la probeta es L_0 y su longitud a la fractura es L_f, entonces

$$\text{Porcentaje de elongación} = \frac{L_f - L_0}{L_0}(100\%) \qquad (3\text{-}3)$$

Como se observa en la figura 3-6, dado que $\epsilon_f = 0.380$, este valor sería de 38 por ciento para una probeta de acero de bajo carbono.

Otra manera de especificar la ductilidad es el ***porcentaje de reducción de área***. Está definida dentro de la región de estricción de la siguiente manera:

$$\text{Porcentaje de reducción de área} = \frac{A_0 - A_f}{A_0}(100\%) \qquad (3\text{-}4)$$

Aquí A_0 es el área original de la sección transversal de la probeta y A_f es el área del cuello en el momento de la ruptura. El acero de bajo carbono tiene un valor típico de 60 por ciento.

Además del acero, otros metales como el bronce, el molibdeno y el zinc pueden presentar características dúctiles similares, puesto que también experimentan un comportamiento elástico esfuerzo-deformación, ceden a un esfuerzo constante, presentan endurecimiento por deformación y, finalmente, se produce en ellos una estricción hasta la fractura. Sin embargo, en la mayoría de los metales la cedencia constante *no se producirá* más allá del rango elástico. Un metal en el que se presenta esta situación es el aluminio. En realidad, el aluminio no suele tener un *punto de cedencia* bien definido, por lo que la práctica aceptable consiste en definir una ***resistencia a la cedencia*** mediante un procedimiento gráfico llamado ***método de corrimiento***. Por lo general, se elige una deformación de 0.2 por ciento (0.002 pulg/pulg) y desde este punto sobre el eje ϵ se dibuja una línea paralela a la porción inicial recta del diagrama esfuerzo-deformación. El punto donde esta línea interseca a la curva define la resistencia a la cedencia. En la figura 3-7 se muestra un ejemplo de la construcción de una gráfica para determinar la resistencia a la cedencia de una aleación de aluminio. Aquí puede observarse que la resistencia a la cedencia es $\sigma_{YS} = 51$ ksi (352 MPa).

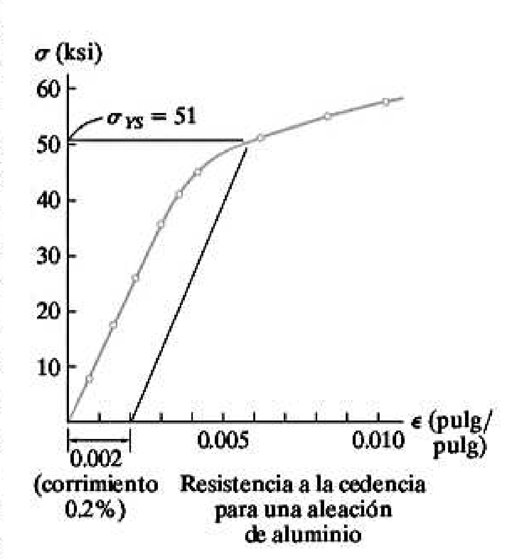


Figura 3-7

Diagrama σ-ϵ para el caucho natural

Figura 3-8

Diagrama σ-ϵ para el hierro fundido gris

Figura 3-9



El concreto utilizado para fines estructurales debe probarse de forma rutinaria a compresión para asegurar que proporciona la resistencia de diseño necesaria para esta base de puente. Después de curarlos durante 30 días, los cilindros de concreto mostrados se prueban a compresión hasta el esfuerzo último.

Debe tenerse en cuenta que la resistencia a la cedencia no es una propiedad física del material, ya que se trata de un esfuerzo que causa una deformación permanente *específica* en dicho material. Sin embargo, en este libro se asumirá que la resistencia a la cedencia, el punto de cedencia, el límite elástico y el límite de proporcionalidad *coinciden* a menos que se indique lo contrario. Una excepción podría ser la del caucho natural, que incluso no tiene un límite de proporcionalidad porque el esfuerzo y la deformación *no* están linealmente relacionados. En vez de eso, como se muestra en la figura 3-8, este material, conocido como un polímero, presenta un *comportamiento elástico no lineal.*

La madera suele ser un material moderadamente dúctil, por ello se encuentra en diseños que responden sólo a cargas elásticas. Las características de resistencia de la madera varían mucho de una especie a otra, y en cada una de ellas la resistencia depende del contenido de humedad, de la edad y del tamaño, y de la disposición de los nudos en la madera. Como éste es un material fibroso, sus características de tensión o compresión son muy diferentes cuando está cargado en forma paralela o perpendicular al grano. De manera específica, la madera se parte con mayor facilidad cuando está cargada en tensión perpendicular a su grano y, por consiguiente, las cargas de tensión están casi siempre destinadas a aplicarse paralelas al grano de los elementos de madera.

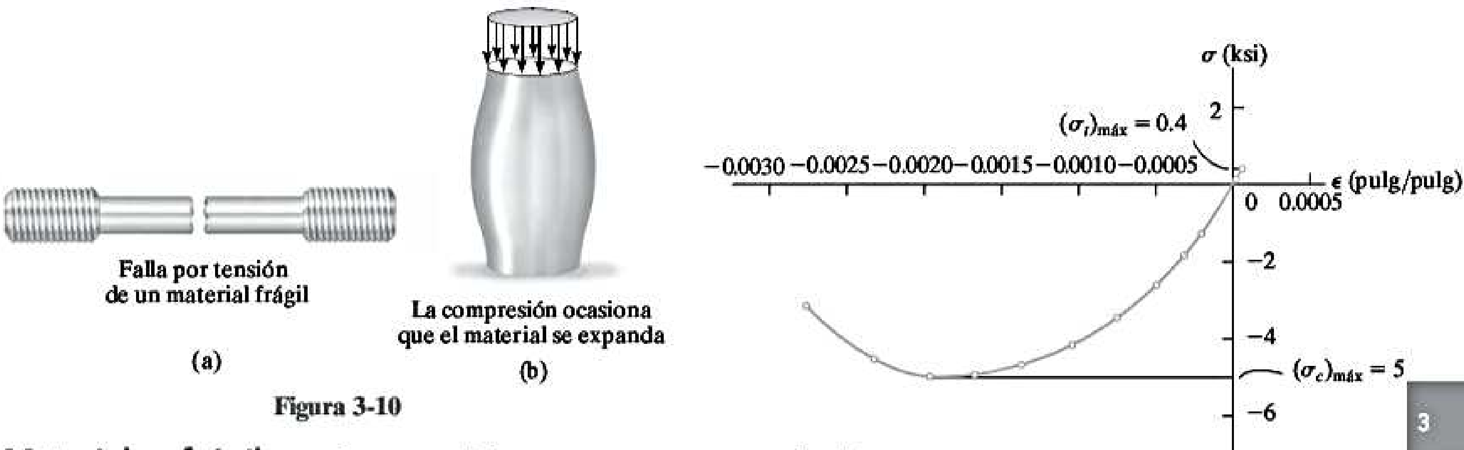


Figura 3-10

Diagrama σ-ϵ para una mezcla típica de concreto

Figura 3-11

Materiales frágiles. Los materiales que no presentan cedencia, o que exhiben una muy pequeña, antes de la falla se conocen como ***materiales frágiles***. El hierro fundido gris es un ejemplo, tiene un diagrama de esfuerzo-deformación en tensión como el mostrado en la porción *AB* de la curva de la figura 3-9. Aquí, la fractura en $\sigma_f = 22$ ksi (152 MPa) tuvo lugar inicialmente en una imperfección o grieta microscópica y luego se propagó con rapidez a través de la probeta, lo que causó una fractura completa. Como la aparición de grietas iniciales en una probeta es bastante aleatoria, los materiales frágiles no tienen un esfuerzo de fractura a la tensión bien definido. En cambio, generalmente se reporta el esfuerzo de fractura a la tensión *promedio* en un conjunto de ensayos observados. En la figura 3-10*a* se muestra la imagen típica de una probeta que falló.

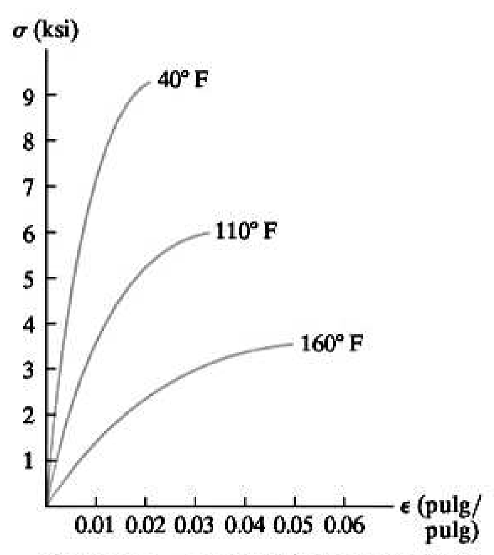
En comparación con su comportamiento en tensión, los materiales frágiles como el hierro fundido gris presentan una resistencia mucho mayor a la compresión axial, así lo evidencia la porción *AC* de la curva de la figura 3-9. Para este caso, cualquier grieta o imperfección en la probeta tiende a cerrarse y, a medida que la carga aumenta, el material suele expandirse o tomar forma de barril mientras las deformaciones se vuelven mayores, figura 3-10*b*.

Al igual que el hierro fundido gris, el concreto se clasifica como un material frágil y también tiene una capacidad baja de resistencia a la tensión. Las características de su diagrama de esfuerzo-deformación dependen en gran medida de la mezcla de concreto (agua, arena, grava y cemento) y el tiempo y temperatura de curado. En la figura 3-11 se muestra un ejemplo típico de un diagrama de esfuerzo-deformación "completo" para el concreto. Por inspección, su resistencia máxima a la compresión es casi 12.5 veces superior a su resistencia a la tensión, $(\sigma_c)_{máx} = 5$ ksi (34.5 MPa) frente a $(\sigma_t)_{máx} = 0.40$ ksi (2.76 MPa). Por esta razón, el concreto casi siempre se refuerza con barras o varillas de acero cuando está diseñado para soportar cargas de tensión.

Puede establecerse de manera general que la mayoría de los materiales presentan comportamiento dúctil y frágil. Por ejemplo, el acero tiene un comportamiento frágil cuando tiene un alto contenido de carbono y dúctil cuando el contenido de carbono es reducido. Asimismo, a bajas temperaturas los materiales se vuelven más duros y frágiles, mientras que cuando la temperatura se eleva se vuelven más blandos y dúctiles. Este efecto se muestra en la figura 3-12 para el plástico metacrilato.



El acero pierde rápidamente su resistencia cuando se calienta. Por esa razón los ingenieros suelen exigir que los principales elementos estructurales se aíslen en caso de incendio.



Diagramas σ-ϵ para un plástico metacrilato

Figura 3-12

3

3.4 Ley de Hooke

Como se señaló en la sección anterior, los diagramas de esfuerzo-deformación para la mayoría de los materiales de ingeniería presentan una *relación lineal* entre el esfuerzo y la deformación dentro de la región elástica. En consecuencia, un incremento en el esfuerzo ocasiona un aumento proporcional en la deformación. Este hecho fue descubierto por Robert Hooke en 1676 mediante el uso de resortes y se conoce como la *ley de Hooke*. Puede expresarse en forma matemática como

$$\boxed{\sigma = E\epsilon} \tag{3-5}$$

Aquí E representa la constante de proporcionalidad, que se denomina ***módulo de elasticidad*** o ***módulo de Young***, llamado así por Thomas Young quien publicó un estudio sobre él en 1807.

La ecuación 3-5 en realidad representa la ecuación de la *porción recta inicial* del diagrama de esfuerzo-deformación hasta el límite de proporcionalidad. Por otra parte, el módulo de elasticidad representa la *pendiente* de esta recta. Como la deformación es adimensional, a partir de la ecuación 3-5, E tendrá las mismas unidades que el esfuerzo: psi, ksi o pascales. Como ejemplo de su cálculo, considere el diagrama de esfuerzo-deformación para el acero que se muestra en la figura 3-6. Aquí, $\sigma_{pl} =$ 35 ksi y $\epsilon_{pl} = 0.0012$ pulg/pulg, de modo que

$$E = \frac{\sigma_{pl}}{\epsilon_{pl}} = \frac{35 \text{ ksi}}{0.0012 \text{ pulg/pulg}} = 29(10^3) \text{ ksi}$$

Como se muestra en la figura 3-13, el límite de proporcionalidad para un tipo particular de aleación de acero depende de su contenido de carbono; sin embargo, la mayor parte de los grados de acero, desde el acero

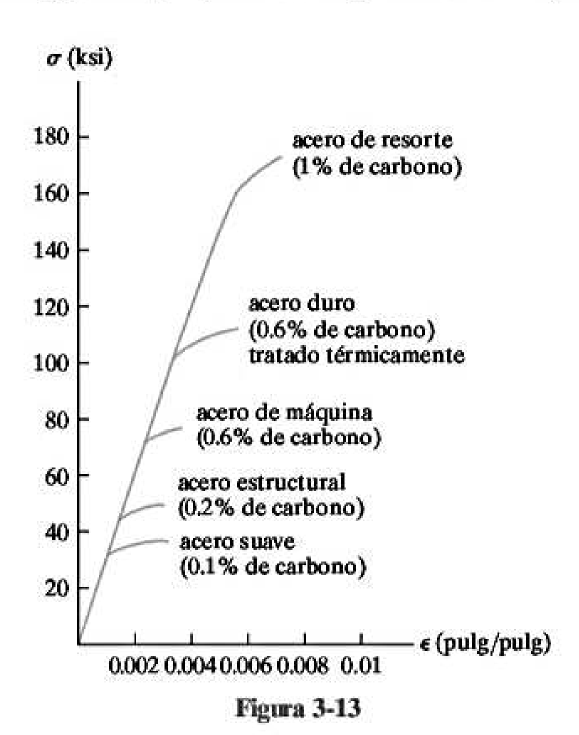
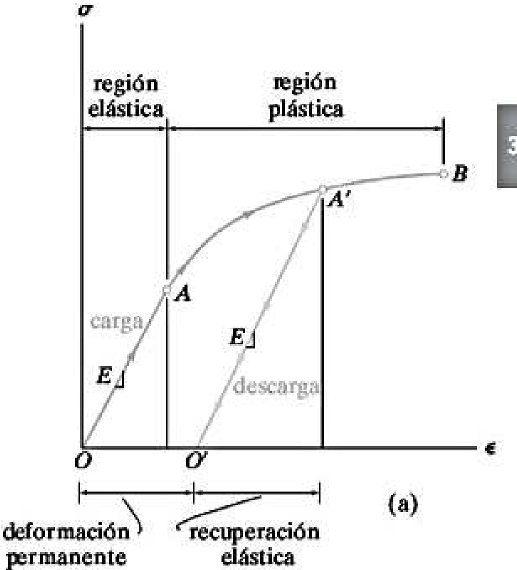


Figura 3-13

laminado más blando hasta el acero más duro para herramientas, tienen casi el mismo módulo de elasticidad, en general aceptado como $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi o bien 200 GPa. Los valores de E para otros materiales de ingeniería comúnmente usados se tabulan con frecuencia en los códigos de ingeniería y libros de referencia. Los valores representativos también se presentan en la página final de este libro (al reverso de la contraportada). Vale la pena destacar que el módulo de elasticidad es una propiedad mecánica que indica la *rigidez* de un material. Los materiales que son muy rígidos, como el acero, tienen grandes valores de E [$E_{ac} = 29(10^3)$ ksi o 200 GPa], mientras que los materiales esponjosos, como el caucho vulcanizado, pueden tener valores bajos [$E_c = 0.10$ ksi o 0.70 MPa].

El módulo de elasticidad es una de las propiedades mecánicas más importantes que se utilizan en el desarrollo de las ecuaciones que se presentan en este libro. Sin embargo, siempre se debe recordar que E puede utilizarse sólo si el material tiene un *comportamiento elástico lineal*. Además, si la tensión en el material es *mayor* que el límite de proporcionalidad, el diagrama de esfuerzo-deformación deja de ser una línea recta y la ecuación 3-5 ya no es válida.



Endurecimiento por deformación.

Si una probeta de material dúctil como el acero se carga en la *región plástica* y después se descarga, la *deformación elástica se recupera* a medida que el material regresa a su estado de equilibrio. Sin embargo, la *deformación plástica permanece* y en consecuencia el material presenta una ***deformación permanente***. Por ejemplo, cuando un alambre se dobla (plásticamente) rebotará un poco (elásticamente) cuando se retire la carga; sin embargo, no regresará en su totalidad a su posición original. Este comportamiento se puede ilustrar en el diagrama de esfuerzo-deformación de la figura 3-14*a*. Aquí la probeta primero se carga más allá de su punto de cedencia A hasta el punto A'. Como las fuerzas interatómicas deben superarse para alargar *elásticamente* la probeta, entonces estas mismas fuerzas jalan de nuevo los átomos hacia su posición original cuando se retira la carga, figura 3-14*a*. En consecuencia, el módulo de elasticidad E es el mismo y, por ende, la pendiente de la línea $O'A'$ es igual a la de la línea OA.

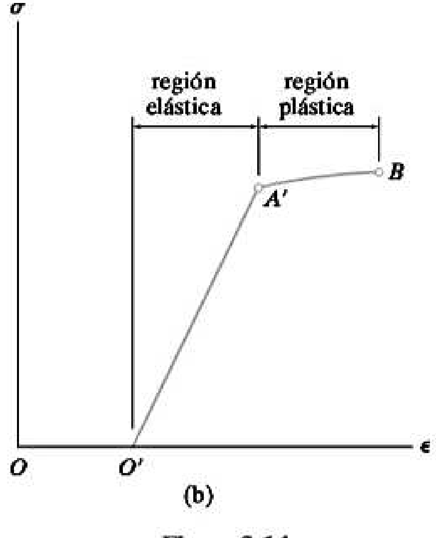


Figura 3-14

Si la carga se vuelve a aplicar, los átomos en el material serán desplazados de nuevo hasta que se produzca la cedencia en el esfuerzo A', o cerca de él, y el diagrama de esfuerzo-deformación continuará en la misma trayectoria que antes, figura 3-14*b*. Sin embargo, debe señalarse que este nuevo diagrama de esfuerzo-deformación, definido por $O'A'B$, ahora tiene un punto de cedencia *mayor* (A'), a consecuencia del endurecimiento por deformación. En otras palabras, el material tiene ahora una *región elástica más grande* aunque tiene *menos ductilidad*, una región plástica más pequeña, que cuando estaba en su estado original.



Este pasador fue hecho con una aleación de acero endurecido; es decir, tiene un alto contenido de carbono. Falló debido a la fractura por fragilidad.

3.5 Energía de deformación

A medida que un material se deforma debido a una carga externa, tiende a almacenar energía *internamente* en todo su volumen. Como esta energía se relaciona con las deformaciones del material, se denomina ***energía de deformación***. Para obtener esta energía de deformación considere un elemento de volumen de material tomado de una probeta para ensayos a tensión. Se somete a un esfuerzo uniaxial como el mostrado en la figura 3-15. Este esfuerzo desarrolla una fuerza $\Delta F = \sigma \Delta A = \sigma(\Delta x\ \Delta y)$ en las caras superior e inferior del elemento *después* de que el elemento de longitud Δz experimenta un desplazamiento vertical $\epsilon\ \Delta z$. Por definición, el *trabajo* se determina mediante el producto de la fuerza por el desplazamiento en la dirección de dicha fuerza. Como la fuerza se incrementa de manera uniforme desde cero hasta su magnitud final ΔF cuando se ha alcanzado el desplazamiento $\epsilon\ \Delta z$, el trabajo realizado por la fuerza sobre el elemento es igual a la magnitud *promedio* de fuerza $(\Delta F/2)$ por el desplazamiento $\epsilon\ \Delta z$. Este "trabajo externo" sobre el elemento es equivalente al "trabajo interno" o energía de deformación almacenada en el elemento, suponiendo que no se pierde energía en forma de calor. En consecuencia, la energía de deformación ΔU es $\Delta U = (\frac{1}{2}\Delta F)\ \epsilon\ \Delta z = (\frac{1}{2}\ \sigma\ \Delta x\ \Delta y)\ \epsilon\ \Delta z$. Como el volumen del elemento es $\Delta V = \Delta x\ \Delta y\ \Delta z$, entonces $\Delta U = \frac{1}{2}\sigma\epsilon\,\Delta V$.

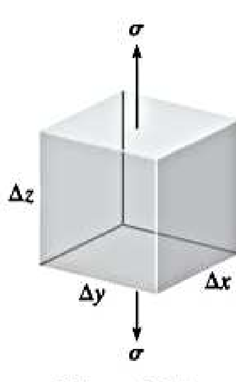


Figura 3-15

En ciertas aplicaciones, resulta conveniente especificar la energía de deformación por unidad de volumen del material. Esto se llama **densidad de la energía de deformación** y puede expresarse como

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \tag{3-6}$$

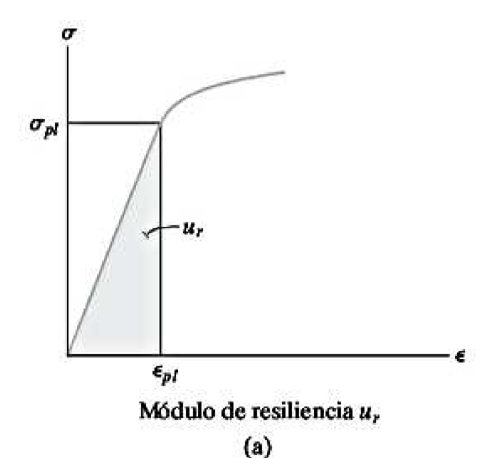
Si el comportamiento del material es *elástico lineal*, entonces se aplica la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, y es posible expresar la densidad de la energía de deformación elástica en términos del esfuerzo uniaxial como

$$u = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \tag{3-7}$$

Módulo de resiliencia. En particular, cuando el esfuerzo σ alcanza el límite de proporcionalidad, la densidad de la energía de deformación calculada mediante la ecuación 3-6 o 3-7 se conoce como el ***módulo de resiliencia***, es decir,

$$\boxed{u_r = \frac{1}{2}\sigma_{pl}\epsilon_{pl} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{pl}^2}{E}} \tag{3-8}$$

A partir de la región elástica del diagrama de esfuerzo-deformación, figura 3-16*a*, observe que u_r es equivalente al *área triangular* sombreada bajo el diagrama. Físicamente, la resiliencia de un material representa su capacidad de absorber la energía sin experimentar ningún tipo de daño permanente.

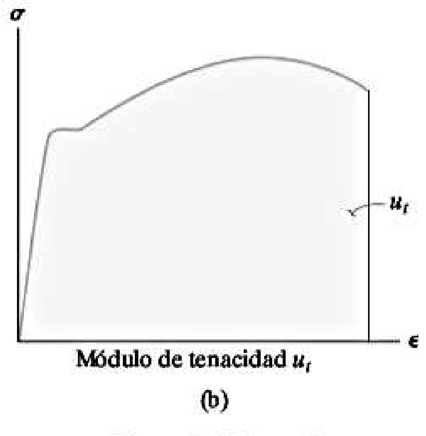


Módulo de resiliencia u_r

(a)

Figura 3-16

Módulo de tenacidad. Otra propiedad importante de un material es el ***módulo de tenacidad***, u_t. Esta cantidad representa *toda el área* bajo el diagrama de esfuerzo-deformación, figura 3-16*b* y, por lo tanto, indica la densidad de la energía de deformación del material justo antes de fracturarse. Esta propiedad se vuelve importante en el diseño de elementos que se pueden sobrecargar de manera accidental. La aleación de metales también puede cambiar su resiliencia y tenacidad. Por ejemplo, al modificar el porcentaje de carbono en el acero, los diagramas de esfuerzo-deformación resultantes de la figura 3-17 muestran cómo pueden cambiarse los grados de resiliencia y tenacidad.



Módulo de tenacidad u_t

(b)

Figura 3-16 (cont.)

3

Puntos importantes

- Un *diagrama de esfuerzo-deformación convencional* es importante en ingeniería porque proporciona un medio para obtener datos acerca de la resistencia a la tensión o a la compresión de un material independientemente de su tamaño físico o forma.
- El *esfuerzo y la deformación de ingeniería* se calculan usando el área de la sección transversal y la longitud calibrada *originales* de la probeta.
- Un *material dúctil*, como el acero de bajo carbono, tiene cuatro distintos comportamientos cuando se somete a una carga. Éstos son el *comportamiento elástico*, la *cedencia*, el *endurecimiento por deformación* y la *estricción*.
- Un material es *elástico lineal* si el esfuerzo es proporcional a la deformación dentro de la región elástica. Este comportamiento está descrito por la *ley de Hooke*, $\sigma = E\epsilon$, donde el *módulo de elasticidad E* es la pendiente de la línea.
- Los puntos más importantes en el diagrama de esfuerzo-deformación son el límite de *proporcionalidad*, el *límite elástico*, el *esfuerzo de cedencia*, el *esfuerzo último* y *esfuerzo de fractura*.
- La *ductilidad* de un material puede especificarse mediante el *porcentaje de elongación* o el *porcentaje de reducción de área de la probeta*.
- Si un material no tiene un punto de cedencia definido, se puede especificar una *resistencia a la cedencia* mediante un procedimiento gráfico como el *método de corrimiento*.
- Los *materiales frágiles*, como el hierro fundido gris, no tienen una cedencia o es muy pequeña por lo que pueden fracturarse de manera súbita.
- El *endurecimiento por deformación* se utiliza para establecer un el punto de cedencia más alto de un material. Esto se hace deformando el material más allá de su límite elástico para después liberarlo de la carga. El módulo de elasticidad permanece igual; sin embargo, la ductilidad del material *disminuye*.
- La *energía de deformación* es la energía almacenada en un material debido a su deformación. Esta energía por unidad de volumen se denomina *densidad de la energía de deformación*. Si se mide hasta el límite de proporcionalidad, se conoce como el *módulo de resiliencia*, y si se mide hasta el punto de fractura, se llama *módulo de tenacidad*. Puede determinarse a partir del área bajo el diagrama σ-ϵ.

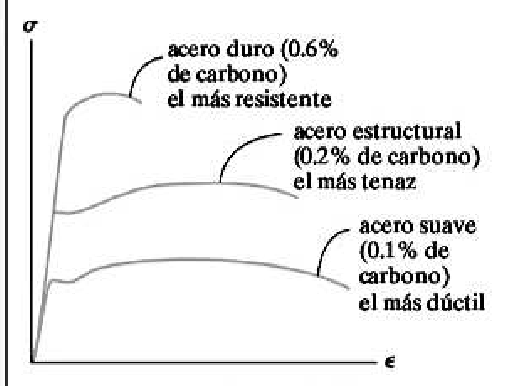


Figura 3-17


Esta probeta de nylon presenta un alto grado de tenacidad, como puede observarse por la gran estricción que ha ocurrido justo antes de la fractura.

3

EJEMPLO 3.1

Un ensayo de tensión para una aleación de acero da como resultado el diagrama de esfuerzo-deformación mostrado en la figura 3-18. Calcule el módulo de elasticidad y la resistencia a la cedencia con base en un corrimiento del 0.2 por ciento. Identifique en la gráfica el esfuerzo último y el esfuerzo de fractura.



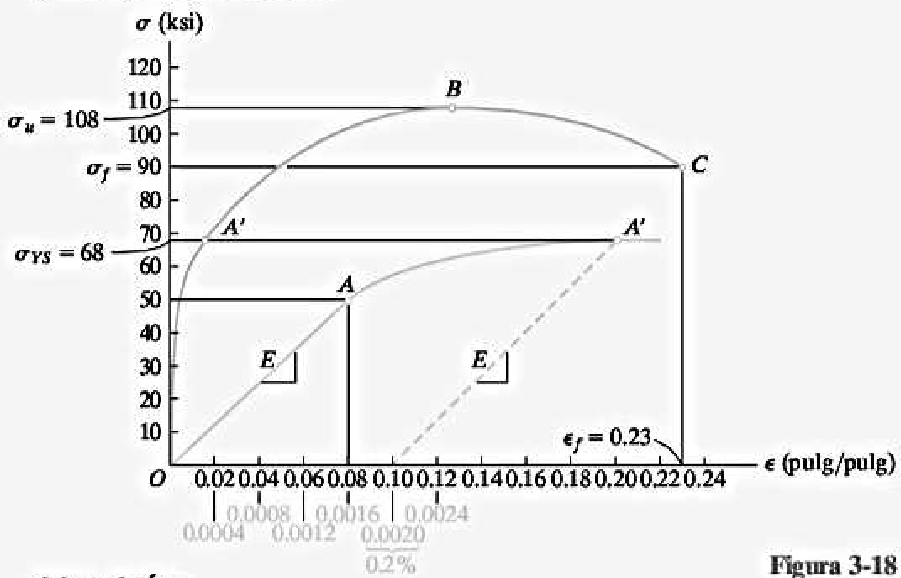


Figura 3-18

SOLUCIÓN

Módulo de elasticidad. Debemos calcular la *pendiente* de la porción inicial en línea recta de la gráfica. Usando la curva magnificada y la escala mostrada en gris, esta línea se extiende desde el punto O hasta un punto estimado A, que tiene coordenadas aproximadas (0.0016 pulg/pulg, 50 ksi). Por lo tanto,

$$E = \frac{50 \text{ ksi}}{0.0016 \text{ pulg/pulg}} = 31.2(10^3) \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

Observe que la ecuación de la línea OA es, entonces, $\sigma = 31.2(10^3)\epsilon$.

Resistencia a la cedencia. Para un corrimiento de 0.2 por ciento, se inicia con una deformación de 0.2 por ciento o 0.0020 pulg/pulg y se extiende gráficamente una línea (discontinua) paralela a OA hasta que interseca a la curva σ-ϵ en A'. La resistencia a la cedencia es aproximadamente

$$\sigma_{YS} = 68 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

Esfuerzo último. Se define mediante el pico de la gráfica σ-ϵ, que es el punto B en la figura 3-18.

$$\sigma_u = 108 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

Esfuerzo de fractura. Cuando la probeta se deforma hasta un máximo de $\epsilon_f = 0.23$ pulg/pulg, se fractura en el punto C. Por lo tanto,

$$\sigma_f = 90 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 3.2

En la figura 3-19 se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación para una aleación de aluminio utilizada en la fabricación de partes de aeronaves. Si una probeta de este material se esfuerza hasta 600 MPa, determine la deformación permanente que queda en la probeta cuando ésta se libera de la carga. Además, encuentre el módulo de resiliencia antes y después de la aplicación de la carga.

SOLUCIÓN

Deformación permanente. Cuando la probeta se somete a la carga, se endurece por deformación hasta que se alcanza el punto B en el diagrama σ-ϵ. La deformación aproximada en este punto es 0.023 mm/mm. Cuando se retira la carga, el material se comporta siguiendo la línea recta BC, que es paralela a la línea OA. Como ambas líneas tienen la misma pendiente, la deformación en el punto C se puede determinar en forma analítica. La pendiente de la línea OA es el módulo de elasticidad, es decir,

$$E = \frac{450 \text{ MPa}}{0.006 \text{ mm/mm}} = 75.0 \text{ GPa}$$

Del triángulo CBD requerimos

$$E = \frac{BD}{CD}; \qquad 75.0(10^9) \text{ Pa} = \frac{600(10^6) \text{ Pa}}{CD}$$

$$CD = 0.008 \text{ mm/mm}$$

Esta deformación representa la cantidad de *deformación elástica recuperada*. Así que la deformación permanente, ϵ_{OC}, es

$$\epsilon_{OC} = 0.023 \text{ mm/mm} - 0.008 \text{ mm/mm}$$
$$= 0.0150 \text{ mm/mm} \qquad \textit{Resp.}$$

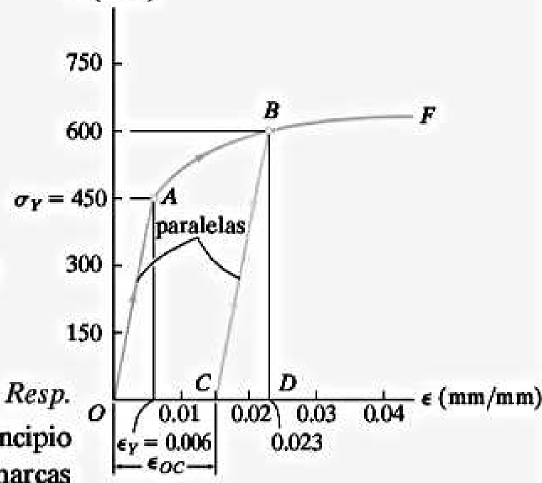


Figura 3-19

Nota: Si las marcas de medición en la probeta estaban en un principio separadas por 50 mm, después de que la carga se *retira*, estas marcas estarán a una distancia de 50 mm + (0.0150)(50 mm) = 50.75 mm.

Módulo de resiliencia. Al aplicar la ecuación 3-8, se tiene*

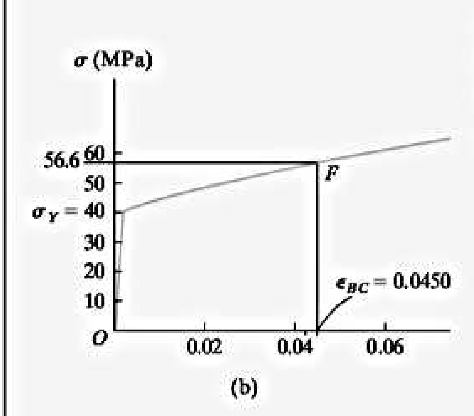
$$(u_r)_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}\sigma_{pl}\epsilon_{pl} = \frac{1}{2}(450 \text{ MPa})(0.006 \text{ mm/mm})$$
$$= 1.35 \text{ MJ/m}^3 \qquad \textit{Resp.}$$

$$(u_r)_{\text{final}} = \frac{1}{2}\sigma_{pl}\epsilon_{pl} = \frac{1}{2}(600 \text{ MPa})(0.008 \text{ mm/mm})$$
$$= 2.40 \text{ MJ/m}^3 \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Por comparación, el efecto del endurecimiento por deformación del material ha ocasionado un aumento en el módulo de resiliencia; sin embargo, observe que el módulo de tenacidad para el material ha disminuido porque el área bajo la curva original, $OABF$, es mayor que el área bajo la curva CBF.

*En el Sistema Internacional de Unidades el trabajo se mide en joules, donde 1 J = 1 N · m.

EJEMPLO 3.3



La barra de aluminio que se muestra en la figura 3-20*a* tiene una sección transversal circular y está sometida a una carga axial de 10 kN. Según la porción del diagrama de esfuerzo-deformación que se muestra en la figura 3-20*b*, determine la elongación aproximada de la barra cuando se aplica la carga. Considere que $E_{al} = 70$ GPa.

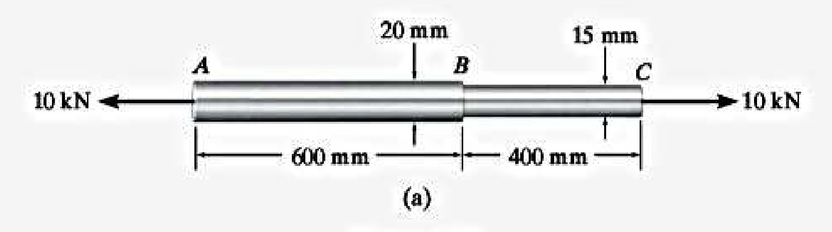


Figura 3-20

SOLUCIÓN

Para el análisis no se tomarán en cuenta las *deformaciones localizadas* en el punto de aplicación de la carga y donde la sección transversal de la barra cambia de manera repentina. (Estos efectos se analizarán en las secciones 4.1 y 4.7.) El esfuerzo normal y la deformación son uniformes a través de la sección media de cada segmento.

Para encontrar la elongación de la barra, primero se debe obtener la deformación. Esto se realiza mediante el cálculo del esfuerzo, para después usar el diagrama de esfuerzo-deformación. El esfuerzo normal dentro de cada segmento es

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)\text{ N}}{\pi(0.01\text{ m})^2} = 31.83\text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)\text{ N}}{\pi(0.0075\text{ m})^2} = 56.59\text{ MPa}$$

Con base en el diagrama de esfuerzo-deformación, el material en el segmento AB se deforma *elásticamente* puesto que $\sigma_{AB} < \sigma_Y = 40$ MPa. Mediante la ley de Hooke,

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{al}} = \frac{31.83(10^6)\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0.0004547\text{ mm/mm}$$

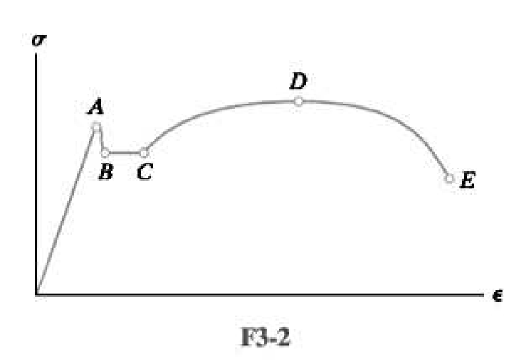
El material dentro del segmento BC se deforma plásticamente, puesto que $\sigma_{BC} > \sigma_Y = 40$ MPa. A partir de la gráfica, para $\sigma_{BC} = 56.59$ MPa, $\epsilon_{BC} \approx 0.045$ mm/mm. Por lo tanto, la elongación aproximada de la barra es

$$\delta = \Sigma\epsilon L = 0.0004547(600\text{ mm}) + 0.0450(400\text{ mm})$$
$$= 18.3\text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F3-1. Defina material homogéneo.

F3-2. Indique los puntos en el diagrama de esfuerzo-deformación que representan el límite de proporcionalidad y el esfuerzo último.



F3-2

F3-3. Defina el módulo de elasticidad E.

F3-4. A temperatura ambiente, el acero de bajo carbono es un material dúctil. ¿Verdadero o falso?

F3-5. El esfuerzo y la deformación de ingeniería se calculan utilizando el área de la sección transversal y la longitud *reales* de la probeta. ¿Verdadero o falso?

F3-6. A medida que la temperatura aumenta, el módulo de elasticidad se incrementa. ¿Verdadero o falso?

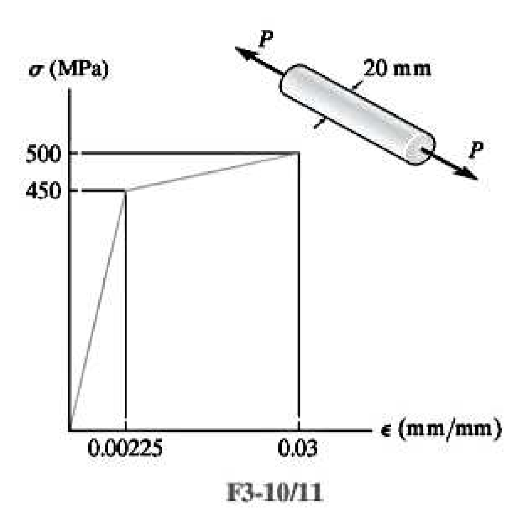
F3-7. Una barra de 100 mm de longitud tiene un diámetro de 15 mm. Si se aplica una carga axial a tensión de 100 kN, determine el cambio en su longitud. $E = 200$ GPa.

F3-8. Una barra tiene una longitud de 8 pulg y un área de sección transversal de 12 pulg². Determine el módulo de elasticidad de su material si está sometido a una carga axial a tensión de 10 kip y se estira 0.003 pulg. El material tiene un comportamiento elástico lineal.

F3-9. Una barra de latón de 10 mm de diámetro tiene un módulo de elasticidad de $E = 100$ GPa. Si tiene una longitud de 4 m y está sometida a una carga axial a tensión de 6 kN, determine su elongación.

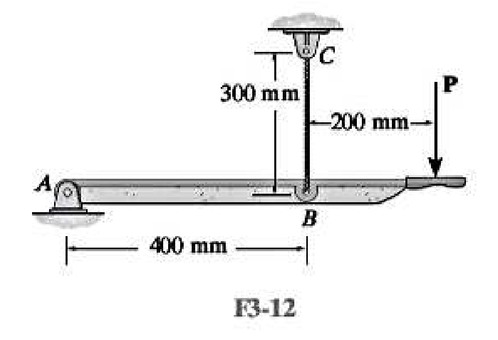
F3-10. El material para la probeta de 50 mm de largo tiene el diagrama de esfuerzo-deformación mostrado en la figura. Si $P = 100$ kN, determine la elongación de la probeta.

F3-11. El material para la probeta de 50 mm de largo tiene el diagrama de esfuerzo-deformación mostrado en la figura. Si se aplica la carga $P = 150$ kN y después se retira, determine la elongación permanente de la probeta.



F3-10/11

F3-12. Si la elongación del alambre BC es de 0.2 mm después de aplicar la fuerza **P**, determine la magnitud de **P**. El alambre es de acero A-36 y tiene un diámetro de 3 mm.



F3-12

3

PROBLEMAS

•3-1. Un cilindro de concreto que tiene un diámetro de 6.00 pulg y una longitud calibrada de 12 pulg se prueba a compresión. Los resultados del ensayo se reportan en la tabla de carga y contracción. Dibuje el diagrama de esfuerzo-deformación mediante escalas de 1 pulg = 0.5 ksi y 1 pulg = 0.2 (10^{-3}) pulg/pulg. A partir del diagrama, determine el módulo de elasticidad aproximado.

Carga (kip)	Contracción (pulg)
0	0
5.0	0.0006
9.5	0.0012
16.5	0.0020
20.5	0.0026
25.5	0.0034
30.0	0.0040
34.5	0.0045
38.5	0.0050
46.5	0.0062
50.0	0.0070
53.0	0.0075

Prob. 3-1

3-2. En la tabla se presentan datos tomados de un ensayo de esfuerzo-deformación para cierta cerámica. La curva es lineal entre el origen y el primer punto. Grafique el diagrama y determine el módulo de elasticidad y el módulo de resiliencia.

3-3. En la tabla se presentan datos tomados de un ensayo de esfuerzo-deformación para cierta cerámica. La curva es lineal entre el origen y el primer punto. Grafique el diagrama y determine el módulo de tenacidad aproximado. El esfuerzo de ruptura es $\sigma_r = 53.4$ ksi.

σ (ksi)	ϵ (pulg/pulg)
0	0
33.2	0.0006
45.5	0.0010
49.4	0.0014
51.5	0.0018
53.4	0.0022

Probs. 3-2/3

*3-4. Un ensayo de tensión se realizó con una probeta que tenía un diámetro original de 12.5 mm y una longitud calibrada de 50 mm. Los datos se presentan en la tabla. Grafique el diagrama de esfuerzo-deformación y determine aproximadamente el módulo de elasticidad, el esfuerzo último y el esfuerzo de fractura. Utilice una escala de 20 mm = 50 MPa y 20 mm = 0.05 mm/mm. Trace de nuevo la región elástica lineal, usando la misma escala de esfuerzo pero con una escala de deformación de 20 mm = 0.001 mm/mm.

3-5. Un ensayo de tensión se realizó con una probeta de acero que tenía un diámetro original de 12.5 mm y una longitud calibrada de 50 mm. Usando los datos que se presentan en la tabla, grafique el diagrama de esfuerzo-deformación y determine aproximadamente el módulo de tenacidad. Utilice una escala de 20 mm = 50 MPa y 20 mm = 0.05 mm/mm.

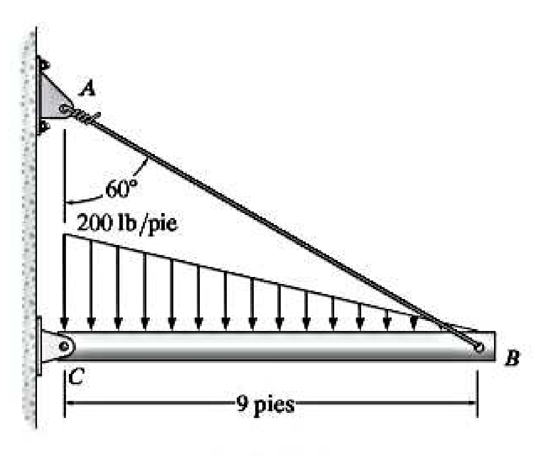
Carga (kN)	Elongación (mm)
0	0
11.1	0.0175
31.9	0.0600
37.8	0.1020
40.9	0.1650
43.6	0.2490
53.4	1.0160
62.3	3.0480
64.5	6.3500
62.3	8.8900
58.8	11.9380

Probs. 3-4/5

3-6. Una probeta tiene en un principio una longitud de 1 pie, un diámetro de 0.5 pulg y está sometida a una fuerza de 500 lb. Cuando la fuerza se incrementa de 500 a 1800 lb, la probeta se alarga 0.009 pulg. Determine el módulo de elasticidad para el material si éste se mantiene elástico lineal.

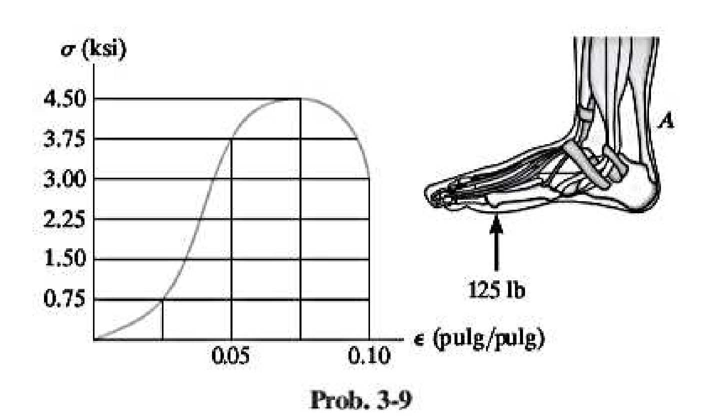
3-7. Un elemento estructural de un reactor nuclear está fabricado de cierta aleación de circonio. Si el elemento debe soportar una carga axial de 4 kips, determine el área requerida para su sección transversal. Use un factor de seguridad de 3 respecto a la cedencia. ¿Cuál es la carga sobre el elemento si tiene 3 pies de largo y su elongación es de 0.02 pulg? $E_{cr} = 14(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 57.5$ ksi. El material tiene un comportamiento elástico.

*3-8. El puntal está soportado por un pasador en C y un alambre AB de retenida de acero A-36. Si el alambre tiene un diámetro de 0.2 pulg, determine cuánto se estira cuando la carga distribuida actúa sobre el puntal.



Prob. 3-8

•3-9. En la figura se muestra el diagrama σ-ϵ para un conjunto de fibras de colágeno de las que está compuesto un tendón humano. Si un segmento del tendón de Aquiles en A tiene una longitud de 6.5 pulg y un área aproximada en su sección transversal de 0.229 pulg^2, determine su elongación si el pie soporta una carga de 125 lb, lo que provoca una tensión en el tendón de 343.75 lb.

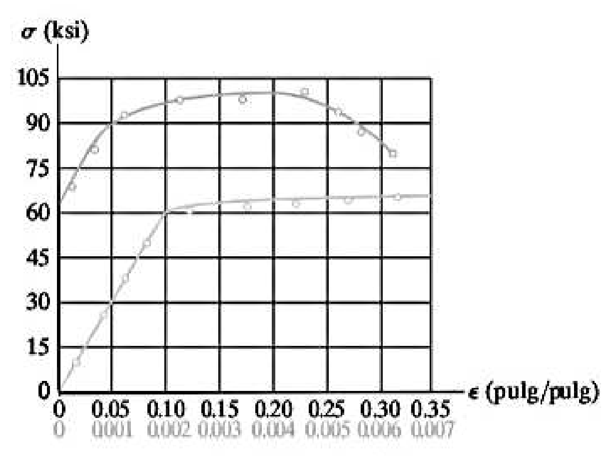


Prob. 3-9

3-10. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación para una aleación metálica que tiene un diámetro original de 0.5 pulg y una longitud calibrada de 2 pulg. Determine aproximadamente el módulo de elasticidad para el material, la carga sobre la probeta que causa la cedencia y la carga última que soportará la probeta.

3-11. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación para una aleación metálica que tiene un diámetro original de 0.5 pulg y una longitud calibrada de 2 pulg. Si la probeta se carga hasta un esfuerzo de 90 ksi, determine el tamaño aproximado de la recuperación elástica y el incremento en la longitud calibrada después de retirar la carga.

*3-12. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación para una aleación metálica que tiene un diámetro original de 0.5 pulg y una longitud calibrada de 2 pulg. Determine aproximadamente el módulo de resiliencia y el módulo de tenacidad para el material.



Probs. 3-10/11/12

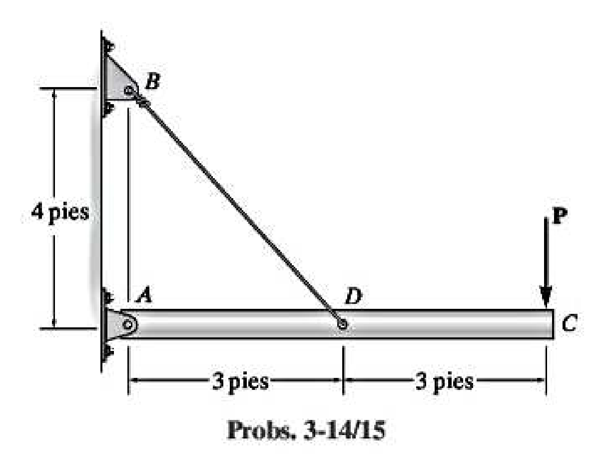
•3-13. Una barra con una longitud de 5 pulg y un área de sección transversal de 0.7 pulg^2 se somete a una fuerza axial de 8000 lb. Si la barra se extiende 0.002 pulg, determine el módulo de elasticidad del material. Éste tiene un comportamiento elástico lineal.



Prob. 3-13

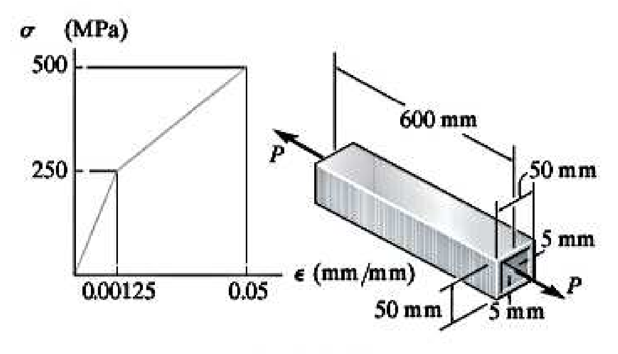
3-14. El tubo rígido se sostiene mediante un pasador en A y un alambre BD que es de acero A-36. Si el alambre tiene un diámetro de 0.25 pulg, determine cuánto se estira al aplicar una carga de $P = 600$ lb sobre el tubo.

3-15. El tubo rígido se sostiene mediante un pasador en A y un alambre BD que es de acero A-36. Si el alambre tiene un diámetro de 0.25 pulg, determine la carga P si el extremo C se desplaza 0.075 pulg hacia abajo.



Probs. 3-14/15

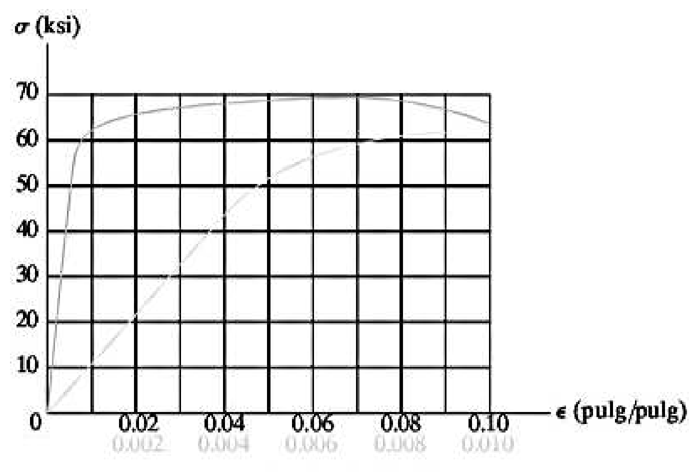
***3-16.** Determine la elongación de la barra hueca cuadrada cuando se somete a la fuerza axial $P = 100$ kN. Si esta fuerza axial se incrementa hasta $P = 360$ kN y después se retira, determine la elongación permanente de la barra. Ésta hecha de una aleación metálica que tiene un diagrama de esfuerzo-deformación similar al mostrado en la figura.



Prob. 3-16

3-17. Un ensayo de tensión se realizó sobre una probeta hecha con una aleación de aluminio 2014-T6. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación resultante. Estime (a) el límite de proporcionalidad, (b) el módulo de elasticidad y (c) la resistencia a la cedencia con base en una deformación de 0.2 por ciento con el método de corrimiento.

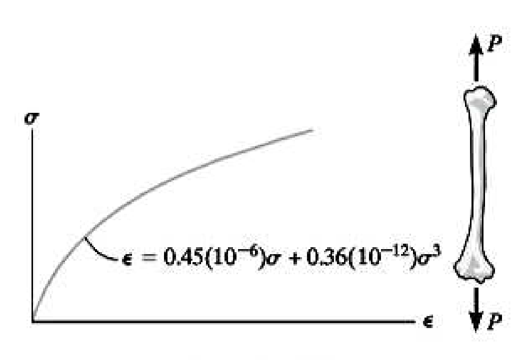
3-18. Un ensayo de tensión se realizó sobre una probeta hecha con una aleación de aluminio 2014-T6. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación resultante. Estime (a) el módulo de resiliencia y (b) el módulo de tenacidad.



Probs. 3-17/18

3-19. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación para un hueso, el cual puede describirse mediante la ecuación $\epsilon = 0.45(10^{-6})\ \sigma + 0.36(10^{-12})\ \sigma^3$, donde σ está dada en kPa. Determine la resistencia a la cedencia suponiendo un corrimiento de 0.3 por ciento.

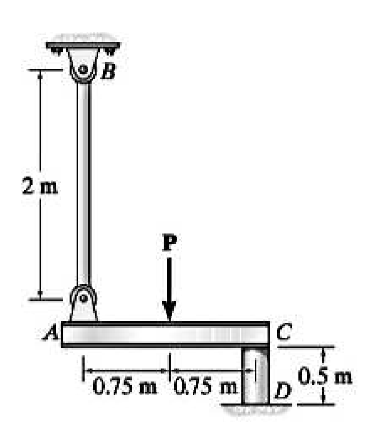
***3-20.** En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación para un hueso, el cual puede describirse mediante la ecuación $\epsilon = 0.45(10^{-6})\ \sigma + 0.36(10^{-12})\ \sigma^3$, donde σ está dada en kPa. Determine el módulo de tenacidad y el tamaño de la elongación de una región de 200 mm de largo justo antes de la fractura, si la falla ocurre en $\epsilon = 0.12$ mm/mm.

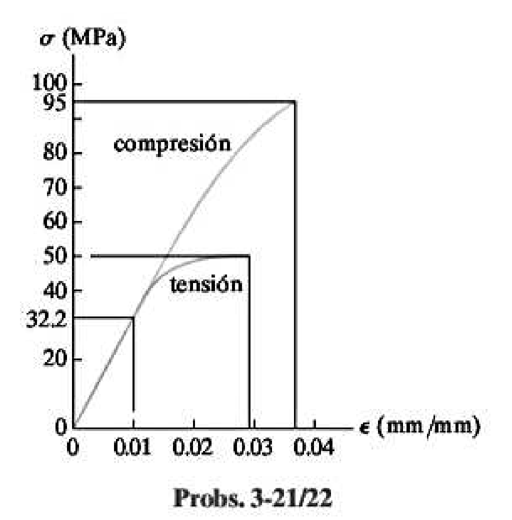


Probs. 3-19/20

•3-21. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación para una resina de poliestireno. Si la viga rígida se sostiene por medio del puntal AB y el poste CD, ambos hechos de este material, y se somete a una carga de $P = 80$ kN, determine el ángulo de inclinación de la viga cuando se aplica la carga. El diámetro del puntal es de 40 mm y el del poste es de 80 mm.

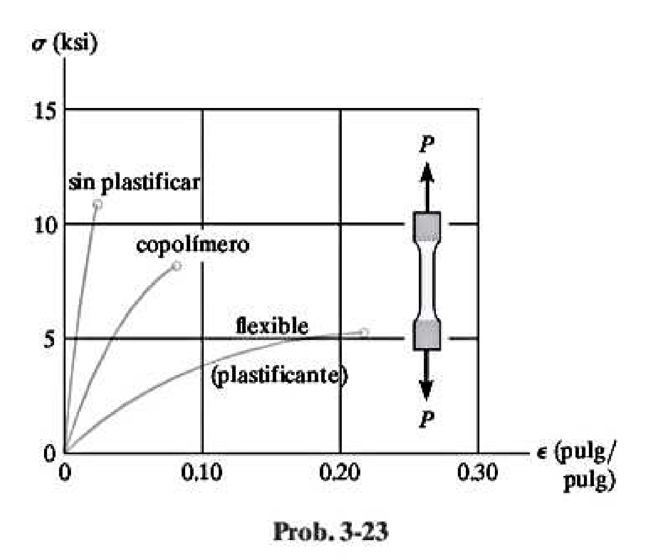
3-22. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación para una resina de poliestireno. Si la viga rígida se sostiene por medio del puntal AB y el poste CD, ambos hechos de este material, determine la mayor carga P que puede aplicarse a la viga antes de que se rompa. El diámetro del puntal es de 12 mm y el del poste es de 40 mm.





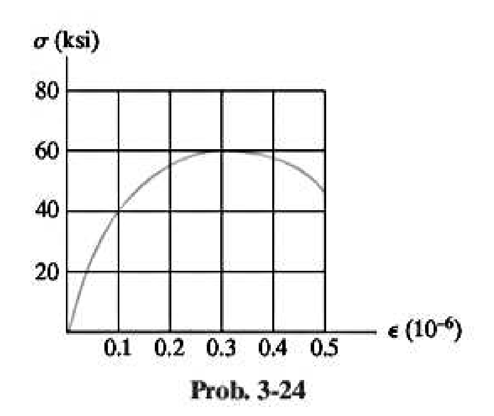
Probs. 3-21/22

3-23. Es posible reducir la rigidez del cloruro de polivinilo mediante la adición de plastificantes. En la siguiente figura se muestran los diagramas de esfuerzo-deformación para tres tipos de material que presentan este efecto. Especifique el tipo que debe usarse en la fabricación de una barra con una longitud de 5 pulg y diámetro de 2 pulg, la cual debe soportar al menos una carga axial de 20 kip y debe ser capaz de estirarse hasta $\frac{1}{4}$ de pulg.



Prob. 3-23

*3-24. El diagrama de esfuerzo-deformación para muchas aleaciones metálicas puede describirse de manera analítica mediante la ecuación de tres parámetros de Ramberg-Osgood $\epsilon = \sigma/E + k\sigma^n$, donde E, k y n se determinan a partir de mediciones tomadas del diagrama. Con la ayuda del diagrama de esfuerzo-deformación mostrado en la figura, considere $E = 30(10^3)$ ksi y determine los otros dos parámetros k y n, con esto obtenga una expresión analítica para la curva.



Prob. 3-24

3

3.6 Razón de Poisson



Cuando el bloque de caucho se comprime (deformación negativa) sus lados se expanden (deformación positiva). La razón de estas deformaciones permanece constante.

Cuando un cuerpo deformable se somete a una fuerza de tensión axial, no sólo se alarga, sino que también se contrae de manera lateral. Por ejemplo, si una banda de caucho se estira, se puede notar que tanto el grosor como la anchura de la banda se reducen. Del mismo modo, una fuerza de compresión que actúa sobre un cuerpo provoca que éste se contraiga en la dirección de la fuerza y que sus lados se expandan.

Considere la barra mostrada en la figura 3-21 con un radio r y una longitud L originales, la cual está sometida a la fuerza de tensión P. Esta fuerza alarga la barra una cantidad δ, y su radio se contrae una cantidad δ'. Las deformaciones en la dirección longitudinal o axial y en la dirección lateral o radial son, respectivamente,

$$\epsilon_{\text{long}} = \frac{\delta}{L} \quad \text{y} \quad \epsilon_{\text{lat}} = \frac{\delta'}{r}$$

A principios del siglo XIX, el científico francés S. D. Poisson se dio cuenta que dentro del *rango elástico* la *razón* de estas deformaciones es una *constante*, puesto que las deformaciones δ y δ' son proporcionales. Esta constante se denomina ***razón de Poisson***, ν (nu), y tiene un valor numérico que es único para cada material particular que sea *homogéneo e isotrópico*. Expresado en forma matemática es

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}} \tag{3-9}$$

El signo negativo se incluye aquí porque la *elongación longitudinal* (deformación positiva) ocasiona una *contracción lateral* (deformación negativa), y viceversa. Observe que estas deformaciones son causadas sólo por la fuerza axial o longitudinal P; es decir, ninguna fuerza o esfuerzo actúa en una dirección lateral para deformar el material en esa dirección.

La razón de Poisson es una cantidad *adimensional* y para la mayoría de los sólidos no porosos tiene un valor que se encuentra entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$. Los valores típicos de ν para los materiales de ingeniería comunes se presentan en el interior de la contraportada de este libro. Para un "material ideal" que no tiene deformación lateral cuando se estira o se comprime, la razón de Poisson será 0. Además, en la sección 10.6 se mostrará que el *máximo* valor posible para el coeficiente de Poisson es 0.5. Por lo tanto $0 \le \nu \le 0.5$.

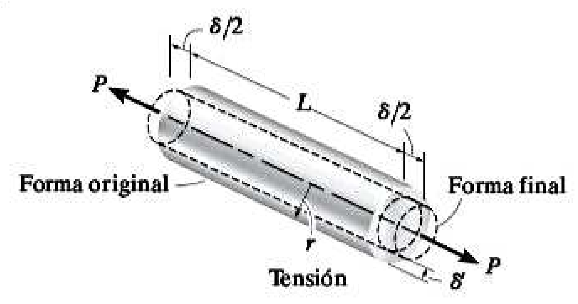


Figura 3-21

EJEMPLO 3.4

Una barra de acero A-36 tiene las dimensiones mostradas en la figura 3-22. Si se aplica una fuerza axial de $P = 80$ kN sobre la barra, determine el cambio en su longitud y el cambio en las dimensiones de su sección transversal después de aplicar la carga. El material se comporta elásticamente.

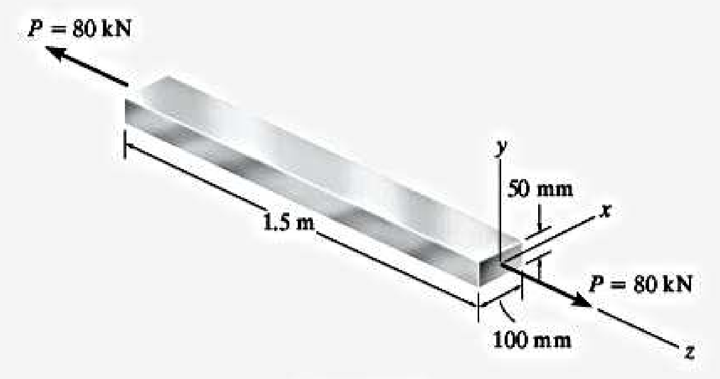


Figura 3-22

3

SOLUCIÓN

El esfuerzo normal en la barra es

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{80(10^3)\text{ N}}{(0.1\text{ m})(0.05\text{ m})} = 16.0(10^6)\text{ Pa}$$

De acuerdo con la tabla ubicada en el interior de la contraportada de este libro, para el acero A-36 $E_{ac} = 200$ GPa, por lo que la carga en la dirección z es

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_{ac}} = \frac{16.0(10^6)\text{ Pa}}{200(10^9)\text{ Pa}} = 80(10^{-6})\text{ mm/mm}$$

Por lo tanto, el alargamiento axial de la barra es

$$\delta_z = \epsilon_z L_z = [80(10^{-6})](1.5\text{ m}) = 120\ \mu\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

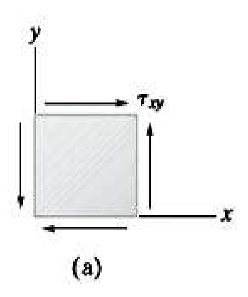
Usando la ecuación 3-9, donde $\nu_{ac} = 0.32$, como lo indica el interior de la contraportada, las deformaciones por contracción lateral en *ambas* direcciones x y y son

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu_{ac}\epsilon_z = -0.32[80(10^{-6})] = -25.6\ \mu\text{m/m}$$

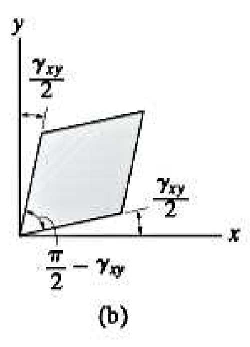
Así que los cambios en las dimensiones de la sección transversal son

$$\delta_x = \epsilon_x L_x = -[25.6(10^{-6})](0.1\text{ m}) = -2.56\ \mu\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L_y = -[25.6(10^{-6})](0.05\text{ m}) = -1.28\ \mu\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



(a)



(b)

Figura 3-23

3.7 Diagrama de esfuerzo-deformación cortante

En la sección 1.5 se demostró que cuando un pequeño elemento de material se somete a *cortante puro*, el equilibrio exige que se desarrollen esfuerzos cortantes iguales en las cuatro caras del elemento. Estos esfuerzos τ_{xy} deben dirigirse hacia o desde las esquinas diagonalmente opuestas del elemento, como se muestra en la figura 3-23*a*. Por otra parte, si el material es *homogéneo* e *isotrópico*, entonces este esfuerzo cortante distorsionará de manera uniforme al elemento, figura 3-23*b*. Como se mencionó en la sección 2.2, la deformación cortante γ_{xy} mide la distorsión angular del elemento relativa a los lados que en un principio se encontraban a lo largo de los ejes *x* y *y*.

El comportamiento de un material sometido a cortante puro puede estudiarse en un laboratorio usando probetas en forma de tubo delgado y sometiéndolas a una carga de torsión. Si se realizan las mediciones del par de torsión aplicado y el ángulo de giro resultante, mediante los métodos que se explicarán en el capítulo 5, los datos pueden utilizarse para determinar el esfuerzo cortante y la deformación cortante, con esto es posible trazar un diagrama de esfuerzo-deformación cortante. En la figura 3-24 se muestra un ejemplo de este diagrama para un material dúctil. Al igual que en el ensayo de tensión, este material tiene un comportamiento elástico lineal cuando se somete a fuerza cortante y tendrá un *límite de proporcionalidad* τ_{pl} definido. Por otro lado, el endurecimiento por deformación ocurrirá hasta que se alcance un *esfuerzo cortante último* τ_u. Por último, el material comenzará a perder su resistencia al cortante cuando llegue a un punto donde se fracture, τ_f.

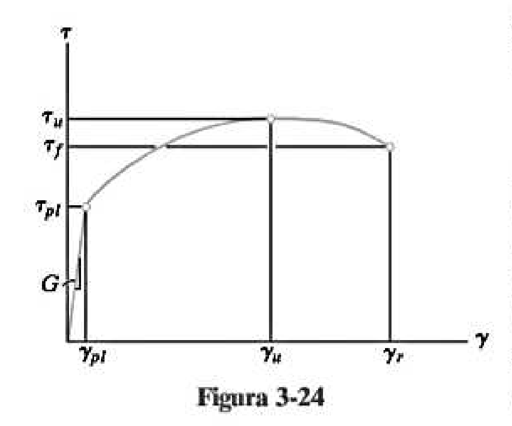


Figura 3-24

Para la mayoría de los materiales de ingeniería, como el que acabamos de describir, el comportamiento elástico es *lineal*, por lo que la ley de Hooke para el esfuerzo cortante se puede escribir como

$$\tau = G\gamma \tag{3-10}$$

Aquí *G* se llama ***módulo de elasticidad cortante*** o ***módulo de rigidez cortante*** (o simplemente módulo de rigidez). Su valor representa la pendiente de la línea en el diagrama τ-γ, es decir, $G = \tau_{pl}/\gamma_{pl}$. Los valores típicos para los materiales comunes de ingeniería se presentan en el interior de la contraportada. Observe que las unidades de medida para *G* serán las *mismas* que para τ (Pa o psi), puesto que γ se mide en radianes, una cantidad adimensional.

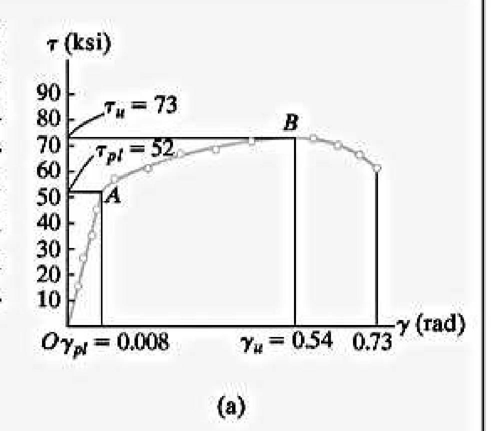
Como se verá en la sección 10.6, las tres constantes de material, *E*, ν y *G* en realidad están *relacionadas* por la ecuación

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{3-11}$$

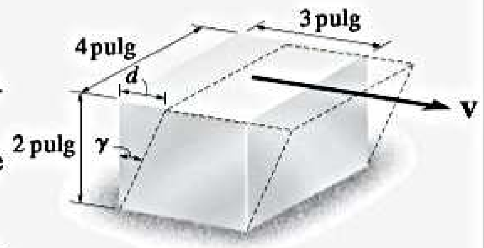
Siempre que *E* y *G* se conozcan, el valor de ν puede determinarse a partir de esta ecuación y no a través de una medición experimental. Por ejemplo, en el caso del acero A-36, $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi y $G_{ac} = 11.0(10^3)$ ksi, de modo que, a partir de la ecuación 3-11, $\nu_{ac} = 0.32$.

EJEMPLO 3.5

Una probeta hecha con una aleación de titanio se prueba a torsión y el diagrama de esfuerzo-deformación cortante se muestra en la figura 3-25*a*. Determine el módulo de rigidez *G*, el límite de proporcionalidad y el esfuerzo cortante último. Además, determine la distancia *d* máxima que puede desplazarse de manera horizontal la parte superior de un bloque de este material, como el mostrado en la figura 3-25*b*, si el material se comporta elásticamente cuando actúa sobre él una fuerza cortante **V**. ¿Cuál es la magnitud de **V** necesaria para causar este desplazamiento?



(a)



(b)

Figura 3-25

SOLUCIÓN

Módulo de rigidez. Este valor representa la pendiente de la porción en línea recta *OA* del diagrama τ-γ. Las coordenadas del punto *A* son (0.008 rad, 52 ksi). Por lo tanto,

$$G = \frac{52\text{ ksi}}{0.008\text{ rad}} = 6500\text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

Así que la ecuación de la línea *OA* es $\tau = G\gamma = 6500\gamma$, que es la ley de Hooke para el cortante.

Límite de proporcionalidad. Por inspección, la gráfica deja de ser lineal en el punto *A*. Entonces,

$$\tau_{pl} = 52\text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

Esfuerzo último. Este valor representa el esfuerzo cortante máximo, punto *B*. En la gráfica,

$$\tau_u = 73\text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

Desplazamiento elástico y fuerza cortante máximos. Como la deformación cortante elástica máxima es de 0.008 rad, un ángulo muy pequeño, la parte superior del bloque en la figura 3-25*b* se desplazará de manera horizontal:

$$\tan(0.008\text{ rad}) \approx 0.008\text{ rad} = \frac{d}{2\text{ pulg}}$$

$$d = 0.016\text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

El esfuerzo cortante *promedio* correspondiente en el bloque es $\tau_{pl} =$ 52 ksi. Así, la fuerza cortante *V* necesaria para causar el desplazamiento es

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{V}{A}; \qquad 52\text{ ksi} = \frac{V}{(3\text{ pulg})(4\text{ pulg})}$$

$$V = 624\text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 3.6

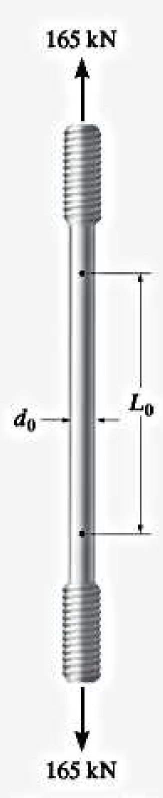


Figura 3-26

En la figura 3-26 se muestra una probeta de aluminio que tiene un diámetro $d_0 = 25$ mm y una longitud calibrada $L_0 = 250$ mm. Si una fuerza de 165 kN alarga la longitud calibrada 1.20 mm, encuentre el módulo de elasticidad. Además, determine qué tanto se contrae el diámetro de la probeta por la acción de la fuerza. Considere que $G_{al} = 26$ GPa y $\sigma_Y =$ 440 MPa.

SOLUCIÓN

Módulo de elasticidad. El esfuerzo normal promedio en la probeta es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{165(10^3)\text{ N}}{(\pi/4)(0.025\text{ m})^2} = 336.1\text{ MPa}$$

y la deformación normal promedio es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.20\text{ mm}}{250\text{ mm}} = 0.00480\text{ mm/mm}$$

Como $\sigma < \sigma_Y = 440$ MPa, el material se comporta elásticamente. Por lo tanto, el módulo de elasticidad es

$$E_{al} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{336.1(10^6)\text{ Pa}}{0.00480} = 70.0\text{ GPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Contracción del diámetro. Primero se determinará la razón de Poisson para el material mediante la ecuación 3-11.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$26\text{ GPa} = \frac{70.0\text{ GPa}}{2(1+\nu)}$$

$$\nu = 0.347$$

Como $\epsilon_{long} = 0.00480$ mm/mm, entonces por la ecuación 3-9,

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$$

$$0.347 = -\frac{\epsilon_{lat}}{0.00480\text{ mm/mm}}$$

$$\epsilon_{lat} = -0.00166\text{ mm/mm}$$

Por consiguiente, la contracción del diámetro es

$$\delta' = (0.00166)(25\text{ mm})$$
$$= 0.0416\text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

*3.8 Falla de materiales por flujo plástico y fatiga

Hasta el momento, las propiedades mecánicas de un material se han estudiado sólo para una carga estática o aplicada lentamente y a temperatura constante. Sin embargo, en algunos casos un elemento puede utilizarse en un ambiente para el cual las cargas deben mantenerse durante largos periodos a elevadas temperaturas o, en otros casos, la carga puede repetirse o ciclarse. En este libro no se considerarán estos efectos, aunque se mencionará de manera breve cómo se determina la resistencia de un material para estas condiciones, ya que en el diseño se les da un tratamiento especial.

Flujo plástico. Cuando un material debe soportar una carga por un periodo muy largo, puede continuar deformándose hasta que ocurre una fractura súbita o su utilidad se ve afectada. Esta deformación permanente que depende del tiempo se conoce como ***flujo plástico***. Por lo general el flujo plástico se toma en cuenta cuando se usan metales y cerámica para construir elementos estructurales o partes mecánicas que están sometidas a altas temperaturas. Sin embargo, para algunos materiales, como polímeros y materiales compuestos (incluyendo la madera o el concreto) la temperatura *no* es un factor importante, pero el flujo plástico puede ocurrir estrictamente por la aplicación de cargas durante un tiempo prolongado. Como un ejemplo típico, considere el hecho de que una banda de caucho no volverá a su forma original después de ser liberada de una posición estirada en la que permaneció durante un periodo muy largo. En un sentido general, tanto el *esfuerzo* como la *temperatura* tienen un papel importante en la *tasa* de flujo plástico.



La aplicación por largo tiempo de la carga del cable sobre este poste causó que se deformara debido al flujo plástico.

Para efectos prácticos, cuando el flujo plástico se vuelve importante, un elemento se diseña para resistir una deformación por flujo plástico específica para un determinado periodo. Una propiedad mecánica importante que se utiliza en este sentido se llama *resistencia al flujo plástico*. Este valor representa el mayor esfuerzo que puede soportar el material durante un lapso determinado, sin sobrepasar una deformación por flujo plástico permisible. La resistencia al flujo plástico puede variar con la temperatura, y para el diseño se debe especificar una temperatura dada, una duración de la carga y una deformación por flujo plástico permisible. Por ejemplo, se ha sugerido un flujo plástico por deformación de 0.1 por ciento al año para el acero en pernos y tuberías.

Existen varios métodos para determinar una resistencia al flujo plástico permisible para un material en particular. Uno de los más sencillos consiste en probar varias probetas al mismo tiempo a una temperatura constante, pero sometiendo a cada una a un *esfuerzo axial diferente*. Al medir el tiempo necesario para producir la deformación permisible o la deformación de fractura para cada probeta, se puede establecer una curva de esfuerzo contra tiempo. Por lo general estos ensayos se realizan hasta un máximo de 1000 horas. En la figura 3-27 se muestra un ejemplo de los resultados para el acero inoxidable a una temperatura de 1200 °F y una deformación por flujo plástico prescrita en 1 por ciento. Como puede ob-

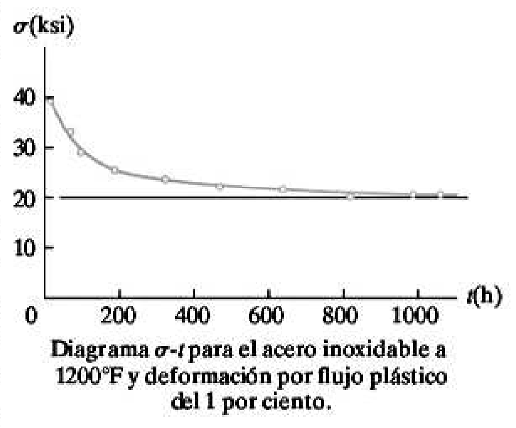


Diagrama σ-t para el acero inoxidable a 1200°F y deformación por flujo plástico del 1 por ciento.

Figura 3-27

servarse, este material tiene una resistencia al flujo plástico de 40 ksi (276 MPa) a temperatura ambiente (0.2 por ciento de compensación) y la resistencia al flujo plástico durante 1000 h resulta ser aproximadamente σ_c = 20 ksi (138 MPa).

En general, la resistencia al flujo plástico *disminuye* para *temperaturas más altas* o para una *aplicación de esfuerzos mayores*. En periodos más largos, deben hacerse extrapolaciones de las curvas. Para hacer esto se requiere cierta experiencia con el comportamiento del flujo plástico y algunos conocimientos complementarios sobre las propiedades del material. Además, una vez determinada la resistencia del material al flujo plástico, se aplica un factor de seguridad para obtener un esfuerzo permisible adecuado para el diseño.



El diseño de los elementos utilizados en los juegos de un parque de diversiones requiere una cuidadosa consideración de las cargas cíclicas que pueden causar fatiga.

Fatiga. Cuando un metal se somete a *ciclos* repetidos de esfuerzo o deformación, éstos hacen que su estructura se deforme, llevándolo en última instancia a la fractura. Este comportamiento se denomina ***fatiga***, y suele ser responsable de un gran porcentaje de fallas en bielas y cigüeñales de motor; hélices de turbinas a vapor o gas; conexiones o soportes de puentes, ruedas y ejes de ferrocarril; y otras partes sujetas a una carga cíclica. En todos estos casos, la fractura se producirá con un esfuerzo que es *menor* al esfuerzo de cedencia del material.

Al parecer, la naturaleza de esta falla deriva de la existencia común de imperfecciones microscópicas en la superficie del elemento, donde el esfuerzo localizado se vuelve *mucho mayor* que el esfuerzo promedio que actúa sobre la sección transversal. A medida que este gran esfuerzo se repite en forma cíclica, conduce a la formación de diminutas grietas. La aparición de estas grietas causa un incremento del esfuerzo en las puntas o límites de las mismas, que a su vez provoca un crecimiento de las grietas mientras el esfuerzo continúa en ciclo. Finalmente, el área de la sección transversal del elemento se reduce hasta el punto en el que ya no puede sostener la carga y, en consecuencia, se produce una fractura súbita. El material, aunque sea conocido por su ductilidad, se comporta como si fuera *frágil*.

Con el fin de especificar una resistencia segura para un material metálico sometido a cargas repetitivas, es necesario determinar un límite debajo del cual no pueda detectarse evidencia de falla después de aplicar una carga durante un determinado número de ciclos. Este esfuerzo limitante se llama *límite de resistencia a la fatiga*. Usando una máquina de pruebas para este propósito, se somete una serie de probetas cada una a un esfuerzo determinado, de manera cíclica hasta la falla. Los resultados se muestran como una gráfica que representa el esfuerzo S (o σ) en el eje vertical y el número de ciclos hasta la falla N en el eje horizontal. Esta gráfica se llama *diagrama S-N* o *diagrama esfuerzo-ciclos*, y casi siempre los valores de N se representan en una escala logarítmica ya que suelen ser bastante grandes.



Los ingenieros deben tomar en cuenta la posible fatiga de las partes móviles de este equipo de perforación petrolera.

En la figura 3-28 se muestran ejemplos de diagramas *S-N* para dos metales de ingeniería de uso común. El límite de resistencia a la fatiga, o simplemente límite de fatiga, se identifica como el esfuerzo para el cual

la gráfica *S-N* se vuelve horizontal o asintótica. Como puede observarse, el acero tiene un valor bien definido de $(S_{el})_{ac} = 27$ ksi (186 MPa). Sin embargo, el límite de fatiga para el aluminio no está bien definido, por lo que suele especificarse como el esfuerzo que tiene un límite de 500 millones de ciclos, $(S_{el})_{al} = 19$ ksi (131 MPa). Una vez que se ha obtenido un valor particular, a menudo se asume que para cualquier esfuerzo por debajo de este valor, la vida a la fatiga es infinita, y por consiguiente el número de ciclos hasta la falla ya no se toma en cuenta.

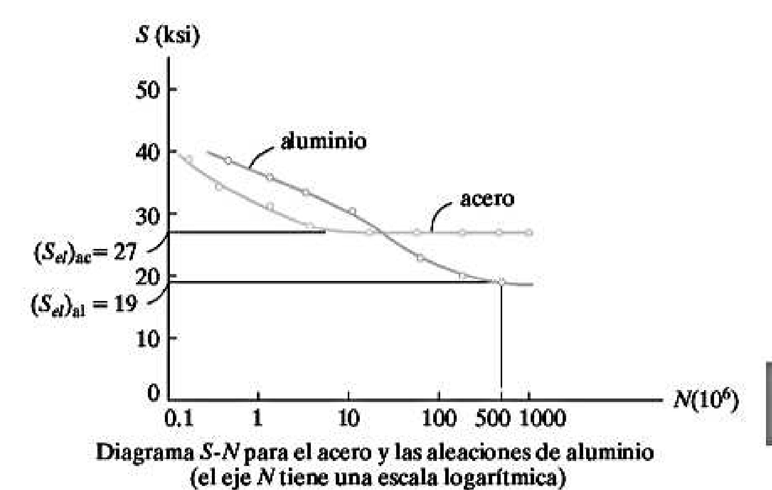


Diagrama *S-N* para el acero y las aleaciones de aluminio (el eje *N* tiene una escala logarítmica)

Figura 3-28

3

Puntos importantes

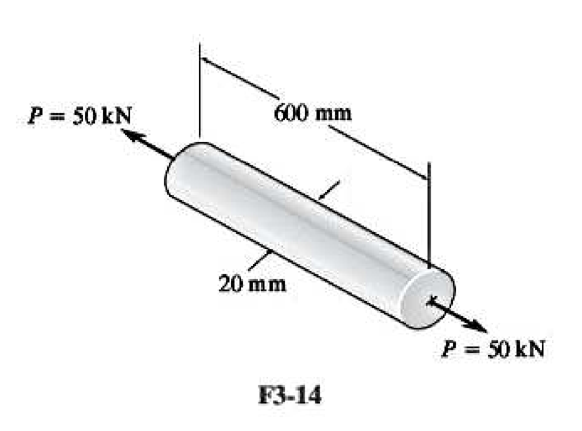
- La *razón de Poisson*, ν, es una relación entre la deformación lateral de un material homogéneo e isotrópico sobre su deformación longitudinal. En general, estas deformaciones tienen signos opuestos, es decir, si uno es un alargamiento, el otro será una contracción.
- El *diagrama de esfuerzo-deformación cortante* es una gráfica del esfuerzo cortante contra la deformación cortante. Si el material es homogéneo e isotrópico, y además es elástico lineal, la pendiente de la línea recta dentro de la región elástica se denomina módulo de rigidez o módulo de cortante, G.
- Existe una relación matemática entre G, E y ν.
- El *flujo plástico* es la deformación en función del tiempo de un material para el que el esfuerzo y la temperatura juegan un papel importante. Los elementos se diseñan para resistir los efectos del flujo plástico con base en la resistencia al flujo plástico del material, que es el máximo esfuerzo inicial que puede soportar un material durante un periodo determinado, sin sobrepasar cierta deformación por flujo plástico.
- La *fatiga* en los metales ocurre cuando el esfuerzo o la deformación son cíclicos. Este fenómeno ocasiona una fractura frágil del material. Los elementos se diseñan para resistir la fatiga al garantizar que el esfuerzo en el elemento no exceda su *límite de resistencia a la fatiga*. Este valor se determina a partir de un diagrama *S-N* como el esfuerzo máximo que el material puede resistir cuando se somete a un determinado número de ciclos de carga.

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F3-13. Una barra de 100 mm de longitud tiene un diámetro de 15 mm. Si se le aplica una carga axial de tensión de 10 kN, determine el cambio en su diámetro. $E = 70$ GPa, $\nu = 0.35$.

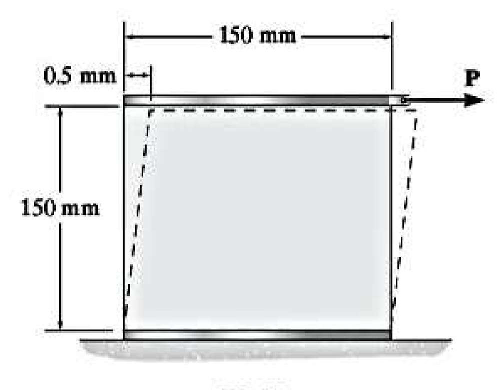
F3-14. Una barra circular sólida que tiene 600 mm de largo y 20 mm de diámetro se somete a una fuerza axial de $P = 50$ kN. La elongación de la barra es $\delta = 1.40$ mm y su diámetro se convierte en $d' = 19.9837$ mm. Determine el módulo de elasticidad y el módulo de rigidez del material, suponiendo que éste no experimenta cedencia.

3



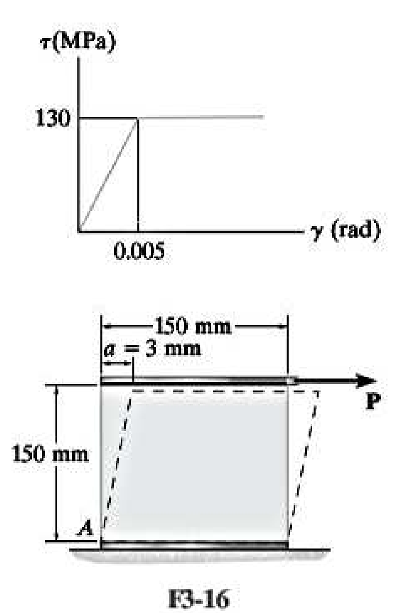
F3-14

F3-15. Un bloque de 20 mm de ancho está firmemente unido a placas rígidas en sus partes superior e inferior. Cuando se aplica la fuerza **P** al bloque, éste se deforma como lo indica la línea discontinua. Determine la magnitud de **P** si el material del bloque tiene un módulo de rigidez $G = 26$ GPa. Suponga que el material no presenta cedencia y utilice un análisis de ángulo pequeño.



F3-15

F3-16. Un bloque de 20 mm de ancho está firmemente unido a placas rígidas en sus partes superior e inferior. Cuando se aplica la fuerza **P** al bloque, éste se deforma como lo indica la línea discontinua. Si $a = 3$ mm y **P** se retira, determine la deformación cortante permanente en el bloque.



F3-16

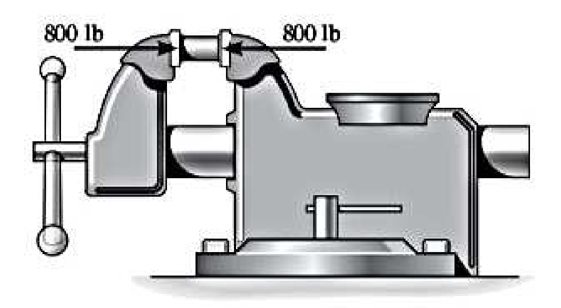
PROBLEMAS

•3-25. La barra de plástico acrílico tiene 200 mm de largo y 15 mm de diámetro. Si se le aplica una carga axial de 300 N, determine el cambio en su longitud y el cambio de su diámetro. $E_p = 2.70$ GPa, $\nu_p = 0.4$.



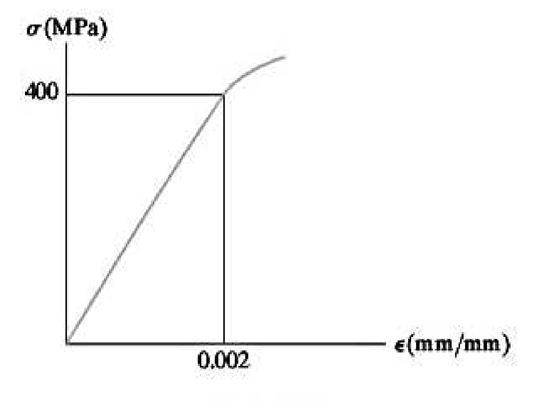
Prob. 3-25

3-26. El bloque cilíndrico corto de aluminio 2014-T6, que tiene un diámetro original de 0.5 pulg y una longitud de 1.5 pulg, se coloca entre las quijadas lisas de una prensa de banco y se aprieta hasta que la carga axial aplicada es de 800 lb. Determine (a) la disminución en su longitud y (b) su nuevo diámetro.



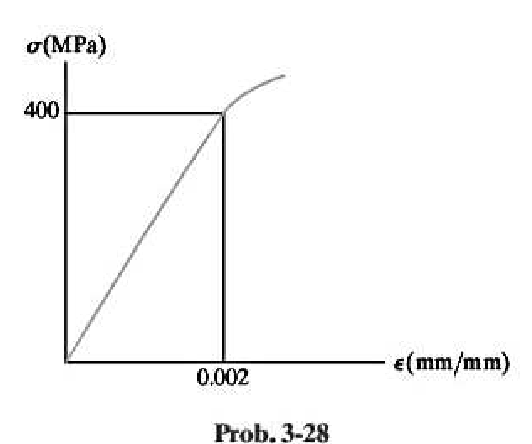
Prob. 3-26

3-27. En la figura se muestra la porción elástica del diagrama de esfuerzo-deformación para una aleación de acero. La probeta de la que se obtuvo tenía un diámetro original de 13 mm y una longitud calibrada de 50 mm. Cuando la carga aplicada sobre la probeta es de 50 kN, el diámetro es de 12.99265 mm. Determine la razón de Poisson para el material.



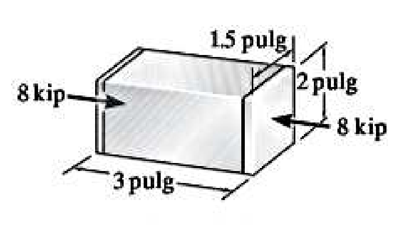
Prob. 3-27

*3-28. En la figura se muestra la porción elástica del diagrama de esfuerzo-deformación para una aleación de acero. La probeta de la que se obtuvo tenía un diámetro original de 13 mm y una longitud calibrada de 50 mm. Si se aplica una carga $P = 20$ kN sobre la probeta, determine su diámetro y longitud calibrada. Considere que $\nu = 0.4$.



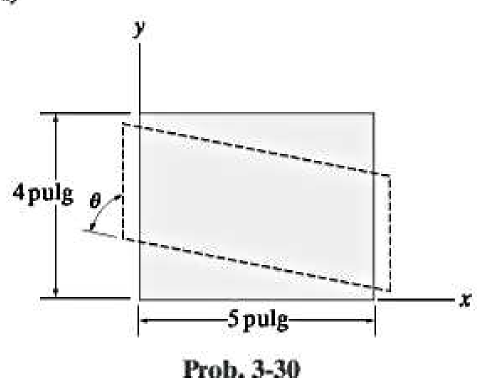
Prob. 3-28

•3-29. El bloque de aluminio tiene una sección transversal rectangular y está sometido a una fuerza axial de compresión de 8 kip. Si el lado de 1.5 pulg cambia su longitud a 1.500132 pulg, determine la razón de Poisson y la nueva longitud del lado de 2 pulg. $E_{al} = 10(10^3)$ ksi.



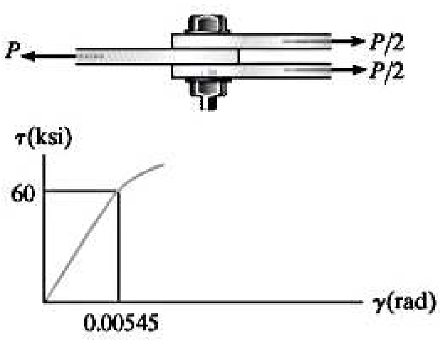
Prob. 3-29

3-30. El bloque está hecho de titanio Ti-6A1-4V y se somete a una compresión de 0.06 pulg a lo largo del eje y, y su forma muestra una inclinación de $\theta = 89.7°$. Determine ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}.



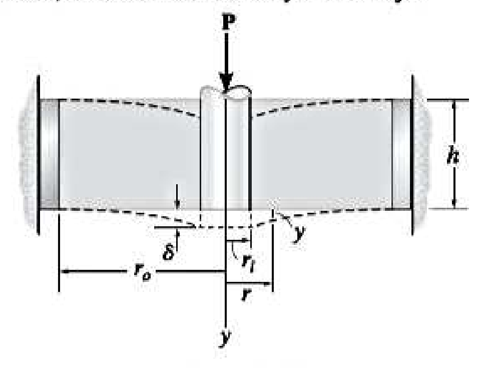
Prob. 3-30

3-31. En la figura se muestra el diagrama de esfuerzo-deformación cortante para una aleación de acero. Si un perno que tiene un diámetro de 0.75 pulg está hecho de este material y se utiliza en la junta de doble empalme, determine el módulo de elasticidad E y la fuerza P necesaria para causar que el material experimente cedencia. Considere que $\nu = 0.3$.



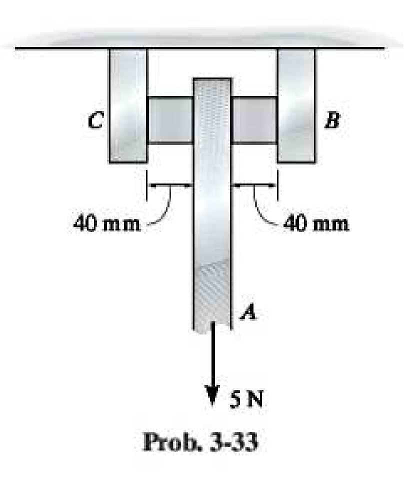
Prob. 3-31

***3-32.** Un resorte cortante se forma al unir el anillo de caucho con un anillo rígido fijo y un eje. Cuando se coloca una carga axial **P** sobre el eje, demuestre que la pendiente en el punto y del caucho es $dy/dr = -\tan \gamma = -\tan(P/(2\pi hGr))$. Para los ángulos pequeños se puede escribir $dy/dr = -P/(2\pi hGr)$. Integre esta expresión y evalúe la constante de integración con la condición de que $y = 0$ en $r = r_o$. A partir del resultado, calcule la deflexión $y = \delta$ del eje.



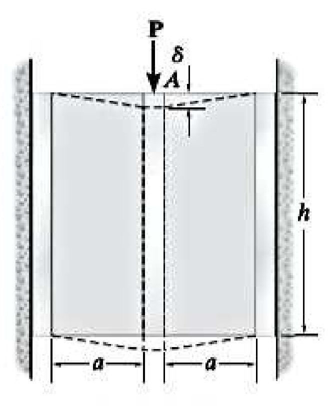
Prob. 3-32

•**3-33.** El soporte consiste en tres placas rígidas, las cuales están conectadas entre sí mediante dos almohadillas de caucho colocadas simétricamente. Si se aplica una fuerza vertical de 5 N a la placa A, determine el desplazamiento vertical aproximado de esta placa, debido a las deformaciones cortantes en el caucho. Cada almohadilla tiene dimensiones en sus secciones transversales de 30 mm por 20 mm. $G_r = 0.20$ MPa.



Prob. 3-33

3-34. Un resorte a cortante se hace con dos bloques de caucho, cada uno con una altura h, una anchura b y un espesor a. Los bloques están unidos a las tres placas como se muestra en la figura. Si las placas son rígidas y el módulo cortante del caucho es G, determine el desplazamiento de la placa A si se le aplica una carga vertical **P**. Suponga que el desplazamiento es pequeño, de manera que $\delta = a \tan \gamma \approx a\gamma$.



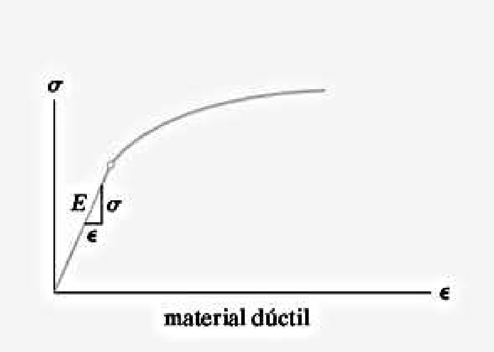
Prob. 3-34

REPASO DE CAPÍTULO

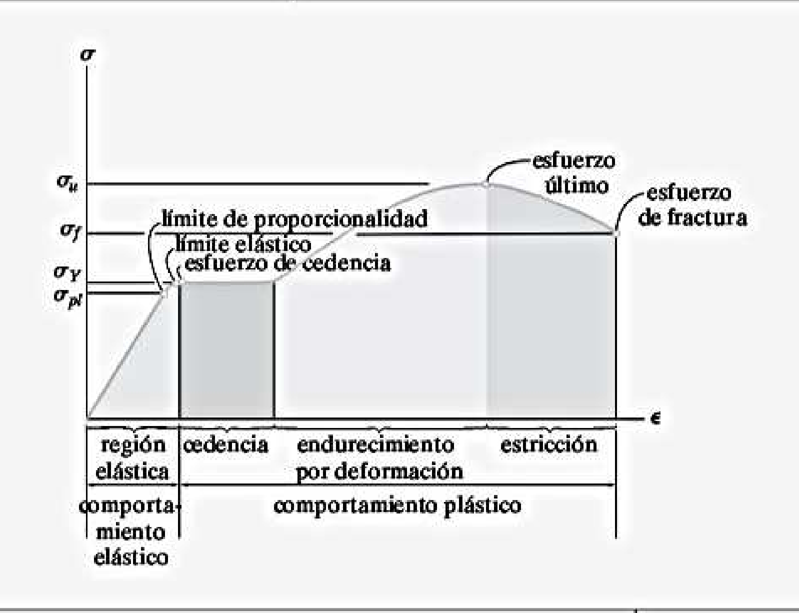
Una de las pruebas más importantes para la resistencia de materiales es el ensayo de tensión. Los resultados, que se encuentran al estirar una probeta de tamaño conocido, se grafican como el esfuerzo normal en el eje vertical y la deformación normal en el eje horizontal.

Muchos materiales de ingeniería exhiben en un inicio un comportamiento elástico lineal, según el cual el esfuerzo es proporcional a la deformación, definido por la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Aquí E, llamado módulo de elasticidad, es la pendiente de esta línea recta en el diagrama de esfuerzo-deformación.

$$\sigma = E\epsilon$$



Cuando el material se estira más allá del punto de cedencia, ocurre una deformación permanente. En particular, el acero tiene una región de cedencia, donde el material exhibe un aumento en la deformación sin incremento del esfuerzo. La región de endurecimiento por deformación ocasiona que, para continuar haciendo ceder al material, se requiera un aumento correspondiente en el esfuerzo. Finalmente, en el esfuerzo último, una región localizada en la probeta comenzará a adelgazarse, formando un cuello. Después de esto se produce la fractura.

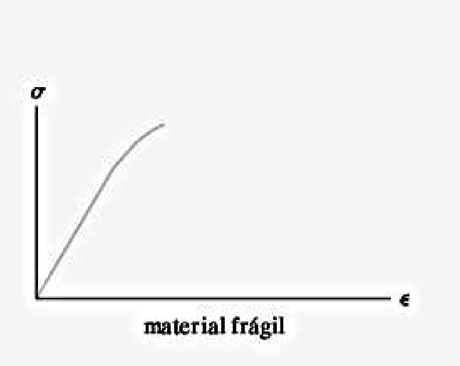


Los materiales dúctiles, como la mayoría de los metales, muestran un comportamiento tanto elástico como plástico. La madera es moderadamente dúctil. Por lo general, la ductilidad se especifica mediante la elongación permanente hasta la ruptura o por la reducción porcentual en el área de la sección transversal.

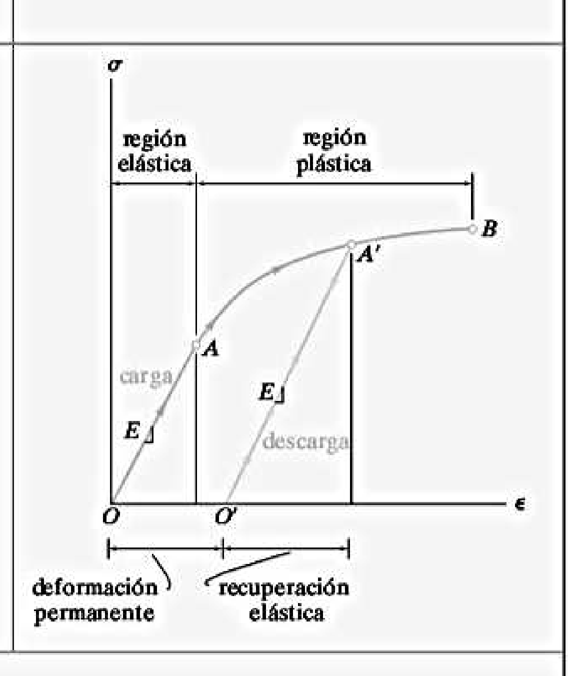
$$\text{Porcentaje de elongación} = \frac{L_f - L_0}{L_0}(100\%)$$

$$\text{Porcentaje de reducción de área} = \frac{A_0 - A_f}{A_0}(100\%)$$

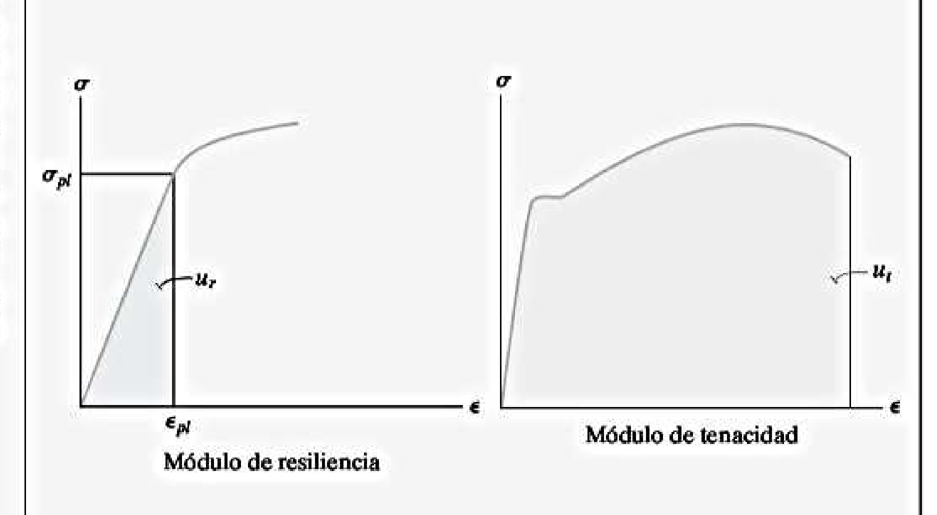
Los materiales frágiles presentan poca o ninguna cedencia antes de la falla. El hierro fundido, el concreto y el vidrio son ejemplos típicos.



El punto de cedencia de un material en *A* puede incrementarse mediante el endurecimiento por deformación. Esto se logra al aplicar una carga que ocasione un esfuerzo mayor que el esfuerzo de cedencia, para después retirar la carga. El máximo esfuerzo *A′* se convierte en el nuevo punto de cedencia para el material.



Cuando se aplica una carga a un elemento, las deformaciones causan que la energía de deformación se almacene en el material. La energía de deformación por unidad de volumen o densidad de la energía de deformación es equivalente al área bajo la curva de esfuerzo-deformación. Esta área hasta el punto de cedencia se llama módulo de resiliencia. Toda el área bajo el diagrama de esfuerzo-deformación se denomina módulo de tenacidad.



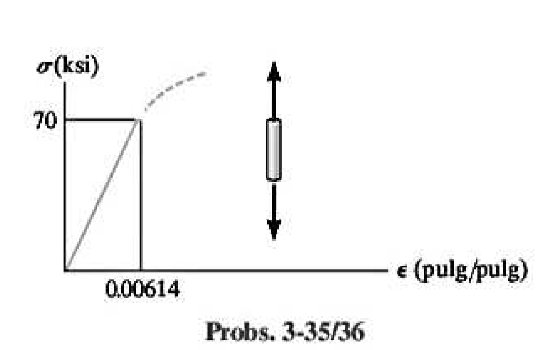
La razón de Poisson, ν es una propiedad adimensional de los materiales que relaciona la deformación lateral con la deformación longitudinal. Su rango de valores es $0 \leq \nu \leq 0.5$.	$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$	$\delta/2$ P L $\delta/2$ Forma original Forma final r P Tensión δ'
Los diagramas de esfuerzo cortante contra deformación cortante también pueden establecerse para un material. Dentro de la región elástica, $\tau = G\gamma$, donde G es el módulo de cortante, que se encuentra a partir de la pendiente de la línea. El valor de ν se puede obtener de la relación que existe entre G, E y ν.	$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	τ G τ γ γ
Cuando los materiales están en servicio durante largos periodos, las consideraciones de flujo plástico se vuelven importantes. El flujo plástico es la tasa de deformación que se produce con esfuerzos grandes y a temperaturas altas. El diseño requiere que el esfuerzo en el material no exceda un esfuerzo permisible basado en la resistencia al flujo plástico del material. La fatiga puede producirse cuando el material se somete a un gran número de ciclos de carga. Este efecto hará que se formen grietas microscópicas, lo que conduce a una falla frágil. Para prevenir la fatiga, el esfuerzo en el material no debe exceder el límite de fatiga del material.		

PROBLEMAS DE REPASO

3-35. En la figura se muestra la porción elástica del diagrama de esfuerzo-deformación a tensión para una aleación de aluminio. La probeta que se usa para el ensayo tiene una longitud calibrada de 2 pulg y un diámetro de 0.5 pulg. Cuando la carga aplicada es de 9 kip, el nuevo diámetro de la probeta es 0.49935 pulg. Calcule el módulo de corte G_{al} para el aluminio.

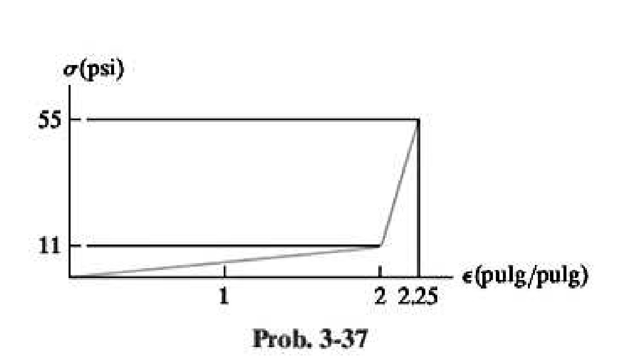
3

***3-36.** En la figura se muestra la porción elástica del diagrama de esfuerzo-deformación a tensión para una aleación de aluminio. La probeta que se usa para el ensayo tiene una longitud calibrada de 2 pulg y un diámetro de 0.5 pulg. Si la carga aplicada es de 10 kip, determine el nuevo diámetro de la probeta. El módulo de corte es $G_{al} = 3.8(10^3)$ ksi.



Probs. 3-35/36

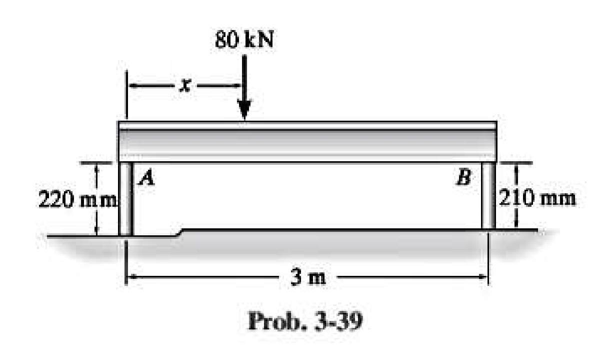
3-37. En la figura se muestra el diagrama σ-ϵ de las fibras elásticas que forman la piel y el músculo humanos. Determine el módulo de elasticidad de las fibras, estime su módulo de tenacidad y módulo de resiliencia.



Prob. 3-37

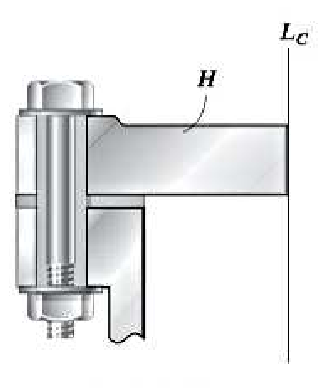
3-38. Un bloque cilíndrico corto de aluminio 6061-T6, con un diámetro original de 20 mm y una longitud de 75 mm, se coloca en una máquina de compresión y se aplasta hasta que la carga axial aplicada es de 5 kN. Determine (a) la disminución de su longitud y (b) su nuevo diámetro.

3-39. La viga rígida descansa en posición horizontal sobre dos cilindros de aluminio 2014-T6 que tienen las longitudes *sin carga* que se muestran en la figura. Si cada cilindro tiene un diámetro de 30 mm, determine la distancia x de aplicación de la carga de 80 kN, de forma que la viga permanezca en posición horizontal. ¿Cuál es el nuevo diámetro del cilindro A después de aplicar la carga? $\nu_{al} = 0.35$.



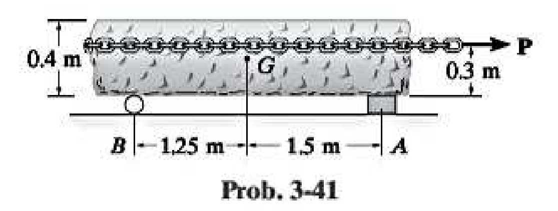
Prob. 3-39

***3-40.** La cabeza H está conectada al cilindro de un compresor mediante seis pernos de acero. Si la fuerza de sujeción en cada perno es de 800 lb, determine la deformación normal en éstos. Cada perno tiene un diámetro de $\frac{3}{16}$ de pulg. Si $\sigma_Y = 40$ ksi y $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, ¿cuál es la deformación en cada perno cuando se desenrosca la tuerca para retirar la fuerza de sujeción?



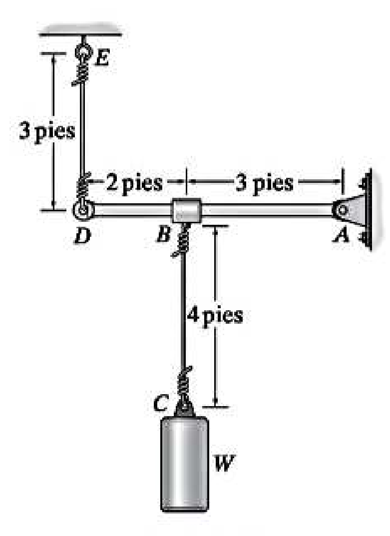
Prob. 3-40

•3-41. La piedra tiene una masa de 800 kg y su centro de gravedad en G. Descansa sobre una plataforma en A y un rodillo en B. La plataforma está fija al suelo y tiene una altura comprimida de 30 mm, una anchura de 140 mm y una longitud de 150 mm. Si el coeficiente de fricción estática entre la plataforma y la piedra es $\mu_s = 0.8$, determine el desplazamiento horizontal aproximado de la piedra, causado por las deformaciones angulares de la plataforma, antes de que la piedra comience a deslizarse. Suponga que la fuerza normal en A actúa a 1.5 m de G como se muestra en la figura. La plataforma está hecha de un material que tiene $E = 4$ MPa y $\nu = 0.35$.



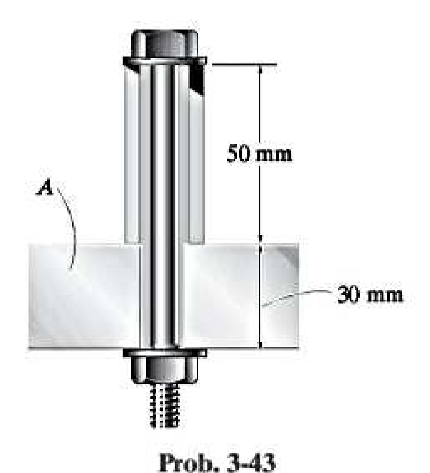
Prob. 3-41

3-42. La barra de DA es rígida y en un principio se mantiene en posición horizontal cuando el peso W se sostiene desde C. Si el peso ocasiona que B se desplace hacia abajo 0.025 pulg, determine la deformación en los alambres DE y BC. Además, si los alambres están hechos de acero A-36 y tienen un área en su sección transversal de 0.002 pulg^2, determine el peso W.



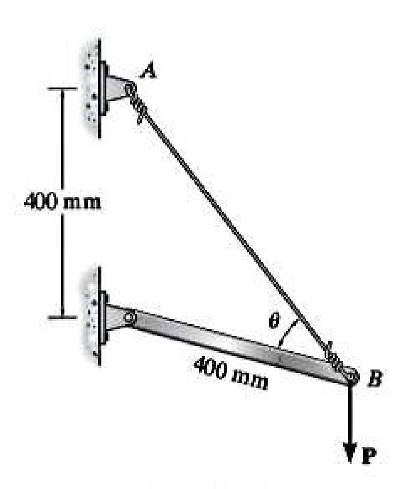
Prob. 3-42

3-43. El perno de 8 mm de diámetro está hecho de una aleación de aluminio. Atraviesa una manga de magnesio que tiene un diámetro interior de 12 mm y un diámetro exterior de 20 mm. Si las longitudes originales del perno y la manga son 80 mm y 50 mm, respectivamente, determine las deformaciones en la manga y el perno si la tuerca en el perno se aprieta de modo que la tensión en el perno es de 8 kN. Suponga que el material en A es rígido. $E_{al} = 70$ GPa, $E_{mg} = 45$ GPa.



Prob. 3-43

*3-44. El alambre AB de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 10 mm^2 y está sin estirar cuando $\theta = 45.0°$. Determine la carga aplicada P requerida para causar que $\theta = 44.9°$.



Prob. 3-44



Esta serie de tubos encadenados, que se encuentra suspendida de un bloque móvil en un pozo petrolero, está sometida a cargas y deformaciones axiales muy grandes.

Carga axial

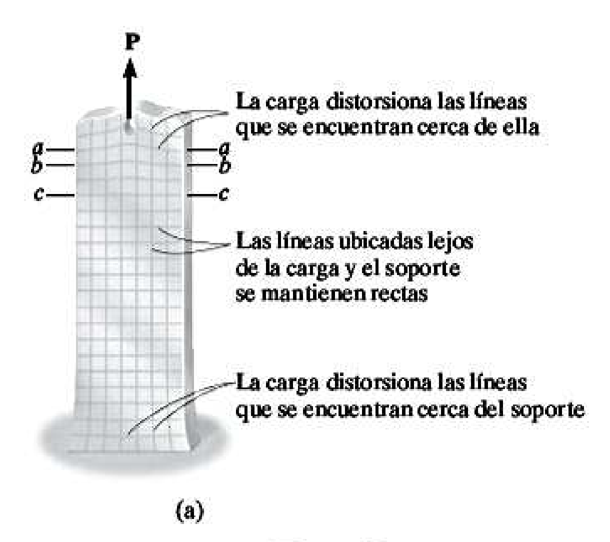
4

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En el capítulo 1 se desarrolló el método para determinar el esfuerzo normal en elementos cargados axialmente. En este capítulo se estudiará cómo determinar la deformación de estos elementos; asimismo se desarrollará un método para encontrar las reacciones de apoyo cuando éstas no pueden determinarse con precisión mediante las ecuaciones de equilibrio. También se realizará un análisis de los efectos del esfuerzo térmico, las concentraciones de esfuerzos, las deformaciones inelásticas y el esfuerzo residual.

4.1 Principio de Saint-Venant

En los capítulos anteriores se ha desarrollado el concepto de *esfuerzo* como un medio para medir la distribución de fuerzas dentro de un cuerpo y la *deformación unitaria* como un medio para medir la deformación de éste. También se ha demostrado que la relación matemática entre el esfuerzo y la deformación depende del tipo de material del que está hecho el cuerpo. En particular, si el material se comporta de manera elástica lineal, entonces se aplica la ley de Hooke y existe una relación proporcional entre el esfuerzo y la deformación.



(a)

Figura 4-1

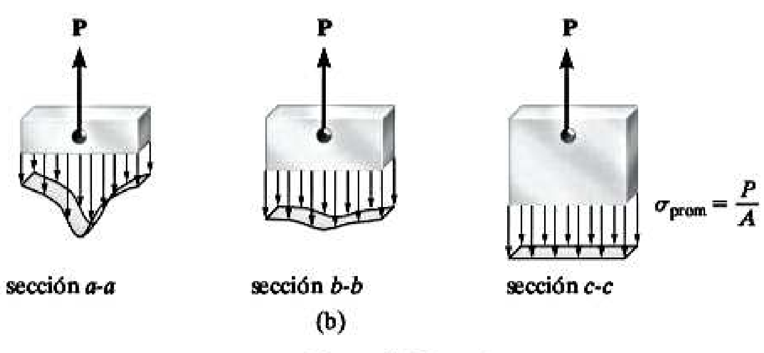
4

Con esta idea, considere la manera en que una barra rectangular se deformará elásticamente cuando la barra se someta a una fuerza **P** aplicada a lo largo de su eje centroidal, figura 4-1*a*. Aquí, la barra está fija en uno de sus extremos y la fuerza se aplica a través de un orificio en su otro extremo. Debido a la carga, la barra se deforma como lo indican las líneas dibujadas sobre ella y que una vez fueron horizontales o verticales. Observe cómo la *deformación localizada* que ocurre en cada extremo tiende a disminuir y las líneas se vuelven uniformes en toda la sección media de la barra.

Si el material se conserva elástico, entonces las deformaciones unitarias causadas por esta deformación están directamente relacionadas con el esfuerzo en la barra. Como resultado, el esfuerzo se distribuirá de manera más uniforme en toda el área de la sección transversal cuando ésta sea tomada cada vez más lejos del punto donde se aplica alguna carga externa. Por ejemplo, considere un perfil de la variación de la distribución de esfuerzos que actúa sobre las secciones *a-a*, *b-b* y *c-c*, cada uno de ellos se muestra en la figura 4-1*b*. Por comparación, el esfuerzo tiende a alcanzar un valor uniforme en la sección *c-c*, que está lo suficientemente lejos del extremo para que la deformación localizada causada por **P** se *desvanezca*. La distancia mínima desde el extremo de la barra hasta el punto donde ocurre esto, puede determinarse mediante un análisis matemático basado en la teoría de la elasticidad.

Se ha encontrado que esta distancia debe ser al menos igual a la *mayor dimensión* de la sección transversal cargada. Por lo tanto, la sección *c-c* debe ubicarse a una distancia por lo menos igual a la anchura (no el espesor) de la barra.*

*Cuando la sección *c-c* se localiza de esta forma, la teoría de la elasticidad predice que el esfuerzo máximo será $\sigma_{máx} = 1.02\sigma_{prom}$.



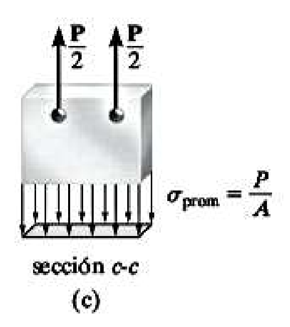
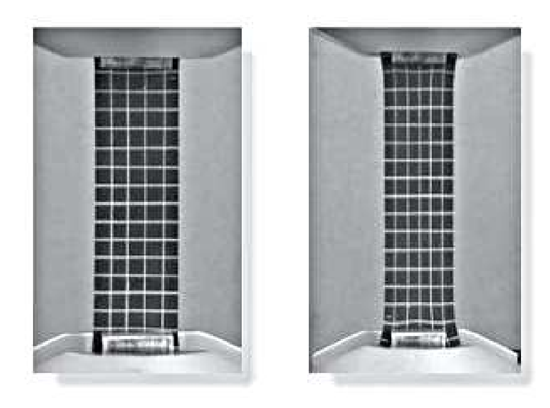



Figura 4-1 (cont.)

De la misma manera, la distribución de esfuerzos en el soporte tenderá a equilibrarse y llegará a ser uniforme en la sección transversal ubicada a la misma distancia del soporte.

El hecho de que el esfuerzo y la deformación se comporten de esta manera se conoce como *principio de Saint-Venant*, ya que fue observado por primera vez por el científico francés Barré de Saint-Venant en 1855. En esencia, establece que el *esfuerzo y la deformación que se producen en los puntos de un cuerpo lo suficientemente alejados de la región donde se aplica la carga serán iguales al esfuerzo y la deformación producidos por cualesquiera cargas aplicadas que tengan la misma resultante estáticamente equivalente, y que se apliquen al cuerpo dentro de la misma región*. Por ejemplo, si dos fuerzas $P/2$ aplicadas de manera simétrica actúan sobre la barra de la figura 4-1*c*, la distribución de esfuerzos en la sección *c-c* será uniforme y, por lo tanto, equivalente a $\sigma_{prom} = P/A$ como en la figura 4-1*b*.



Observe cómo se distorsionan las líneas sobre esta membrana de caucho después de haber sido estirada. Las distorsiones localizadas en las cuadrículas se suavizan como lo establece el principio de Saint-Venant.

4.2 Deformación elástica de un elemento cargado axialmente

En esta sección se usará la ley de Hooke y las definiciones de esfuerzo y deformación a fin de desarrollar una ecuación que pueda utilizarse para determinar el desplazamiento *elástico* de un elemento sometido a cargas axiales. Para generalizar el desarrollo, considere la barra mostrada en la figura 4-2*a*, la cual tiene un área transversal que varía *gradualmente* en toda su longitud L. La barra está sometida a cargas concentradas en sus extremos y a una carga variable externa distribuida en toda su longitud. Esta distribución de carga podría, por ejemplo, representar el peso de la barra si ésta no se conserva en posición horizontal, o las fuerzas de fricción que actúan sobre la superficie de la barra. Aquí se desea encontrar el ***desplazamiento relativo*** δ (delta) provocado por esta carga en un extremo de la barra con respecto al otro extremo. *No se tomarán en cuenta* las deformaciones localizadas que se producen en los puntos de carga concentrada y donde la sección transversal cambia de manera súbita. Con base en el principio de Saint-Venant, estos efectos se producen en pequeñas regiones de la longitud de la barra y por lo tanto tendrán sólo un ligero efecto sobre el resultado final. En su mayor parte, la barra se deforma de manera uniforme, por lo que el esfuerzo normal se distribuye de la misma forma sobre la sección transversal.

4

Mediante el método de las secciones, un elemento diferencial (o rodaja) con longitud dx y sección transversal de área $A(x)$ se aísla de la barra en la posición arbitraria x. El diagrama de cuerpo libre de este elemento se muestra en la figura 4-2*b*. La fuerza axial interna resultante será una función de x puesto que la carga externa distribuida hará que varíe a lo largo de la barra. Esta carga, $P(x)$, deformará al elemento según lo indica la línea discontinua y, por consiguiente, el desplazamiento de un extremo del elemento con respecto al otro extremo es $d\delta$. El esfuerzo y la deformación en el elemento son

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \qquad \text{y} \qquad \epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

Siempre que el esfuerzo no exceda el límite proporcional, es posible aplicar la ley de Hooke, es decir,

$$\sigma = E\epsilon$$

$$\frac{P(x)}{A(x)} = E\left(\frac{d\delta}{dx}\right)$$

$$d\delta = \frac{P(x)\,dx}{A(x)E}$$

P_1 x dx P_2 L δ

(a)

$P(x)$ $P(x)$ dx $d\delta$

(b)

Figura 4-2

Esta expresión debe integrarse para toda la longitud L de la barra a fin de encontrar δ. De lo anterior se obtiene:

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{A(x)E} \tag{4-1}$$

donde

δ = desplazamiento de un punto de la barra en relación con el otro punto
L = longitud original de la barra
$P(x)$ = fuerza axial interna en la sección, que se ubica a una distancia x de un extremo
$A(x)$ = área de la sección transversal de la barra, expresada como una función de x
E = módulo de elasticidad para el material

Carga y área de la sección transversal constantes. En muchos casos, la barra tendrá una sección transversal constante con área A; y el material será homogéneo, por lo que E será constante. Además, si se aplica una fuerza externa constante en cada extremo de la barra, figura 4-3, entonces la fuerza interna P a lo largo de la barra también será constante. En consecuencia, la ecuación 4-1 se puede integrar para obtener

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{4-2}$$



El desplazamiento vertical en la parte superior de estas columnas para edificio depende de las cargas aplicadas sobre el techo y el piso fijado en su sección media.

Si la barra está sometida a varias fuerzas axiales diferentes en toda su longitud, o si el área de la sección o el módulo de elasticidad cambian en forma abrupta de una región de la barra a otra, la ecuación anterior puede aplicarse a cada *segmento* de la barra donde estas cantidades permanecen *constantes*. En tal caso, el desplazamiento de un extremo de la barra con respecto al otro se encuentra a partir de la *suma algebraica* de los desplazamientos relativos de los extremos de cada segmento. Para este caso general,

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} \tag{4-3}$$

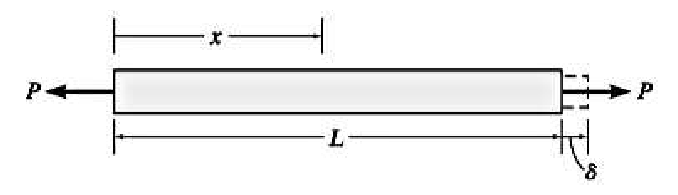
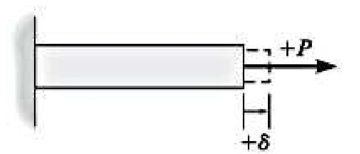
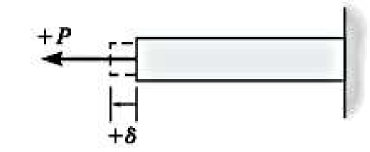


Figura 4-3

4





Convención de signos positivos para P y δ

Figura 4-4

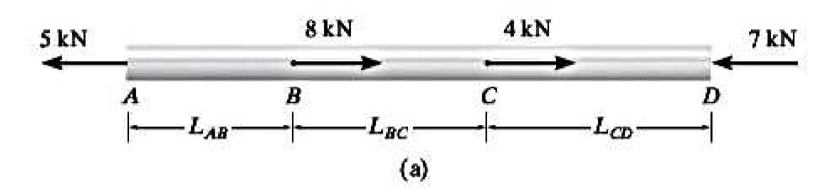
4

Convención de signos. Con el fin de aplicar la ecuación 4-3, debe desarrollarse una convención de signos para la fuerza axial interna y el desplazamiento de un extremo de la barra con respecto al otro. Para ello, se considerará que tanto la fuerza como el desplazamiento son *positivos* si causan *tensión* y *elongación*, respectivamente, figura 4-4; mientras que una fuerza y desplazamiento *negativos* causarán *compresión* y *contracción*, respectivamente.

Por ejemplo, considere la barra de la figura 4-5*a*. Las *fuerzas internas axiales* "P" se determinan mediante el método de las secciones para cada segmento, figura 4-5*b*. Son $P_{AB} = +5$ kN, $P_{BC} = -3$ kN, $P_{CD} = -7$ kN. Esta variación de la carga axial se muestra en el *diagrama de fuerza axial* o *normal* para la barra, figura 4-5*c*. Como ahora se conoce la forma en que varía la fuerza *interna* a lo largo de la barra, el desplazamiento del extremo A con respecto al extremo D se determina a partir de

$$\delta_{A/D} = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(5\text{ kN})L_{AB}}{AE} + \frac{(-3\text{ kN})L_{BC}}{AE} + \frac{(-7\text{ kN})L_{CD}}{AE}$$

Si se sustituyen los otros datos y se calcula una respuesta positiva, significa que el extremo A se alejará del extremo D (la barra se alarga), mientras que un resultado negativo indicaría que el extremo A se desplaza hacia el extremo D (la barra se acorta). La notación con doble subíndice se utiliza para hacer referencia a este desplazamiento relativo ($\delta_{A/D}$); sin embargo, si el desplazamiento debe determinarse en relación a un *punto fijo*, entonces se utilizará sólo un subíndice. Por ejemplo, si D se encuentra en un soporte *fijo*, entonces el desplazamiento se denominaría simplemente δ_A.



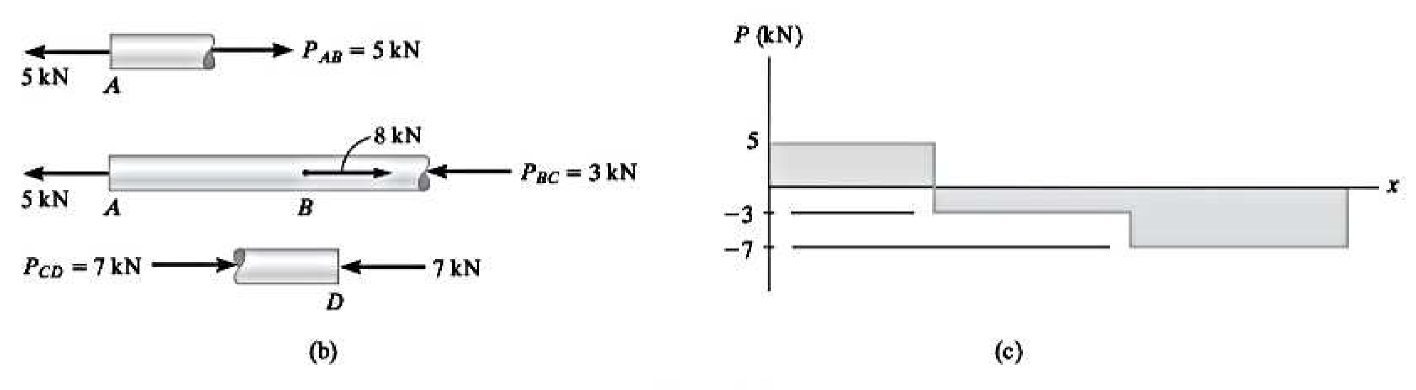


Figura 4-5

Puntos importantes

- El *principio de Saint-Venant* establece que tanto la deformación localizada como el esfuerzo que se producen dentro de las regiones donde se aplica la carga o en los soportes, tienden a "equilibrarse" después de una distancia suficientemente alejada de estas regiones.
- El desplazamiento de un extremo de un elemento cargado axialmente con respecto a su otro extremo, se determina mediante la relación de la carga *interna* aplicada y el esfuerzo usando $\sigma = P/A$, y al relacionar el desplazamiento con la deformación a través de $\epsilon = d\delta/dx$. Por último, estas dos ecuaciones se combinan mediante la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, de donde se obtiene la ecuación 4-1.
- Como la ley de Hooke se ha utilizado en el desarrollo de la ecuación de desplazamiento, es importante que ninguna carga interna provoque la cedencia del material, y que el material sea homogéneo y se comporte en forma elástica lineal.

Procedimiento de análisis

El desplazamiento relativo entre dos puntos A y B de un elemento axialmente cargado puede determinarse al aplicar la ecuación 4-1 (o la ecuación 4-2). Su aplicación requiere los siguientes pasos.

Fuerza interna.

- Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial interna P dentro del elemento.
- Si esta fuerza varía en toda la longitud del elemento debido a una *carga externa distribuida*, debe hacerse una sección a la distancia arbitraria x desde un extremo del elemento y la fuerza debe representarse como una función de x, es decir, $P(x)$.
- Si sobre el elemento actúan varias *fuerzas externas constantes*, debe determinarse la fuerza interna de cada *segmento* del elemento, entre cualquiera de las dos fuerzas externas.
- Para cualquier segmento, una *fuerza de tensión* interna es *positiva* y una *fuerza de compresión* interna es *negativa*. Por conveniencia, los resultados de las cargas internas pueden mostrarse de manera gráfica mediante la construcción del diagrama de fuerza normal.

Desplazamiento.

- Cuando el área de la sección transversal del elemento *varía* en toda su longitud, el área debe expresarse como una función de su posición x, es decir, $A(x)$.
- Si el área de la sección transversal, el módulo de elasticidad o la carga interna *cambian de manera súbita*, entonces la ecuación 4-2 debe aplicarse a cada segmento para el que estas cantidades sean constantes.
- Al sustituir los datos en las ecuaciones 4-1 a 4-3, asegúrese de tomar en cuenta el signo adecuado para la fuerza interna $\mathbf{P}$. Las cargas de tensión son positivas y las de compresión son negativas. Además, use un conjunto consistente de unidades. Para cualquier segmento, si el resultado es una cantidad numérica *positiva*, indica *elongación*; si es *negativa*, indica *contracción*.

EJEMPLO 4.1

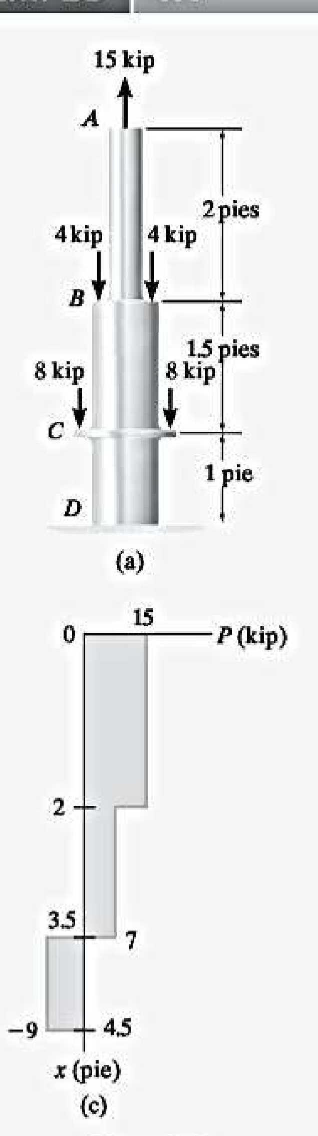
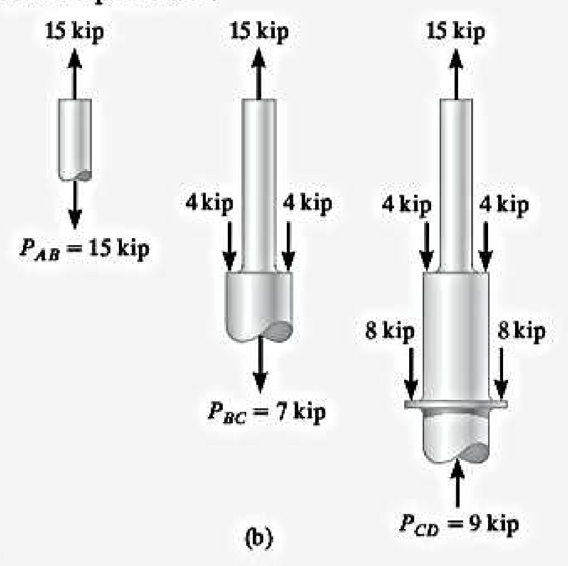


Figura 4-6

La barra de acero A-36 que se muestra en la figura 4-6*a* consta de dos segmentos con áreas de sección transversal $A_{AB} = 1$ pulg^2 y $A_{BD} = 2$ pulg^2. Determine el desplazamiento vertical del extremo A y el desplazamiento de B respecto a C.



SOLUCIÓN

Fuerzas internas. Debido a la aplicación de cargas externas, las fuerzas axiales internas en las regiones AB, BC y CD serán diferentes entre sí. Estas fuerzas se obtienen al aplicar el método de las secciones y la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales como se muestra en la figura 4-6*b*. Esta variación se grafica en la figura 4-6*c*.

Desplazamiento. Como indica la página final de este libro (al reverso de la contraportada), $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi. Si se usa la convención de signos, es decir, las fuerzas internas de tensión son positivas y las fuerzas de compresión son negativas, el desplazamiento vertical de A respecto al soporte *fijo* D es

$$\delta_A = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{[+15 \text{ kip}](2 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{(1 \text{ pulg}^2)[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]} + \frac{[+7 \text{ kip}](1.5 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{(2 \text{ pulg}^2)[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]}$$

$$+ \frac{[-9 \text{ kip}](1 \text{ pie})(12 \text{ pulg/pie})}{(2 \text{ pulg}^2)[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]}$$

$$= +0.0127 \text{ pulg}$$ *Resp.*

Como el resultado es *positivo*, la barra *se alarga* y por consiguiente el desplazamiento de A es hacia arriba.

Al aplicar la ecuación 4-2 entre los puntos B y C, se obtiene,

$$\delta_{B/C} = \frac{P_{BC}L_{BC}}{A_{BC}E} = \frac{[+7 \text{ kip}](1.5 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{(2 \text{ pulg}^2)[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]} = +0.00217 \text{ pulg}$$ *Resp.*

Aquí B se aleja de C, puesto que el segmento se alarga.

EJEMPLO 4.2

El ensamble que se muestra en la figura. 4-7*a* consiste en un tubo *AB* de aluminio que tiene una sección transversal con un área de 400 mm². Una varilla de acero con un diámetro de 10 mm se conecta a un collarín rígido y se pasa por el tubo. Si se aplica una carga de tensión de 80 kN sobre la varilla, determine el desplazamiento de su extremo *C*. Considere $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

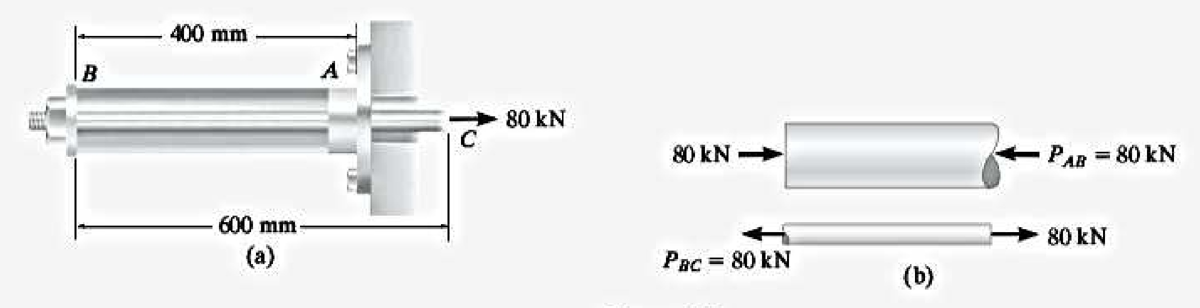


Figura 4-7

SOLUCIÓN

Fuerzas internas. Los diagramas de cuerpo libre de los segmentos del tubo y la varilla que se muestran en la figura 4-7*b*, indican que la varilla está sometida a una tensión de 80 kN y el tubo está sujeto a una compresión de 80 kN.

Desplazamiento. Primero se determina el desplazamiento del extremo *C* con respecto al extremo *B*. Al utilizar unidades de newtons y metros, se tiene

$$\delta_{C/B} = \frac{PL}{AE} = \frac{[+80(10^3)\text{ N}](0.6\text{ m})}{\pi(0.005\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} = +0.003056\text{ m} \rightarrow$$

El signo positivo indica que el extremo *C* se mueve *hacia la derecha* en relación con el extremo *B*, ya que la barra se alarga.

El desplazamiento del extremo *B* con respecto al extremo *fijo A* es

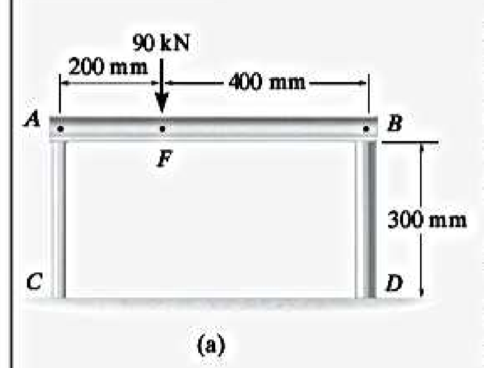
$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{[-80(10^3)\text{ N}](0.4\text{ m})}{[400\text{ mm}^2(10^{-6})\text{ m}^2/\text{mm}^2][70(10^9)\text{ N/m}^2]}$$
$$= -0.001143\text{ m} = 0.001143\text{ m} \rightarrow$$

Aquí el signo negativo indica que el tubo se acorta, y por lo tanto *B* se mueve hacia la *derecha* con respecto a *A*.

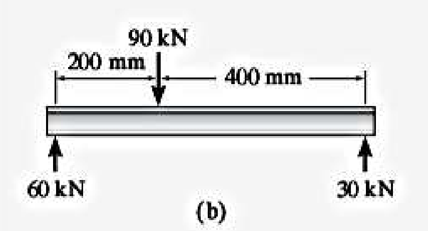
Como ambos desplazamientos son hacia la derecha, entonces el desplazamiento de *C* en relación con el extremo fijo *A* es

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \delta_C = \delta_B + \delta_{C/B} = 0.001143\text{ m} + 0.003056\text{ m}$$
$$= 0.00420\text{ m} = 4.20\text{ mm} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

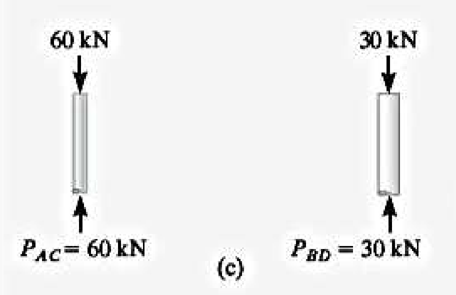
EJEMPLO 4.3



(a)



(b)



(c)

4

La viga rígida AB descansa sobre dos postes cortos como se muestra en la figura. 4-8*a*. AC es de acero y tiene un diámetro de 20 mm, y BD es de aluminio y tiene un diámetro de 40 mm. Determine el desplazamiento del punto F en AB si se aplica una carga vertical de 90 kN sobre ese punto. Considere $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

SOLUCIÓN

Fuerzas internas. Las fuerzas de compresión que actúan en la parte superior de cada poste se determinan a partir del equilibrio del elemento AB, figura. 4-8*b*. Estas fuerzas son iguales a las fuerzas internas en cada poste, figura 4-8c.

Desplazamiento. El desplazamiento de la parte superior de cada poste es

Poste *AC*:

$$\delta_A = \frac{P_{AC}L_{AC}}{A_{AC}E_{ac}} = \frac{[-60(10^3)\text{ N}](0.300\text{ m})}{\pi(0.010\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} = -286(10^{-6})\text{ m}$$

$$= 0.286\text{ mm} \downarrow$$

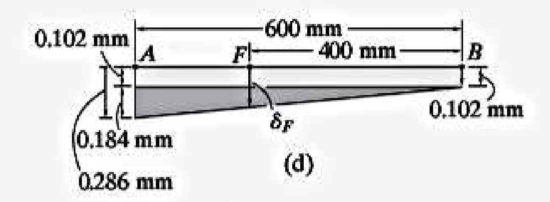
Poste *BD*:

$$\delta_B = \frac{P_{BD}L_{BD}}{A_{BD}E_{al}} = \frac{[-30(10^3)\text{ N}](0.300\text{ m})}{\pi(0.020\text{ m})^2[70(10^9)\text{ N/m}^2]} = -102(10^{-6})\text{ m}$$

$$= 0.102\text{ mm} \downarrow$$

En la figura 4-8*d* se muestra un diagrama que indica los desplazamientos de la línea central de la viga en A, B y F. Entonces, por proporción del triángulo gris oscuro, el desplazamiento del punto F es

$$\delta_F = 0.102\text{ mm} + (0.184\text{ mm})\left(\frac{400\text{ mm}}{600\text{ mm}}\right) = 0.225\text{ mm} \downarrow \quad \textit{Resp.}$$

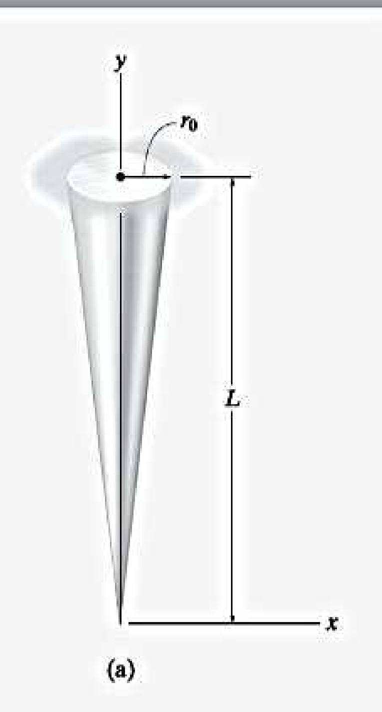


(d)

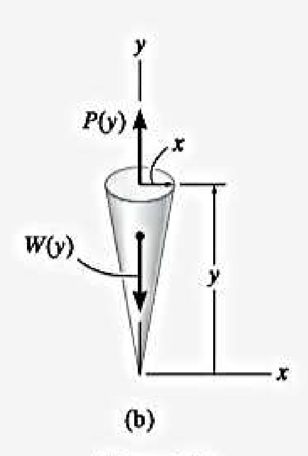
Figura 4-8

EJEMPLO 4.4

Un elemento está hecho de un material con peso específico γ y módulo de elasticidad E. Si tiene la forma de un *cono* con las dimensiones mostradas en la figura 4-9*a*, determine a qué distancia se desplaza su extremo debido a la gravedad cuando está suspendido en posición vertical.



(a)



(b)

Figura 4-9

SOLUCIÓN

Fuerzas internas. La fuerza axial interna varía a lo largo del elemento, ya que depende del peso $W(y)$ del segmento del elemento que se encuentra por debajo de cualquier sección, figura 4-9*b*. Por lo tanto, para calcular el desplazamiento debe usarse la ecuación 4-1. En la sección situada a una distancia y de su extremo libre, el radio x del cono se determina como una función de y usando proporciones; es decir,

$$\frac{x}{y} = \frac{r_0}{L}; \qquad x = \frac{r_0}{L}y$$

El volumen de un cono con una base de radio x y altura y es

$$V = \frac{1}{3}\pi y x^2 = \frac{\pi r_0^2}{3L^2}y^3$$

Como $W = \gamma V$, la fuerza interna en la sección se convierte en

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad P(y) = \frac{\gamma \pi r_0^2}{3L^2}y^3$$

Desplazamiento. El área de la sección transversal también es una función de la posición y, figura 4-9*b*. Se tiene

$$A(y) = \pi x^2 = \frac{\pi r_0^2}{L^2}y^2$$

Al aplicar la ecuación 4-1 entre los límites de $y = 0$ y $y = L$ se obtiene

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y)\,dy}{A(y)E} = \int_0^L \frac{\left[(\gamma \pi r_0^2/3L^2)\,y^3\right]dy}{\left[(\pi r_0^2/L^2)\,y^2\right]E}$$

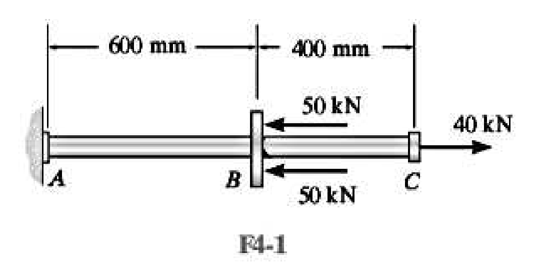
$$= \frac{\gamma}{3E}\int_0^L y\,dy$$

$$= \frac{\gamma L^2}{6E} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Como una verificación parcial de este resultado, observe que al cancelar las unidades de los términos se obtiene el desplazamiento en unidades de longitud, tal como se esperaba.

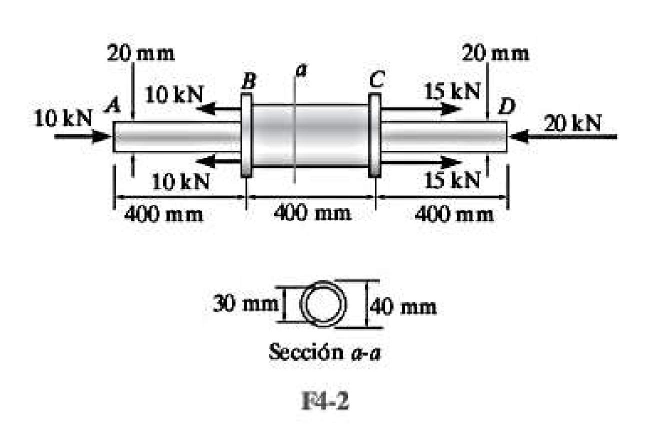
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F4-1. La barra de acero A-36 con un diámetro de 20 mm está sometida a las fuerzas axiales mostradas. Determine el desplazamiento del extremo C con respecto al soporte fijo en A.



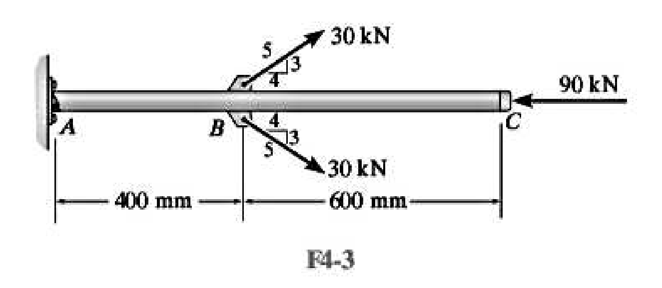
F4-1

F4-2. Los segmentos AB y CD del ensamble son barras circulares sólidas, y el segmento BC es un tubo. Si el ensamble está hecho de aluminio 6061-T6, determine el desplazamiento del extremo D con respecto al extremo A.



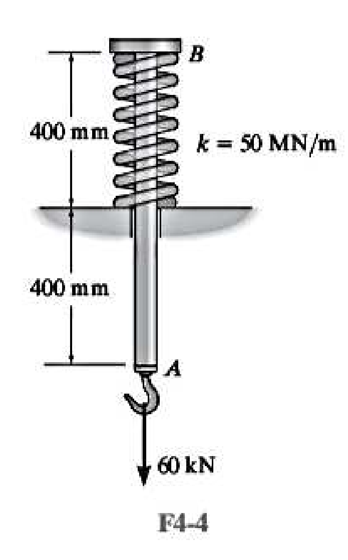
F4-2

F4-3. La barra de acero A-36 con un diámetro de 30 mm está sometida a la carga mostrada. Determine el desplazamiento del extremo A con respecto al extremo C.



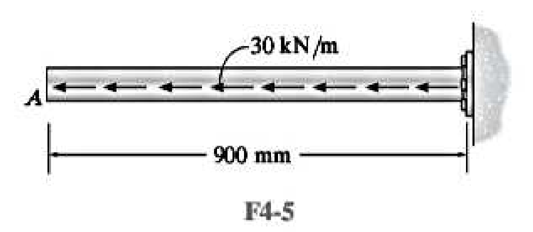
F4-3

F4-4. Si la barra con un diámetro de 20 mm está fabricada de acero A-36 y la rigidez del resorte es $k = 50$ MN/m, determine el desplazamiento del extremo A cuando se aplica la fuerza de 60 kN.



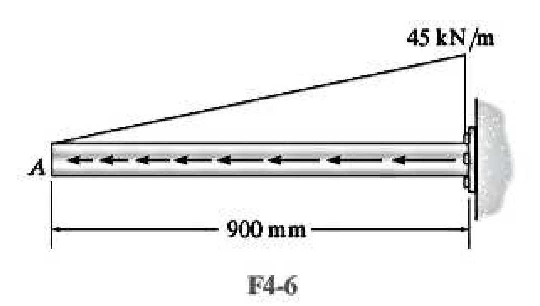
F4-4

F4-5. Una barra de aluminio 2014-T6 con un diámetro de 20 mm está sometida a la carga axial uniformemente distribuida. Determine el desplazamiento del extremo A.



F4-5

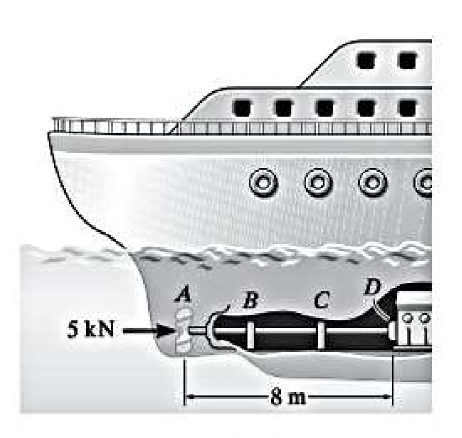
F4-6. Una barra de aluminio 2014-T6 con un diámetro de 20 mm está sometida a la carga axial triangularmente distribuida. Determine el desplazamiento del extremo A.



F4-6

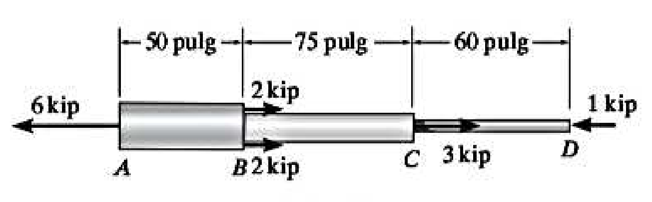
PROBLEMAS

•4-1. El barco es empujado a través del agua mediante un eje propulsor de acero A-36 que tiene 8 m de largo, medidos desde la hélice hasta el cojinete de empuje D en el motor. Si tiene un diámetro exterior de 400 mm y un espesor de pared de 50 mm, determine la contracción axial del eje cuando la hélice ejerce sobre él una fuerza de 5 kN. Los cojinetes en B y C son chumaceras.



Prob. 4-1

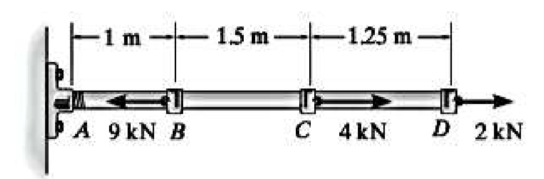
4-2. El eje de cobre está sometido a las cargas axiales que se muestran en la figura. Determine el desplazamiento del extremo A con respecto al extremo D. Los diámetros de cada segmento son $d_{AB} = 3$ pulg, $d_{BC} = 2$ pulg y $d_{CD} = 1$ pulg. Considere $E_{cu} = 18(10^3)$ ksi.



Prob. 4-2

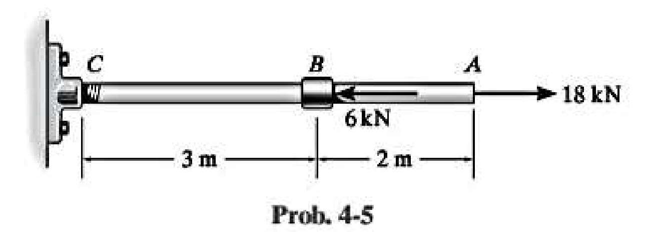
4-3. La barra de acero A-36 está sometida a las cargas mostradas. Si el área de la sección transversal de la barra es de 50 mm², determine el desplazamiento de su extremo D. No tome en cuenta el tamaño de los acoplamientos en B, C y D.

*4-4. La barra de acero A-36 está sometida a las cargas mostradas. Si el área de la sección transversal de la barra es de 50 mm², determine el desplazamiento de C. No tome en cuenta el tamaño de los acoplamientos en B, C y D.



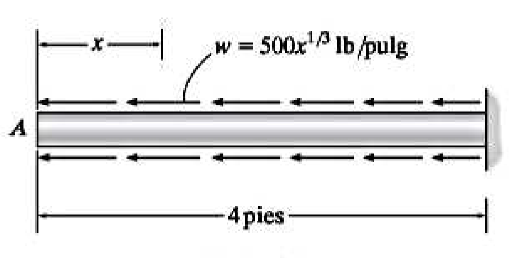
Probs. 4-3/4

4-5. El ensamble consiste en una barra de acero CB y una barra de aluminio BA, cada una con un diámetro de 12 mm. Si la barra está sometida a las cargas axiales en A y en el acoplamiento B, determine el desplazamiento del acoplamiento B y el extremo A. La longitud sin estirar de cada segmento se muestra en la figura. No tome en cuenta el tamaño de las conexiones en B y C, y suponga que éstas son rígidas. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.



Prob. 4-5

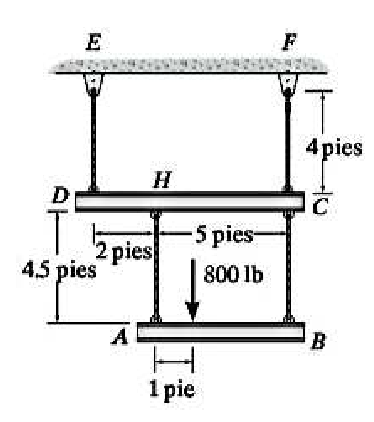
4-6. La barra cuenta con un área de 3 pulg² en su sección transversal y $E = 35(10^3)$ ksi. Determine el desplazamiento de su extremo A cuando está sometida a la carga distribuida que se muestra en la figura.



Prob. 4-6

4-7. La carga de 800 lb está soportada por los cuatro alambres de acero inoxidable 304 que están conectados a los elementos rígidos AB y DC. Determine el desplazamiento vertical de la carga si los elementos estaban en posición horizontal antes de que la carga fuera aplicada. Cada cable tiene un área de sección transversal de 0.05 pulg^2.

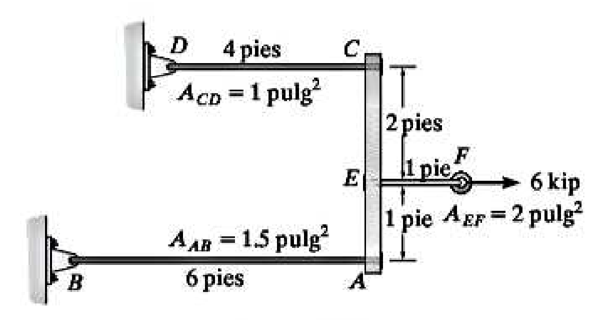
***4-8.** La carga de 800 lb está soportada por los cuatro alambres de acero inoxidable 304 que están conectados a los elementos rígidos AB y DC. Determine el ángulo de inclinación de cada elemento después de aplicar la carga. Los elementos estaban en un principio en posición horizontal y cada cable tiene un área transversal de 0.05 pulg^2.



Probs. 4-7/8

•**4-9.** El ensamble consta de tres barras de titanio (Ti-6A1-4V) y una barra rígida AC. El área de la sección transversal de cada barra se muestra en la figura. Si se aplica una fuerza de 6 kip al anillo F, determine el desplazamiento horizontal del punto F.

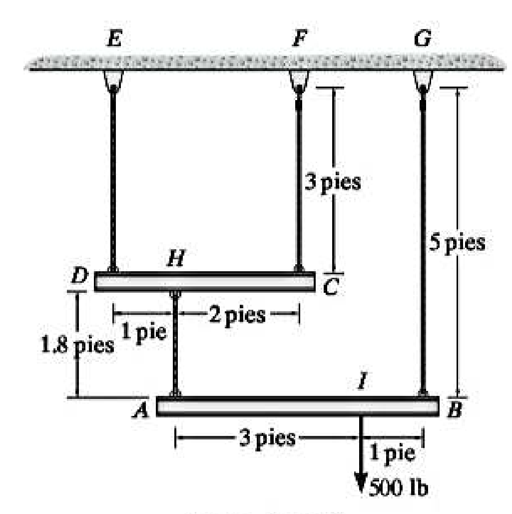
4-10. El ensamble consta de tres barras de titanio (Ti-6A1-4V) y una barra rígida AC. El área de la sección transversal de cada barra se muestra en la figura. Si se aplica una fuerza de 6 kip al anillo F, determine el ángulo de inclinación de la barra AC.



Probs. 4-9/10

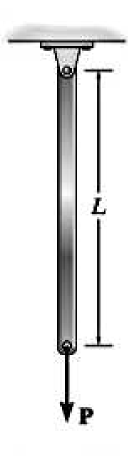
4-11. La carga está soportada por los cuatro alambres de acero inoxidable 304 que están conectados a los elementos rígidos AB y DC. Determine el desplazamiento vertical de la carga de 500 libras si los elementos estaban en un principio en posición horizontal al momento de aplicar la carga. Cada cable tiene una sección transversal con un área de 0.025 pulg^2.

***4-12.** La carga está soportada por los cuatro alambres de acero inoxidable 304 que están conectados a los elementos rígidos AB y DC. Determine el ángulo de inclinación de cada elemento después de aplicar la carga de 500 libras. Los elementos estaban en un principio en posición horizontal y cada cable tiene un área transversal de 0.025 pulg^2.



Probs. 4-11/12

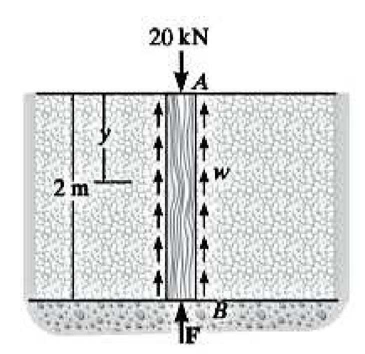
•**4-13.** La barra tiene una longitud L y un área A en su sección transversal. Determine la elongación de la barra debida a la fuerza **P** y a su propio peso. El material tiene un peso específico γ (peso/volumen) y un módulo de elasticidad E.



Prob. 4-13

4-14. El poste está fabricado de abeto Douglas y tiene un diámetro de 60 mm. Si está sometido a la carga de 20 kN y el suelo proporciona una resistencia a la fricción de $w = 4$ kN/m que se distribuye de manera uniforme a lo largo de sus lados, determine la fuerza **F** en su parte inferior que es necesaria para conservar el equilibrio. Además, ¿cuál es el desplazamiento de la parte superior A del poste con respecto a su parte inferior B? No tome en cuenta el peso del poste.

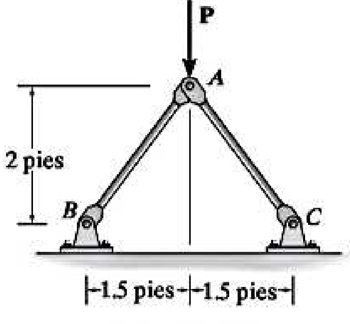
4-15. El poste está fabricado de abeto Douglas y tiene un diámetro de 60 mm. Si está sometido a la carga de 20 kN y el suelo proporciona una resistencia a la fricción que se distribuye de manera uniforme en toda su longitud y que varía linealmente desde $w = 0$ en $y = 0$ hasta $w = 3$ kN/m en $y = 2$ m, determine la fuerza **F** en su parte inferior que es necesaria para conservar el equilibrio. Además, ¿cuál es el desplazamiento de la parte superior A del poste con respecto a su parte inferior B? No tome en cuenta el peso del poste.



Probs. 4-14/15

*4-16. El sistema de eslabones está hecho de dos elementos de acero A-36 conectados mediante pasadores, cada uno de los elementos tiene un área transversal de 1.5 pulg². Si se aplica una fuerza vertical de $P = 50$ kip sobre el punto A, determine su desplazamiento vertical en A.

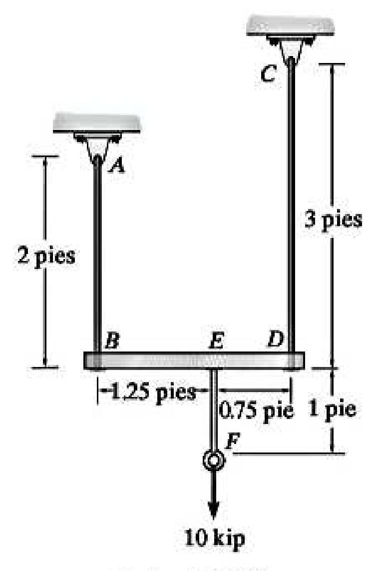
•4-17. El sistema de eslabones está hecho de dos elementos de acero A-36 conectados mediante pasadores, cada uno de los elementos tiene un área transversal de 1.5 pulg². Determine la magnitud de la fuerza **P** necesaria para desplazar el punto A 0.025 pulg hacia abajo.



Probs. 4-16/17

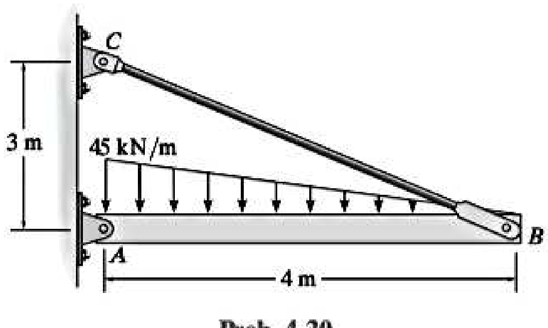
4-18. El ensamble consiste en dos barras de acero A-36 y una barra rígida BD. Cada una de ellas tiene un diámetro de 0.75 pulg. Si se aplica una fuerza de 10 kip sobre la barra como se muestra en la figura, determine el desplazamiento vertical de la carga.

4-19. El ensamble consiste en dos barras de acero A-36 y una barra rígida BD. Cada una de ellas tiene un diámetro de 0.75 pulg. Si se aplica una fuerza de 10 kip sobre la barra, determine el ángulo de inclinación de la barra.



Probs. 4-18/19

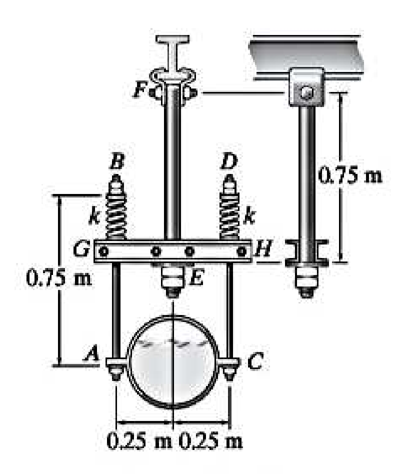
*4-20. La barra rígida se sostiene mediante una varilla CB, la cual está conectada con pasadores, tiene un área en su sección transversal de 500 mm² y está fabricada de acero A-36. Determine el desplazamiento vertical de la barra en B cuando se aplica la carga mostrada.



Prob. 4-20

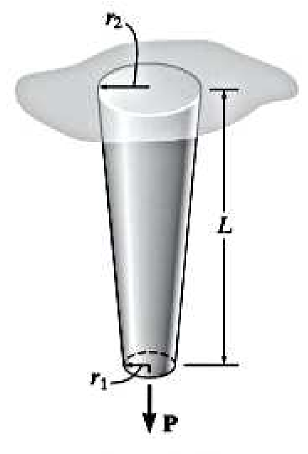
•4-21. Una tubería colgante soportada por el ensamble mostrado consta de dos resortes que están en un principio sin estirar y tienen una rigidez de $k = 60$ kN/m, tres barras de acero inoxidable 304, AB y CD, con un diámetro de 5 mm, y EF, que tiene un diámetro de 12 mm, así como una viga rígida GH. Si la tubería y el fluido que transporta tienen un peso total de 4 kN, determine el desplazamiento de la tubería cuando se conecta al soporte.

4-22. Una tubería colgante soportada por el ensamble mostrado en la figura consta de dos resortes que están en un principio sin estirar y tienen una rigidez de $k = 60$ kN/m, tres barras de acero inoxidable 304, AB y CD, con un diámetro de 5 mm, y EF, que tiene un diámetro de 12 mm, así como una viga rígida GH. Si la tubería se desplaza 82 mm cuando se llena de un fluido, determine el peso de éste.



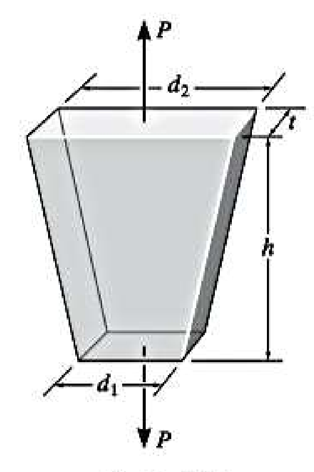
Probs. 4-21/22

4-23. La barra tiene un ligero ahusamiento y una longitud L. Se suspende del techo y soporta una carga **P** en su extremo. Demuestre que el desplazamiento de su extremo debido a esta carga es de $\delta = PL/(\pi E r_2 r_1)$. No tome en cuenta el peso del material. El módulo de elasticidad es E.



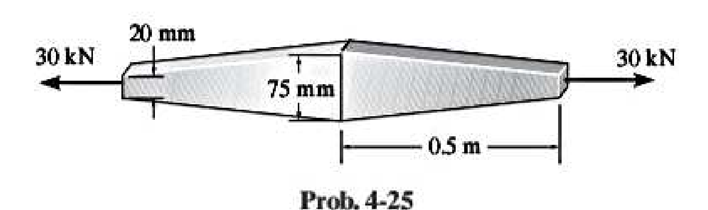
Prob. 4-23

*4-24. Determine el desplazamiento relativo de un extremo de la placa ahusada con respecto al otro extremo cuando se somete a una carga axial P.



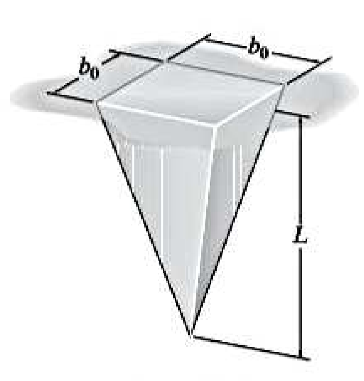
Prob. 4-24

4-25. Determine la elongación del elemento de acero A-36 cuando se somete a una fuerza axial de 30 kN. El elemento tiene 10 mm de espesor. Utilice el resultado del problema 4-24.



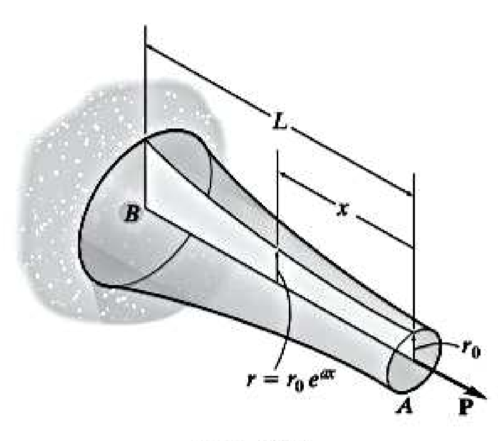
Prob. 4-25

4-26. La fundición está fabricada de un material que tiene un peso específico γ y un módulo de la elasticidad E. Si tiene la forma de una pirámide cuyas dimensiones se muestran en la figura, determine qué tanto se desplaza su extremo debido a la gravedad cuando se suspende en posición vertical.



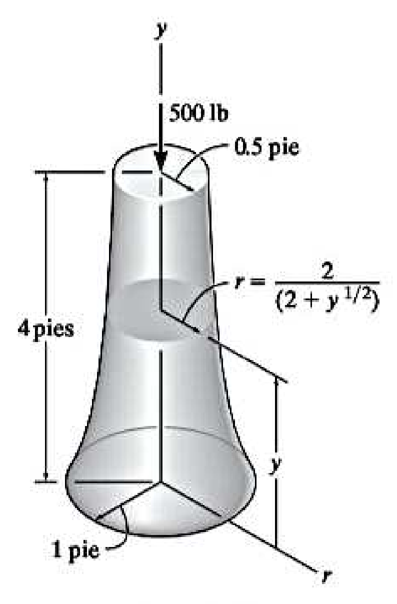
Prob. 4-26

4-27. La barra circular tiene un radio variable de $r = r_0e^{ax}$ y está fabricada de un material con módulo de elasticidad E. Determine el desplazamiento del extremo A cuando se somete a la fuerza axial **P**.



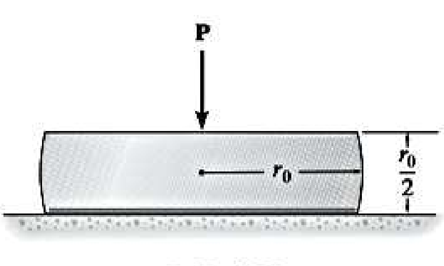
Prob. 4-27

•4-28. El pedestal está hecho de modo que tiene un radio definido por la función $r = 2/(2 + y^{1/2})$ pies, donde y está dado en pies. Si el módulo de elasticidad del material es $E = 14(10^3)$ psi, determine el desplazamiento de su parte superior cuando soporta la carga de 500 lb.



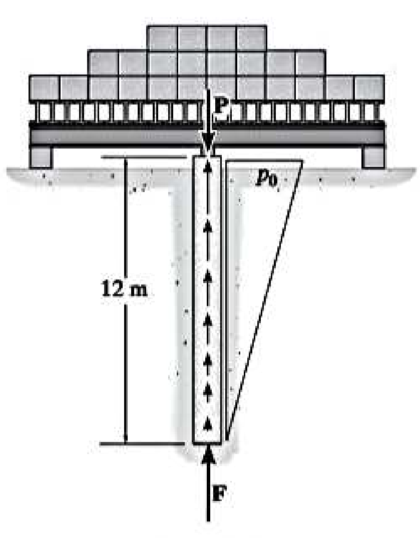
Prob. 4-28

•4-29. El soporte mostrado se hizo cortando los dos lados opuestos de una esfera con radio r_0. Si la altura original del soporte es $r_0/2$, determine qué tanto se acorta éste al soportar una carga **P**. El módulo de elasticidad es E.



Prob. 4-29

4-30. El peso del cargamento ejerce una fuerza axial de $P = 1500$ kN sobre el pilote enterrado de concreto de alta resistencia que tiene un diámetro de 300 mm. Si la distribución de la fricción de la resistencia superficial desarrollada a partir de la interacción entre el suelo y la superficie del pilote es aproximadamente como se muestra en la figura, y se requiere que la fuerza resultante contraria **F** sea igual a cero, determine la intensidad máxima p_0 kN/m necesaria para el equilibrio. Asimismo, encuentre el correspondiente acortamiento elástico del pilote. No tome en cuenta su peso.



Prob. 4-30

4

4.3 Principio de superposición

Con frecuencia, el principio de superposición se utiliza para determinar el esfuerzo o el desplazamiento en un punto de un elemento cuando éste se encuentra sometido a una carga complicada. Al subdividir la carga en sus componentes, el ***principio de superposición*** establece que el esfuerzo o el desplazamiento resultante en el punto puede determinarse mediante la suma algebraica del esfuerzo o el desplazamiento causado por cada componente de la carga aplicado por separado al elemento.

Para que el principio de superposición pueda aplicarse deben cumplirse las siguientes dos condiciones.

1. ***La carga debe estar relacionada linealmente con el esfuerzo o el desplazamiento que se va a determinar.*** Por ejemplo, las ecuaciones $\sigma = P/A$ y $\delta = PL/AE$ implican una relación lineal entre P y σ o δ.

2. ***La carga no debe cambiar significativamente la geometría original o la configuración del elemento.*** Si se producen cambios significativos, la dirección y ubicación de las fuerzas aplicadas y sus momentos también cambiará. Por ejemplo, considere la varilla delgada que se muestra en la figura 4-10*a*, la cual está sometida a una carga **P**. En la figura 4-10*b*, **P** se sustituye por dos de sus componentes, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$. Si **P** ocasiona que la varilla se doble en gran medida, como lo muestra la figura, entonces el momento de la carga sobre su soporte Pd, no será igual a la suma de los momentos de las cargas que lo componen, $Pd \neq P_1d_1 + P_2d_2$, porque $d_1 \neq d_2 \neq d$.

Este principio se utiliza a lo largo del libro cada vez que se supone la aplicación de la ley de Hooke y, además, cuando los cuerpos sometidos a carga sufren deformaciones tan pequeñas que el cambio de posición y dirección de la carga es insignificante y puede ser descartado.

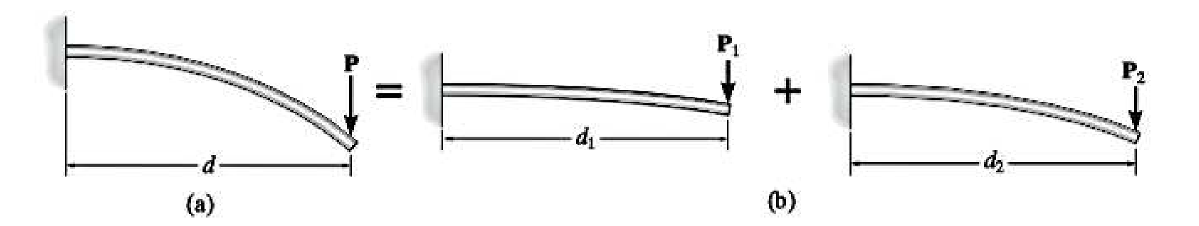


Figura 4-10

4.4 Elementos estáticamente indeterminados cargados axialmente

Considere la barra mostrada en la figura 4-11*a* que está empotrada en sus dos extremos. A partir del diagrama de cuerpo libre, figura 4-11*b*, el equilibrio requiere

$$+\uparrow \Sigma F = 0; \qquad F_B + F_A - P = 0$$

Este tipo de problema se denomina ***estáticamente indeterminado***, ya que la(s) ecuación(es) de equilibrio no son suficientes para determinar las dos reacciones en la barra.

A fin de establecer una ecuación adicional necesaria para la solución, se requiere considerar cómo se desplazan los puntos en la barra. En particular, una ecuación que especifique las condiciones para el desplazamiento se conoce como una ***condición de compatibilidad*** o ***condición cinemática***. En este caso, una condición de compatibilidad adecuada requiere que el desplazamiento de un extremo de la barra en relación con el otro sea igual a cero, ya que dichos extremos están empotrados. Por lo tanto, la condición de compatibilidad se convierte en

$$\delta_{A/B} = 0$$

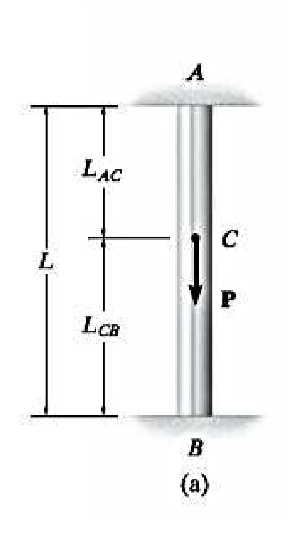
Esta ecuación puede expresarse en términos de las cargas aplicadas mediante el uso de una *relación carga-desplazamiento*, que depende del comportamiento del material. Por ejemplo, si se produce un comportamiento elástico lineal, puede utilizarse $\delta = PL/AE$. Si se toma en cuenta que la fuerza interna en el segmento AC es de $+F_A$, y que en el segmento CB la fuerza interna $-F_B$, figura 4-11*c*, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE} = 0$$

Si se supone que AE es constante, entonces $F_A = F_B(L_{CB}/L_{AC})$, de modo que al usar la ecuación de equilibrio, las ecuaciones de las reacciones se convierten en

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right) \quad \text{y} \quad F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Como ambos resultados son positivos, la dirección de las reacciones se muestra correctamente en el diagrama de cuerpo libre.



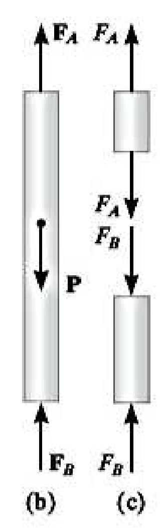
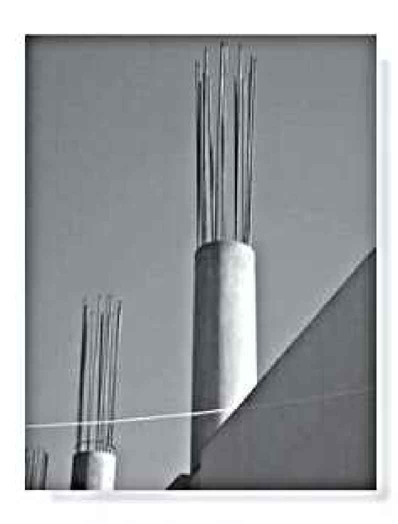


Figura 4-11

Puntos importantes

- En ocasiones, el *principio de superposición* se utiliza para simplificar los problemas de esfuerzo y desplazamiento con cargas complicadas. Esto se hace mediante la subdivisión de la carga en sus componentes, para después sumar los resultados algebraicamente.
- La superposición requiere que la carga se relacione linealmente con el esfuerzo o el desplazamiento, y que la carga no cambie de manera significativa la geometría original del elemento.
- Un problema es *estáticamente indeterminado* si las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar todas las reacciones en un elemento.
- Las *condiciones de compatibilidad* especifican las restricciones de desplazamiento que se producen en los soportes u otros puntos de un elemento.



La mayoría de las columnas de concreto están reforzadas con barras de acero; y como estos dos materiales trabajan juntos para soportar la carga aplicada, las fuerzas en cada material se vuelven estáticamente indeterminadas.

Procedimiento de análisis

Las reacciones en los apoyos para problemas estáticamente indeterminados se calculan al satisfacer los requerimientos de equilibrio, compatibilidad y fuerza-desplazamiento para el elemento.

Equilibrio.

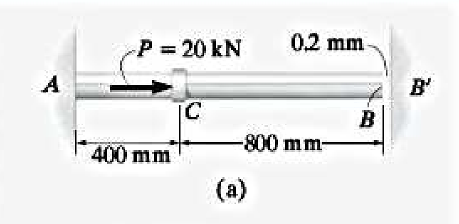
- Dibuje un diagrama de cuerpo libre del elemento a fin de identificar todas las fuerzas que actúan sobre él.
- El problema se puede clasificar como estáticamente indeterminado si el número de reacciones desconocidas en el diagrama de cuerpo libre es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio disponibles.
- Escriba las ecuaciones de equilibrio para el elemento.

Compatibilidad.

- Considere dibujar un diagrama de desplazamiento a fin de investigar la forma en que los elementos se alargan o contraen al ser sometidos a las cargas externas.
- Exprese las condiciones de compatibilidad en términos de los desplazamientos causados por la carga.
- Use una relación carga-desplazamiento, como $\delta = PL/AE$, para relacionar los desplazamientos desconocidos con las reacciones.
- Despeje las reacciones de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Si alguno de los resultados tiene un valor numérico negativo, entonces la fuerza actúa en sentido contrario al de la dirección indicada en el diagrama de cuerpo libre.

EJEMPLO 4.5

La barra de acero que se muestra en la figura 4-12*a* tiene un diámetro de 10 mm. Está empotrada a la pared en A y antes de recibir la carga, hay un espacio de 0.2 mm entre la pared en B' y la barra. Determine las reacciones en A y B' si la barra está sometida a una fuerza axial de $P = 20$ kN como se muestra en la figura. No tome en cuenta el tamaño del collarín en C. Considere $E_{ac} = 200$ GPa.



SOLUCIÓN

Equilibrio. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 4-12*b*, se *supondrá* que la fuerza P es lo suficientemente grande para causar que el extremo B de la barra toque la pared en B'. El problema es estáticamente indeterminado ya que hay dos incógnitas y sólo una ecuación de equilibrio.

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad -F_A - F_B + 20(10^3)\text{ N} = 0 \qquad (1)$$

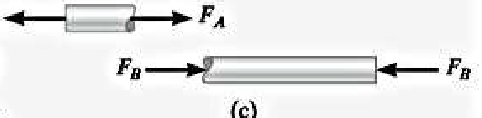


Figura 4-12

Compatibilidad. La fuerza P ocasiona que el punto B se mueva hasta B', sin desplazamientos adicionales. Por lo tanto, la condición de compatibilidad para la barra es

$$\delta_{B/A} = 0.0002\text{ m}$$

Este desplazamiento puede expresarse en términos de las reacciones desconocidas empleando la relación carga-desplazamiento, ecuación 4-2, aplicada a los segmentos AC y CB, figura 4-12*c*. Al usar unidades de newtons y metros, se tiene

$$\delta_{B/A} = 0.0002\text{ m} = \frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE}$$

$$0.0002\text{ m} = \frac{F_A(0.4\text{ m})}{\pi(0.005\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} - \frac{F_B(0.8\text{ m})}{\pi(0.005\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]}$$

o bien

$$F_A(0.4\text{ m}) - F_B(0.8\text{ m}) = 3141.59\text{ N}\cdot\text{m} \qquad (2)$$

Si se resuelven las ecuaciones 1 y 2, se obtiene

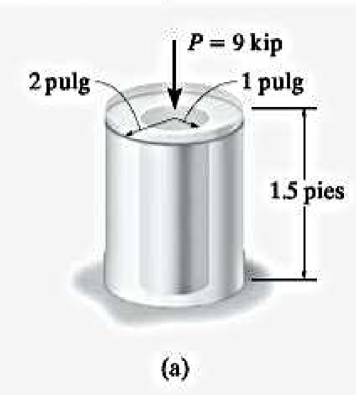
$$F_A = 16.0\text{ kN} \qquad F_B = 4.05\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Como la respuesta para F_B es *positiva*, de hecho el extremo B hace contacto con la pared en B', como se supuso en un inicio.

NOTA: Si F_B fuera una cantidad negativa, el problema sería estáticamente determinado, de manera que $F_B = 0$ y $F_A = 20$ kN.

4

EJEMPLO 4.6



(a)

El poste de aluminio de la figura 4-13*a* se refuerza con un núcleo de latón. Si este ensamble soporta una carga axial de compresión de $P = 9$ kip, aplicada sobre la tapa rígida, determine el esfuerzo normal promedio en el aluminio y el latón. Considere $E_{al} = 10(10^3)$ ksi y $E_{br} = 15(10^3)$ ksi.

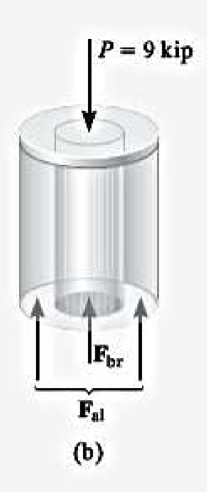
SOLUCIÓN

Equilibrio. En la figura 4-13*b*, se muestra el diagrama de cuerpo libre para el poste. Aquí, la fuerza axial resultante en la base se representa mediante las componentes desconocidas soportadas por el aluminio, $\mathbf{F}_{al}$, y el latón, $\mathbf{F}_{br}$. El problema es estáticamente indeterminado. ¿Por qué?

El equilibrio vertical de fuerzas requiere

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -9 \text{ kip} + F_{al} + F_{br} = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidad. La tapa rígida en la parte superior del poste ocasiona que tanto el aluminio como el latón se desplacen en la misma cantidad. Por lo tanto,



(b)

$$\delta_{al} = \delta_{br}$$

Usando las relaciones carga-desplazamiento,

$$\frac{F_{al}L}{A_{al}E_{al}} = \frac{F_{br}L}{A_{br}E_{br}}$$

$$F_{al} = F_{br}\left(\frac{A_{al}}{A_{br}}\right)\left(\frac{E_{al}}{E_{br}}\right)$$

$$F_{al} = F_{br}\left[\frac{\pi[(2 \text{ pulg})^2 - (1 \text{ pulg})^2]}{\pi(1 \text{ pulg})^2}\right]\left[\frac{10(10^3) \text{ ksi}}{15(10^3) \text{ ksi}}\right]$$

$$F_{al} = 2F_{br} \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2 de manera simultánea se obtiene

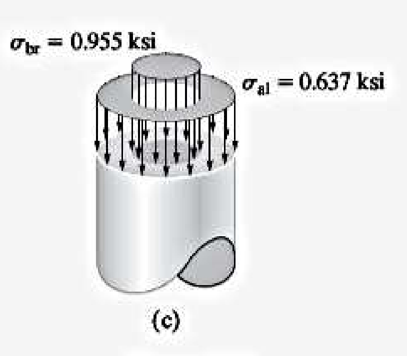
$$F_{al} = 6 \text{ kip} \qquad F_{br} = 3 \text{ kip}$$

Como los resultados son positivos, de hecho el esfuerzo será de compresión.

Por consiguiente, el esfuerzo normal promedio en el aluminio y el latón es

$$\sigma_{al} = \frac{6 \text{ kip}}{\pi[(2 \text{ pulg})^2 - (1 \text{ pulg})^2]} = 0.637 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{br} = \frac{3 \text{ kip}}{\pi(1 \text{ pulg})^2} = 0.955 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$



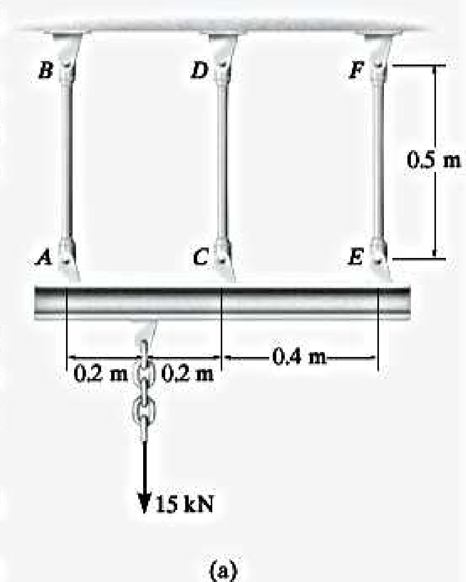
(c)

Figura 4-13

NOTA: En la figura 4-13*c* se muestran las distribuciones de esfuerzo con base en estos resultados.

EJEMPLO 4.7

Las tres barras de acero A-36 que se muestran en la figura 4-14*a* están conectadas mediante pasadores a un elemento *rígido*. Si la carga aplicada sobre el elemento es de 15 kN, determine la fuerza desarrollada en cada barra. Las barras *AB* y *EF* tienen cada una un área en su sección transversal de 50 mm², mientras que dicha área en la barra *CD* es de 30 mm².



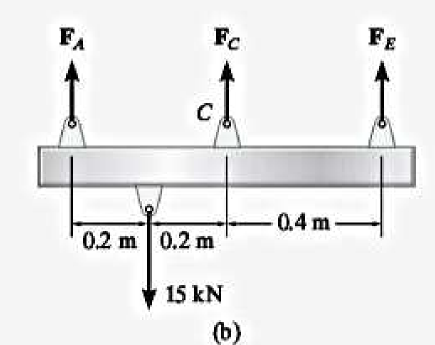
(a)

SOLUCIÓN

Equilibrio. El diagrama de cuerpo libre del elemento rígido se muestra en la figura 4-14*b*. Este problema es estáticamente indeterminado ya que hay tres incógnitas y sólo dos ecuaciones de equilibrio disponibles.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_A + F_C + F_E - 15 \text{ kN} = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -F_A(0.4 \text{ m}) + 15 \text{ kN}(0.2 \text{ m}) + F_E(0.4 \text{ m}) = 0 \qquad (2)$$

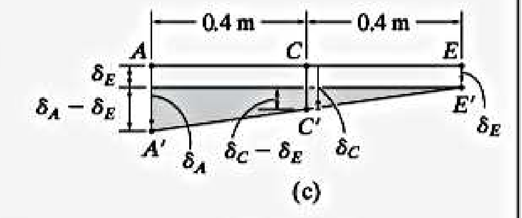


(b)

Compatibilidad. La carga aplicada hará que la línea horizontal *ACE* que se muestra en la figura 4-14*c* se convierta en la línea inclinada *A'C'E'*. Los desplazamientos de los puntos *A*, *C* y *E* pueden relacionarse mediante triángulos semejantes. Así, la ecuación de compatibilidad que relaciona estos desplazamientos es

$$\frac{\delta_A - \delta_E}{0.8 \text{ m}} = \frac{\delta_C - \delta_E}{0.4 \text{ m}}$$

$$\delta_C = \frac{1}{2}\delta_A + \frac{1}{2}\delta_E$$



(c)

Figura 4-14

Mediante la relación carga-desplazamiento, ecuación. 4-2, se tiene

$$\frac{F_C L}{(30 \text{ mm}^2)E_{ac}} = \frac{1}{2}\left[\frac{F_A L}{(50 \text{ mm}^2)E_{ac}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{F_E L}{(50 \text{ mm}^2)E_{ac}}\right]$$

$$F_C = 0.3F_A + 0.3F_E \qquad (3)$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 3 de manera simultánea se obtiene

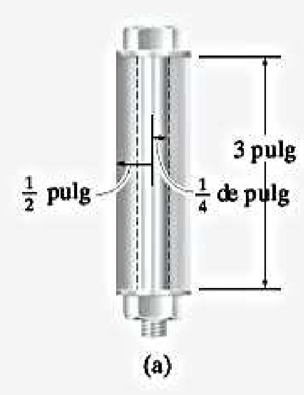
$$F_A = 9.52 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_C = 3.46 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_E = 2.02 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

4

EJEMPLO 4.8





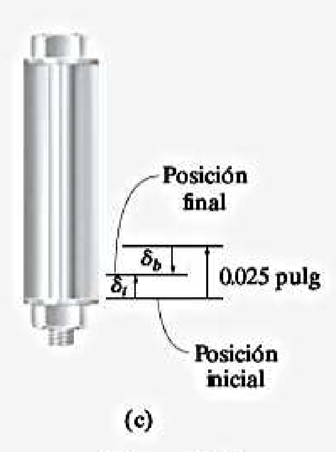


Figura 4-15

El perno mostrado en la figura 4-15*a* está hecho de una aleación de aluminio 2014-T6 y se aprieta de modo que comprime un tubo cilíndrico hecho con una aleación de magnesio Am 1004-T61. El tubo tiene un radio exterior de $\frac{1}{2}$ pulg y se supone que tanto el radio interior del tubo como el radio del perno son de $\frac{1}{4}$ pulg. Se considera que las arandelas en las partes superior e inferior del tubo son rígidas y que tienen un espesor insignificante. En un inicio, la tuerca se aprieta perfectamente a mano, después se aprieta media vuelta más usando una llave. Si el tornillo tiene 20 hilos por pulgada, determine la tensión en el perno.

SOLUCIÓN

Equilibrio. Se considera el diagrama de cuerpo libre de una sección del perno y el tubo de la figura 4-15*b* a fin de relacionar la fuerza en el perno, F_b, con la del tubo, F_t. El equilibrio requiere

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_b - F_t = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidad. Cuando se aprieta la tuerca en el perno, el tubo se acortará δ_t, y el perno se *alargará* δ_b, como en la figura 4-15*c*. Como la tuerca experimenta la mitad de una vuelta, avanza una distancia de $(\frac{1}{2})(\frac{1}{20}$ de pulg$) = 0.025$ pulg a lo largo del perno. Por lo tanto, la compatibilidad de estos desplazamientos requiere

$$(+\uparrow) \qquad \delta_t = 0.025 \text{ pulg} - \delta_b$$

Si se toman los módulos de elasticidad de la tabla que se encuentra en la página final de este libro, y se aplica la ecuación 4-2, se obtiene

$$\frac{F_t(3 \text{ pulg})}{\pi[(0.5 \text{ pulg})^2 - (0.25 \text{ pulg})^2][6.48(10^3) \text{ ksi}]} =$$
$$0.025 \text{ pulg} - \frac{F_b(3 \text{ pulg})}{\pi(0.25 \text{ pulg})^2[10.6(10^3) \text{ ksi}]}$$
$$0.78595F_t = 25 - 1.4414F_b \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2 de manera simultánea, resulta

$$F_b = F_t = 11.22 \text{ kip}$$

Por lo tanto, los esfuerzos en el perno y el tubo son

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} = \frac{11.22 \text{ kip}}{\pi(0.25 \text{ pulg})^2} = 57.2 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t} = \frac{11.22 \text{ kip}}{\pi[(0.5 \text{ pulg})^2 - (0.25 \text{ pulg})^2]} = 19.1 \text{ ksi}$$

Estos esfuerzos son menores que el esfuerzo de cedencia reportado para cada material, $(\sigma_Y)_{al} = 60$ ksi y $(\sigma_Y)_{mg} = 22$ ksi (vea la página final de este libro). Por consiguiente, este análisis "elástico" es válido.

4.5 Método de las fuerzas para el análisis de elementos cargados axialmente

Los problemas estáticamente indeterminados también pueden resolverse al escribir la ecuación de compatibilidad mediante el principio de superposición. Este método de solución se conoce a menudo como el ***método de las fuerzas*** o ***de las flexibilidades***. Para mostrar cómo se aplica, considere de nuevo la barra de la figura 4-16*a*. Si se elige el soporte en B como "redundante" y se elimina *temporalmente* su efecto en la barra, entonces la barra se convertirá en estáticamente determinada como en la figura 4-16*b*. Al emplear el principio de superposición se debe añadir de nuevo la carga redundante desconocida $\mathbf{F}_B$, como se muestra en la figura 4-16*c*.

Si la carga $\mathbf{P}$ causa que B se desplace *hacia abajo* una cantidad δ_P, la reacción $\mathbf{F}_B$ debe desplazar al extremo B de la barra *hacia arriba* en una extensión δ_B, de modo que cuando se superponen las dos cargas no ocurra desplazamiento en B. Por lo tanto,

$$(+\downarrow) \qquad 0 = \delta_P - \delta_B$$

Esta ecuación representa la ecuación de compatibilidad para los desplazamientos en el punto B, para lo cual se ha supuesto que los desplazamientos son positivos hacia abajo.

Al aplicar la relación carga-desplazamiento para cada caso, se tiene $\delta_P = PL_{AC}/AE$ y $\delta_B = F_B L/AE$. En consecuencia,

$$0 = \frac{PL_{AC}}{AE} - \frac{F_B L}{AE}$$

$$F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

A partir del diagrama de cuerpo libre de la barra, figura 4-11*b*, ahora la reacción en A puede determinarse a partir de la ecuación de equilibrio,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right) + F_A - P = 0$$

Como $L_{CB} = L - L_{AC}$, entonces

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right)$$

Estos resultados son los mismos que los obtenidos en la sección 4.4, excepto que aquí se aplicó la condición de compatibilidad para obtener una reacción *y después* la condición de equilibrio para obtener la otra.

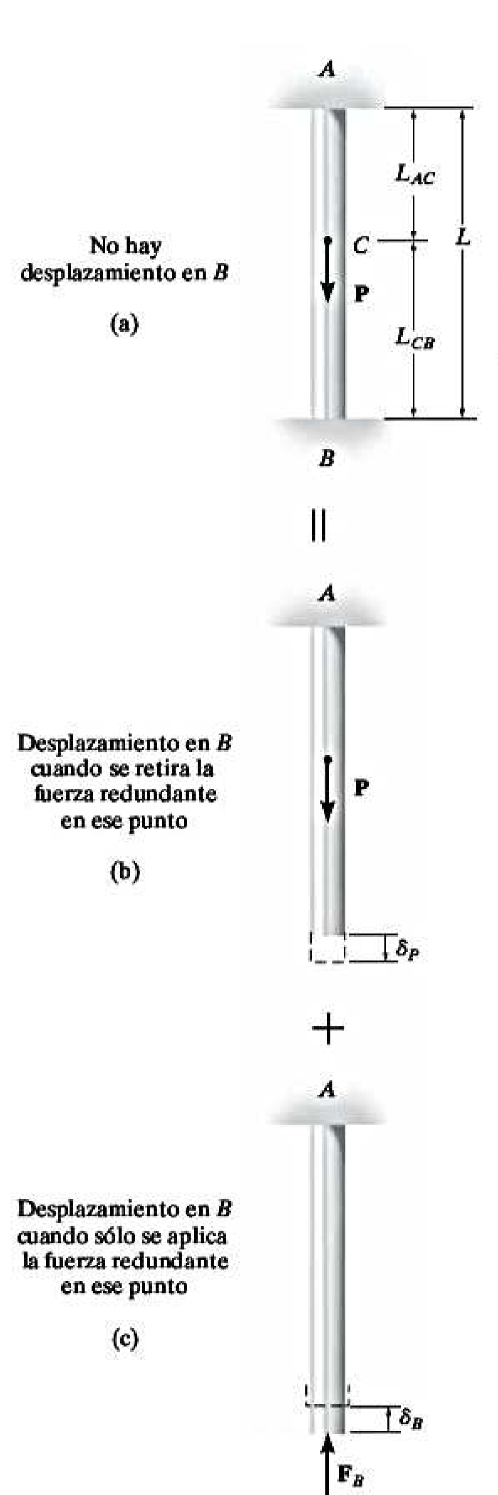


Figura 4-16

Procedimiento de análisis

El análisis del método de las fuerzas requiere los siguientes pasos.

Compatibilidad.

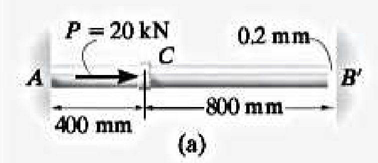
- Elija uno de los soportes como redundante y escriba la ecuación de compatibilidad. Para hacer esto, el desplazamiento conocido en el apoyo redundante, que suele ser cero, se iguala al desplazamiento en el soporte causado *sólo* por las cargas externas que actúan sobre el elemento *más* (suma vectorial) el desplazamiento en este soporte causado *sólo* por la reacción redundante que actúa sobre el elemento.
- Exprese la carga externa y los desplazamientos redundantes en términos de las cargas usando una relación carga-desplazamiento, como $\delta = PL/AE$.
- Una vez establecida, la ecuación de compatibilidad puede resolverse para la magnitud de la fuerza redundante.

4

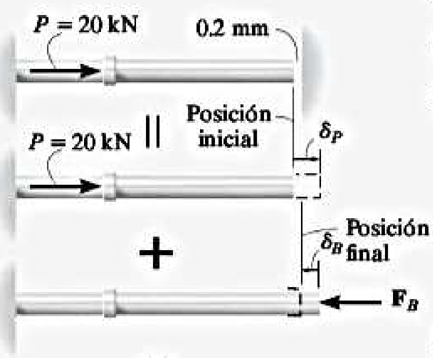
Equilibrio.

- Dibuje un diagrama de cuerpo libre y escriba las ecuaciones de equilibrio adecuadas para el elemento. Para ello utilice el resultado calculado en la fuerza redundante. Resuelva estas ecuaciones para cualquier otra reacción.

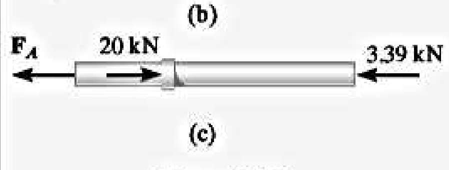
EJEMPLO 4.9



(a)



(b)



(c)

Figura 4-17

En la figura 4-17*a* se muestra una barra de acero A-36 que tiene un diámetro de 10 mm y está empotrada en la pared en *A*. Antes de aplicar una carga, hay un espacio de 0.2 mm entre la pared en *B'* y la barra. Determine las reacciones en *A* y *B'*. No tome en cuenta el tamaño del collarín en *C*. Considere que $E_{ac} = 200$ GPa.

SOLUCIÓN

Compatibilidad. Aquí se considerará que el soporte en *B'* es redundante. Si se utiliza el principio de superposición, figura 4-17*b*, se tiene

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad 0.0002 \text{ m} = \delta_P - \delta_B \qquad (1)$$

Las deflexiones δ_P y δ_B se determinan a partir de la ecuación 4-2.

$$\delta_P = \frac{PL_{AC}}{AE} = \frac{[20(10^3)\text{ N}](0.4\text{ m})}{\pi(0.005\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} = 0.5093(10^{-3})\text{ m}$$

$$\delta_B = \frac{F_B L_{AB}}{AE} = \frac{F_B(1.20\text{ m})}{\pi(0.005\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} = 76.3944(10^{-9})F_B$$

Al sustituir en la ecuación 1, se tiene

$$0.0002\text{ m} = 0.5093(10^{-3})\text{ m} - 76.3944(10^{-9})F_B$$

$$F_B = 4.05(10^3)\text{ N} = 4.05\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

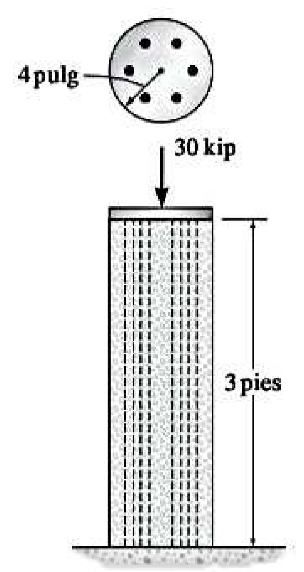
Equilibrio. A partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4-17*c*,

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad -F_A + 20\text{ kN} - 4.05\text{ kN} = 0 \quad F_A = 16.0\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

4-31. La columna está hecha de concreto de alta resistencia y seis varillas de refuerzo de acero A-36. Si la columna se somete a una fuerza axial de 30 kip, determine el esfuerzo normal promedio en el concreto y en cada varilla. Cada una tiene un diámetro de 0.75 pulg.

***4-32.** La columna está hecha de concreto de alta resistencia y seis varillas de refuerzo de acero A-36. Si la columna se somete a una fuerza axial de 30 kips, determine el diámetro requerido de cada varilla de tal manera que una cuarta parte de la carga sea soportada por el concreto y tres cuartas partes por el acero.



Probs. 4-31/32

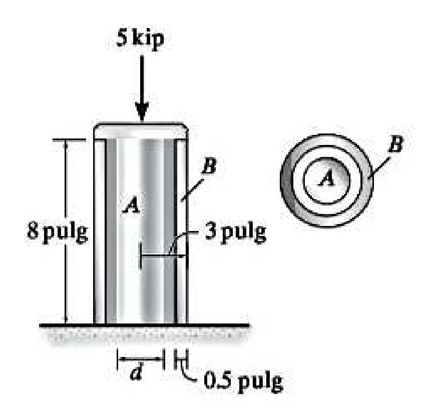
•**4-33.** El tubo de acero se llena con concreto y se somete a una fuerza de compresión de 80 kN. Determine el esfuerzo normal promedio en el concreto y el acero debido a esta carga. El tubo tiene un diámetro exterior de 80 mm y un diámetro interior de 70 mm. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_c = 24$ GPa.



Prob. 4-33

4-34. El poste A de acero inoxidable 304 tiene un diámetro $d = 2$ pulg y está rodeado por el tubo B de latón rojo C83400. Ambos descansan sobre una superficie rígida. Si se aplica una fuerza de 5 kip sobre la tapa rígida, determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en el poste y en el tubo.

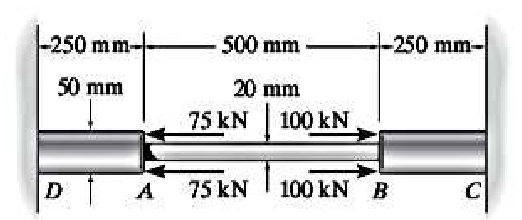
4-35. El poste A de acero inoxidable 304 está rodeado por el tubo B de latón rojo C83400. Ambos descansan sobre una superficie rígida. Si se aplica una fuerza de 5 kip sobre la tapa rígida, determine el diámetro d requerido para el poste de acero de modo que la carga se reparta en partes iguales entre el poste y el tubo.



Probs. 4-34/35

***4-36.** La barra compuesta consta de un segmento AB de acero A-36 con un diámetro de 20 mm y segmentos finales DA y CB de latón rojo C83400 con un diámetro de 50 mm. Para cada segmento, determine el esfuerzo normal promedio debido a la carga aplicada.

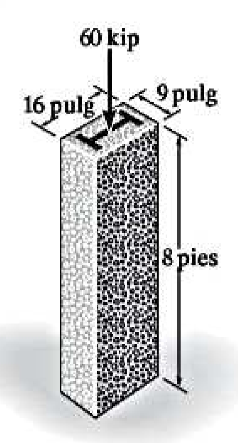
•**4-37.** La barra compuesta consta de un segmento AB de acero A-36 con un diámetro de 20 mm y segmentos finales DA y CB de latón rojo C83400 con un diámetro de 50 mm. Determine el desplazamiento de A con respecto a B debido a la carga aplicada.



Probs. 4-36/37

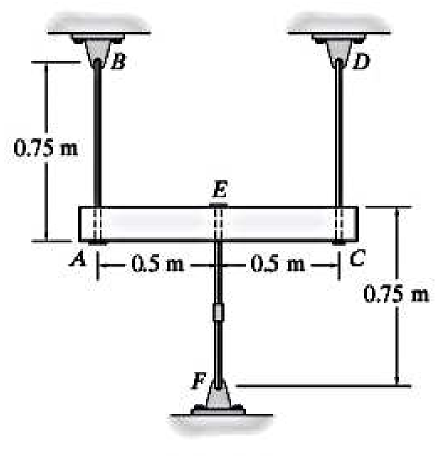
4-38. La columna de acero A-36 que tiene un área transversal de 18 pulg^2, está ahogada en concreto de alta resistencia como se muestra en la figura. Si se aplica una fuerza axial de 60 kip sobre la columna, determine el esfuerzo de compresión promedio en el concreto y el acero. ¿Qué tanto se acorta la columna si su longitud original es de 8 pies?

4-39. La columna de acero A-36 que tiene un área transversal de 18 pulg^2, está ahogada en concreto de alta resistencia como se muestra en la figura. Si se aplica una fuerza axial de 60 kip sobre la columna, determine el área requerida del acero para que la fuerza se reparta por igual entre el acero y el concreto. ¿Qué tanto se acorta la columna si su longitud original es de 8 pies?



Probs. 4-38/39

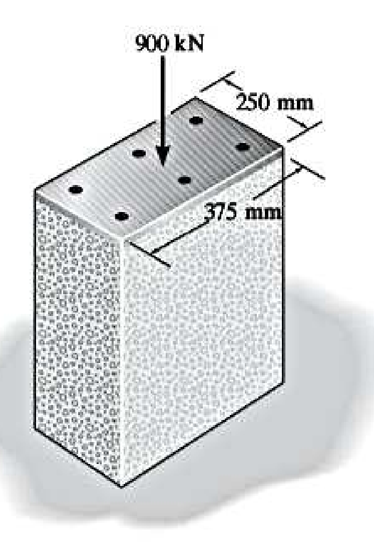
***4-40.** El elemento rígido se mantiene en la posición mostrada mediante las tres barras de sujeción fabricadas de acero A-36. Cada barra tiene una longitud sin estirar de 0.75 m y un área en su sección transversal de 125 mm^2. Determine las fuerzas en las barras si un torniquete en la barra EF realiza una vuelta completa. El paso del tornillo es de 1.5 mm. No tome en cuenta el tamaño del torniquete y suponga que es rígido. *Nota:* El paso del tornillo causa que, al apretarse, la barra se acorte 1.5 mm debido a la revolución completa del torniquete.



Prob. 4-40

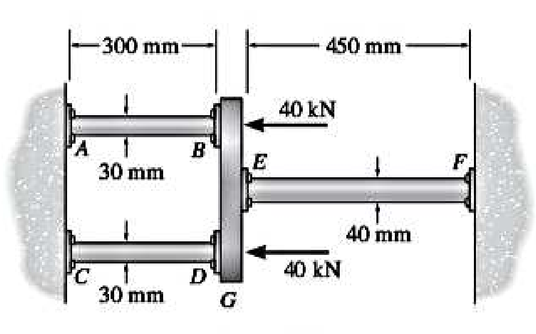
•**4-41.** El poste de concreto se refuerza usando seis barras de acero, cada una con un diámetro de 20 mm. Determine el esfuerzo en el concreto y el acero si el poste está sometido a una carga axial de 900 kN. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_c = 25$ GPa.

4-42. El poste de concreto se refuerza usando seis barras de acero A-36. Si el poste se somete a una fuerza axial de 900 kN, determine el diámetro requerido para cada varilla de manera que una quinta parte de la carga esté soportada por el acero y cuatro quintas partes por el concreto. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_c = 25$ GPa.



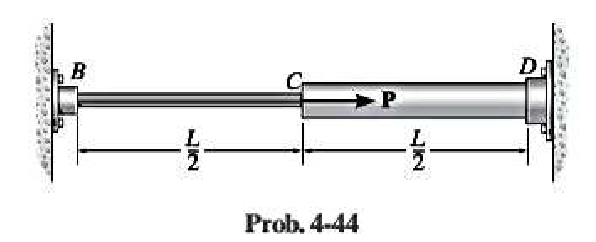
Probs. 4-41/42

4-43. El ensamble consta de dos barras AB y CD de una aleación de latón rojo C83400 con un diámetro de 30 mm, una barra EG de aleación de acero inoxidable 304 con un diámetro de 40 mm y una tapa rígida G. Si los soportes en A, C y F son rígidos, determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en las barras AB, CD y EF.



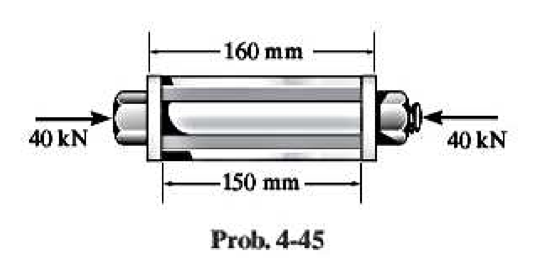
Prob. 4-43

***4-44.** Los dos tubos están hechos del mismo material y se encuentran conectados como lo muestra la figura. Si el área de la sección transversal de BC es A y la del CD es de $2A$, determine las reacciones en B y D, cuando se aplica una fuerza $\mathbf{P}$ en la unión C.



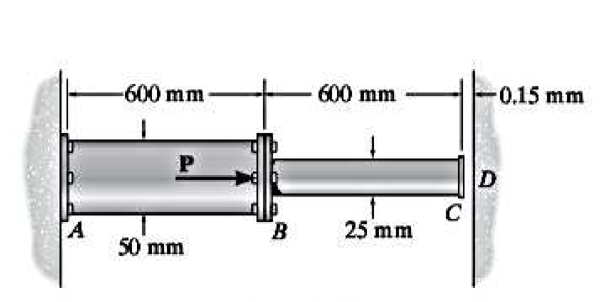
Prob. 4-44

•4-45. El perno tiene un diámetro de 20 mm y pasa a través de un tubo con un diámetro interior de 50 mm y un diámetro exterior de 60 mm. Si el perno y el tubo están hechos de acero A-36, determine el esfuerzo normal en el tubo y el perno cuando se aplica una fuerza de 40 kN sobre el perno. Suponga que las tapas en los extremos son rígidas.



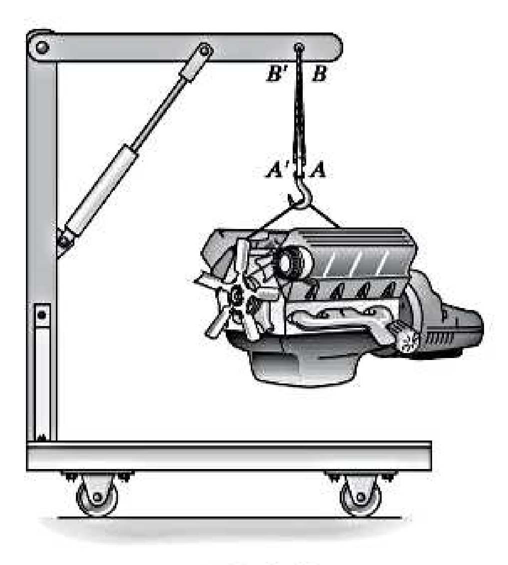
Prob. 4-45

4-46. Si la distancia entre C y la pared rígida en D es en un principio de 0.15 mm, determine las reacciones de apoyo en A y D cuando se aplica la fuerza $\mathbf{P}$ = 200 kN. El ensamble está hecho de acero A-36.



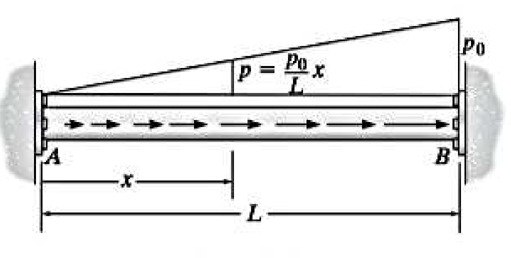
Prob. 4-46

4-47. Dos cables de acero A-36 se utilizan para sostener el motor de 650 lb. En un principio, AB tiene 32 pulg de largo y $A'B'$ tiene 32.008 pulg. Determine la fuerza que soporta cada cable cuando el motor cuelga de ellos. Cada cable tiene un área en su sección transversal de 0.01 pulg^2.



Prob. 4-47

***4-48.** La barra AB tiene un diámetro d y se ajusta perfectamente a los soportes rígidos en A y B cuando está descargada. El módulo de elasticidad es E. Determine las reacciones en los soportes A y B si la barra se somete a la carga axial linealmente distribuida que se muestra en la figura.

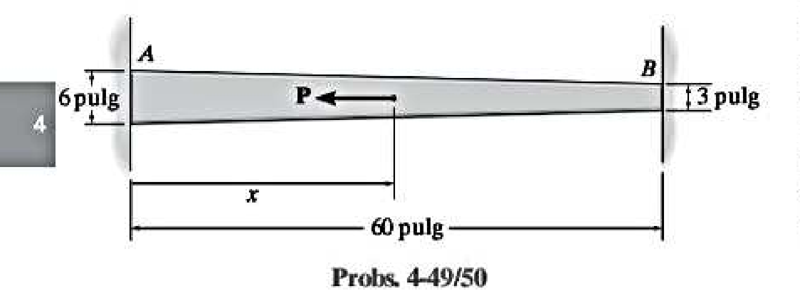


Prob. 4-48

4

•4-49. El elemento ahusado se conecta fijamente en sus extremos A y B y se somete a una carga $P = 7$ kip en $x = 30$ pulg. Determine las reacciones en los soportes. El material tiene 2 pulg de espesor y está hecho de aluminio 2014-T6.

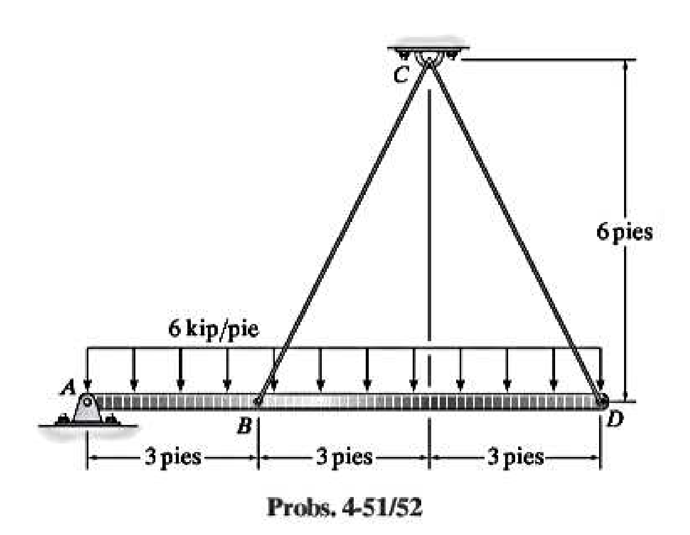
4-50. El elemento ahusado se conecta fijamente en sus extremos A y B y se somete a una carga **P**. Determine la ubicación x de la carga y su magnitud máxima de tal forma que el esfuerzo normal promedio en la barra no exceda $\sigma_{perm} = 4$ ksi. El elemento tiene 2 pulg de espesor.



Probs. 4-49/50

4-51. La barra rígida soporta la carga uniforme distribuida de 6 kip/pie. Determine la fuerza en cada cable si éstos tienen un área en su sección transversal de 0.05 pulg² y $E = 31(10^3)$ ksi.

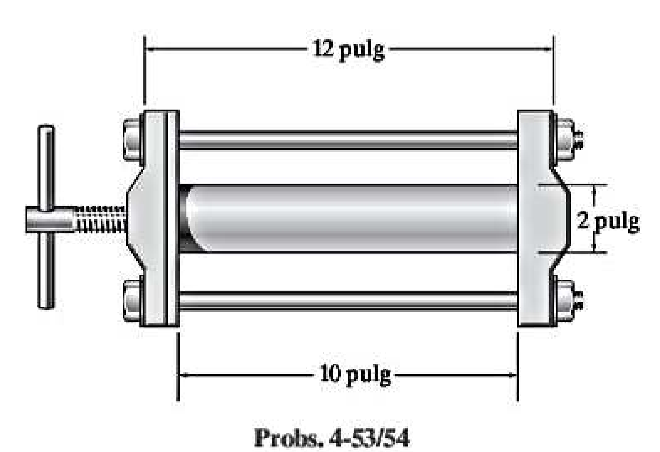
*4-52. La barra rígida se encuentra en un principio en posición horizontal y está soportada por dos cables con un área en su sección transversal de 0.05 pulg² y $E = 31(10^3)$ ksi. Determine la pequeña rotación que ocurre en la barra cuando se aplica la carga uniforme.



Probs. 4-51/52

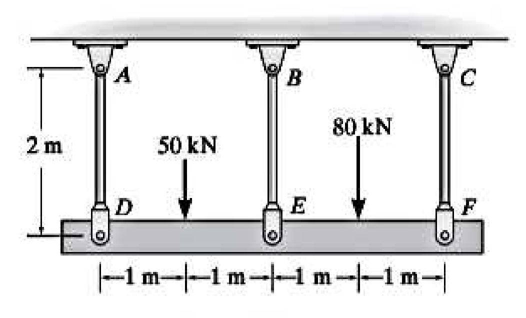
•4-53. La prensa consiste en dos cabezales rígidos que se mantienen unidos mediante dos barras de acero A-36 con un diámetro de $\frac{1}{2}$ pulg. Un cilindro sólido de aluminio A 6061-T6 se coloca en la prensa y el tornillo se ajusta de modo que la prensa sólo toque al cilindro. Si después de esto, el tornillo se aprieta media vuelta, determine el esfuerzo normal promedio en las barras y el cilindro. El tornillo es de rosca simple y tiene un paso de 0.01 pulg. *Nota*: El paso representa la distancia que avanza el tornillo a lo largo de su eje después de una vuelta completa.

4-54. La prensa consiste en dos cabezales rígidos que se mantienen unidos mediante dos barras de acero A-36 con un diámetro de $\frac{1}{2}$ pulg. Un cilindro sólido de aluminio 6061-T6 se coloca en la prensa y el tornillo se ajusta de modo que la prensa sólo toque al cilindro. Determine el ángulo que puede girar el tornillo antes de que las barras o el cilindro comiencen a ceder. El tornillo es de rosca simple y tiene un paso de 0.01 pulg. *Nota*: El paso representa la distancia que avanza el tornillo a lo largo de su eje después de una vuelta completa.



Probs. 4-53/54

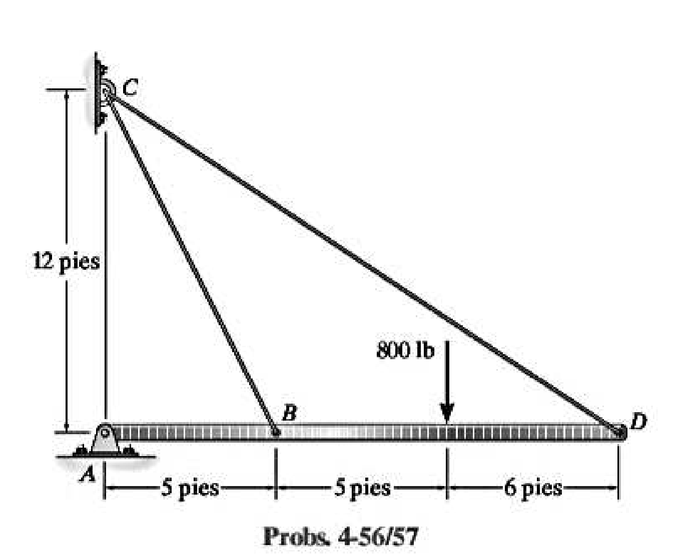
4-55. Las tres barras de suspensión están fabricadas de acero A-36 y tienen áreas iguales de 450 mm² en sus secciones transversales. Determine el esfuerzo normal promedio en cada barra si la viga rígida se somete a la carga mostrada en la figura.



Prob. 4-55

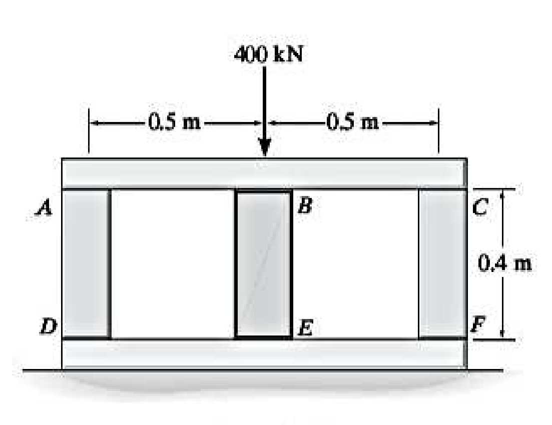
***4-56.** La barra rígida soporta una carga de 800 lb. Determine el esfuerzo normal en cada cable de acero A-36, si cada uno de ellos tiene un área de 0.04 pulg^2 en su sección transversal.

•4-57. La barra rígida está en un principio en posición horizontal y se sostiene mediante dos cables de acero A-36, cada uno con un área transversal de 0.04 pulg^2. Determine la rotación de la barra cuando se aplica la carga de 800 lb.



Probs. 4-56/57

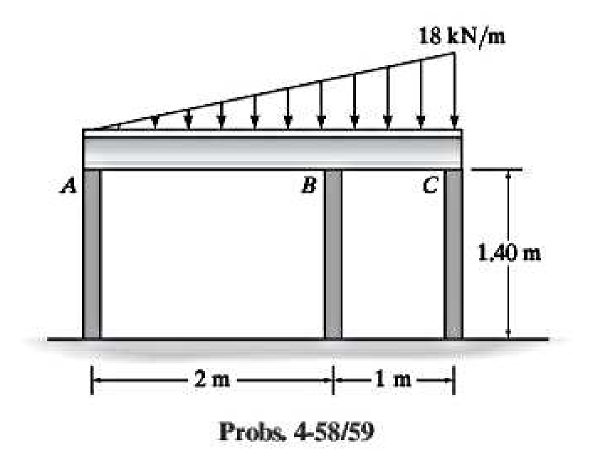
***4-60.** El ensamble consta de dos postes *AD* y *CF* hechos de acero A-36, con un área en su sección transversal de 1000 mm^2, y un poste *BE* de aluminio 2014-T6 con un área en su sección transversal de 1500 mm^2. Si se aplica una carga central de 400 kN sobre la tapa rígida, determine el esfuerzo normal en cada poste. Hay un pequeño espacio de 0.1 mm entre el poste *BE* y el elemento rígido *ABC*.



Prob. 4-60

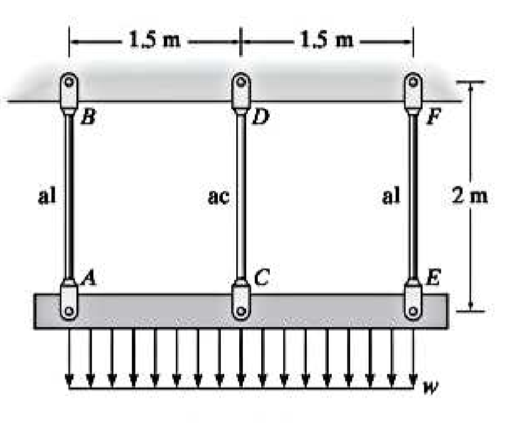
4-58. Se supone que la viga horizontal es rígida y soporta la carga distribuida que se muestra en la figura. Determine las reacciones verticales en los apoyos. Cada soporte se compone de un poste de madera con un diámetro de 120 mm y una longitud (original) sin carga de 1.40 m. Considere E_w = 12 GPa.

4-59. Se supone que la viga horizontal es rígida y soporta la carga distribuida que se muestra en la figura. Determine el ángulo de inclinación de la viga después de que se aplica la carga. Cada soporte se compone de un poste de madera con un diámetro de 120 mm y una longitud (original) sin carga de 1.40 m. Considere E_w = 12 GPa.



Probs. 4-58/59

•4-61. La carga distribuida está sostenida por las tres barras de suspensión. *AB* y *EF* son de aluminio y *CD* es de acero. Si cada barra tiene un área en su sección transversal de 450 mm^2, determine la intensidad máxima *w* de la carga distribuida de tal forma que no se exceda un esfuerzo permisible de $(\sigma_{perm})_{ac} = 180$ MPa en el acero y $(\sigma_{perm})_{al} = 94$ MPa en el aluminio. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa. Suponga que *ACE* es rígida.

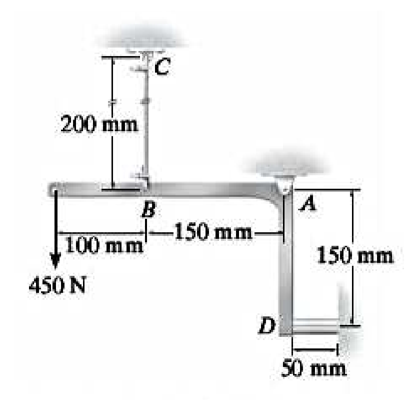


Prob. 4-61

4-62. El eslabón rígido se sostiene mediante un pasador en A, un alambre BC que tiene una longitud sin estirar de 200 mm y un área en su sección transversal de 22.5 mm^2, y un bloque corto de aluminio con una longitud descargada de 50 mm y una sección transversal de 40 mm^2. Si el eslabón se somete a la carga vertical mostrada en la figura, determine el esfuerzo normal promedio en el alambre y el bloque. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

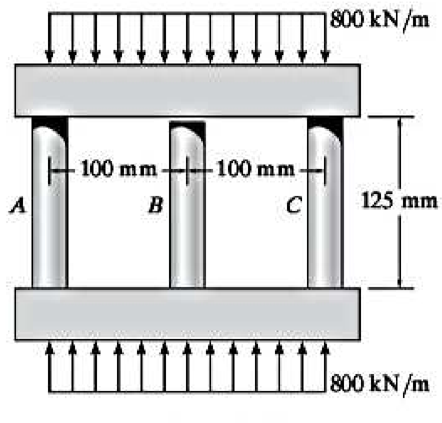
4-63. El eslabón rígido se sostiene mediante un pasador en A, un alambre BC de acero que tiene una longitud sin estirar de 200 mm y un área en su sección transversal de 22.5 mm^2, y un bloque corto de aluminio con una longitud descargada de 50 mm y una sección transversal de 40 mm^2. Si el eslabón se somete a la carga vertical mostrada, determine la rotación del eslabón alrededor del pasador A. Presente su respuesta en radianes. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

4



Probs. 4-62/63

***4-64.** El poste central B del ensamble mostrado tiene una longitud original de 124.7 mm, mientras que los postes A y C tienen una longitud de 125 mm. Si las tapas en la parte superior e inferior pueden considerarse rígidas, determine el esfuerzo normal promedio en cada poste. Los postes son de aluminio y tienen un área en su sección transversal de 400 mm^2. $E_{al} = 70$ GPa.



Prob. 4-64

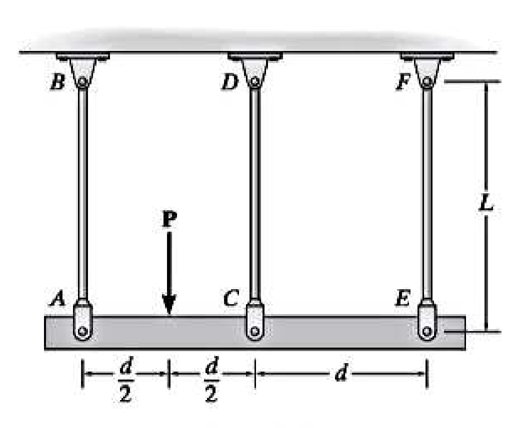
•4-65. El ensamble se compone de un perno de acero A-36 y un tubo de latón rojo C83400. Si la tuerca se enrosca y ajusta contra el tubo de manera que $L = 75$ mm, y después se enrosca un poco más hasta que avanza 0.02 mm sobre el perno, determine la fuerza en el perno y en el tubo. El perno tiene un diámetro de 7 mm y el tubo tiene un área en su sección transversal de 100 mm^2.

4-66. El ensamble se compone de un perno de acero A-36 y un tubo de latón rojo C83400. La tuerca se enrosca y ajusta contra el tubo de manera que $L = 75$ mm. Determine el avance adicional máximo de la tuerca sobre el perno de modo que ninguno de los materiales ceda. El perno tiene un diámetro de 7 mm y el tubo tiene un área en su sección transversal de 100 mm^2.



Probs. 4-65/66

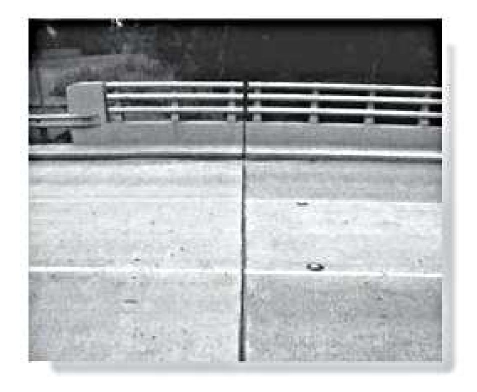
4-67. Las tres barras de suspensión están fabricadas del mismo material y tienen las mismas áreas A en sus secciones transversales. Determine el esfuerzo normal promedio en cada barra si la barra rígida ACE está sometida a la fuerza $\mathbf{P}$.



Prob. 4-67

4.6 Esfuerzo térmico

Un cambio en la temperatura puede causar que un cuerpo cambie sus dimensiones. Por lo general, si la temperatura aumenta, el cuerpo se expande, mientras que si la temperatura disminuye, éste se contraerá. De manera ordinaria, esta expansión o contracción se relaciona *linealmente* con el aumento o disminución que se produce en la temperatura. Si este es el caso, y el material es homogéneo e isotrópico, se ha comprobado experimentalmente que el desplazamiento de un elemento con una longitud L puede calcularse mediante la fórmula



La mayoría de los puentes vehiculares se diseñan con juntas de dilatación para permitir los movimientos térmicos de la carpeta y así evitar cualquier esfuerzo térmico.

$$\delta_T = \alpha \, \Delta T L \qquad (4\text{-}4)$$

donde

α = una propiedad del material, conocida como ***coeficiente lineal de expansión térmica***. Las unidades miden la deformación por cada grado de temperatura. Son: 1/°F (Fahrenheit) en el sistema FPS, y 1/°C (grados Celsius) o 1/°K (grados Kelvin) en el sistema SI. Los valores típicos se proporcionan en la página final de este libro (al reverso de la contraportada).

ΔT = el cambio algebraico en la temperatura del elemento

L = la longitud original del elemento

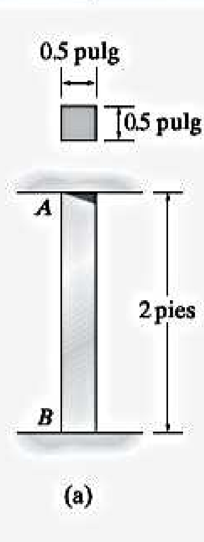
δ_T = el cambio algebraico en la longitud del elemento



Las largas extensiones de ductos y tuberías que transportan fluidos están sometidas a variaciones en el clima que ocasionan su expansión y contracción. Las juntas de expansión, como la mostrada en la fotografía, se emplean para mitigar el esfuerzo térmico en el material.

El cambio en la longitud de un elemento *estáticamente determinado* puede calcularse con facilidad mediante la ecuación 4-4, puesto que el elemento es libre de expandirse o contraerse cuando se somete a un cambio de temperatura. Sin embargo, en un elemento *estáticamente indeterminado*, estos desplazamientos térmicos se verán limitados por soportes, lo que produce ***esfuerzos térmicos*** que deben considerarse durante el diseño. Estos esfuerzos térmicos pueden determinarse mediante el uso de los métodos que se estudiaron en las secciones anteriores. En los siguientes ejemplos se ilustran algunas aplicaciones.

EJEMPLO 4.10



(a)

La barra de acero A-36 que se muestra en la figura 4-18*a* cabe justamente entre dos soportes fijos cuando $T_1 = 60°F$. Si la temperatura se eleva a $T_2 = 120°F$, determine el esfuerzo térmico normal promedio desarrollado en la barra.

SOLUCIÓN

Equilibrio. En la figura 4-18*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de la barra. Como no hay carga externa, la fuerza en *A* es igual pero opuesta a la fuerza en *B*, es decir,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_A = F_B = F$$

El problema es estáticamente indeterminado porque esta fuerza no puede determinarse a partir del equilibrio.



(b)

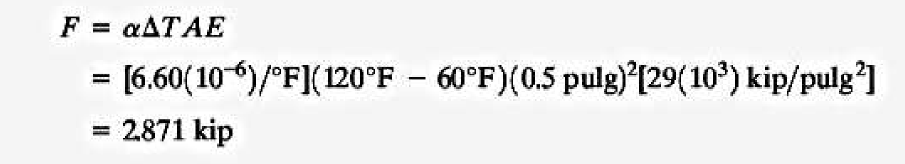
Compatibilidad. Como $\delta_{A/B} = 0$, el desplazamiento térmico δ_T que se produce en *A*, figura 4-18*c*, está contrarrestado por la fuerza **F** que se requiere para empujar la barra δ_F de regreso a su posición original. La condición de compatibilidad en *A* se convierte en

$$(+\uparrow) \qquad \delta_{A/B} = 0 = \delta_T - \delta_F$$

Al aplicar las relaciones térmica y de carga-desplazamiento, se tiene

$$0 = \alpha \Delta T L - \frac{FL}{AE}$$

Así, con base en los datos de la página final de este libro,

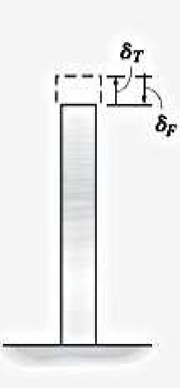


$$F = \alpha \Delta T A E$$
$$= [6.60(10^{-6})/°F](120°F - 60°F)(0.5 \text{ pulg})^2[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]$$
$$= 2.871 \text{ kip}$$

Como **F** también representa la fuerza axial interna dentro de la barra, el esfuerzo de compresión normal promedio es

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2.871 \text{ kip}}{(0.5 \text{ pulg})^2} = 11.5 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: A partir de la magnitud de **F**, resulta evidente que los cambios en la temperatura pueden causar grandes fuerzas de reacción en los elementos estáticamente indeterminados.

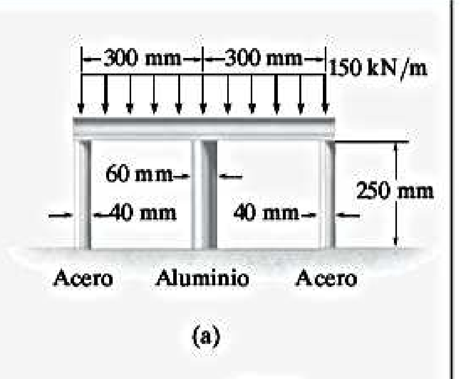


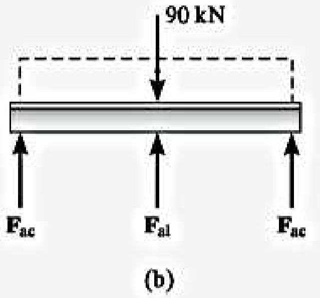
(c)

Figura 4-18

EJEMPLO 4.11

La viga rígida mostrada en la figura 4-19*a* se fija a la parte superior de los tres postes hechos de acero A-36 y aluminio 2014-T6. Cada poste tiene una longitud de 250 mm cuando no se aplica carga a la viga y la temperatura es $T_1 = 20°C$. Determine la fuerza que soporta cada poste si la barra se somete a una carga uniformemente distribuida de 150 kN/m, y la temperatura se eleva a $T_2 = 80°C$.





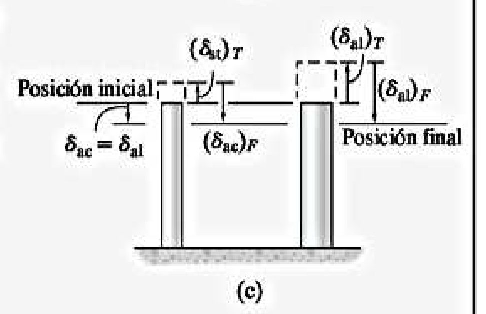


Figura 4-19

SOLUCIÓN

Equilibrio. En la figura 4-19*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga. El equilibrio del momento alrededor del centro de la viga requiere que las fuerzas en los postes de acero sean iguales. Al sumar fuerzas en el diagrama de cuerpo libre, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2F_{ac} + F_{al} - 90(10^3)\text{ N} = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidad. Debido a la carga, la geometría y la simetría del material, la parte superior de cada poste se desplaza en la misma extensión. Por lo tanto,

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{ac} = \delta_{al} \qquad (2)$$

La posición final de la parte superior de cada poste es igual a su desplazamiento causado por el aumento de la temperatura, más su desplazamiento causado por la fuerza axial interna de compresión, figura 4-19*c*. Así, para los postes de acero y el aluminio se tiene que

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{ac} = -(\delta_{ac})_T + (\delta_{ac})_F$$

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{ac} = -(\delta_{al})_T + (\delta_{ac})_F$$

Si se aplica la ecuación 2 resulta

$$-(\delta_{ac})_T + (\delta_{ac})_F = -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F$$

A partir de las ecuaciones 4-2 y 4-4, y de las propiedades del material en la página final de este libro, se obtiene

$$-[12(10^{-6})/°C](80°C - 20°C)(0.250\text{ m}) + \frac{F_{ac}(0.250\text{ m})}{\pi(0.020\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]}$$

$$= -[23(10^{-6})/°C](80°C - 20°C)(0.250\text{ m}) + \frac{F_{al}(0.250\text{ m})}{\pi(0.030\text{ m})^2[73.1(10^9)\text{ N/m}^2]}$$

$$F_{ac} = 1.216F_{al} - 165.9(10^3) \qquad (3)$$

Para ser *consistente*, todos los datos numéricos se han expresado en términos de newtons, metros y grados Celsius. Al resolver las ecuaciones 1 y 3 de manera simultánea resulta

$$F_{ac} = -16.4\text{ kN} \quad F_{al} = 123\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

El valor negativo para F_{ac} indica que esta fuerza actúa en sentido opuesto al que se muestra en la figura 4-19*b*. En otras palabras, los postes de acero están en tensión y el poste de aluminio está en compresión.

EJEMPLO 4.12



(a)

Un tubo de aluminio 2014-T6 con un área en su sección transversal de 600 mm² se utiliza como la manga de un perno de acero A-36, que tiene un área en su sección transversal de 400 mm², figura 4-20*a*. Cuando la temperatura es $T_1 = 15°C$, la tuerca mantiene al ensamble en una posición ajustada de tal manera que la fuerza axial en el perno es insignificante. Si la temperatura aumenta a $T_2 = 80°C$, determine la fuerza en el perno y la manga.

SOLUCIÓN

Equilibrio. En la figura 4-20*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de un segmento superior del ensamble. Las fuerzas F_b y F_s se producen porque la manga tiene un mayor coeficiente de expansión térmica que el perno, y por lo tanto el crecimiento de la manga será más grande cuando la temperatura aumenta. Se requiere que

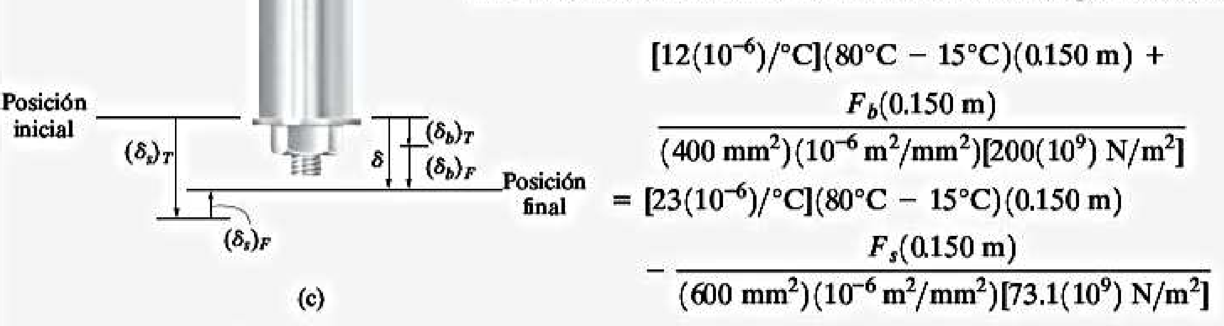
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_s = F_b \qquad (1)$$

(b)

Compatibilidad. El aumento en la temperatura hace que la manga y el perno se expandan $(\delta_s)_T$ y $(\delta_b)_T$, figura 4-20*c*. Sin embargo, las fuerzas redundantes F_b y F_s alargan el perno y acortan la manga. En consecuencia, el extremo del ensamble llega a una posición final, que no es igual a su posición inicial. Por lo tanto, la condición de compatibilidad se convierte en

$$(+\downarrow) \qquad \delta = (\delta_b)_T + (\delta_b)_F = (\delta_s)_T - (\delta_s)_F$$

Si se aplican las ecuaciones 4-2 y 4-4, y se usan las propiedades mecánicas de la tabla mostrada en el interior de la contraportada, se tiene



$$[12(10^{-6})/°C](80°C - 15°C)(0.150\text{ m}) + \frac{F_b(0.150\text{ m})}{(400\text{ mm}^2)(10^{-6}\text{ m}^2/\text{mm}^2)[200(10^9)\text{ N/m}^2]}$$
$$= [23(10^{-6})/°C](80°C - 15°C)(0.150\text{ m}) - \frac{F_s(0.150\text{ m})}{(600\text{ mm}^2)(10^{-6}\text{ m}^2/\text{mm}^2)[73.1(10^9)\text{ N/m}^2]}$$

(c)

Figura 4-20

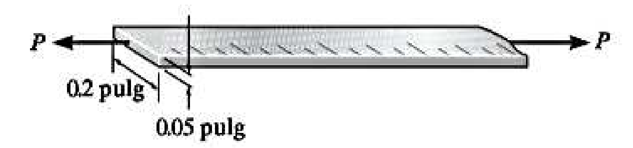
Si se usa la ecuación 1 y se resuelve resulta

$$F_s = F_b = 20.3\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Como en este análisis se supuso un comportamiento elástico lineal del material, el esfuerzo normal promedio debe ser revisado para asegurar que no exceda los límites proporcionales para el material.

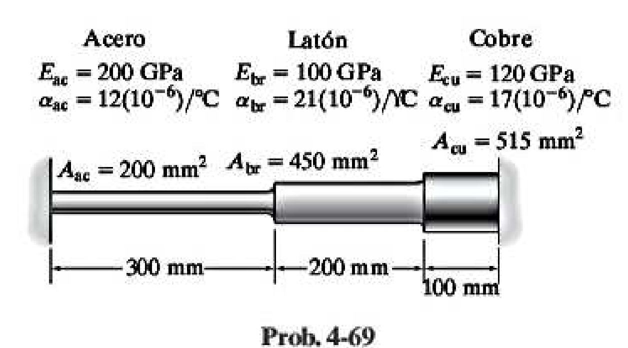
PROBLEMAS

*4-68. Una cinta de agrimensor fabricada de acero se utiliza para medir la longitud de una línea. La cinta tiene una sección transversal rectangular de 0.05 pulg por 0.2 pulg y una longitud de 100 pies cuando $T_1 = 60°F$ y la tensión o jalón sobre la cinta es de 20 lb. Determine la longitud real de la línea si la cinta muestra una lectura de 463.25 pies cuando se utiliza con un jalón de 35 lb a $T_2 = 90°F$. El piso sobre el que se coloca es plano. $\alpha_{ac} = 9.60\,(10^{-6})/°F$, $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi.



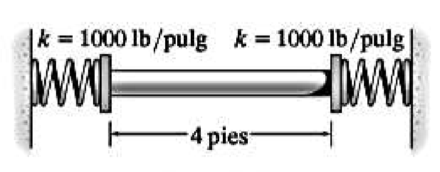
Prob. 4-68

•4-69. Tres barras, cada una fabricada con diferentes materiales, están conectadas entre sí y ubicadas entre dos paredes cuando la temperatura es $T_1 = 12°C$. Determine la fuerza ejercida sobre los soportes (rígidos) cuando la temperatura es $T_2 = 18°C$. Las propiedades del material y el área de la sección transversal de cada barra se muestran en la figura.



Prob. 4-69

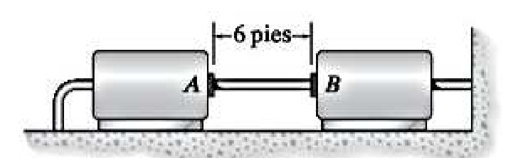
4-70. La barra está fabricada de acero A-36 y tiene un diámetro de 0.25 pulg. Si la barra tiene 4 pies de largo cuando los resortes se comprimen 0.5 pulg y la temperatura es $T = 40°F$, determine la fuerza en la barra cuando su temperatura es $T = 160°F$.



Prob. 4-70

4-71. Una tubería de vapor de 6 pies de largo está fabricada de acero A-36 con $\sigma_Y = 40$ ksi. Se conecta directamente a dos turbinas *A* y *B* como se muestra en la figura. La tubería tiene un diámetro exterior de 4 pulg y un espesor de pared de 0.25 pulg. La conexión se hizo a $T_1 = 70°F$. Si se supone que los puntos en que se conectan las turbinas son rígidos, determine la fuerza que ejerce la tubería en las turbinas cuando el vapor y, por consiguiente, la tubería alcanzan una temperatura de $T_2 = 275°F$.

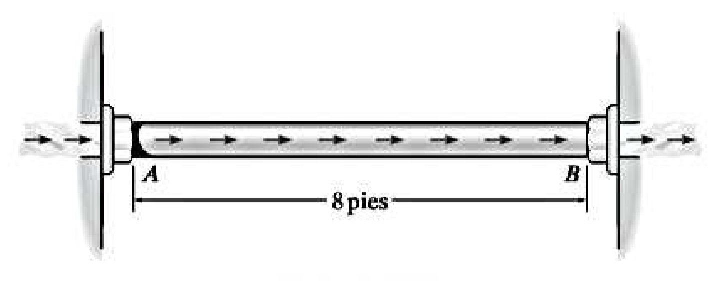
*4-72. Una tubería de vapor de 6 pies de largo está fabricada de acero A-36 con $\sigma_Y = 40$ ksi. Se conecta directamente a dos turbinas *A* y *B* como se muestra en la figura. La tubería tiene un diámetro exterior de 4 pulg y un espesor de pared de 0.25 pulg. La conexión se hizo a $T_1 = 70°F$. Si se supone que los puntos en que se conectan las turbinas tienen una rigidez de $k = 80(10^3)$ kip/pulg, determine la fuerza que ejerce la tubería en las turbinas cuando el vapor y, por consiguiente, la tubería alcanzan una temperatura de $T_2 = 275°F$.



Probs. 4-71/72

•4-73. El tubo está hecho de acero A-36 y se encuentra conectado con los collarines en *A* y *B*. Cuando la temperatura es de 60°F, no existe una carga axial en la tubería. Si el gas caliente que viaja a través de la tubería provoca que su temperatura aumente en $\Delta T = (40 + 15x)°F$, donde *x* se da en pies, determine el esfuerzo normal promedio en la tubería. El diámetro interno es de 2 pulg, el espesor de la pared es de 0.15 pulg.

4-74. El tubo de bronce C86100 tiene un radio interno de 0.5 pulg y un espesor de pared de 0.2 pulg. Si el gas que fluye a través del tubo cambia su temperatura de manera uniforme desde $T_A = 200°F$ en *A* hasta $T_B = 60°F$ en *B*, determine la fuerza axial que ejerce sobre las paredes. El tubo se instaló entre las paredes cuando $T = 60°F$.



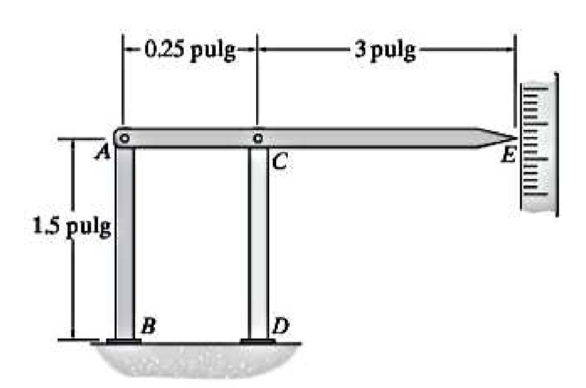
Probs. 4-73/74

4-75. Los rieles de acero A-36 con 40 pies de largo se colocan en una vía del tren con un pequeño espacio entre ellas para permitir la expansión térmica. Determine la diferencia necesaria δ para que los rieles sólo se toquen cuando la temperatura se incremente de $T_1 = -20°F$ a $T_2 = 90°F$. Usando este espaciamiento, ¿cuál sería la fuerza axial en los rieles si la temperatura se elevara hasta $T_3 = 110°F$? El área de la sección transversal de cada riel es de 5.10 pulg².



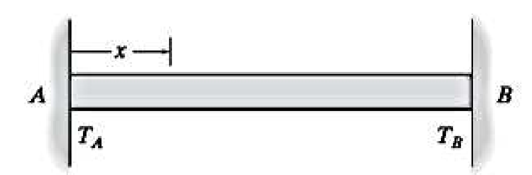
Prob. 4-75

•**4-76.** El dispositivo se utiliza para medir un cambio en la temperatura. Las barras *AB* y *CD* están fabricadas de acero A-36 y de una aleación de aluminio 2014-T6, respectivamente. Cuando la temperatura es de 75°F, *ACE* está en posición horizontal. Determine el desplazamiento vertical del puntero en *E* cuando la temperatura se eleva a 150°F.



Prob. 4-76

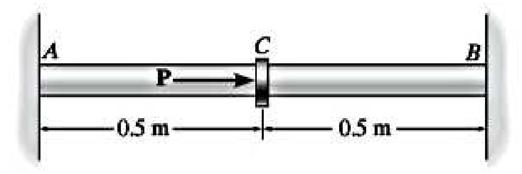
•**4-77.** La barra tiene un área *A* en su sección transversal, una longitud *L*, un módulo de elasticidad *E* y un coeficiente de expansión térmica α. La temperatura de la barra cambia de manera uniforme a lo largo de su longitud desde T_A en *A* hasta T_B en *B*, de manera que en cualquier punto *x* a lo largo de la barra $T = T_A + x(T_B - T_A)/L$. Determine la fuerza que ejerce la barra sobre las paredes rígidas. En un inicio no hay ninguna fuerza axial en la barra y ésta tiene una temperatura de T_A.



Prob. 4-77

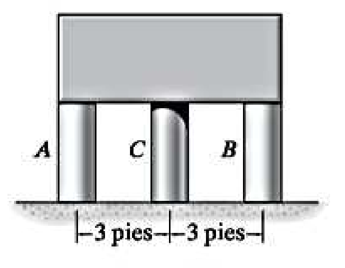
4-78. La barra de acero A-36 tiene un diámetro de 50 mm y se encuentra conectada de manera ligera a los soportes rígidos en *A* y *B* cuando $T_1 = 80°C$. Si la temperatura se convierte en $T_2 = 20°C$ y se aplica una fuerza axial de $P = 200$ kN en su centro, determine las reacciones en *A* y *B*.

4-79. La barra de acero A-36 tiene un diámetro de 50 mm y se encuentra conectada de manera ligera a los soportes rígidos en *A* y *B* cuando $T_1 = 50°C$. Determine la fuerza *P* que debe aplicarse al collarín en su punto medio a fin de que, cuando $T_2 = 30°C$, la reacción en *B* sea cero.



Probs. 4-78/79

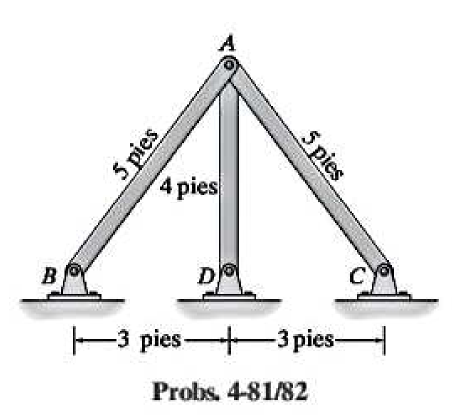
*__4-80.__ El bloque rígido tiene un peso de 80 kip y debe estar sostenido por los postes *A* y *B*, que están hechos de acero A-36, y por el poste *C*, que está hecho de latón rojo C83400. Si todos los postes tienen la misma longitud original antes de cargarse, determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en cada uno de ellos cuando la temperatura del poste *C* se incrementa en 20°F. Cada poste tiene un área de 8 pulg² en su sección transversal.



Prob. 4-80

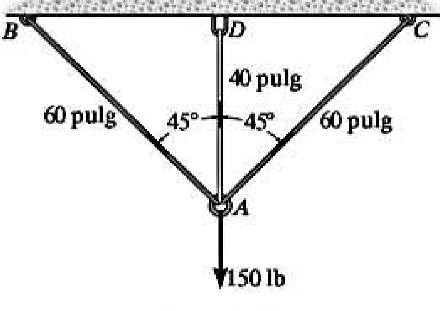
•**4-81.** Las tres barras están fabricadas de acero A-36 y forman una armadura conectada por pasadores. Si la armadura se construye cuando $T_1 = 50°F$, determine la fuerza en cada barra cuando $T_2 = 110°F$. Cada barra tiene un área en su sección transversal de 2 pulg².

4-82. Las tres barras están fabricadas de acero A-36 y forman una armadura conectada por pasadores. Si la armadura se construye cuando $T_1 = 50°F$, determine el desplazamiento vertical de la junta *A* cuando $T_2 = 150°F$. Cada barra tiene un área transversal de 2 pulg².



Probs. 4-81/82

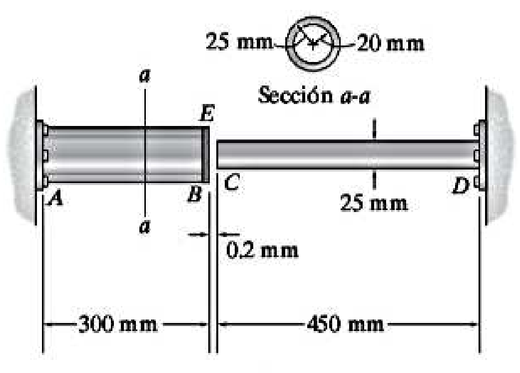
4-83. Los alambres *AB* y *AC* son de acero, y el alambre *AD* es de cobre. Antes de aplicar la fuerza de 150 lb, *AB* y *AC* tienen cada uno una longitud de 60 pulg y *AD* de 40 pulg. Si la temperatura se incrementa en 80°F, determine la fuerza en cada alambre necesaria para soportar la carga. Considere $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $E_{cu} = 17(10^3)$ ksi, $\alpha_{ac} = 8(10^{-6})/°F$, $\alpha_{cu} = 9.60(10^{-6})/°F$. Cada alambre tiene un área en su sección transversal de 0.0123 pulg².



Prob. 4-83

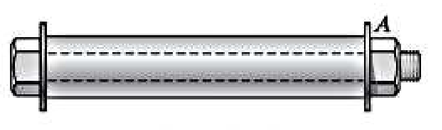
*__4-84.__ El tubo *AB* fabricado de una aleación de magnesio AM1004-T61 está cubierto con una placa rígida *E*. El espacio entre *E* y el extremo *C* de la barra circular sólida *CD*, fabricada de una aleación de aluminio 6061-T6, es de 0.2 mm cuando se tiene una temperatura de 30°C. Determine el esfuerzo normal desarrollado en el tubo y la barra si la temperatura sube a 80°C. No tome en cuenta el espesor de la tapa rígida.

•**4-85.** El tubo *AB* fabricado de una aleación de magnesio AM1004-T61 está cubierto con una placa rígida *E*. El espaciamiento entre *E* y el extremo *C* de la barra circular sólida *CD*, fabricada de una aleación de aluminio 6061-T6, es de 0.2 mm cuando se tiene una temperatura de 30°C. Determine la temperatura más alta que se puede alcanzar sin causar la cedencia, ya sea en el tubo o la barra. No tome en cuenta el espesor de la tapa rígida.



Probs. 4-84/85

4-86. El perno de acero tiene un diámetro de 7 mm y se ajusta a través de una manga de aluminio como se muestra en la figura. La manga tiene un diámetro interno de 8 mm y un diámetro externo de 10 mm. La tuerca en *A* se ajusta de modo que tan sólo se presiona contra la manga. Si el ensamble está en un principio a una temperatura de $T_1 = 20°C$ y luego se calienta a una temperatura de $T_2 = 100°C$, determine el esfuerzo normal en el perno y la manga. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa, $\alpha_{ac} = 14(10^{-6})/°C$, $\alpha_{al} = 23(10^{-6})/°C$.



Prob. 4-86

4.7 Concentraciones de esfuerzo

Esta hoja de sierra tiene ranuras que fueron cortadas con el fin de aliviar tanto la tensión dinámica que se desarrolla en su interior mientras gira, como el esfuerzo térmico que se desarrolla a medida que se calienta. Observe los pequeños círculos al final de cada ranura; sirven para reducir las concentraciones de esfuerzo que se desarrollan al final de cada ranura.

En la sección 4.1, se señaló que al aplicar una fuerza axial sobre un elemento, se crea una compleja distribución de esfuerzos dentro de la región localizada del punto donde se aplica la carga. Las complejas distribuciones de esfuerzo no sólo surgen justo debajo de la carga concentrada, también pueden emerger en los segmentos donde el área de la sección transversal del elemento cambia. Por ejemplo, considere la barra de la figura 4-21*a*, la cual se somete a una fuerza axial P. Aquí las líneas que en un principio eran horizontales y verticales se desvían en un patrón irregular alrededor del orificio ubicado en el centro de la barra. El esfuerzo normal máximo en la barra se produce en la sección *a-a*, que se toma a través de la sección transversal con el área *más pequeña* de la barra. Siempre que el material se comporte de forma elástico lineal, la distribución de esfuerzos que actúan sobre esta sección puede determinarse a partir de un análisis matemático, usando la teoría de la elasticidad, o experimentalmente mediante la medición de la deformación normal en la sección *a-a* para después calcular el esfuerzo con la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Sin importar el método utilizado, la forma general de la distribución de esfuerzos será como se muestra en la figura 4-21*b*. De manera similar, si la barra tiene una reducción en su sección transversal, lograda con filetes como en la figura 4-22*a*, entonces de nuevo el esfuerzo máximo normal en la barra tendrá lugar en la sección con área *más pequeña*, la sección *a-a*, y la distribución del esfuerzo se verá como se muestra en la figura 4-22*b*.

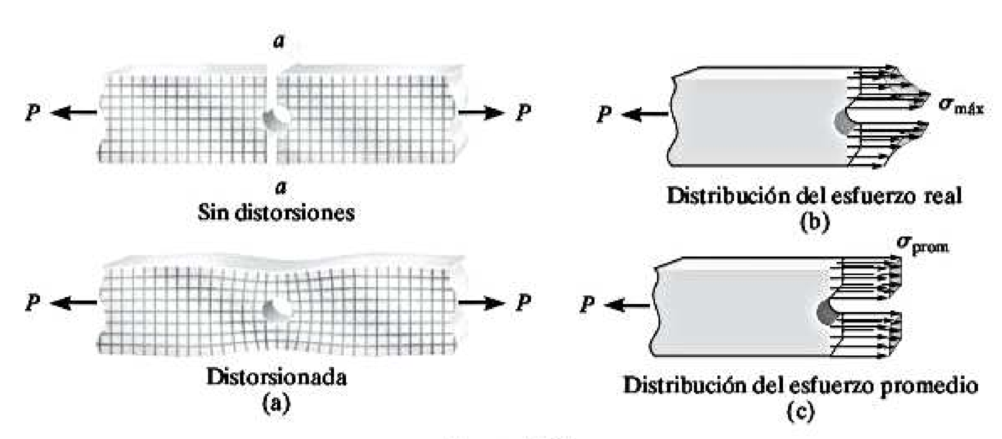


Figura 4-21

En ambos casos, la *fuerza de equilibrio* requiere que la magnitud de la *fuerza resultante* desarrollada por la distribución de esfuerzos sea igual a P. En otras palabras,

$$P = \int_A \sigma \, dA \qquad (4\text{-}5)$$

Esta integral representa *gráficamente* el *volumen* total bajo cada uno de los diagramas de distribución de esfuerzo que se muestran en la figura 4-21*b* o 4-22*b*. La resultante **P** debe actuar a través del *centroide* de cada *volumen.*



En las esquinas afiladas de la maquinaria pesada suelen surgir concentraciones de esfuerzo. Los ingenieros pueden mitigar este efecto mediante el uso de refuerzos soldados a las esquinas.

En la práctica de la ingeniería, las distribuciones de esfuerzo reales en la figura 4-21*b* y 4-22*b* *no* tienen que determinarse. En su lugar, sólo es necesario conocer el *esfuerzo máximo* en las secciones, y de esta manera el elemento se diseña para resistir dicho esfuerzo, cuando se aplica la carga axial **P**. Los valores específicos de este esfuerzo normal máximo pueden determinarse mediante métodos experimentales o técnicas matemáticas avanzadas utilizando la teoría de la elasticidad. Los resultados de estas investigaciones se encuentran publicadas en forma gráfica utilizando un ***factor de concentración del esfuerzo*** K. Se define a K como una relación entre el esfuerzo máximo y el esfuerzo normal promedio que actúa en la sección transversal; es decir,

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{prom}}} \qquad (4\text{-}6)$$

Siempre que K se conozca y que el esfuerzo normal haya sido calculado a partir de $\sigma_{\text{prom}} = P/A$, donde A es el área *más pequeña* de la sección transversal, figuras 4-21*c* y 4-22*c*, el esfuerzo normal máximo en la sección transversal será una $\sigma_{\text{máx}} = K(P/A)$.

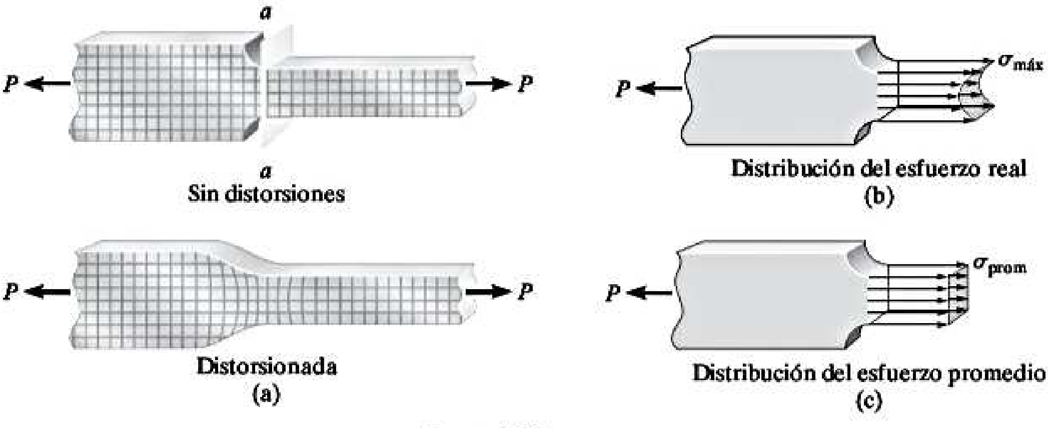


Figura 4-22

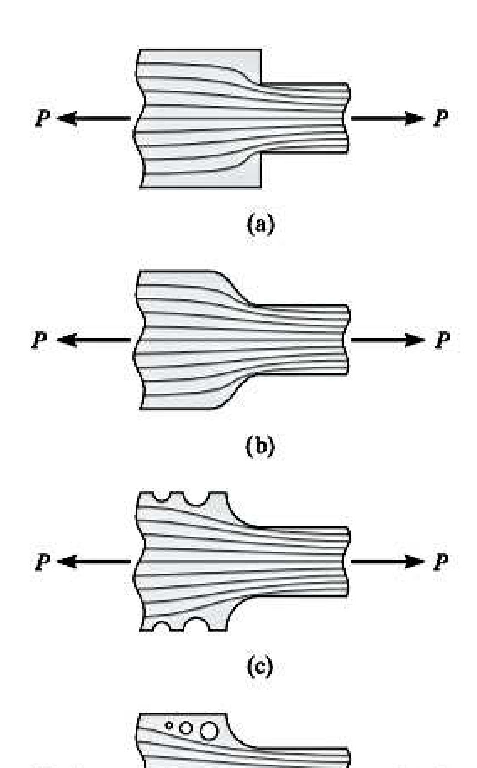


Figura 4-23

4

Los valores específicos de K se reportan por lo general en los manuales relacionados con el análisis de esfuerzo.* En las figuras 4-24 y 4-25 se dan ejemplos de esto. Tenga en cuenta que K es independiente de las propiedades del material de la barra; *sólo depende* de la *geometría* de la barra y del tipo de discontinuidad. A medida que el tamaño r de la discontinuidad se *reduce*, la concentración de esfuerzos es mayor. Por ejemplo, si una barra requiere un cambio en su sección transversal, se ha determinado que un ángulo agudo, figura 4-23*a*, produce un factor de concentración mayor a 3. En otras palabras, el esfuerzo normal máximo será tres veces mayor que el esfuerzo normal promedio en la sección transversal más pequeña. Sin embargo, esto se puede reducir hasta, digamos, 1.5 mediante la introducción de un filete, figura 4-23*b*. Es posible lograr una nueva reducción por medio de pequeñas ranuras u orificios colocados en la transición, figura 4-23*c* y 4 23*d*. En todos estos casos los diseños ayudan a reducir la rigidez del material que rodea a las esquinas, de modo que tanto el esfuerzo como la deformación se reparten de mejor manera en la barra.

Los factores de concentración del esfuerzo dados en las figuras 4-24 y 4-25 se determinaron con base en una carga estática, bajo el supuesto de que el esfuerzo en el material no supera el límite proporcional. Si el material es *muy frágil*, el límite proporcional puede estar en el esfuerzo de fractura, por lo que para este material, la falla se inicia *en* el punto de concentración de esfuerzos. En esencia, una grieta empieza a formarse en este punto, y en el *extremo* de dicha grieta se desarrollará una mayor concentración de esfuerzos. Esto, a su vez, provoca que la grieta se propague por la sección transversal, lo que resulta en una fractura súbita. Por esta razón, cuando se emplean materiales frágiles, es muy importante la utilización de factores de concentración de esfuerzos en el diseño. Por otra parte, si el material es dúctil y se somete a una carga estática, a menudo no es necesario utilizar factores de concentración de esfuerzos, ya que cualquier esfuerzo que exceda el límite proporcional no dará lugar a una grieta. En cambio, el material tendrá una resistencia de reserva debida a la cedencia y al endurecimiento por deformación. En la siguiente sección se analizarán los efectos ocasionados por este fenómeno.

Las concentraciones de esfuerzos también son responsables de muchas fallas de los elementos estructurales o elementos mecánicos sometidos a *cargas de fatiga*. Para estos casos, una concentración de esfuerzo provocará que el material se agriete si el esfuerzo excede el límite de resistencia a la fatiga, ya sea que el material sea dúctil o frágil. Aquí, el material *ubicado* en la punta de la grieta permanece en un *estado frágil*, por lo que la grieta sigue creciendo, dando lugar a una fractura progresiva. En consecuencia, es necesario buscar maneras de limitar la cantidad de daño que puede ser causado por la fatiga.

*Vea Lipson, C. y R. C. Juvinall, *Handbook of Stress and Strength*, Macmillan.

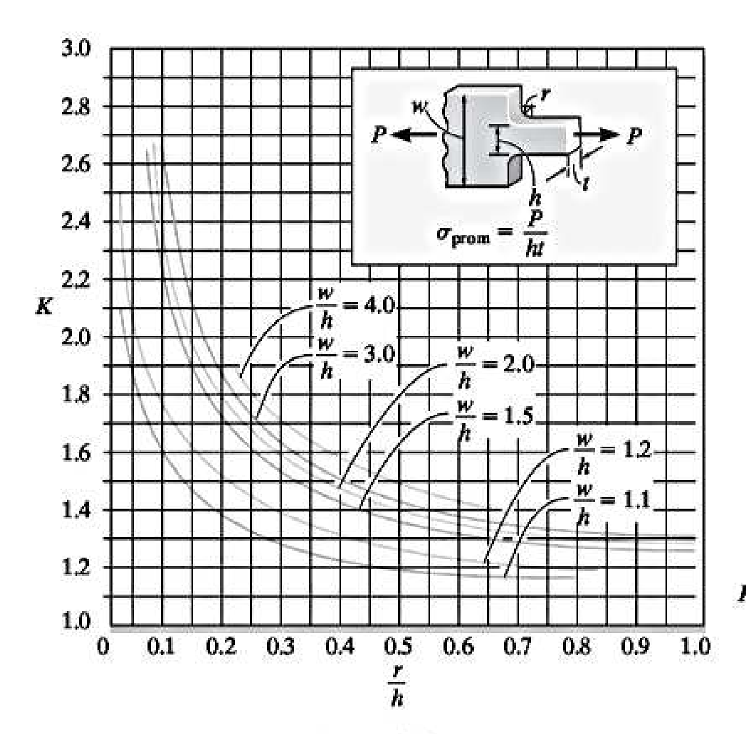


Figura 4-24

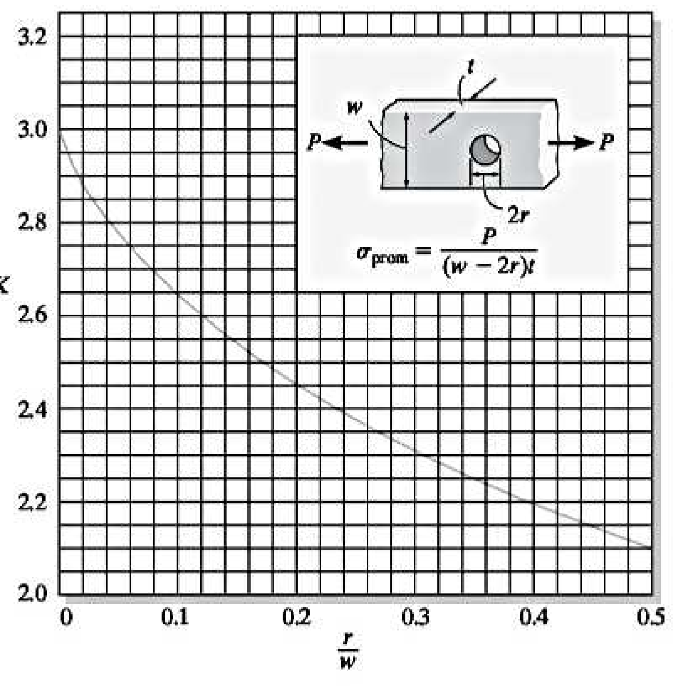
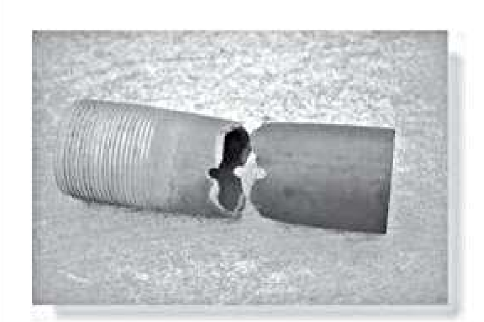


Figura 4-25

4

Puntos importantes

- Las *concentraciones de esfuerzo* se producen en los segmentos donde el área de la sección transversal cambia de manera súbita. Cuanto más grande es el cambio, mayor será la concentración de esfuerzos.
- Para el diseño o el análisis, sólo es necesario determinar el esfuerzo máximo que actúa sobre la sección transversal con el área más pequeña. Para esto se emplea un *factor de concentración del esfuerzo*, *K*, que se ha determinado mediante experimentación y es sólo una función de la geometría de la probeta.
- Normalmente, en una probeta dúctil que se somete a una carga estática, *no* es necesario considerar la concentración de esfuerzos durante el diseño; sin embargo, si el material es *frágil*, o está sometido a cargas de *fatiga*, entonces las concentraciones de esfuerzo se vuelven importantes.



La falla de esta tubería de acero sometida a tensión se produjo en su sección transversal con el área más pequeña, que es a través del orificio. Observe cómo el material cedió alrededor de la superficie fracturada.

*4.8 Deformación axial inelástica

Hasta este punto hemos considerado sólo las cargas que hacen que el material de un elemento se comporte elásticamente. Sin embargo, en ocasiones un elemento puede diseñarse de modo que la carga haga que el material ceda y por consiguiente se deforme de manera permanente. Con frecuencia, estos elementos están hechos de un metal muy dúctil como el acero recocido de bajo carbono, el cual tiene un diagrama de esfuerzo-deformación similar al de la figura 3-6 y por simplicidad puede *modelarse* como se muestra en la figura 4-26*b*. Un material que presenta este comportamiento se denomina ***elástico perfectamente plástico*** o ***elastoplástico***.

Para ilustrar físicamente cómo se comporta un material de este tipo, considere la barra mostrada en la figura 4-26*a*, que se encuentra sometida a la carga axial **P**. Si la carga provoca el desarrollo de un *esfuerzo elástico* $\sigma = \sigma_1$ en la barra, entonces al aplicar la ecuación 4-5, el *equilibrio* requiere $P = \int \sigma_1\, dA = \sigma_1 A$. Por otra parte, el esfuerzo σ_1 hace que la barra se deforme una cantidad ϵ_1 como lo indica el diagrama de esfuerzo-deformación de la figura 4-26*b*. Si P se incrementa ahora hasta P_p de tal manera que provoca la cedencia del material, es decir, $\sigma = \sigma_Y$, entonces, de nuevo $P_p = \int \sigma_Y dA = \sigma_Y A$. La carga P_p se denomina *carga plástica*, ya que representa la carga máxima que puede soportar un material elastoplástico. Para este caso, las deformaciones *no* se definen de manera *única*. Por el contrario, en el instante que se alcanza σ_Y, la barra se somete *primero* a la deformación de cedencia ϵ_Y, figura 4-26*b*, después ésta *continúa cediendo* (o alargándose) de forma que se generan las deformaciones ϵ_2, luego ϵ_3, etcétera. Como nuestro "modelo" de material presenta un comportamiento perfectamente plástico, esta elongación continuará de manera indefinida sin que aumente la carga. Sin embargo, en realidad el material comienza a endurecerse después de cierta cedencia, de modo que la resistencia adicional obtenida *detiene* cualquier deformación posterior. Como resultado, los diseños basados en este comportamiento serán seguros, ya que el endurecimiento por deformación proporciona el potencial para que el material pueda soportar una carga *adicional* si esto es necesario.

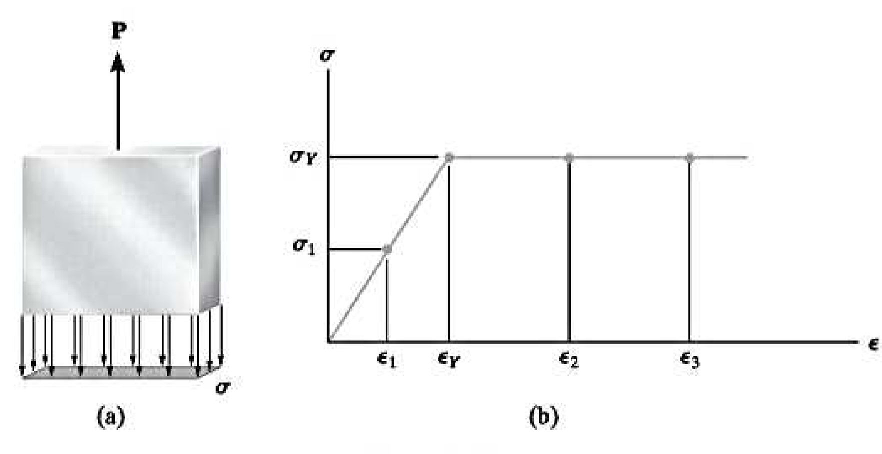


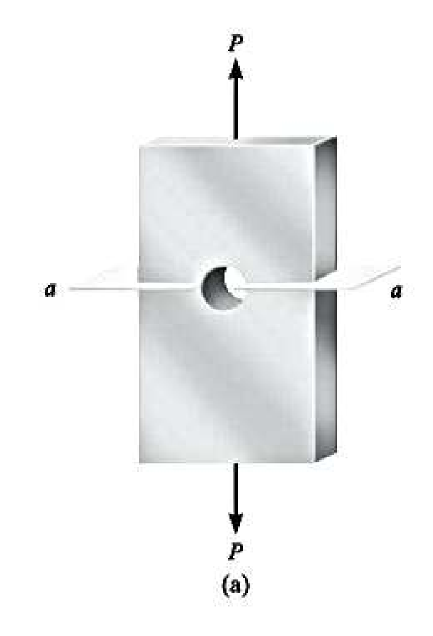
Figura 4-26

Considere ahora el caso de una barra atravesada por un orificio, como se muestra en la figura 4-27*a*. A medida que la magnitud de **P** se incrementa, se produce una concentración de esfuerzos en el material al borde del orificio, en la sección *a-a*. Aquí, el esfuerzo alcanzará un valor máximo de, digamos, $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1$ y ocurrirá una *deformación elástica* correspondiente de ϵ_1, figura 4-27*b*. Los esfuerzos y las deformaciones correspondientes en otros puntos de la sección transversal serán menores, como lo indica la distribución de esfuerzos mostrada en la figura 4-27*c*. El equilibrio requiere $P = \int \sigma\, dA$. En otras palabras, P es geométricamente equivalente al "volumen" contenido dentro de la distribución de esfuerzos. Si ahora la carga se aumenta a P', de modo que $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y$, entonces el material comenzará a ceder hacia fuera desde el orificio, hasta que se satisfaga la condición de equilibrio $P' = \int \sigma\, dA$, figura 4-27*d*. Como se muestra en la figura, esto produce una distribución de esfuerzos que tiene un "volumen" geométricamente *mayor* que el mostrado en la figura 4-27*c*. Un mayor aumento en la carga hará que en algún momento el material ceda en *toda su sección transversal*. Cuando esto sucede, la barra ya *no* puede soportar *cargas más grandes*. Esta *carga plástica* P_p se muestra en la figura 4-27*e*. A partir de la condición de equilibrio, es posible calcular

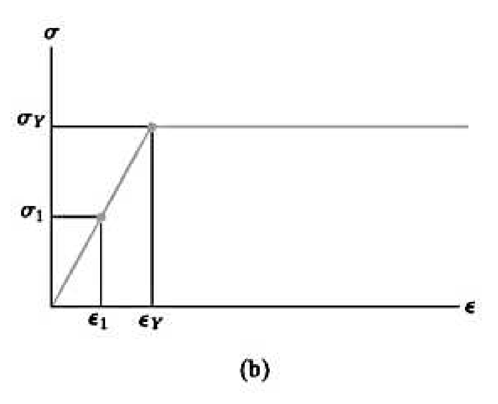
$$P_p = \int_A \sigma_Y\, dA = \sigma_Y A$$

donde A es el área de la sección transversal de la barra en la sección *a-a*.

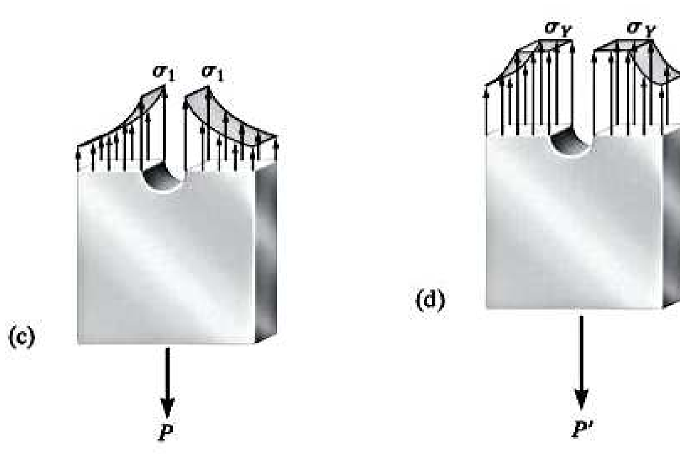
Los siguientes ejemplos ilustran de manera numérica cómo se aplican estos conceptos en otros tipos de problemas para los cuales el material tiene un comportamiento elastoplástico.



(a)

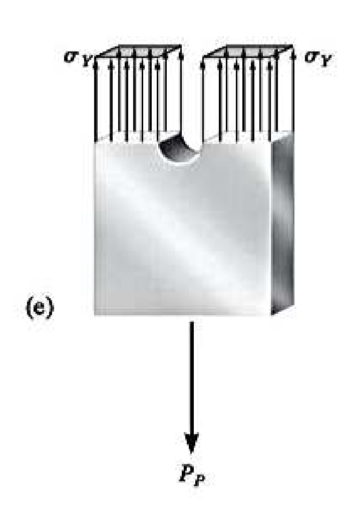


(b)



(c)

(d)



(e)


Figura 4-27

*4.9 Esfuerzo residual

Si un elemento o grupo de elementos cargados axialmente forman un sistema estáticamente indeterminado que puede soportar cargas de tensión y compresión, entonces las cargas externas excesivas, que causan la cedencia del material, crearán *esfuerzos residuales* en los elementos cuando se retiren las cargas. La razón de esto tiene que ver con la recuperación elástica del material que se produce durante la descarga. Para demostrar lo anterior, considere un elemento prismático fabricado con un material elastoplástico, que tiene el diagrama de esfuerzo-deformación mostrado en la figura 4-28. Si una carga axial produce un esfuerzo σ_Y en el material plástico y una deformación correspondiente ϵ_C, entonces cuando se *retire* la carga, el material responderá elásticamente y seguirá la línea CD a fin de recuperar parte de la deformación plástica. Una recuperación hasta el esfuerzo nulo en el punto O' será posible sólo si el elemento es estáticamente determinado, ya que las reacciones de apoyo para el elemento deben ser cero cuando se retire la carga. En estas circunstancias el elemento se alterará de manera permanente, por lo que la deformación permanente en el elemento será $\epsilon_{O'}$.

Sin embargo, si el elemento es *estáticamente indeterminado*, la eliminación de la carga externa hará que las fuerzas de apoyo respondan a la recuperación elástica de CD. Como estas fuerzas restringirán la recuperación completa del elemento, inducirán ***esfuerzos residuales*** en el mismo. Para resolver un problema de este tipo, el ciclo completo de carga y descarga del elemento puede considerarse como la *superposición* de una carga positiva (carga) con una carga negativa (descarga). La carga, de O a C, resulta en una distribución plástica del esfuerzo, mientras que la descarga, a lo largo de CD, sólo da lugar a una distribución elástica del esfuerzo. La superposición requiere que las cargas se cancelen; sin embargo, las distribuciones de esfuerzo no se cancelan y por ende se conservan los esfuerzos residuales.

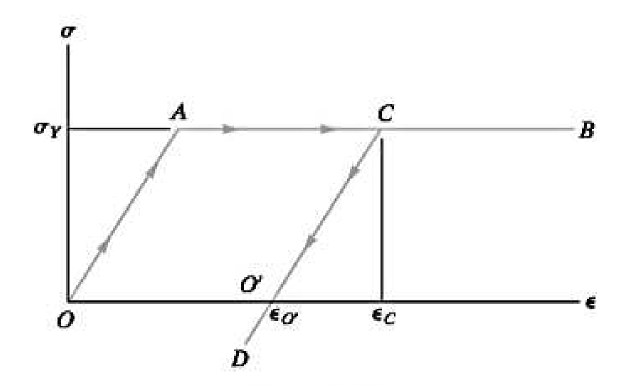


Figura 4-28

EJEMPLO 4.13

La barra de la figura 4-29*a* está fabricada de un acero que se supone es elástico perfectamente plástico, con $\sigma_Y = 250$ MPa. Determine (a) el valor máximo de la carga P que puede ser aplicada sin que el acero presente cedencia y (b) el valor máximo de P que la barra puede soportar. Dibuje la distribución del esfuerzo en la sección crítica para cada caso.

SOLUCIÓN

Parte (a). Cuando el material tiene un comportamiento elástico, debemos usar un factor de concentración del esfuerzo determinado a partir de la figura 4-24 que es único para la geometría de la barra. Aquí

$$\frac{r}{h} = \frac{4\text{ mm}}{(40\text{ mm} - 8\text{ mm})} = 0.125$$

$$\frac{w}{h} = \frac{40\text{ mm}}{(40\text{ mm} - 8\text{ mm})} = 1.25$$

40 mm
4 mm
P
P
4 mm
2 mm

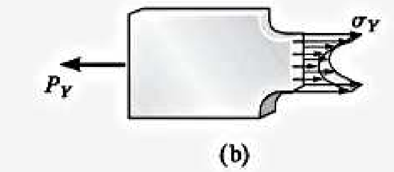
(a)

A partir de la figura $K \approx 1.75$. La carga máxima, sin causar cedencia, se produce cuando $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y$. El esfuerzo normal promedio es $\sigma_{\text{prom}} = P/A$. Usando la ecuación 4-6, se tiene

$$\sigma_{\text{máx}} = K\sigma_{\text{prom}}; \qquad \sigma_Y = K\left(\frac{P_Y}{A}\right)$$

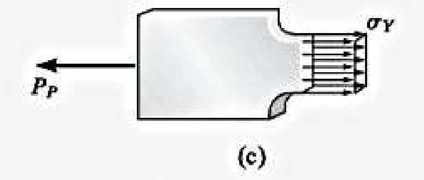
$$250(10^6)\text{ Pa} = 1.75\left[\frac{P_Y}{(0.002\text{ m})(0.032\text{ m})}\right]$$

$$P_Y = 9.14\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Esta carga se ha calculado utilizando la sección transversal *más pequeña*. En la figura 4-29*b* se muestra la distribución del esfuerzo resultante. Para el equilibrio, el "volumen" contenido dentro de esta distribución debe ser igual a 9.14 kN.



(c)

Figura 4-29

Parte (b). La carga máxima sostenida por la barra hará que *todo el material* ceda en la sección transversal más pequeña. Por lo tanto, como P se incrementa hasta la *carga plástica* P_p, ésta cambia gradualmente la distribución elástica del esfuerzo desde el estado que se muestra en la figura 4-29*b* hasta el estado plástico de la figura 4-29*c*. Se requiere

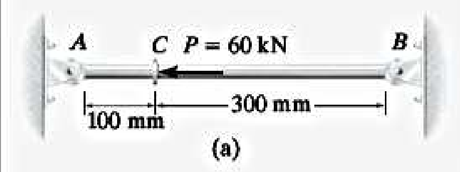
$$\sigma_Y = \frac{P_p}{A}$$

$$250(10^6)\text{ Pa} = \frac{P_p}{(0.002\text{ m})(0.032\text{ m})}$$

$$P_p = 16.0\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Aquí P_p es igual al "volumen" contenido en la distribución de esfuerzos, que en este caso es $P_p = \sigma_Y A$.

EJEMPLO 4.14



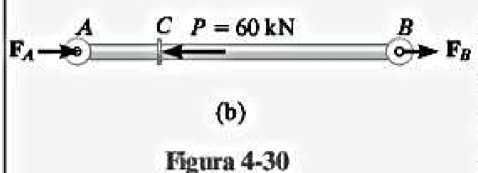


Figura 4-30

La barra mostrada en la figura 4-30*a* tiene un radio de 5 mm y está fabricada de un material elástico perfectamente plástico para el cual $\sigma_Y = 420$ MPa, $E = 70$ GPa, figura 4-30*c*. Si se aplica una fuerza de $P = 60$ kN sobre la barra y luego se retira, determine el esfuerzo residual en la barra.

SOLUCIÓN

En la figura 4-30*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de la barra. La aplicación de la carga **P** ocasionará una de tres posibilidades; éstas son: ambos segmentos AC y CB permanecen elásticos, AC es plástico y CB es elástico o ambos segmentos AC y CB son plásticos.*

Un *análisis elástico*, similar al realizado en la sección 4.4, resultará en $F_A = 45$ kN y $F_B = 15$ kN en los soportes. Sin embargo, de aquí se obtiene un esfuerzo de

$$\sigma_{AC} = \frac{45 \text{ kN}}{\pi(0.005 \text{ m})^2} = 573 \text{ MPa (compresión)} > \sigma_Y = 420 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{15 \text{ kN}}{\pi(0.005 \text{ m})^2} = 191 \text{ MPa (tensión)}$$

Como el material del segmento AC cederá, se supondrá que AC se convierte en plástico, mientras que CB sigue siendo elástico.

Para este caso, la fuerza máxima que puede desarrollarse en AC es

$$(F_A)_Y = \sigma_Y A = 420(10^3) \text{ kN/m}^2[\pi(0.005 \text{ m})^2] = 33.0 \text{ kN}$$

y a partir del equilibrio de la barra, figura 4-31*b*,

$$F_B = 60 \text{ kN} - 33.0 \text{ kN} = 27.0 \text{ kN}$$

Por lo tanto, el esfuerzo en cada segmento de la barra es

$$\sigma_{AC} = \sigma_Y = 420 \text{ MPa (compresión)}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{27.0 \text{ kN}}{\pi(0.005 \text{ m})^2} = 344 \text{ MPa (tensión)} < 420 \text{ MPa} \quad \text{(OK)}$$

*La posibilidad de que CB se vuelva plástico antes de que lo haga AC no ocurrirá porque cuando el punto C se mueve, la *deformación* en AC (que es un segmento más corto) siempre será mayor que la deformación en CB.

4

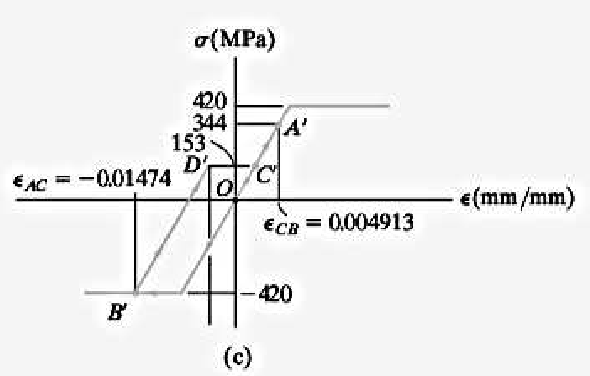
EJEMPLO 4.14 (cont.)

Esfuerzo residual. Para poder obtener el esfuerzo residual, también es necesario conocer la deformación debida a la carga en cada segmento. Como *CB* responde elásticamente,

$$\delta_C = \frac{F_B L_{CB}}{AE} = \frac{(27.0 \text{ kN})(0.300 \text{ m})}{\pi(0.005 \text{ m})^2[70(10^6) \text{ kN/m}^2]} = 0.001474 \text{ m}$$

$$\epsilon_{CB} = \frac{\delta_C}{L_{CB}} = \frac{0.001474 \text{ m}}{0.300 \text{ m}} = +0.004913$$

$$\epsilon_{AC} = \frac{\delta_C}{L_{AC}} = -\frac{0.001474 \text{ m}}{0.100 \text{ m}} = -0.01474$$



(c)

Figura 4-30 (cont.)

Aquí la deformación de cedencia es

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{420(10^6) \text{ N/m}^2}{70(10^9) \text{ N/m}^2} = 0.006$$

Por lo tanto, cuando *se aplica* **P**, el comportamiento esfuerzo-deformación para el material en el segmento *CB* se mueve desde *O* hasta *A*′, figura 4-30*c*, y el comportamiento esfuerzo-deformación para el material en el segmento *AC* se mueve desde *O* hasta *B*′. Si la carga **P** se aplica en *sentido inverso*, es decir, si se retira la carga, entonces se produce una respuesta elástica y debe aplicarse una fuerza inversa de $F_A = 45$ kN y $F_B = 15$ kN a cada segmento. De acuerdo con lo calculado anteriormente, estas fuerzas producen ahora esfuerzos $\sigma_{AC} = 573$ MPa (en tensión) y $\sigma_{CB} = 191$ MPa (en compresión), y por ende el esfuerzo residual en cada elemento es

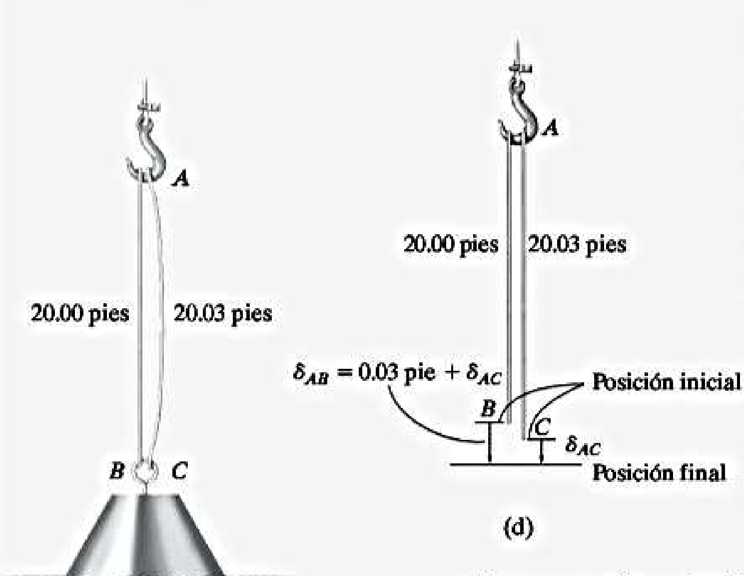
$$(\sigma_{AC})_r = -420 \text{ MPa} + 573 \text{ MPa} = 153 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$(\sigma_{CB})_r = 344 \text{ MPa} - 191 \text{ MPa} = 153 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Como era de esperarse, este esfuerzo residual es *el mismo* para ambos segmentos. También observe en la figura 4-30*c* que el comportamiento esfuerzo-deformación para el segmento *AC* se mueve desde *B*′ hasta *D*′, mientras que para el segmento *CB* lo hace desde *A*′ hasta *C*′ cuando se retira la carga.

4

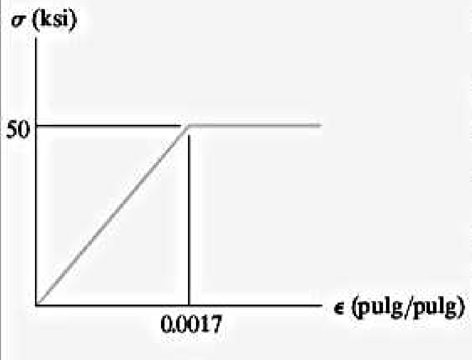
EJEMPLO 4.15



Dos alambres de acero se utilizan para levantar el peso de 3 kip, figura 4-31*a*. La longitud sin estirar del alambre *AB* es de 20.00 pies y la del alambre *AC* es de 20.03 pies. Si cada alambre tiene un área en su sección transversal de 0.05 pulg² y el acero puede considerarse elástico perfectamente plástico como se muestra en la gráfica σ-ϵ de la figura 4-31*b*, determine la fuerza en cada alambre así como su elongación.

SOLUCIÓN

Una vez que el peso está soportado por ambos alambres, entonces el esfuerzo en los alambres depende de la deformación correspondiente. Existen tres posibilidades, a saber, las deformaciones en ambos alambres son elásticas, el alambre *AB* se deforma de manera plástica mientras que el alambre *AC* lo hace de manera elástica, o ambos alambres se deforman de manera plástica. Se supondrá que *AC* permanece *elástico* y que *AB* se deforma plásticamente.





La investigación del diagrama de cuerpo libre del peso suspendido, figura 4-31*c*, indica que el problema es estáticamente indeterminado. La ecuación de equilibrio es

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_{AB} + T_{AC} - 3\text{ kip} = 0 \qquad (1)$$

Como *AB* se vuelve plásticamente deformado entonces debe soportar su carga máxima.

$$T_{AB} = \sigma_Y A_{AB} = 50\text{ ksi }(0.05\text{ pulg}^2) = 2.50\text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación 1,

$$T_{AC} = 0.500\text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

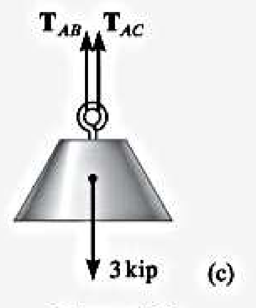


Figura 4-31

Observe que, como se supuso, el alambre *AC* permanece elástico ya que el esfuerzo en el alambre es $\sigma_{AC} = 0.500\text{ kip}/0.05\text{ pulg}^2 = 10\text{ ksi} < 50\text{ ksi}$. La deformación elástica correspondiente se determina mediante proporción, figura 4-31*b*; es decir,

$$\frac{\epsilon_{AC}}{10\text{ ksi}} = \frac{0.0017}{50\text{ ksi}}$$

$$\epsilon_{AC} = 0.000340$$

Así, la elongación de *AC* es

$$\delta_{AC} = (0.000340)(20.03\text{ pies}) = 0.00681\text{ pie} \qquad \textit{Resp.}$$

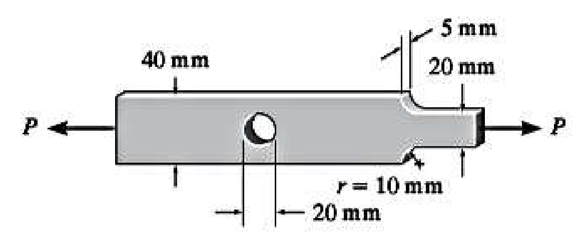
Y a partir de la figura 4-31*d*, la elongación de *AB* es

$$\delta_{AB} = 0.03\text{ pie} + 0.00681\text{ pie} = 0.0368\text{ pie} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

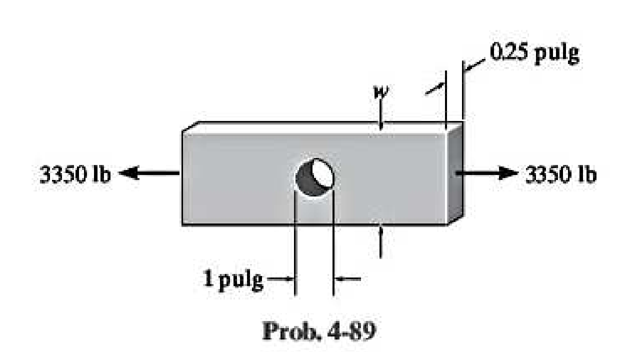
4-87. Determine el esfuerzo normal máximo desarrollado en la barra cuando está sometida a una tensión de $P = 8$ kN.

***4-88.** Si el esfuerzo normal permisible para la barra es $\sigma_{perm} = 120$ MPa, determine la máxima fuerza axial P que puede aplicarse a la barra.



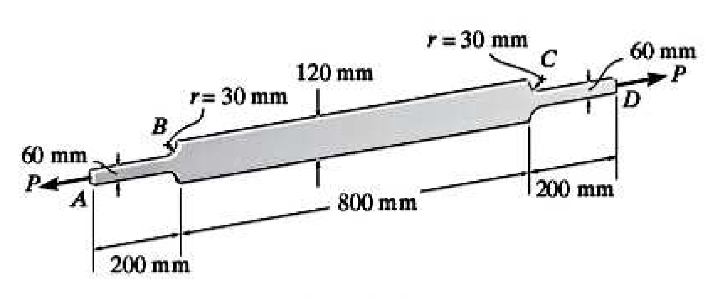
Probs. 4-87/88

•**4-89.** El elemento debe hacerse a partir de una placa de acero con 0.25 pulg de espesor. Si se perfora un orificio de 1 pulg a través de su centro, determine el ancho w aproximado de la placa para que pueda soportar una fuerza axial de 3350 lb. El esfuerzo permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi.



Prob. 4-89

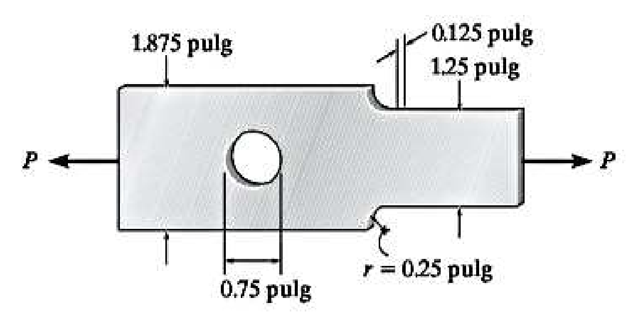
4-90. La placa de acero A-36 tiene un espesor de 12 mm. Si hay filetes en B y C, y $\sigma_{perm} = 150$ MPa, determine la máxima carga axial P que puede soportar. Calcule su elongación sin tomar en cuenta el efecto de los filetes.



Prob. 4-90

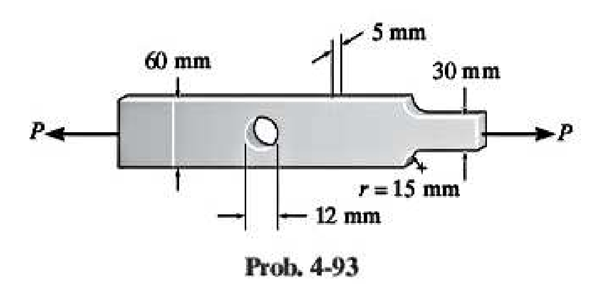
4-91. Determine la máxima fuerza axial P que se puede aplicar a la barra, la cual está fabricada de acero y tiene un esfuerzo permisible de $\sigma_{perm} = 21$ ksi.

***4-92.** Determine el esfuerzo normal máximo desarrollado en la barra cuando se somete a una tensión de $P = 2$ kip.



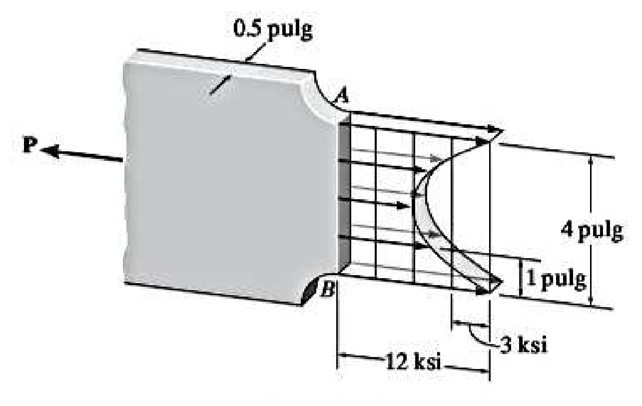
Probs. 4-91/92

•**4-93.** Determine el esfuerzo normal máximo desarrollado en la barra cuando está sometida a una tensión de $P = 8$ kN.



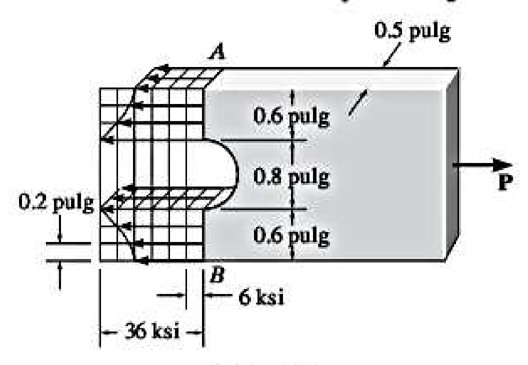
Prob. 4-93

4-94. En la figura se muestra la distribución del esfuerzo resultante a lo largo de la sección AB de la barra. Con base en esta distribución, determine de manera aproximada la fuerza axial resultante P aplicada a la barra. Además, ¿cuál es el factor de concentración del esfuerzo para esta geometría?



Prob. 4-94

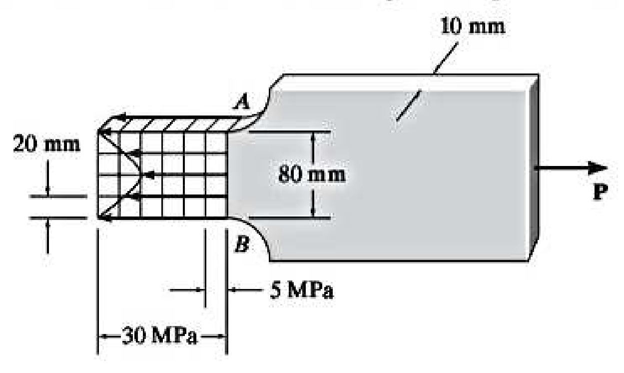
4-95. En la figura se muestra la distribución del esfuerzo resultante a lo largo de la sección AB de la barra. A partir de esta distribución, determine aproximadamente la fuerza axial resultante P aplicada a la barra. Además, ¿cuál es el factor de concentración del esfuerzo para esta geometría?



Prob. 4-95

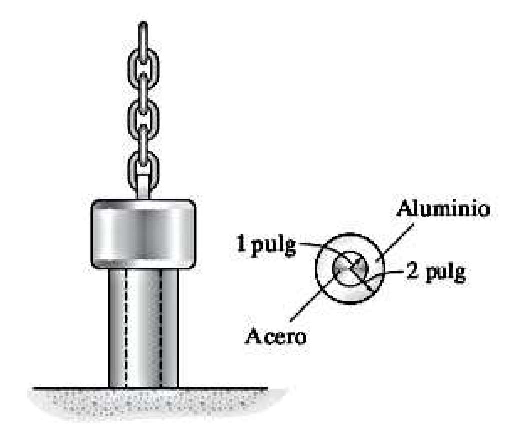
4

***4-96.** En la figura se muestra la distribución del esfuerzo resultante a lo largo de la sección AB de la barra. A partir de esta distribución, determine aproximadamente la fuerza axial resultante P aplicada a la barra. Además, ¿cuál es el factor de concentración del esfuerzo para esta geometría?



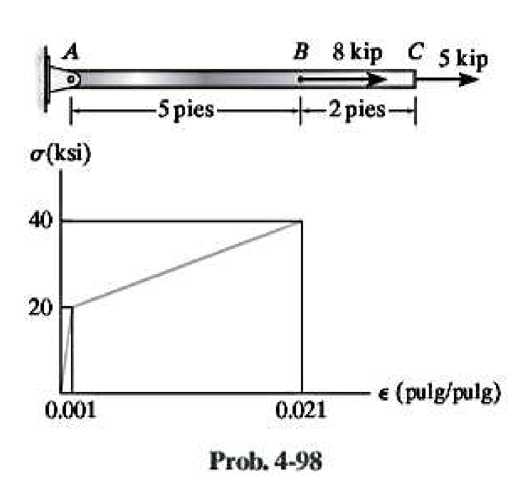
Prob. 4-96

•**4-97.** El peso de 300 kip se coloca lentamente sobre la parte superior de un poste fabricado de aluminio 2014-T6 con un núcleo de acero A-36. Si ambos materiales pueden considerarse elásticos perfectamente plásticos, determine el esfuerzo en cada material.



Prob. 4-97

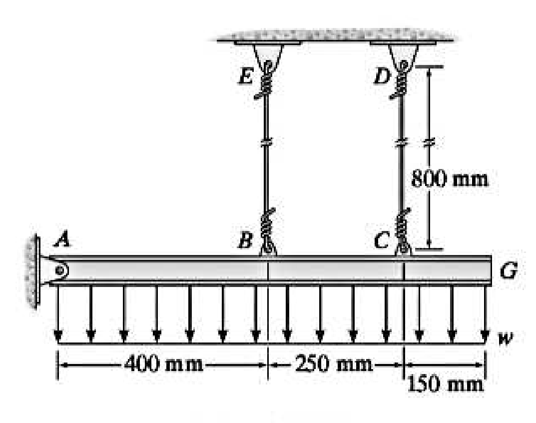
4-98. La barra tiene un área en su sección transversal de 0.5 pulg^2 y está fabricada de un material cuyo diagrama de esfuerzo-deformación puede aproximarse mediante los dos segmentos de línea mostrados en la figura. Determine la elongación de la barra debido a la carga.



Prob. 4-98

4-99. La barra rígida se sostiene mediante un pasador en A y dos alambres de acero, cada uno con un diámetro de 4 mm. Si el esfuerzo de cedencia para los alambres es $\sigma_Y = 530$ MPa y $E_{ac} = 200$ GPa, determine la intensidad de la carga distribuida w que puede colocarse sobre la viga y que causará que el alambre EB comience a ceder. ¿Cuál es el desplazamiento del punto G en este caso? Para el cálculo, suponga que el acero es elástico perfectamente plástico.

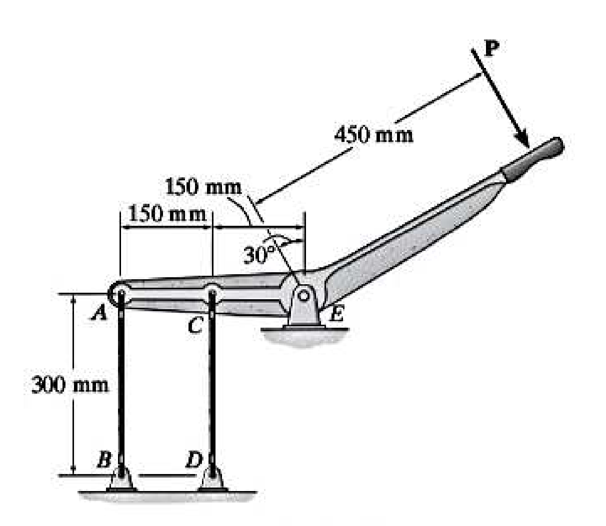
***4-100.** La barra rígida se sostiene mediante un pasador en A y dos alambres de acero, cada uno con un diámetro de 4 mm. Si el esfuerzo de cedencia para los alambres es $\sigma_Y = 530$ MPa y $E_{ac} = 200$ GPa, determine (a) la intensidad de la carga distribuida w que puede colocarse sobre la viga y que hará que sólo uno de los alambres comience a ceder y (b) la menor intensidad de la carga distribuida que hará que ambos alambres cedan. Para el cálculo, suponga que el acero es elástico perfectamente plástico.



Probs. 4-99/100

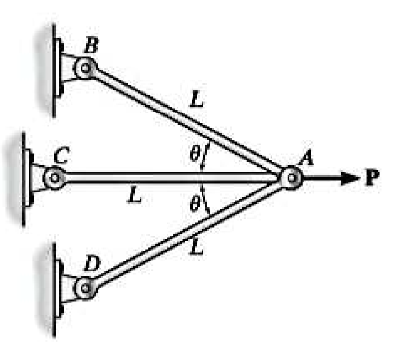
•**4-101.** La palanca rígida se sostiene mediante dos alambres de acero A-36 que tienen el mismo diámetro de 4 mm. Si se aplica una fuerza de $P = 3$ kN sobre el mango, determine la fuerza desarrollada en los dos alambres y sus elongaciones correspondientes. Considere que el acero A-36 es un material elástico perfectamente plástico.

4-102. La palanca rígida se sostiene mediante dos alambres de acero A-36 que tienen el mismo diámetro de 4 mm. Determine la fuerza **P** más pequeña que causará (a) que sólo uno de los alambres ceda, (b) que ambos alambres cedan. Considere que el acero A-36 es un material elástico perfectamente plástico.



Probs. 4-101/102

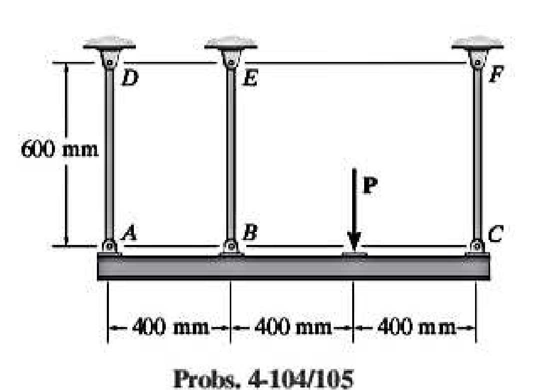
4-103. Las tres barras se articulan entre sí y se someten a la carga **P**. Si cada barra tiene un área A en su sección transversal, tiene una longitud L y está fabricada de un material elástico perfectamente plástico con un esfuerzo de cedencia σ_Y, determine la máxima carga (carga última) que puede ser soportada por las barras, es decir, la carga P que hace que todas las barras cedan. Además, ¿cuál es el desplazamiento horizontal del punto A cuando la carga alcanza su valor último? El módulo de elasticidad es E.



Prob. 4-103

*__4-104.__ La viga rígida se sostiene mediante las tres barras de acero A-36 con un diámetro de 25 mm. Si la viga soporta la fuerza de $P = 230$ kN, determine la fuerza desarrollada en cada barra. Considere que el acero es un material elástico perfectamente plástico.

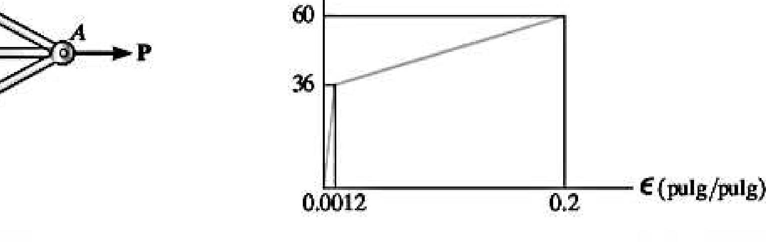
•**4-105.** La viga rígida se sostiene mediante las tres barras de acero A-36 con un diámetro de 25 mm. Si la fuerza de $P = 230$ kN se aplica sobre la viga y después se retira, determine los esfuerzos residuales en cada barra. Considere que el acero es un material elástico perfectamente plástico.

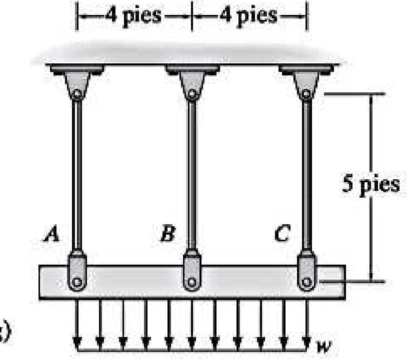


Probs. 4-104/105

4-106. La carga distribuida se aplica sobre una viga rígida que está sostenida por tres barras. Cada barra tiene un área en su sección transversal de 1.25 pulg^2 y está fabricada de un material cuyo diagrama esfuerzo-deformación puede aproximarse mediante los dos segmentos de línea mostrados en la figura. Si se aplica sobre la viga una carga de $w = 25$ kip/pie, determine el esfuerzo en cada barra y el desplazamiento vertical de la viga.

4-107. La carga distribuida se aplica sobre una viga rígida que está sostenida por tres barras. Cada barra tiene un área en su sección transversal de 0.75 pulg^2 y está fabricada de un material cuyo diagrama esfuerzo-deformación puede aproximarse mediante los dos segmentos de línea mostrados en la figura. Determine la intensidad de la carga distribuida w que es necesario aplicar para que la viga se desplace 1.5 pulg hacia abajo.

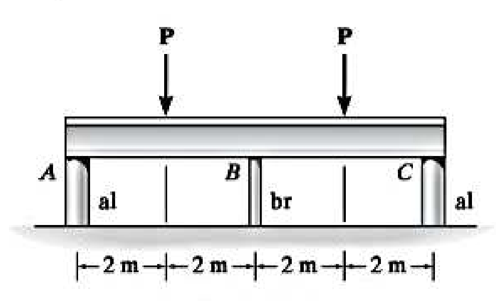




Probs. 4-106/107

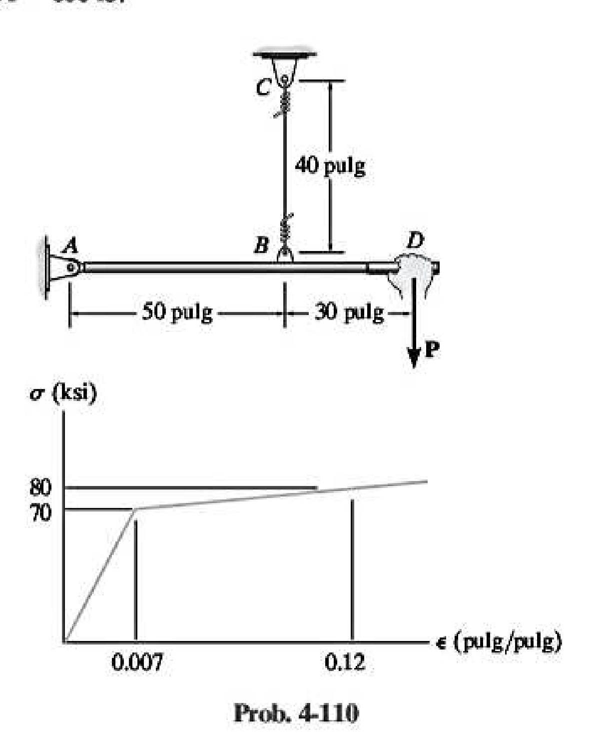
***4-108.** La viga rígida se sostiene sobre los tres postes A, B y C que tienen la misma longitud. Los postes A y C tienen un diámetro de 75 mm y están hechos de aluminio, para el cual $E_{al} = 70$ GPa y $(\sigma_Y)_{al} = 20$ MPa. El poste B tiene un diámetro de 20 mm y es de latón, para el cual $E_{br} = 100$ GPa y $(\sigma_Y)_{br} = 590$ MPa. Determine la menor magnitud de **P** de tal manera que (a) sólo las varillas A y C cedan y (b) todos los postes cedan.

•4-109. La viga rígida se sostiene sobre los tres postes A, B y C. Los postes A y C tienen un diámetro de 60 mm y están hechos de aluminio, para el cual $E_{al} = 70$ GPa y $(\sigma_Y)_{al} = 20$ MPa. El poste B es de latón, para el cual $E_{br} = 100$ GPa y $(\sigma_Y)_{br} = 590$ MPa. Si $P = 130$ kN, determine el mayor diámetro del poste B de modo que todos los postes cedan al mismo tiempo.



Probs. 4-108/109

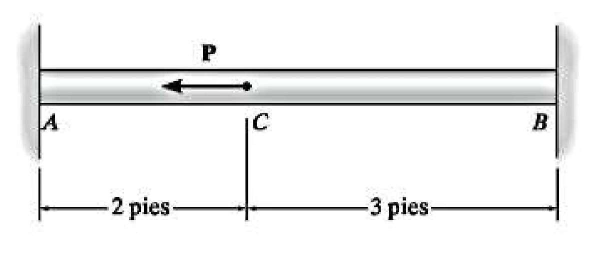
4-110. El alambre BC tiene un diámetro de 0.125 pulg y su material tiene las características de esfuerzo-deformación mostradas en la figura. Determine el desplazamiento vertical del mango en D si el tirón en la empuñadura se aumenta lentamente y alcanza una magnitud de (a) $P = 450$ lb, (b) $P = 600$ lb.

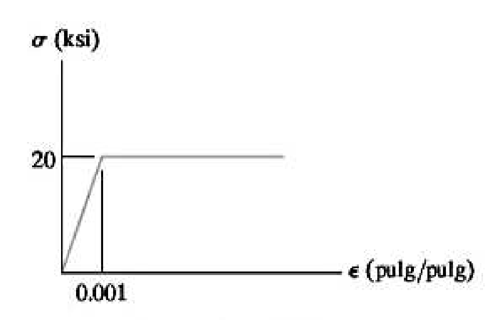


Prob. 4-110

4-111. La barra con un diámetro de 2 pulg está conectada fijamente en sus extremos y soporta la carga axial **P**. Si el material es elástico perfectamente plástico como se muestra en el diagrama de esfuerzo-deformación, determine la menor carga P necesaria para ocasionar que el segmento CB ceda. Si esta carga se retira, determine el desplazamiento permanente del punto C.

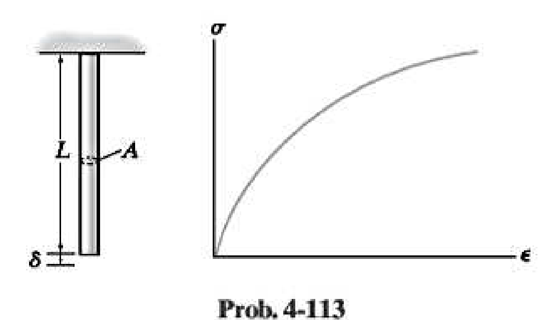
***4-112.** Determine la elongación de la barra en el problema 4-111 cuando se retiran tanto la carga **P** como los soportes.





Probs. 4-111/112

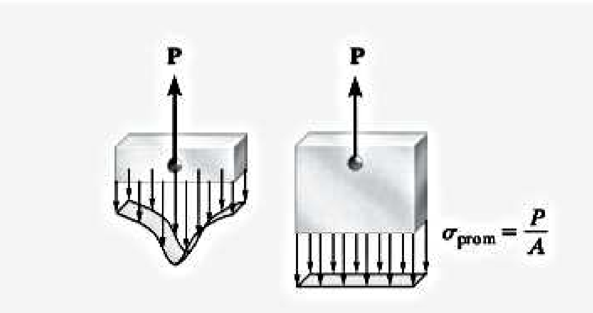
•4-113. Un material tiene un diagrama de esfuerzo-deformación que puede describirse mediante la curva $\sigma = c\epsilon^{1/2}$. Determine la deflexión δ del extremo de una barra fabricada de este material si tiene una longitud L, un área A en su sección transversal, y un peso específico γ.



Prob. 4-113

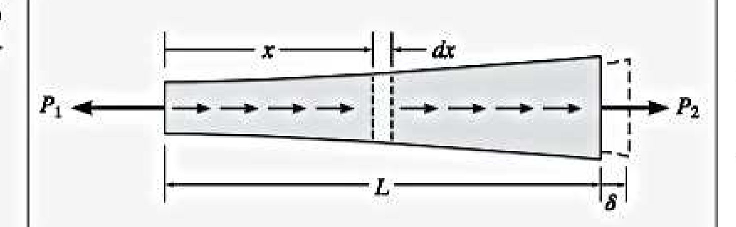
REPASO DE CAPÍTULO

Cuando una carga se aplica sobre un punto de un cuerpo, ésta tiende a crear una distribución de esfuerzos dentro del cuerpo, la cual es más uniforme en regiones alejadas del punto de aplicación de la carga. Esto se llama principio de Saint-Venant.



El desplazamiento relativo de un extremo de un elemento cargado axialmente en relación con el otro extremo se determina a partir de

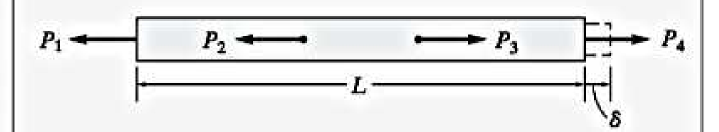
$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{AE}$$



Si una serie de fuerzas axiales externas concentradas se aplica sobre un elemento y AE es constante para el elemento, entonces,

$$\delta = \Sigma \frac{PL}{AE}$$

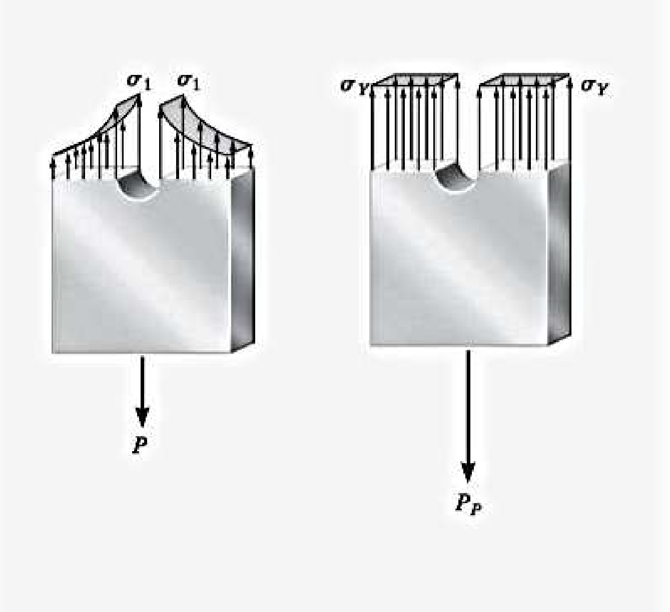
Para su aplicación, es necesario utilizar una convención de signos para la carga interna P y el desplazamiento δ. Se considera que la tensión y la elongación son valores positivos. Además, el material no debe ceder, sino que debe conservarse elástico lineal.



Es posible la superposición de la carga y el desplazamiento siempre que el material se conserve elástico lineal y que no ocurran cambios significativos en la geometría del elemento después de aplicar la carga.

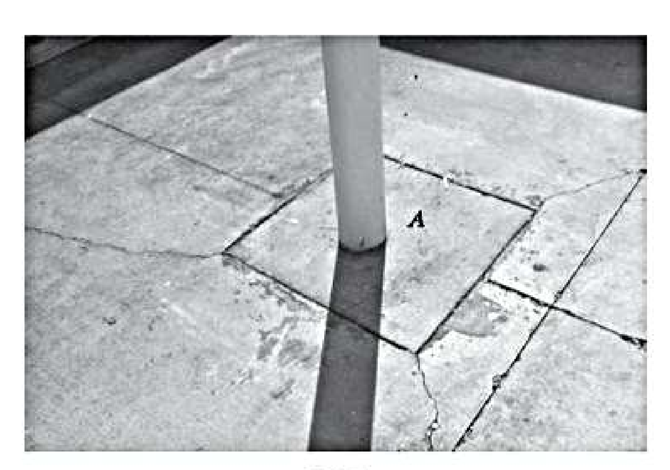
Las reacciones en una barra estáticamente indeterminada se pueden calcular empleando las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de compatibilidad que especifican los desplazamientos en los soportes. Estos desplazamientos se relacionan con las cargas mediante una relación carga-desplazamiento como $\delta = PL/AE$.

4

Un cambio en la temperatura puede causar que un elemento hecho de un material isotrópico homogéneo experimente el siguiente cambio en su longitud $$\delta = \alpha \Delta T L$$ Si el elemento está restringido, este cambio producirá esfuerzo térmico en el elemento.	
Los orificios y las transiciones bruscas en una sección transversal crean concentraciones de esfuerzo. Para el diseño de un elemento hecho con un material frágil, se obtiene el factor de concentración del esfuerzo K a partir de una gráfica, la cual se determinó mediante experimentación. Este valor se multiplica por el esfuerzo promedio para obtener el esfuerzo máximo en la sección transversal. $$\sigma_{máx} = K\sigma_{prom}$$	
Si la carga sobre una barra fabricada con un material dúctil ocasiona que el material ceda, entonces la distribución de esfuerzos que se presenta en ella puede determinarse a partir de la distribución de la deformación y del diagrama esfuerzo-deformación. Si se supone que el material es perfectamente plástico, la cedencia hará que la distribución del esfuerzo en la sección transversal de un orificio o de una transición se equilibre y llegue a ser uniforme.	
Si un elemento está restringido y una carga externa causa la cedencia, entonces cuando la carga se retire, se producirán esfuerzos residuales en el elemento.	

4

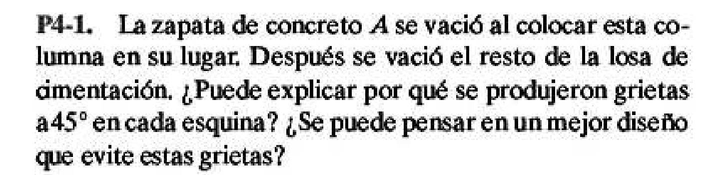
PROBLEMAS CONCEPTUALES



P4-1



P4-2



P4-1. La zapata de concreto *A* se vació al colocar esta columna en su lugar. Después se vació el resto de la losa de cimentación. ¿Puede explicar por qué se produjeron grietas a 45° en cada esquina? ¿Se puede pensar en un mejor diseño que evite estas grietas?

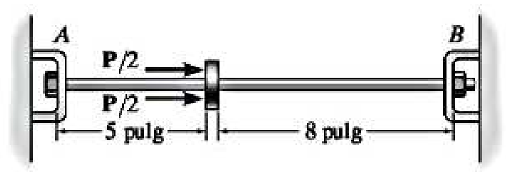
P4-2. Una hilera de ladrillos, junto con el mortero y una varilla de refuerzo interna fabricada de acero, están destinados a servir como una viga dintel de apoyo a los ladrillos que se encuentran por encima de esta abertura de ventilación en la pared exterior de un edificio. Explique lo que pudo haber causado que los ladrillos fallaran como se muestra en la fotografía.

PROBLEMAS DE REPASO

4-114. La barra de aluminio 2014-T6 tiene un diámetro de 0.5 pulg y está ligeramente ajustada a los soportes rígidos en *A* y *B*, cuando $T_1 = 70°F$. Si la temperatura llega a $T_2 = -10°F$, y se aplica una fuerza axial de $P = 16$ lb en el collarín rígido, como se muestra en la figura, determine las reacciones en *A* y *B*.

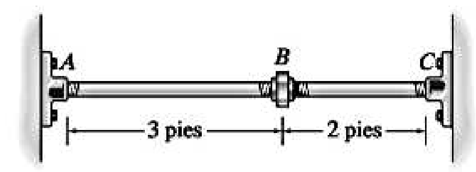
4-115. La barra de aluminio 2014-T6 tiene un diámetro de 0.5 pulg y está ligeramente ajustada a los soportes rígidos en *A* y *B*, cuando $T_1 = 70°F$. Determine la fuerza *P* que debe aplicarse al collarín de modo que, cuando $T = 0°F$, la reacción en *B* sea nula.

4



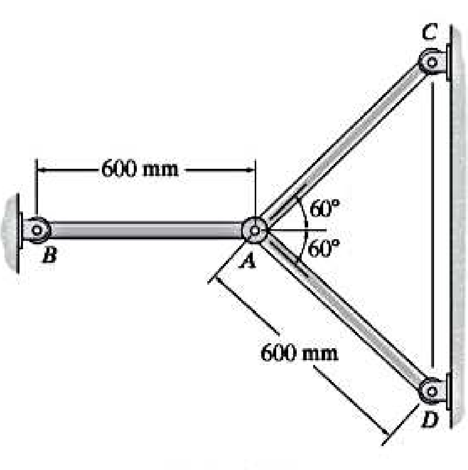
Probs. 4-114/115

•**4-117.** Dos tubos de acero A-36, cada uno con un área de 0.32 pulg² en su sección transversal, se atornillan entre sí mediante una junta en *B*, como se muestra en la figura. En un inicio, el ensamble se ajusta de manera que no haya carga sobre la tubería. Si después la junta se aprieta de modo que su rosca, que tiene un paso de 0.15 pulg, experimente dos vueltas completas, determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en la tubería. Suponga que la junta en *B* y los acoplamientos en *A* y *C* son rígidos. No tome en cuenta el tamaño de la junta. *Nota:* El paso podría causar que el tubo, cuando *no está cargado*, se acorte 0.15 pulg cuando la junta se hace girar una vuelta.



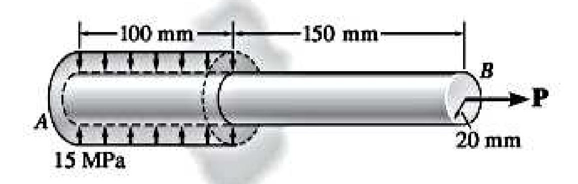
Prob. 4-117

*__4-116.__ Cada una de las barras tiene el mismo diámetro de 25 mm y la misma longitud de 600 mm. Si están fabricadas de acero A-36, determine las fuerzas desarrolladas en cada barra cuando la temperatura aumenta a 50°C.



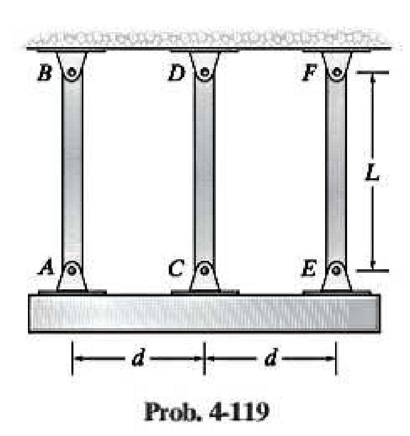
Prob. 4-116

4-118. La pija de latón es forzada a entrar en una fundición rígida. Se estima que la presión normal uniforme sobre la pija es de 15 MPa. Si el coeficiente de fricción estática entre la pija y la fundición es $\mu_s = 0.3$, determine la fuerza axial *P* necesaria para sacar la pija. Además, calcule el desplazamiento del extremo *B* en relación con el extremo *A* justo antes de que la pija empiece a deslizarse hacia fuera. $E_{br} = 98$ GPa.



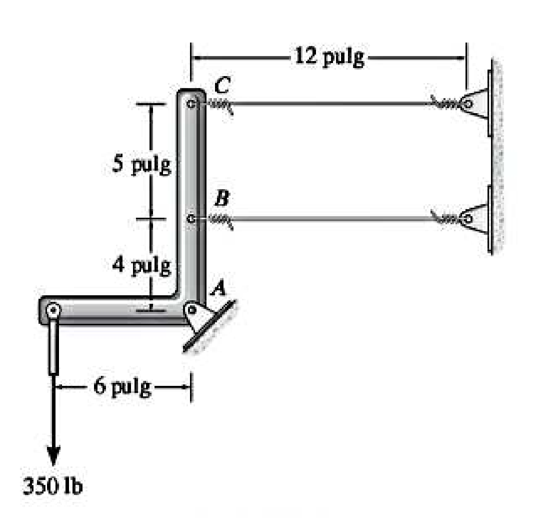
Prob. 4-118

4-119. El ensamble consta de dos barras *AB* y *CD* del mismo material que poseen un módulo de elasticidad E_1 y un coeficiente de expansión térmica α_1; así como de una barra *EF* que tiene un módulo de elasticidad E_2 y un coeficiente de expansión térmica α_2. Todas las barras tienen la misma longitud *L* y área transversal *A*. Si la viga rígida se encuentra en un principio en posición horizontal a una temperatura T_1, determine el ángulo que forma con la horizontal cuando la temperatura se eleva hasta T_2.



Prob. 4-119

***4-120.** El eslabón rígido se sostiene mediante un pasador en *A* y dos alambres de acero A-36, cada uno con una longitud sin estirar de 12 pulg y un área en su sección transversal de 0.0125 pulg². Determine la fuerza desarrollada en los alambres cuando el eslabón soporta la carga vertical de 350 lb.



Prob. 4-120

4



El esfuerzo de torsión y el ángulo de giro de este barreno dependen de la potencia de la máquina que hace girar al taladro y de la resistencia del suelo que está en contacto con el eje.

Torsión

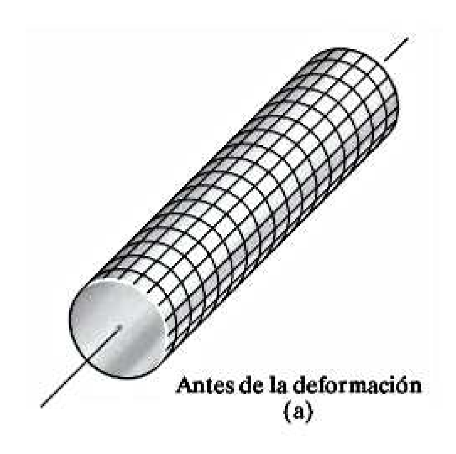
5

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se analizarán los efectos que produce la aplicación de una carga de torsión sobre un elemento largo y recto como un eje o tubo. En un inicio se considerará que el elemento tiene una sección transversal circular. Se mostrará cómo determinar la distribución de esfuerzos dentro del elemento, así como el ángulo de torsión cuando el material se comporta en forma elástico lineal o de manera inelástica. También se abordará el análisis estáticamente indeterminado de los ejes y tubos, además de temas especiales como los elementos con secciones transversales no circulares. Por último, se dará una consideración especial a las concentraciones de esfuerzo y a los esfuerzos residuales causados por las cargas de torsión.

5.1 Deformación por torsión de un eje circular

El *par de torsión* es un momento que tiende a torcer un elemento sobre su eje longitudinal. Su efecto es de gran importancia en el diseño de ejes o árboles de transmisión utilizados en vehículos y maquinaria. Se puede ilustrar físicamente lo que ocurre cuando un par de torsión se aplica sobre un eje circular considerando que el eje está fabricado de un material altamente deformable como el caucho, figura 5-1*a*. Cuando se aplica el par de torsión, los círculos y las líneas longitudinales en forma de cuadrícula marcados en un principio en el eje, tienden a distorsionarse para formar el patrón mostrado en la figura 5-1*b*. Observe que el torcimiento ocasiona que los círculos *se conserven como círculos*, y que cada línea longitudinal de la cuadrícula se deforme en una hélice que interseca los círculos en ángulos iguales. Además, las secciones transversales de los extremos a lo largo del eje seguirán siendo *planas* (es decir, no se arrugan o pandean hacia adentro o hacia afuera) y las líneas radiales *se conservan rectas* durante la deformación, figura 5-1*b*. A partir de estas observaciones, se puede suponer que si el ángulo de giro es *pequeño*, la *longitud del eje* y su *radio* se *mantendrán sin cambio*.



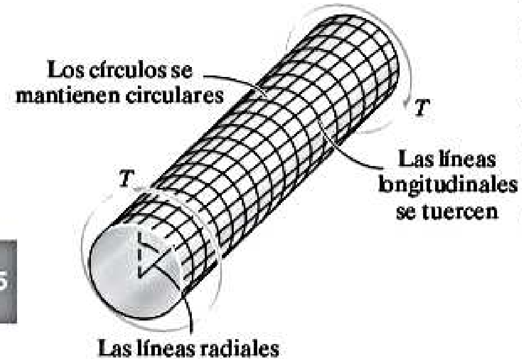


Figura 5-1

Si el eje está fijo en uno de sus extremos y se aplica un par de torsión a su otro extremo, el plano gris oscuro de la figura 5-2 se distorsionará en forma sesgada como se muestra en la misma figura. Aquí, una línea radial situada en la sección transversal a una distancia x del extremo fijo del eje girará un ángulo $\phi(x)$. El ángulo $\phi(x)$, definido de esta forma, se denomina *ángulo de giro*. Éste depende de la posición x y varía a lo largo del eje como se muestra en la figura.

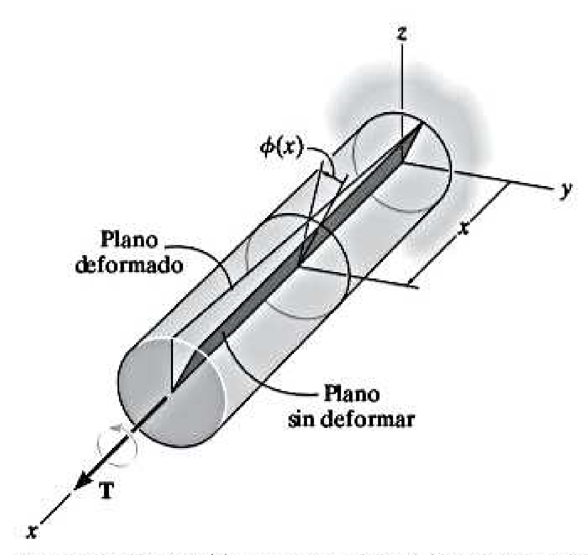
Con el fin de entender la manera en que esta distorsión hace que el material se deforme, se aislará un pequeño elemento situado a una distancia radial ρ (rho) de la línea central del eje, figura 5-3. Debido a una deformación como la indicada en la figura 5-2, las caras frontal y posterior del elemento experimentarán una rotación, la cara posterior de $\phi(x)$ y la cara frontal de $\phi(x) + \Delta\phi$. Como resultado, la *diferencia* en estas rotaciones, $\Delta\phi$, hace que el elemento esté sometido a *deformación cortante*. Para calcular esta deformación, observe que antes de ésta el ángulo entre las aristas AB y AC era de 90°; sin embargo, después de la deformación los bordes del elemento son AD y AC, y el ángulo entre ellos es de θ'. A partir de la definición de deformación cortante, ecuación 2-4, se tiene

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta'$$





Observe la deformación del elemento rectangular cuando esta barra de caucho se somete a un par de torsión.



El ángulo de giro $\phi(x)$ aumenta a medida que se incrementa x.

Figura 5-2

Este ángulo, γ, que se indica en el elemento, puede relacionarse con la longitud Δx y con el ángulo $\Delta\phi$ entre los planos sombreados al considerar la longitud del arco BD, es decir

$$BD = \rho\Delta\phi = \Delta x \gamma$$

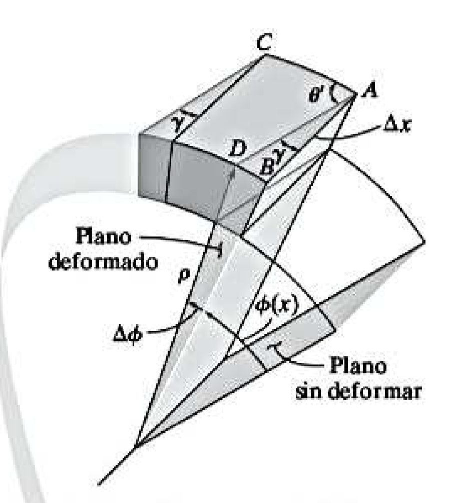
Por lo tanto, si se hace $\Delta x \rightarrow dx$ y $\Delta\phi \rightarrow d\phi$,

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \qquad (5\text{-}1)$$

Como dx y $d\phi$ son *iguales* para *todos los elementos* ubicados en los puntos sobre la sección transversal en x, entonces $d\phi/dx$ es constante en toda la sección transversal, y la ecuación 5-1 establece que la magnitud de la deformación cortante para cualquiera de estos elementos varía sólo con su distancia radial ρ desde la línea central del eje. En otras palabras, el esfuerzo cortante dentro del eje varía linealmente a lo largo de cualquier línea radial, desde cero en la línea central del eje hasta un máximo $\gamma_{máx}$ en su límite exterior, figura 5-4. Como $d\phi/dx = \gamma/\rho = \gamma_{máx}/c$, entonces

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right)\gamma_{máx} \qquad (5\text{-}2)$$

Los resultados obtenidos también son válidos para los tubos circulares. Dichas conclusiones dependen sólo de los supuestos relacionados con las deformaciones que se mencionaron antes.



Deformación cortante del elemento

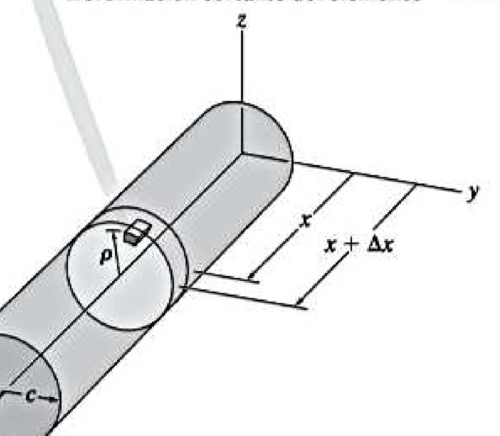
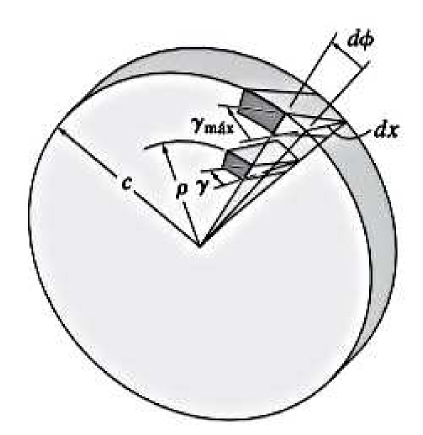


Figura 5-3



La deformación cortante en los puntos ubicados sobre la sección transversal aumenta linealmente con ρ, es decir, $\gamma = (\rho/c)\gamma_{máx}$.

Figura 5-4

5.2 Fórmula de la torsión

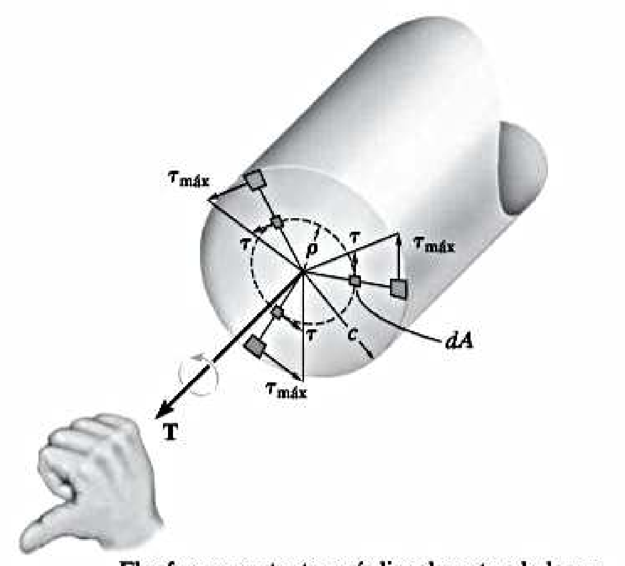
Cuando un par de torsión externo se aplica sobre un eje, en éste se genera un par de torsión interno correspondiente. En esta sección se desarrollará una ecuación que relaciona este par de torsión interno con la distribución del esfuerzo cortante en la sección transversal de un eje o tubo circular.

Si el material es elástico lineal, entonces se aplica la ley de Hooke, $\tau = G\gamma$, y en consecuencia cualquier ***variación lineal en la deformación cortante*** conducirá a una correspondiente ***variación lineal en el esfuerzo cortante*** a lo largo de cualquier línea radial ubicada en la sección transversal, tal como se señaló en la sección anterior. Por consiguiente, τ variará desde cero en la línea central longitudinal del eje hasta un valor máximo, $\tau_{máx}$, en su superficie externa. Esta variación se muestra en la figura 5-5 sobre las caras frontales de un número seleccionado de elementos, los cuales se ubican en una posición radial intermedia ρ y en el radio exterior c. A partir de la proporcionalidad de triángulos, se puede escribir

5

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{máx} \qquad (5\text{-}3)$$

Esta ecuación expresa la distribución del esfuerzo cortante sobre la sección transversal en función de la posición radial ρ del elemento. Con base en ella, ahora es posible aplicar la condición de que el par de torsión producido por la distribución de esfuerzos sobre toda la sección transversal sea equivalente al par de torsión interno resultante T en la sección, lo cual mantendrá al eje en el equilibrio, figura 5-5.



El esfuerzo cortante varía linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal.

Figura 5-5

En específico, cada elemento de área dA, ubicado en ρ, está sometido a una fuerza de $dF = \tau\, dA$. El par de torsión producido por esta fuerza es $dT = \rho(\tau\, dA)$. Por lo tanto, para toda la sección transversal se tiene

$$T = \int_A \rho(\tau\, dA) = \int_A \rho\left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{\text{máx}}\, dA \qquad (5\text{-}4)$$

Como $\tau_{\text{máx}}/c$ es constante,

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c}\int_A \rho^2\, dA \qquad (5\text{-}5)$$

La integral depende sólo de la geometría del eje. Representa el ***momento polar de inercia*** del área de la sección transversal del eje alrededor de su línea central longitudinal. Su valor se simboliza como J y, por lo tanto, la ecuación anterior puede reordenarse y escribirse de una manera más compacta, es decir,

$$\boxed{\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J}} \qquad (5\text{-}6)$$

Aquí

$\tau_{\text{máx}}$ = el esfuerzo cortante máximo en el eje, que se produce en la superficie externa

T = el *par de torsión interno* resultante que actúa en la sección transversal. Su valor se determina a partir del método de las secciones y la ecuación de equilibrio de momentos aplicados respecto a la línea central longitudinal del eje

J = el momento polar de inercia del área de la sección transversal

c = el radio exterior del eje

Si se combinan las ecuaciones 5-3 y 5-6, el esfuerzo cortante a la distancia intermedia ρ puede determinarse a partir de

$$\boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}} \qquad (5\text{-}7)$$

Cualquiera de las dos ecuaciones anteriores suele llamarse la ***fórmula de la torsión***. Recuerde que sólo se usa si el eje es circular, el material es homogéneo y se comporta de manera elástico lineal, puesto que su derivación se basa en la ley de Hooke.

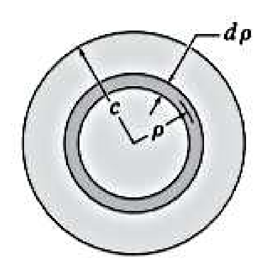


Figura 5-6

Eje sólido.

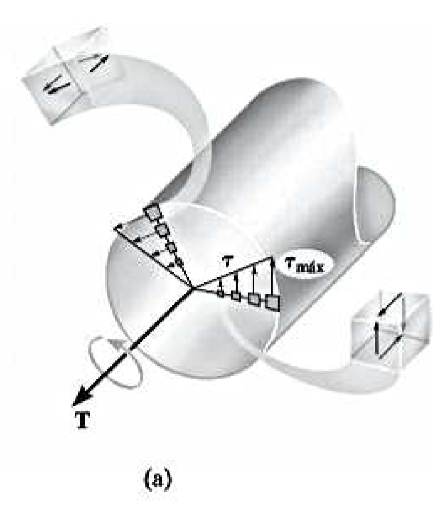
Si el eje tiene una sección transversal circular sólida, el momento polar de inercia J puede determinarse usando un elemento de área en forma de un *aro* o *anillo diferencial* que tiene un grosor $d\rho$ y una circunferencia $2\pi\rho$, figura 5-6. Para este anillo, $dA = 2\pi\rho\, d\rho$, y así

$$J = \int_A \rho^2\, dA = \int_0^c \rho^2(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3\, d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{4}\right)\rho^4 \Big|_0^c$$

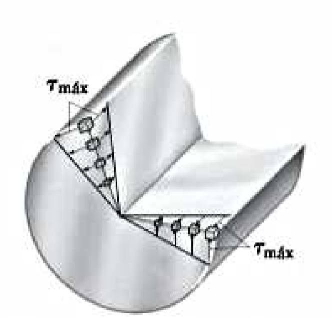
$$\boxed{J = \frac{\pi}{2}c^4} \tag{5-8}$$

Observe que J es una *propiedad geométrica* del área circular y que siempre es positiva. Las unidades que se utilizan más a menudo para su medición son mm^4 o $pulg^4$.

Se ha demostrado que el esfuerzo cortante varía linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal del eje. Sin embargo, si se aísla un elemento del material que se encuentra sobre esta sección, entonces debido a la propiedad complementaria de la fuerza cortante, deben existir también esfuerzos cortantes iguales que actúen sobre cuatro de sus caras adyacentes, como se muestra en la figura 5-7*a*. Por consiguiente, ***no sólo el par de torsión interno T desarrolla una distribución lineal del esfuerzo cortante a lo largo de cada línea radial en el plano del área de la sección transversal, sino que también se desarrolla una distribución del esfuerzo cortante asociada a lo largo de un plano axial***, figura 5-7*b*. Es interesante destacar que debido a esta distribución axial del esfuerzo cortante, los ejes hechos de madera tienden a *partirse* a lo largo del plano axial cuando se someten a un par de torsión excesivo, figura 5-8. Esto se debe a que la madera es un material anisotrópico. Su resistencia al corte paralela a sus granos o fibras, y dirigida a lo largo de la línea central del eje, es mucho menor que su resistencia perpendicular a las fibras, dirigida a lo largo del plano de la sección transversal.



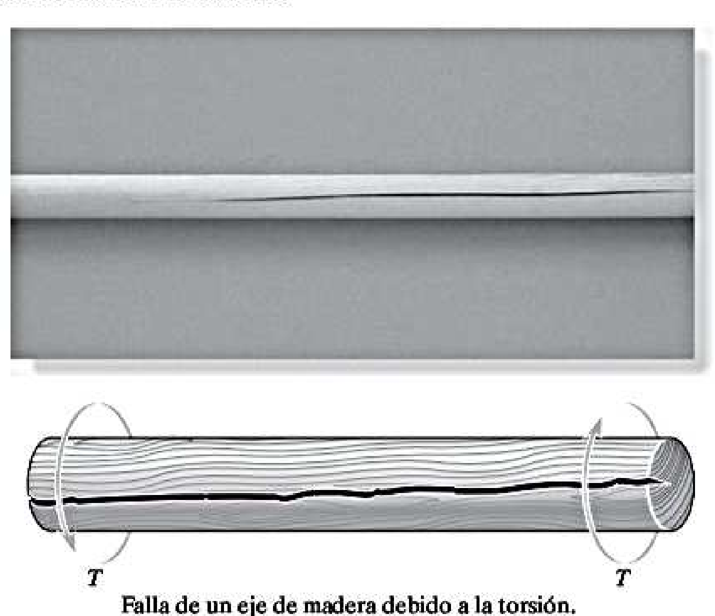
(a)



El esfuerzo cortante varía linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal.

(b)

Figura 5-7

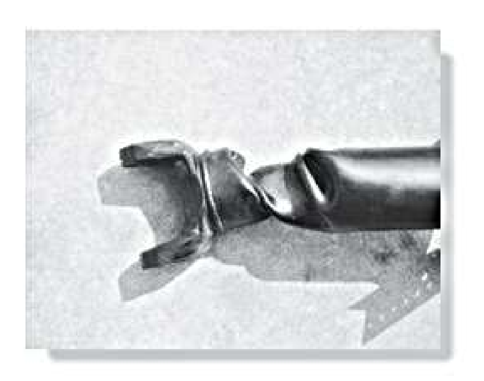


Falla de un eje de madera debido a la torsión.

Figura 5-8

Eje tubular. Si un eje tiene una sección transversal tubular, con radio interior c_i y radio exterior c_o, entonces su momento polar de inercia J puede determinarse con base en la ecuación 5-8 al restar J para un eje de radio c_i de la J determinada para un eje de radio c_o. De lo anterior se obtiene

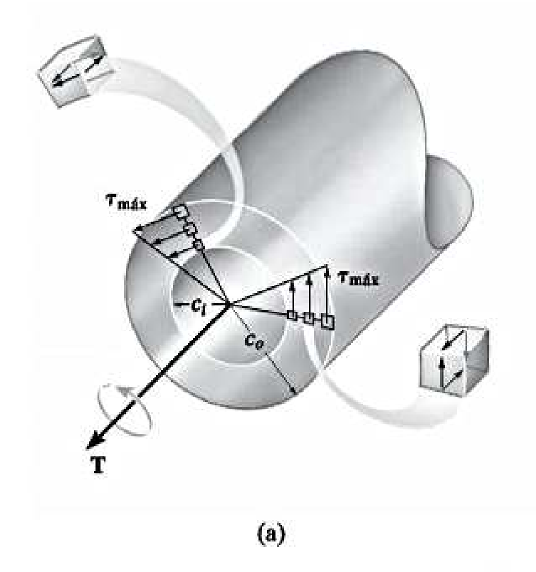
$$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4) \tag{5-9}$$



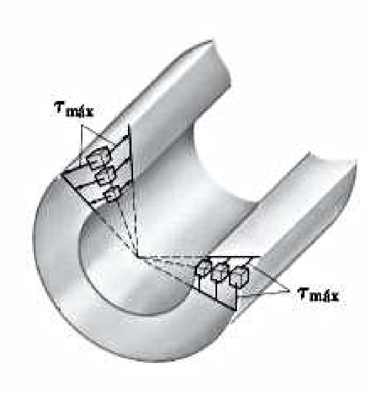
Este eje de transmisión tubular de un camión se sometió a un par de torsión excesivo, lo que dio lugar a una falla causada por la cedencia del material.

Al igual que en un eje sólido, el esfuerzo cortante distribuido en toda el área de la sección transversal del tubo varía linealmente a lo largo de cualquier línea radial, figura 5-9*a*. Además, el esfuerzo cortante varía de la misma manera a lo largo de un plano axial, figura 5-9*b*.

Esfuerzo de torsión máximo absoluto. Si se debe determinar el esfuerzo de torsión máximo absoluto, entonces es importante encontrar el sitio donde el cociente Tc/J es máximo. En este sentido, puede ser útil mostrar la variación del par de torsión interno T en cada sección a lo largo de la línea central del eje; esto se logra al dibujar un ***diagrama de par de torsión***, que es una gráfica del par de torsión interno T contra su posición x a lo largo del eje. Como una convención de signos, T será positiva si mediante la regla de la mano derecha, el pulgar se dirige hacia fuera del eje cuando los dedos se enroscan en la dirección de torsión según la ocasiona el par, figura 5-5. Una vez que se determina el par de torsión interno en todo el eje, es posible identificar la relación máxima de Tc/J.



(a)



El esfuerzo cortante varía linealmente a lo largo de cada línea radial de la sección transversal.

(b)

Figura 5-9

5

Puntos importantes

- Cuando un eje que tiene una *sección transversal circular* se somete a un par de torsión, la sección transversal *se mantiene plana* mientras que las líneas radiales se tuercen. Esto provoca una *deformación cortante* en el material que *varía linealmente* a lo largo de cualquier línea radial, desde cero en la línea central del eje hasta un máximo en su límite exterior.
- Para un material homogéneo elástico lineal, el *esfuerzo cortante* a lo largo de cualquier línea radial del eje también *varía linealmente,* desde cero en su línea central hasta un máximo en su límite exterior. Este esfuerzo cortante máximo *no debe* exceder el límite proporcional.
- Debido a la propiedad complementaria de la fuerza cortante, la distribución del esfuerzo cortante lineal dentro del plano de la sección transversal también se distribuye a lo largo de un plano axial adyacente en el eje.
- La fórmula de la torsión se basa en el requisito de que el par de torsión resultante en la sección transversal debe ser igual al par de torsión producido por la distribución del esfuerzo cortante alrededor de la línea central longitudinal del eje. Se necesita que el eje o tubo tenga una sección transversal *circular* y que esté hecho de un material *homogéneo* con un comportamiento *elástico lineal*.

5

Procedimiento de análisis

La fórmula de la torsión puede aplicarse mediante el siguiente procedimiento.

Cargas internas.

- Seccione el eje de manera perpendicular a su línea central, en el punto donde debe determinarse el esfuerzo cortante; después utilice el diagrama de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio necesarias para obtener el par de torsión interno en la sección.

Propiedad de la sección.

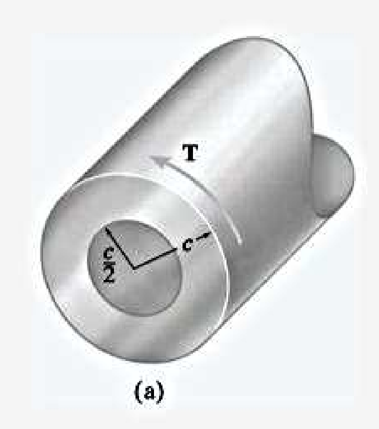
- Calcule el momento polar de inercia del área de la sección transversal. Para una sección sólida de radio c, $J = \pi c^4/2$, y para un tubo de radio exterior c_o y radio interior c_i, $J = \pi(c_o^4 - c_i^4)/2$.

Esfuerzo cortante.

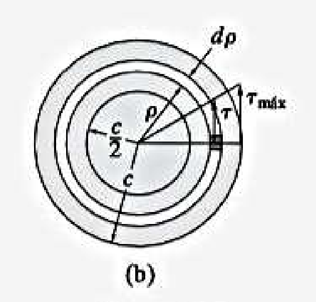
- Especifique la distancia radial ρ, medida desde el centro de la sección transversal hasta el punto donde debe determinarse el esfuerzo cortante. A continuación, aplique la fórmula de la torsión $\tau = T\rho/J$, o si se desea determinar el esfuerzo cortante máximo utilice $\tau_{máx} = Tc/J$. Al sustituir los datos, asegúrese de emplear un conjunto de unidades consistente.
- El esfuerzo cortante actúa sobre la sección transversal en una dirección que siempre es perpendicular a ρ. La fuerza que crea debe contribuir a un par de torsión alrededor de la línea central del eje, el cual tiene la *misma dirección* que el par de torsión interno resultante **T** que actúa sobre la sección. Una vez que se ha establecido esta dirección, puede aislarse un elemento de volumen situado en el punto donde se determina τ, y puede mostrarse la dirección en que actúa τ sobre las otras tres caras adyacentes del elemento.

EJEMPLO 5.1

El eje *sólido* de radio c está sometido a un par de torsión **T**, figura 5-10*a*. Determine la fracción de T que resiste el material contenido en la región exterior del eje, la cual tiene un radio interior $c/2$ y un radio exterior c.



(a)



(b)

Figura 5-10

SOLUCIÓN

El esfuerzo en el eje varía linealmente, de modo que $\tau = (\rho/c)\tau_{máx}$, ecuación 5-3. Por lo tanto, el par de torsión dT' en el anillo (área), ubicado dentro de la región con sombreado más claro en la figura 5-10*b*, es

$$dT' = \rho(\tau\, dA) = \rho(\rho/c)\tau_{máx}(2\pi\rho\, d\rho)$$

Para toda el área con sombreado más claro, el par de torsión es

$$T' = \frac{2\pi\tau_{máx}}{c}\int_{c/2}^{c}\rho^3\, d\rho$$

$$= \frac{2\pi\tau_{máx}}{c}\frac{1}{4}\rho^4\Big|_{c/2}^{c}$$

De modo que

$$T' = \frac{15\pi}{32}\tau_{máx}c^3 \qquad (1)$$

Este par de torsión T' se puede expresar en términos del par T aplicado si se utiliza primero la fórmula de la torsión para determinar el esfuerzo máximo en el eje. Se tiene

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{(\pi/2)c^4}$$

o bien

$$\tau_{máx} = \frac{2T}{\pi c^3}$$

Si se sustituye esto en la ecuación 1 se obtiene

$$T' = \frac{15}{16}T \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: En este caso, aproximadamente el 94 por ciento del par de torsión es resistido por la región con sombreado más claro, y el 6 por ciento restante (o $\frac{1}{16}$) de T lo resiste el "núcleo" interior del eje, de $\rho = 0$ a $\rho = c/2$. Como resultado, el material que se encuentra en la *región exterior* del eje es muy efectivo en la resistencia del par, lo que justifica el uso de ejes tubulares como un medio eficiente para transmitir el par de torsión, y así ahorrar material.

EJEMPLO 5.2

El eje mostrado en la figura 5-11*a* se sostiene mediante dos cojinetes y está sometido a tres pares. Determine el esfuerzo cortante desarrollado en los puntos *A* y *B*, que se encuentran sobre la sección *a*-*a* del eje, figura 5-11*c*.

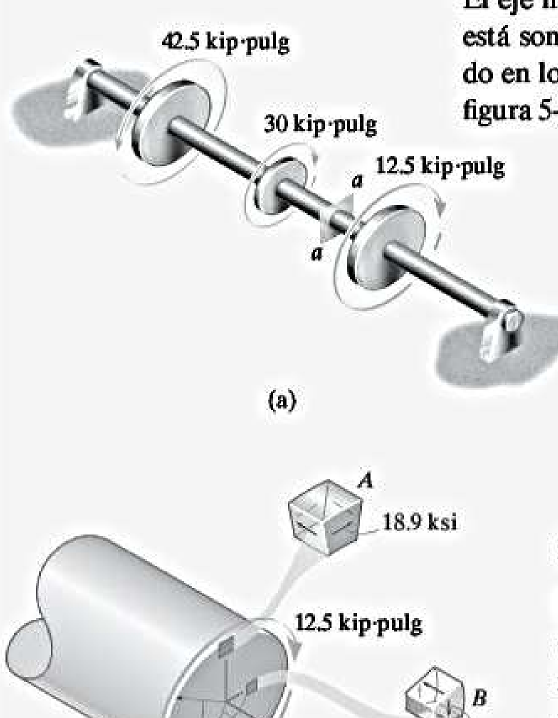


Figura 5-11

SOLUCIÓN

Par de torsión interno. Las reacciones de apoyo en el eje son nulas, dado que el peso de éste no se toma en cuenta. Además, los pares de torsión aplicados satisfacen el equilibrio de los momentos alrededor de la línea central del eje.

El par de torsión interno en la sección *a*-*a* se determinará a partir del diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo, figura 5-11*b*. Se tiene

$$\Sigma M_x = 0; \quad 42.5 \text{ kip}\cdot\text{pulg} - 30 \text{ kip}\cdot\text{pulg} - T = 0 \quad T = 12.5 \text{ kip}\cdot\text{pulg}$$

Propiedad de la sección. El momento polar de inercia para el eje es

$$J = \frac{\pi}{2}(0.75 \text{ pulg})^4 = 0.497 \text{ pulg}^4$$

Esfuerzo cortante. Como el punto *A* está en $\rho = c = 0.75$ pulg,

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(12.5 \text{ kip}\cdot\text{pulg})(0.75 \text{ pulg})}{(0.497 \text{ pulg}^4)} = 18.9 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

Lo mismo sucede con el punto *B*, en $\rho = 0.15$ pulg, se tiene

$$\tau_B = \frac{T\rho}{J} = \frac{(12.5 \text{ kip}\cdot\text{pulg})(0.15 \text{ pulg})}{(0.497 \text{ pulg}^4)} = 3.77 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Las direcciones de estos esfuerzos sobre cada elemento en *A* y *B*, figura 5-1lc, se establecen con base en la dirección del par de torsión interno resultante **T**, que se muestra en la figura 5-11*b*. Observe con cuidado cómo el esfuerzo cortante actúa sobre los planos de cada uno de estos elementos.

EJEMPLO 5.3

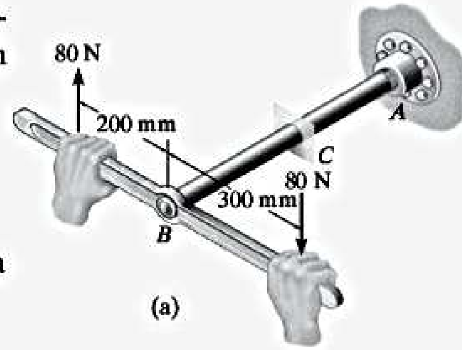
El tubo mostrado en la figura 5-12*a* tiene un diámetro interior de 80 mm y un diámetro exterior de 100 mm. Si su extremo se aprieta contra el soporte en *A* mediante una llave de torsión en *B*, determine el esfuerzo cortante desarrollado en el material sobre las paredes interior y exterior, a lo largo de la porción central del tubo, al momento de aplicar las fuerzas de 80 N sobre la llave.

SOLUCIÓN

Par de torsión interno. Se toma una sección en una ubicación intermedia *C* sobre el eje de la tubería, figura 5-12*b*. La única incógnita en la sección es el par de torsión interno **T**. Se requiere

$$\Sigma M_y = 0; \quad 80 \text{ N } (0.3 \text{ m}) + 80 \text{ N } (0.2 \text{ m}) - T = 0$$

$$T = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

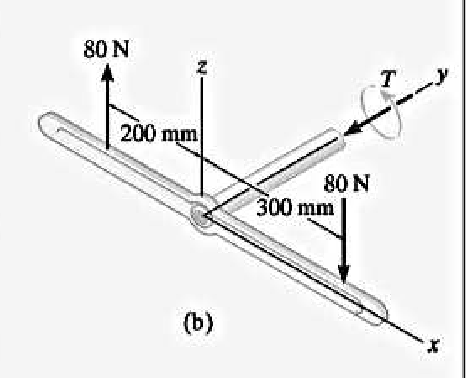


Propiedad de la sección. El momento polar de inercia para la sección transversal del tubo es

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.05 \text{ m})^4 - (0.04 \text{ m})^4] = 5.796(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Esfuerzo cortante. Para cualquier punto que se encuentre sobre la superficie exterior del tubo, $\rho = c_o = 0.05$ m, entonces

$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m } (0.05 \text{ m})}{5.796(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.345 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$



Y para cualquier punto situado en la superficie interior, $\rho = c_i = 0.04$ m, de modo que

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m } (0.04 \text{ m})}{5.796(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.276 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Para mostrar cómo actúan estos esfuerzos en los puntos representativos *D* y *E* sobre la sección transversal, primero se verá la sección transversal desde la parte frontal del segmento *CA* del tubo, figura 5-12*a*. En esta sección, figura 5-12*c*, el par de torsión interno resultante es igual pero opuesto al mostrado en la figura 5-12*b*. Los esfuerzos cortantes en *D* y *E* contribuyen a este par y, por lo tanto, actúan sobre las caras sombreadas de los elementos en las direcciones indicadas. Como consecuencia, observe la manera en que las componentes del esfuerzo cortante actúan sobre las otras tres caras. Además, como la cara superior de *D* y la cara interna de *E* se encuentran en regiones sin esfuerzo tomadas de las paredes exterior e interior del tubo, no puede existir ningún esfuerzo cortante sobre dichas caras o sobre otras caras correspondientes en los elementos.

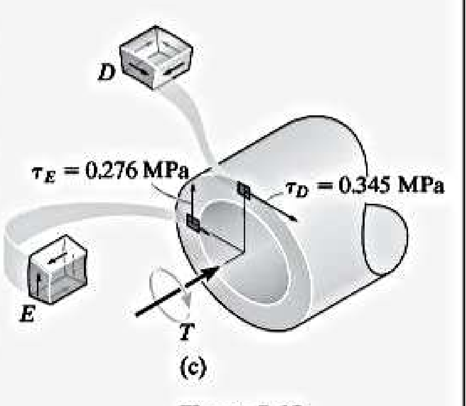


Figura 5-12

5.3 Transmisión de potencia



La cadena de transmisión transfiere el par de torsión desarrollado por el motor eléctrico hacia el eje. El esfuerzo desarrollado en el eje depende de la potencia transmitida por el motor y de la velocidad de rotación del eje conectado. $P = T\omega$.

5

Con frecuencia, los ejes y tubos con secciones circulares se utilizan para transmitir la potencia desarrollada por una máquina. Cuando se utiliza con este fin, se les somete a un par de torsión que depende de la potencia generada por la máquina y de la velocidad angular del eje. La ***potencia*** se define como el trabajo realizado por unidad de tiempo. Por su parte, el trabajo transmitido por un eje giratorio es igual al par aplicado por el ángulo de rotación. Por lo tanto, si durante un instante de tiempo dt un par de torsión **T** aplicado hace que el eje gire un ángulo $d\theta$, entonces la potencia instantánea es

$$P = \frac{T\,d\theta}{dt}$$

Como la velocidad angular del eje es $\omega = d\theta/dt$, la potencia puede expresarse de la siguiente manera

$$\boxed{P = T\omega} \qquad (5\text{-}10)$$

En el sistema SI, la potencia se expresa en *vatios* cuando el par de torsión se mide en newton-metros (N·m) y ω se expresa en radianes por segundo (rad/s) (1 W = 1 N·m/s). En el sistema pie-libra-segundo, las unidades básicas de la potencia son pies-libras por segundo (pies·lb/s); sin embargo, los caballos de fuerza (hp) son de uso frecuente en la práctica de la ingeniería, donde

$$1\text{ hp} = 550\text{ pies}\cdot\text{lb/s}$$

Para la maquinaria, a menudo es necesario informar sobre la *frecuencia*, f, de un eje giratorio. Ésta es una medida del número de revoluciones o ciclos que realiza el eje cada segundo y se expresa en hertz (1 Hz = 1 ciclo/s). Como 1 ciclo = 2π rad, entonces $\omega = 2\pi f$, por lo que la ecuación anterior para la potencia se convierte en

$$\boxed{P = 2\pi f T} \qquad (5\text{-}11)$$

Diseño de ejes. Cuando se conoce la potencia transmitida por un eje y su frecuencia de rotación, el par de torsión que se desarrolla en el eje puede determinarse a partir de la ecuación 5-11, es decir, $T = P/2\pi f$. Al conocer T y el esfuerzo cortante permisible para el material, τ_{perm}, es posible determinar el tamaño de la sección transversal del eje empleando la fórmula de la torsión, siempre y cuando el comportamiento del material sea elástico lineal. De manera específica, el parámetro geométrico o de diseño J/c se convierte en

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{perm}}} \qquad (5\text{-}12)$$

Para un eje sólido, $J = (\pi/2)c^4$; por lo tanto, después de la sustitución se puede determinar un *valor único* para el radio c del eje. Si el eje es *tubular*, de modo que $J = (\pi/2)(c_o^4 - c_i^4)$, el diseño permite un amplio rango de posibilidades para la solución. Lo anterior se debe a que puede hacerse una *elección arbitraria* para c_o o c_i y el otro radio podrá determinarse a partir de la ecuación 5-12.

EJEMPLO 5.4

El eje sólido AB de acero que se muestra en la figura 5-13, se va a usar para transmitir 5 hp desde el motor M al cual se encuentra conectado. Si el eje gira a $\omega = 175$ rpm y el acero tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 14.5$ ksi, determine el diámetro requerido del eje, con precisión de $\frac{1}{8}$ de pulgada.

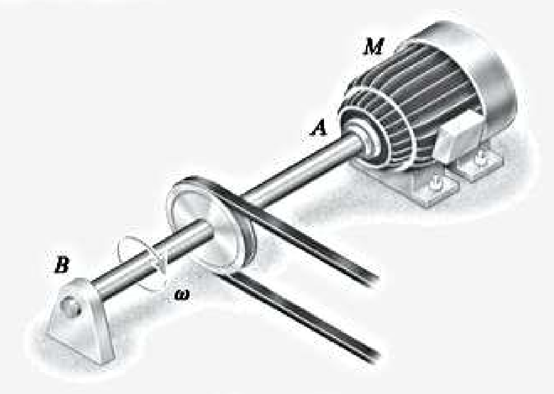


Figura 5-13

5

SOLUCIÓN

El par de torsión sobre el eje se determina a partir de la ecuación 5-10, es decir, $P = T\omega$. Si expresa P en libras-pie por segundo y ω en radianes/segundo, se tiene

$$P = 5\text{ hp}\left(\frac{550\text{ pies}\cdot\text{lb/s}}{1\text{ hp}}\right) = 2750\text{ pies}\cdot\text{lb/s}$$

$$\omega = \frac{175\text{ rev}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right) = 18.33\text{ rad/s}$$

Por lo tanto,

$$P = T\omega; \qquad 2750\text{ pies}\cdot\text{lb/s} = T(18.33\text{ rad/s})$$

$$T = 150.1\text{ pies}\cdot\text{lb}$$

Al aplicar la ecuación 5-12 resulta

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}\frac{c^4}{c} = \frac{T}{\tau_{perm}}$$

$$c = \left(\frac{2T}{\pi\tau_{perm}}\right)^{1/3} = \left(\frac{2(150.1\text{ pies}\cdot\text{lb})(12\text{ pulg/pies})}{\pi(14\,500\text{ lb/pulg}^2)}\right)^{1/3}$$

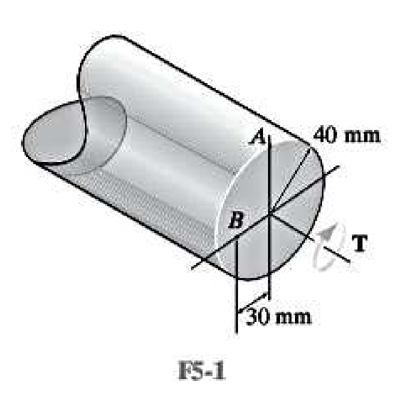
$$c = 0.429\text{ pulg}$$

Como $2c = 0.858$ pulg, se selecciona un eje con un diámetro de

$$d = \frac{7}{8}\text{ pulg} = 0.875\text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

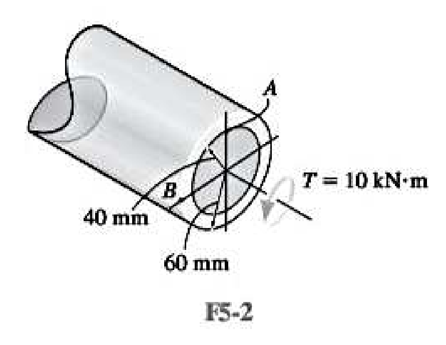
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F5-1. El eje circular sólido se somete a un par de torsión interno de $T = 5$ kN · m. Determine el esfuerzo cortante desarrollado en los puntos A y B. Represente cada estado de esfuerzo sobre un elemento de volumen.



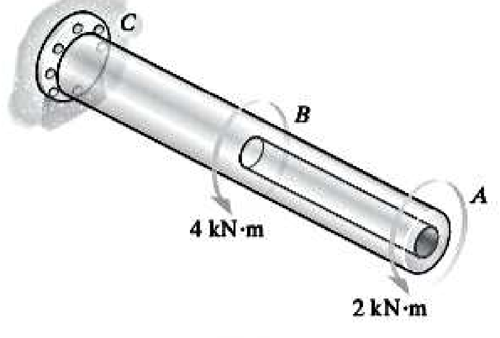
F5-1

F5-2. El eje hueco circular se somete a un par de torsión interno de $T = 10$ kN · m. Determine el esfuerzo cortante desarrollado en los puntos A y B. Represente cada estado de esfuerzo en un elemento de volumen.



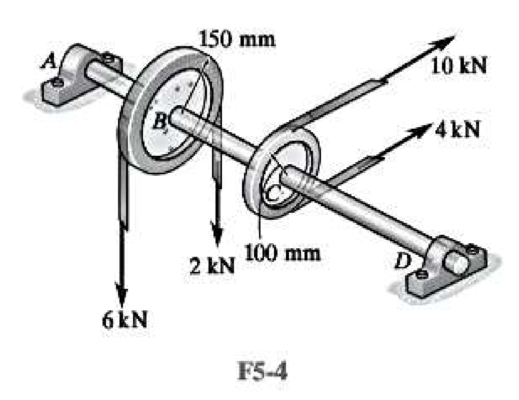
F5-2

F5-3. El eje es hueco desde A hasta B y sólido de B a C. Determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje. Éste tiene un diámetro exterior de 80 mm, y el espesor de la pared en el segmento hueco es de 10 mm.



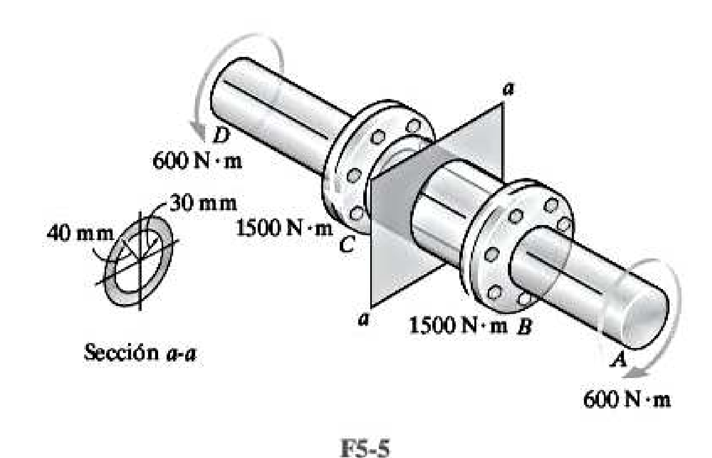
F5-3

F5-4. Determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje que tiene un diámetro de 40 mm.



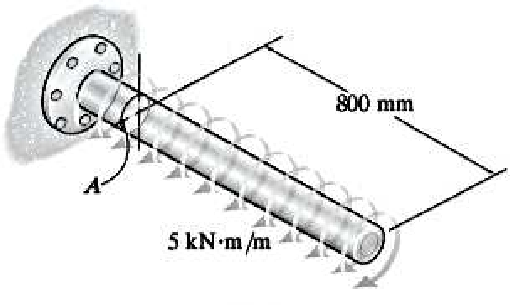
F5-4

F5-5. Determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en la sección a-a del eje.



F5-5

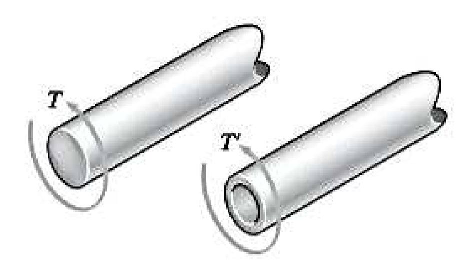
F5-6. Determine el esfuerzo cortante desarrollado en el punto A sobre la superficie del eje. Represente el estado de esfuerzo sobre un elemento de volumen en este punto. El eje tiene un radio de 40 mm.



F5-6

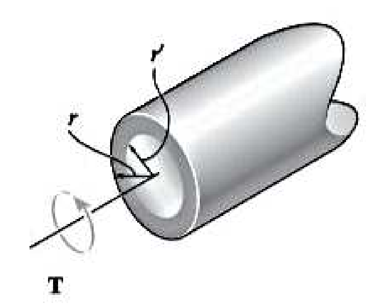
PROBLEMAS

•5-1. Un eje está hecho de una aleación de acero que tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 12$ ksi. Si el diámetro del eje es de 1.5 pulg, determine el par de torsión máximo **T** que se puede transmitir. ¿Cuál sería el par máximo **T**′ si se perforara un orificio de 1 pulg de diámetro a través del eje? Dibuje la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de una línea radial en cada caso.



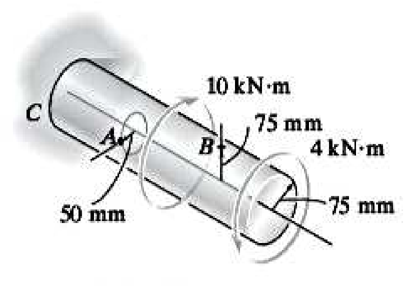
Prob. 5-1

5-2. El eje sólido de radio r está sometido a un par de torsión **T**. Determine el radio r' del núcleo interno del eje que resiste la mitad del par de torsión aplicado ($T/2$). Resuelva el problema de dos maneras: (a) utilizando la fórmula de la torsión, (b) buscando la resultante de la distribución del esfuerzo cortante.



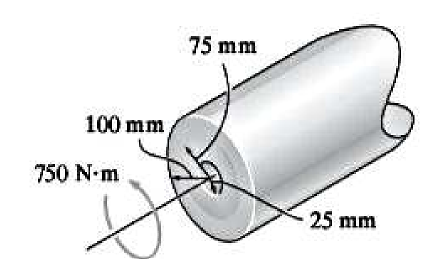
Prob. 5-2

5-3. El eje sólido está fijo al soporte en C y se somete a las cargas de torsión mostradas en la figura. Determine el esfuerzo cortante en los puntos A y B, y dibuje el esfuerzo cortante sobre los elementos de volumen localizados en estos puntos.



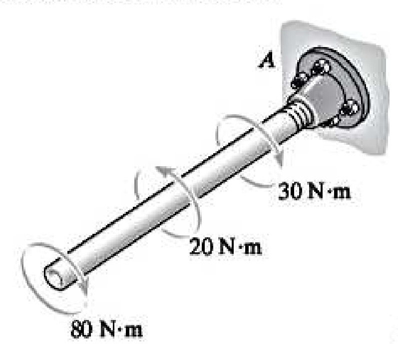
Prob. 5-3

*5-4. El tubo se somete a un par de torsión de 750 N · m. Determine qué porción de este par es resistido por la sección con sombreado más claro. Resuelva el problema de dos maneras: (a) mediante la fórmula de la torsión, (b) buscando la resultante de la distribución del esfuerzo cortante.



Prob. 5-4

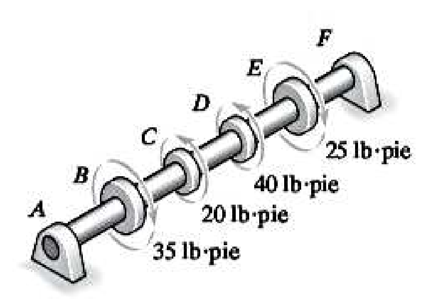
5-5. El tubo de cobre tiene un diámetro exterior de 40 mm y un diámetro interior de 37 mm. Si se asegura fuertemente a la pared en A y se le aplican tres pares de torsión como se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto desarrollado en el tubo.



Prob. 5-5

5-6. El eje sólido tiene un diámetro de 0.75 pulg. Si se somete a los pares de torsión mostrados en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en las regiones BC y DE del eje. Los cojinetes en A y F permiten que el eje gire libremente.

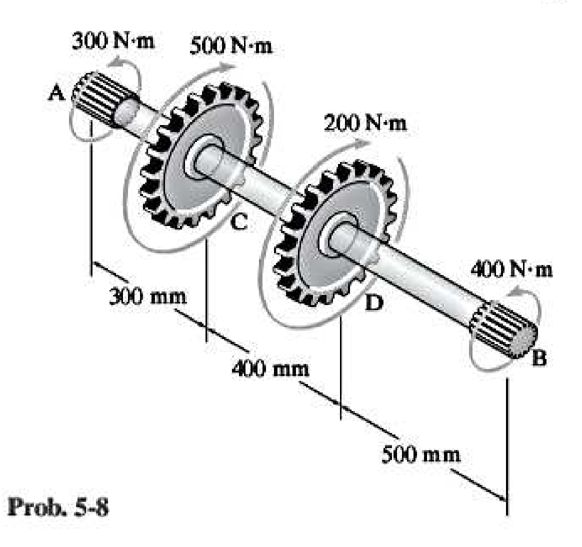
5-7. El eje sólido tiene un diámetro de 0.75 pulg. Si se somete a los pares de torsión mostrados, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en las regiones CD y EF del eje. Los cojinetes en A y F permiten que el eje gire con libertad.



Probs. 5-6/7

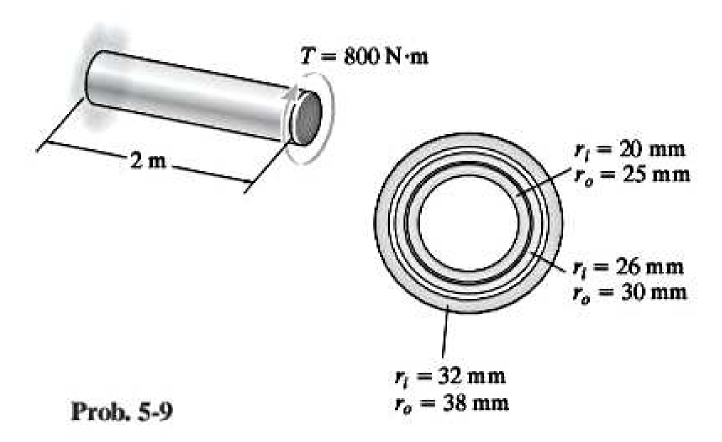
5

***5-8.** El eje sólido de 30 mm de diámetro se utiliza para transmitir los pares de torsión aplicados a los engranes. Determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en el eje.



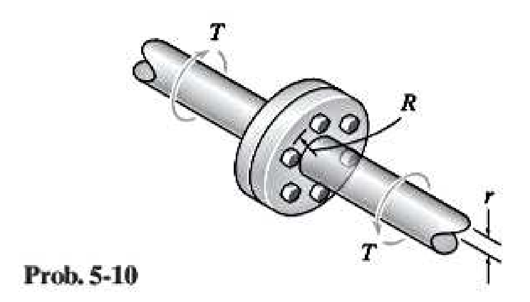
Prob. 5-8

•5-9. El eje consiste en tres tubos concéntricos, cada uno hecho del mismo material y con los radios interior y exterior mostrados en la figura. Si se aplica un par de torsión $T = 800$ N · m sobre el disco rígido fijo en su extremo, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje.



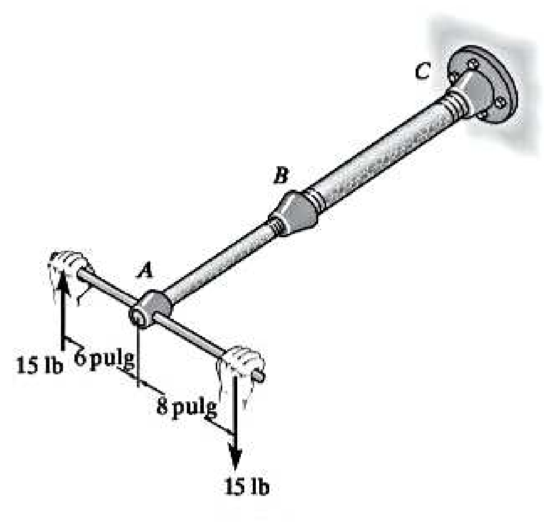
Prob. 5-9

5-10. El acoplamiento se utiliza para conectar los dos ejes mostrados. Si se supone que el esfuerzo cortante en los pernos es *uniforme*, determine el número de pernos necesarios para hacer que el esfuerzo cortante máximo en el eje sea igual al esfuerzo cortante en los pernos. Cada perno tiene un diámetro d.



Prob. 5-10

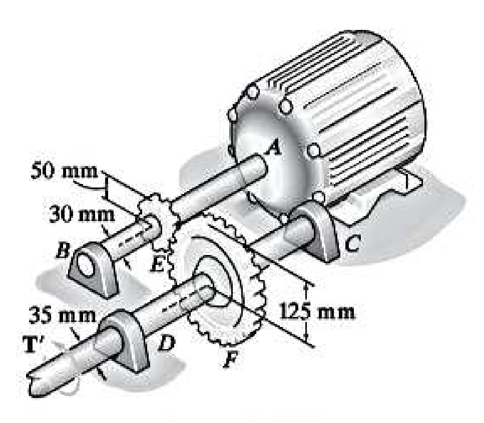
5-11. El ensamble consiste en dos secciones de tubo de acero galvanizado conectadas entre sí mediante un acoplamiento reductor en B. El tubo más pequeño tiene un diámetro exterior de 0.75 pulg y un diámetro interior de 0.68 pulg, mientras que el tubo más grande tiene un diámetro exterior de 1 pulg y un diámetro interior de 0.86 pulg. Si la tubería está firmemente fija a la pared en C, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en cada sección de la tubería cuando se aplica el par mostrado sobre las manijas de la llave de torsión.



Prob. 5-11

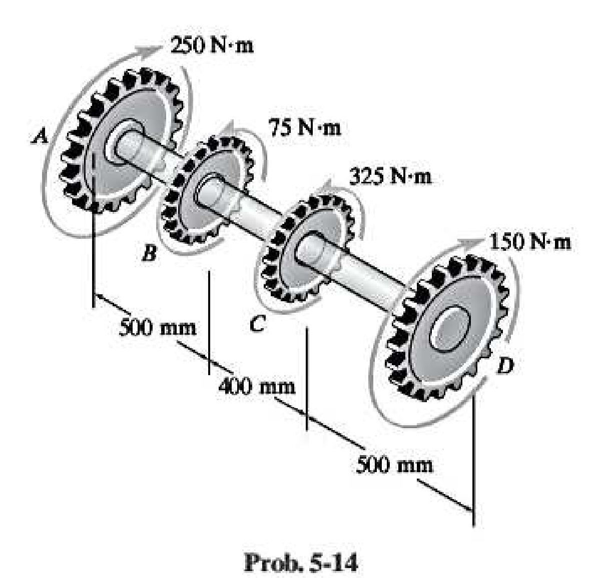
***5-12.** El motor entrega un par de torsión de 50 N · m sobre el eje AB. Éste se transmite al eje CD mediante los engranes en E y F. Determine el par de torsión de equilibrio $\mathbf{T}'$ sobre el eje CD y el esfuerzo cortante máximo en cada eje. Los cojinetes B, C y D permiten que los ejes giren libremente.

•5-13. Si el par de torsión aplicado sobre el eje CD es $T' = 75$ N · m, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en cada eje. Los cojinetes B, C y D permiten que los ejes giren libremente y el motor mantiene los ejes fijos en la rotación.



Probs. 5-12/13

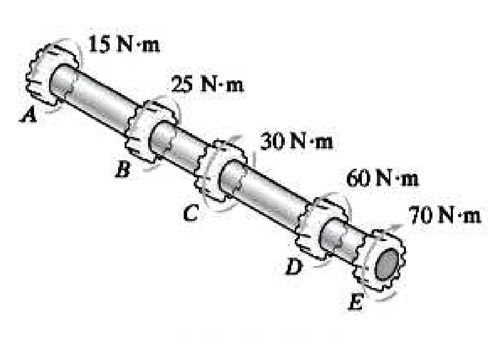
5-14. El eje sólido de 50 mm de diámetro se utiliza para transmitir los pares de torsión aplicados sobre los engranes. Determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en el eje.



Prob. 5-14

5-15. El eje sólido está hecho de un material que tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 10$ MPa. Determine el diámetro requerido del eje con una precisión de 1 mm.

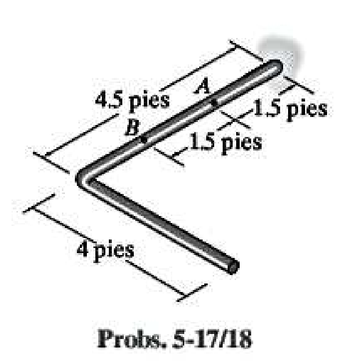
***5-16.** El eje sólido tiene un diámetro de 40 mm. Determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en el eje y dibuje la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de una línea radial del eje donde el esfuerzo cortante sea máximo.



Probs. 5-15/16

•5-17. La barra tiene un diámetro de 1 pulg y un peso de 10 lb/pie. Determine el esfuerzo de torsión máximo en una sección de la barra situada en A, debido al peso de la barra.

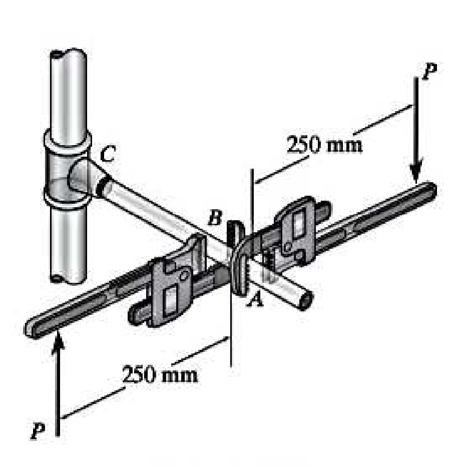
5-18. La barra tiene un diámetro de 1 pulg y un peso de 15 lb/pie. Determine el esfuerzo de torsión máximo en una sección de la barra situada en B, debido al peso de la barra.



Probs. 5-17/18

5-19. Dos llaves se usan para apretar el tubo mostrado. Si a cada llave se le aplica $P = 300$ N, determine el esfuerzo cortante de torsión máximo desarrollado dentro de las regiones AB y BC. El tubo tiene un diámetro exterior de 25 mm y un diámetro interior de 20 mm. Dibuje la distribución del esfuerzo cortante en ambos casos.

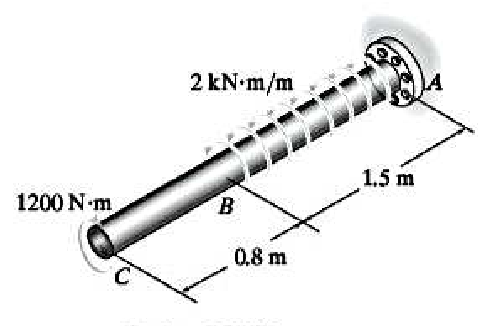
***5-20.** Dos llaves se usan para apretar el tubo mostrado. Si el tubo está hecho de un material que tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 85$ MPa, determine la fuerza máxima permisible **P** que puede aplicarse a cada llave. El tubo tiene un diámetro exterior de 25 mm y un diámetro interior de 20 mm.



Probs. 5-19/20

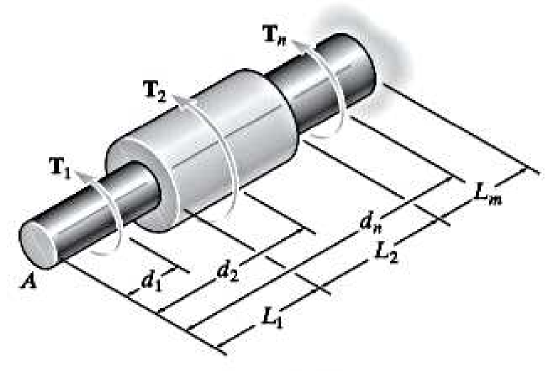
•5-21. El eje sólido de 60 mm de diámetro está sometido a las cargas de torsión distribuidas y concentradas que se muestran en la figura. Determine los esfuerzos cortantes absolutos máximo y mínimo en la superficie exterior del eje; asimismo, especifique sus ubicaciones medidas desde el extremo fijo A.

5-22. El eje sólido está sometido a las cargas de torsión distribuidas y concentradas que se muestran en la figura. Determine el diámetro requerido d del eje, con precisión de 1 mm. Considere que el esfuerzo cortante permisible para el material es $\tau_{perm} = 50$ MPa.



Probs. 5-21/22

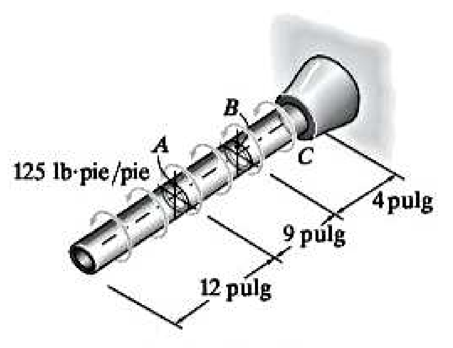
5-23. Considere el problema general de un eje circular hecho de m segmentos cada uno con un radio c_m. Si hay n pares de torsión en el eje, como se muestra en la figura, escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para determinar el esfuerzo cortante máximo en las ubicaciones especificadas a lo largo del eje x. Muestre una aplicación del programa usando los valores $L_1 = 2$ pies, $c_1 = 2$ pulg, $L_2 = 4$ pies, $c_2 = 1$ pulg, $T_1 = 800$ lb · pies, $d_1 = 0$, $T_2 = -600$ lb · pies, $d_2 = 5$ pies.



Prob. 5-23

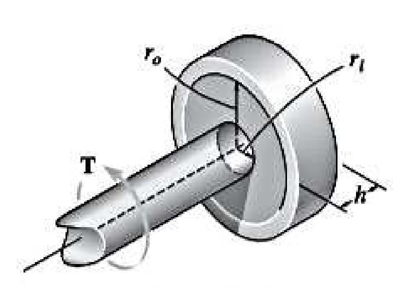
*5-24. El tubo de cobre tiene un diámetro exterior de 2.50 pulg y un diámetro interior de 2.30 pulg. Si se aprieta fuertemente a la pared en C y se le aplica un par de torsión distribuido de manera uniforme como se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante desarrollado en los puntos A y B. Estos puntos se encuentran en la superficie exterior del tubo. Dibuje el esfuerzo cortante sobre elementos de volumen ubicados en A y B.

•5-25. El tubo de cobre tiene un diámetro exterior de 2.50 pulg y un diámetro interior de 2.30 pulg. Si se aprieta fuertemente a la pared en C y se somete a un par de torsión distribuido de manera uniforme en toda su longitud, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en el tubo. Analice la validez de este resultado.



Probs. 5-24/25

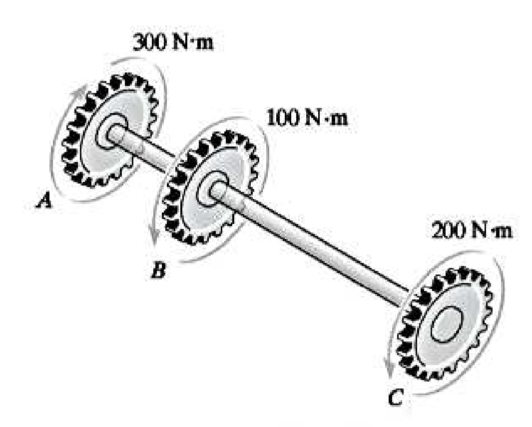
5-26. Un resorte cilíndrico consiste en un anillo de caucho pegado a un anillo rígido y a un eje. Si el anillo se mantiene fijo y se aplica un par de torsión $\mathbf{T}$ sobre el eje, determine el esfuerzo cortante máximo en el caucho.



Prob. 5-26

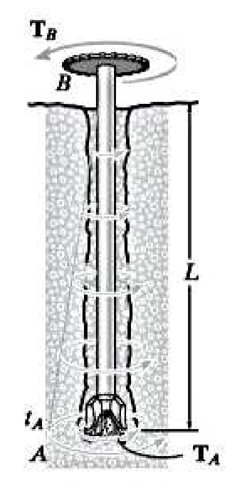
5-27. El eje de acero A-36 se sostiene mediante cojinetes lisos que le permiten girar libremente. Si los engranes se someten a los pares de torsión mostrados en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en los segmentos AB y BC. El eje tiene un diámetro de 40 mm.

***5-28.** El eje de acero A-36 se sostiene mediante cojinetes lisos que le permiten girar libremente. Si los engranes se someten a los pares de torsión mostrados en la figura, determine el diámetro requerido del eje con precisión de un milímetro si $\tau_{perm} = 60$ MPa.



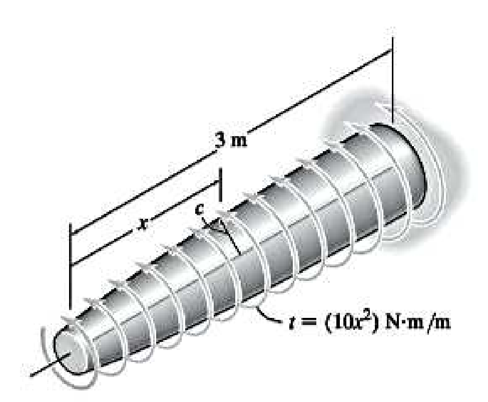
Probs. 5-27/28

•**5-29.** Cuando se perfora un pozo a una velocidad angular constante, el extremo inferior de la tubería de perforación se encuentra con una resistencia a la torsión T_A. Por otra parte, el suelo a lo largo de los lados del tubo crea un par de torsión por fricción distribuido en toda su longitud, el cual varía de manera uniforme desde cero en la superficie B hasta t_A en A. Determine el par de torsión T_B mínimo que debe suministrar la unidad de transmisión para superar a los pares de resistencia, y calcule el esfuerzo cortante máximo en la tubería. El tubo tiene un radio exterior r_o y un radio interior r_i.



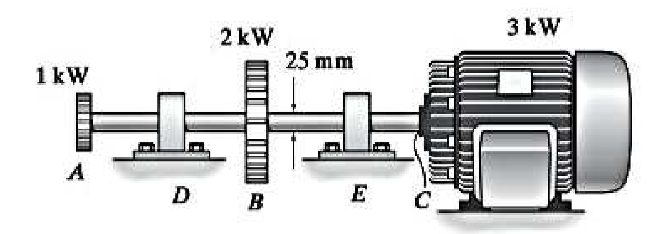
Prob. 5-29

5-30. El eje está sometido a un par de torsión distribuido en toda su longitud de $t = (10x^2)$ N · m/m, donde x se da en metros. Si el esfuerzo máximo en el eje debe mantenerse constante en 80 MPa, determine la variación requerida del radio c del eje para $0 \leq x \leq 3$ m.



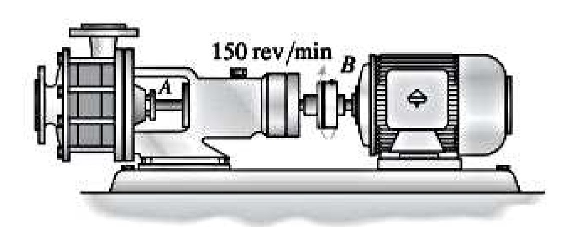
Prob. 5-30

5-31. El eje de acero sólido AC tiene un diámetro de 25 mm y se sostiene mediante cojinetes lisos en D y E. Está acoplado a un motor en C, que entrega 3 kW de potencia hacia el eje en rotación a 50 rev/s. Si los engranes A y B toman 1 kW y 2 kW, respectivamente, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje dentro de las regiones AB y BC. El eje puede girar libremente en sus cojinetes de apoyo D y E.



Prob. 5-31

***5-32.** La bomba opera usando un motor con una potencia de 85 W. Si el impulsor en B gira a 150 rev/min, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el punto A del eje de transmisión, si éste tiene 20 mm de diámetro.



Prob. 5-32

•5-33. El motor de engranaje puede desarrollar 2 hp cuando gira a 450 rev/min. Si el eje tiene un diámetro de 1 pulg, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje.

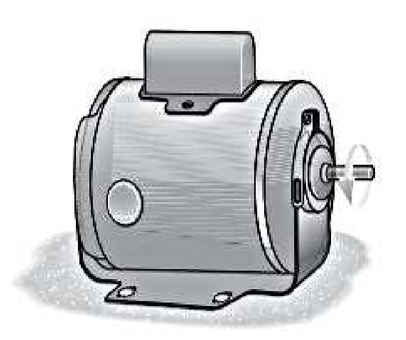
5-34. El motor de engranaje puede desarrollar 3 hp cuando gira a 150 rev/min. Si el esfuerzo cortante permisible para el eje es $\tau_{perm} = 12$ ksi, determine el diámetro más pequeño que puede usarse en el eje, considere una precisión de $\frac{1}{8}$ pulg.



Probs. 5-33/34

5-35. El eje de 25 mm de diámetro en el motor está fabricado de un material que tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 75$ MPa. Si el motor opera a su potencia máxima de 5 kW, determine la rotación mínima permisible del eje.

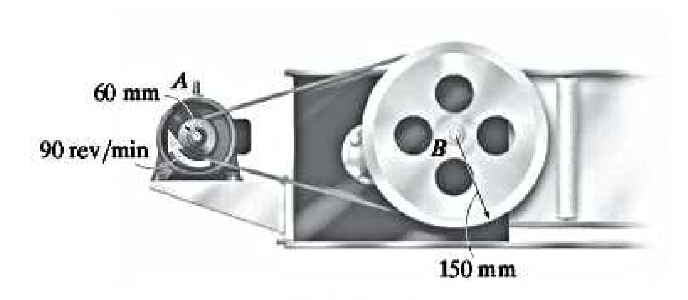
*5-36. El eje de transmisión del motor está fabricado de un material que tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} =$ 75 MPa. Si el diámetro exterior del eje tubular es de 20 mm y el grosor de la pared es de 2.5 mm, determine la potencia máxima permisible que puede suministrarse al motor cuando el eje opera a una velocidad angular de 1500 rev/min.



Probs. 5-35/36

•5-37. El eje de transmisión para la hélice de un barco gira a 1500 rev/min, mientras desarrolla 1800 hp. Si tiene 8 pies de largo y un diámetro de 4 pulg, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje causado por torsión.

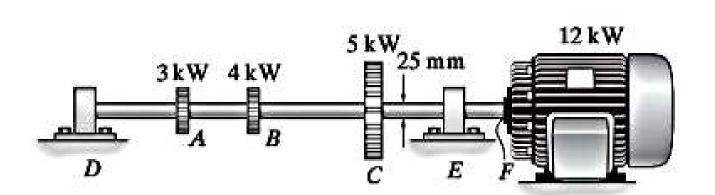
5-38. El motor A desarrolla una potencia de 300 W y tiene una polea conectada que gira a 90 rev/min. Determine los diámetros requeridos de los ejes de acero ubicados sobre las poleas en A y B si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 85$ MPa.



Prob. 5-38

5-39. El eje de acero sólido DF tiene un diámetro de 25 mm y se sostiene mediante los cojinetes lisos en D y E. Está acoplado a un motor en F, el cual entrega 12 kW de potencia hacia el eje en rotación a 50 rev/s. Si los engranes A, B y C toman 3 kW, 4 kW y 5 kW, respectivamente, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje dentro de las regiones CF y BC. El eje puede girar libremente sobre sus cojinetes de apoyo D y E.

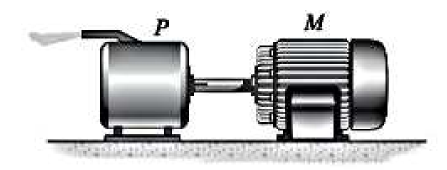
*5-40. En el problema 5-39, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto desarrollado en el eje.



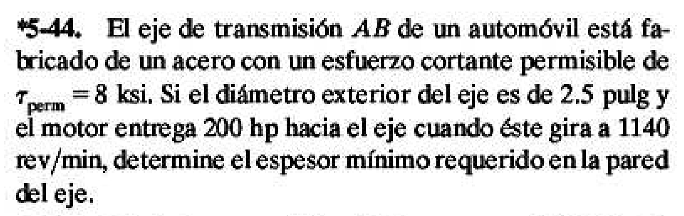
Probs. 5-39/40

•**5-41.** El eje tubular de acero A-36 tiene 2 m de largo y un diámetro exterior de 50 mm. Cuando se gira a 40 rad/s, transmite 25 kW de potencia del motor M a la bomba P. Determine el menor grosor posible del tubo si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 80$ MPa.

5-42. El eje tubular de acero A-36 tiene 2 m de largo y un diámetro exterior de 60 mm. Debe transmitir 60 kW de potencia del motor M a la bomba P. Determine la menor velocidad angular posible del eje si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 80$ MPa.

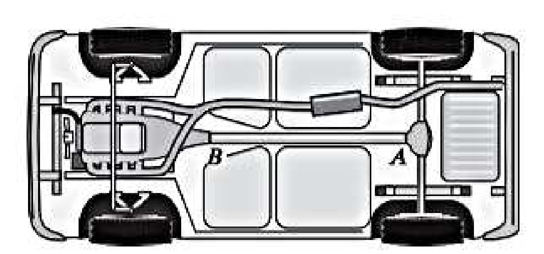


Probs. 5-41/42



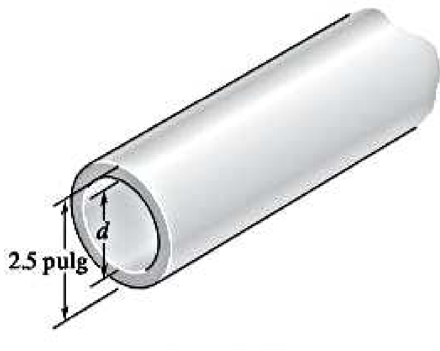
***5-44.** El eje de transmisión AB de un automóvil está fabricado de un acero con un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 8$ ksi. Si el diámetro exterior del eje es de 2.5 pulg y el motor entrega 200 hp hacia el eje cuando éste gira a 1140 rev/min, determine el espesor mínimo requerido en la pared del eje.

•**5-45.** El eje de transmisión AB de un automóvil debe diseñarse como un tubo de pared delgada. El motor entrega 150 hp cuando el eje gira a 1500 rev/min. Determine el espesor mínimo de la pared del eje si su diámetro exterior es de 2.5 pulg. El material tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 7$ ksi.



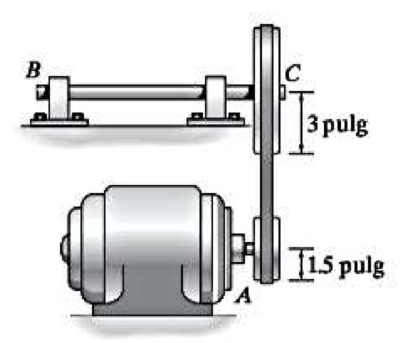
Probs. 5-44/45

5-43. Un tubo de acero con un diámetro exterior de 2.5 pulg se utiliza para transmitir 35 hp cuando gira a 2700 rev/min. Determine el diámetro interior d del tubo con una aproximación de $\frac{1}{8}$ de pulg si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 10$ ksi.



Prob. 5-43

5-46. El motor mostrado en la figura entrega 15 hp a la polea en A mientras gira a una velocidad constante de 1800 rpm. Determine, con precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg, el diámetro más pequeño posible para el eje BC, si el esfuerzo cortante permisible para el acero es $\tau_{perm} = 12$ ksi. La banda no se desliza sobre la polea.



Prob. 5-46

5.4 Ángulo de giro

Los pozos de petróleo suelen perforarse a profundidades que superan los mil metros. En consecuencia, el ángulo total de giro de una cadena de tubos de perforación puede ser sustancial y debe ser determinado.

En ocasiones, el diseño de un eje depende de la restricción de la cantidad de rotación o giro que puede ocurrir cuando el eje se somete a un par de torsión. Además, cuando se analizan las reacciones de los ejes estáticamente indeterminados, es importante poder calcular el ángulo de torsión del eje.

En esta sección se desarrollará una fórmula para determinar el ***ángulo de giro*** ϕ (phi) de un extremo de un eje con respecto a su otro extremo. Se supondrá que el eje tiene una sección transversal circular que puede variar gradualmente en toda su longitud, figura 5-14*a*. Por otra parte, se supone que el material es homogéneo y se comporta de manera elástico lineal cuando se le aplica un par de torsión. Como en el caso de una barra cargada axialmente, no se tomarán en cuenta las deformaciones localizadas que ocurren en los puntos de aplicación de los pares de torsión ni en los cambios abruptos de la sección transversal. Por el principio de Saint-Venant, estos efectos se producen dentro de pequeñas regiones de la longitud del eje y, en general, sólo tendrán un ligero efecto sobre el resultado final.

Mediante el método de las secciones, se aísla un disco diferencial de espesor dx, situado en la posición x, figura 5-14*b*. El par de torsión resultante interno es $T(x)$, ya que la carga externa puede provocar que varíe a lo largo de la línea central del eje. Debido a $T(x)$, el disco girará, de modo que la *rotación relativa* de una de sus caras con respecto a la otra es $d\phi$, figura 5-14*b*. En consecuencia, un elemento de material que se encuentre en un radio ρ arbitrario dentro del disco experimentará una deformación cortante γ. Los valores de γ y $d\phi$ se relacionan mediante la ecuación 5-1, es decir,

$$d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho} \tag{5-13}$$

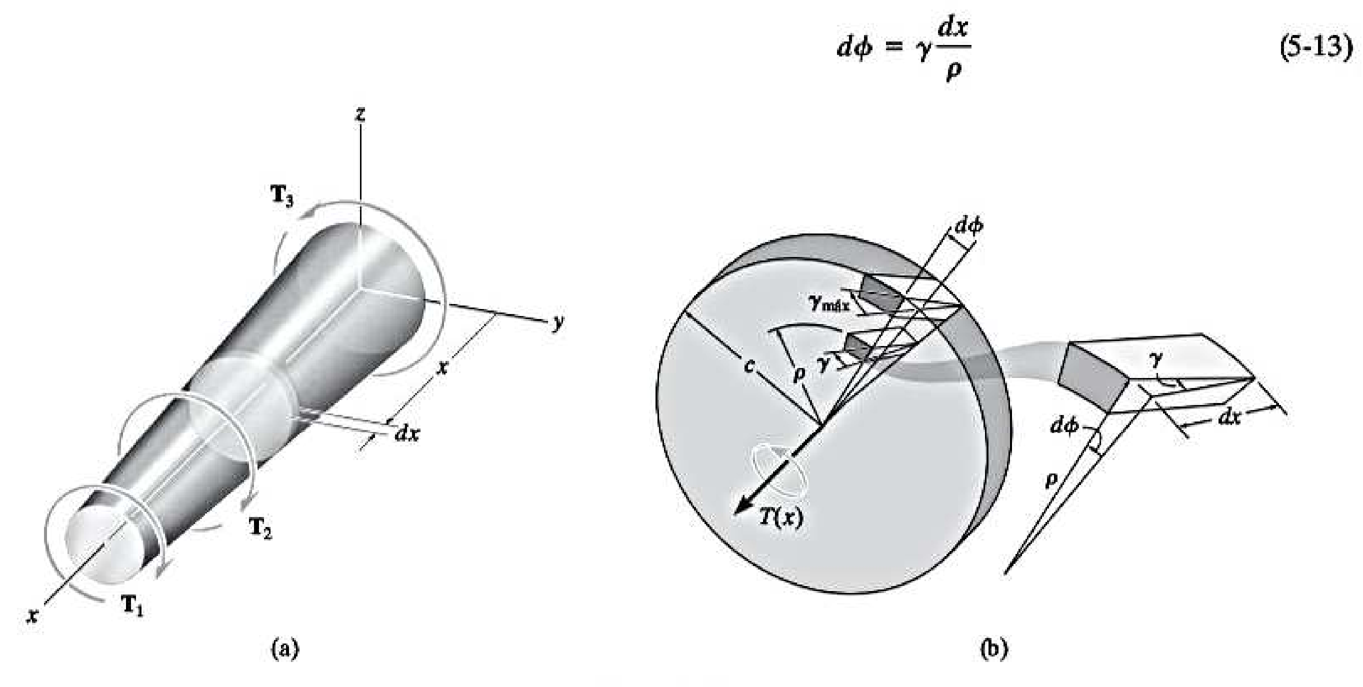


Figura 5-14

Como la ley de Hooke, $\gamma = \tau/G$, es válida y el esfuerzo cortante puede expresarse en términos del par de torsión aplicado usando la fórmula de la torsión $\tau = T(x)\rho/J(x)$, entonces $\gamma = T(x)\rho/J(x)G$. Si se sustituye esto en la ecuación 5-13, el ángulo de giro para el disco es

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G}\,dx$$

Integrando sobre toda la longitud L del eje, se obtiene el ángulo de giro para todo el eje, es decir,



$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{J(x)G} \qquad (5\text{-}14)$$

Aquí

ϕ = el ángulo de giro de un extremo del eje con respecto al otro extremo, medido en radianes

$T(x)$ = el *par de torsión interno* en la posición arbitraria x, que se encuentra mediante el método de las secciones y la ecuación de equilibrio de momentos aplicada respecto a la línea central del eje

$J(x)$ = el momento polar de inercia expresado como una función de la posición x

G = el módulo de elasticidad cortante para el material



Al calcular tanto el esfuerzo como el ángulo de giro de este barreno es necesario considerar la carga de torsión variable que actúa en toda su longitud.

Par de torsión constante y área de la sección transversal.

Por lo general, en la práctica de ingeniería el material es homogéneo, de modo que G es constante. Además, la sección transversal del eje y el par de torsión externo son constantes a lo largo del eje, figura 5-15. Si éste es el caso, el par de torsión interno $T(x) = T$, el momento polar de inercia $J(x) = J$ y la ecuación 5-14 pueden integrarse, de donde se obtiene

$$\phi = \frac{TL}{JG} \qquad (5\text{-}15)$$

Son notables las similitudes entre las dos ecuaciones anteriores y las de una barra cargada axialmente ($\delta = \int P(x)\,dx/A(x)E$ y $\delta = PL/AE$) .

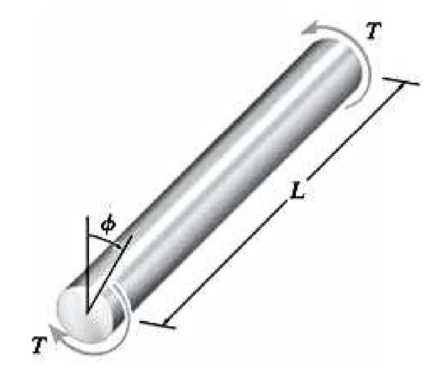


Figura 5-15

5

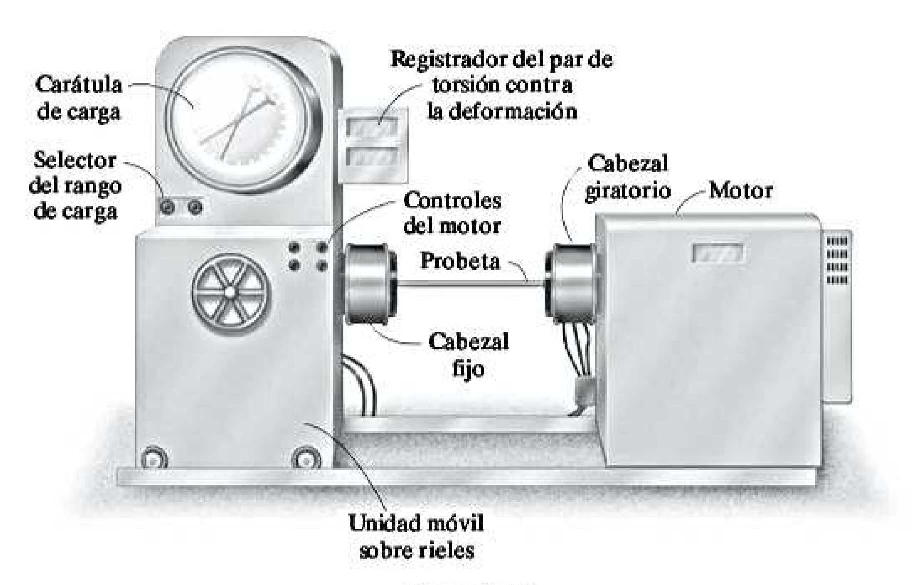


Figura 5-16

5

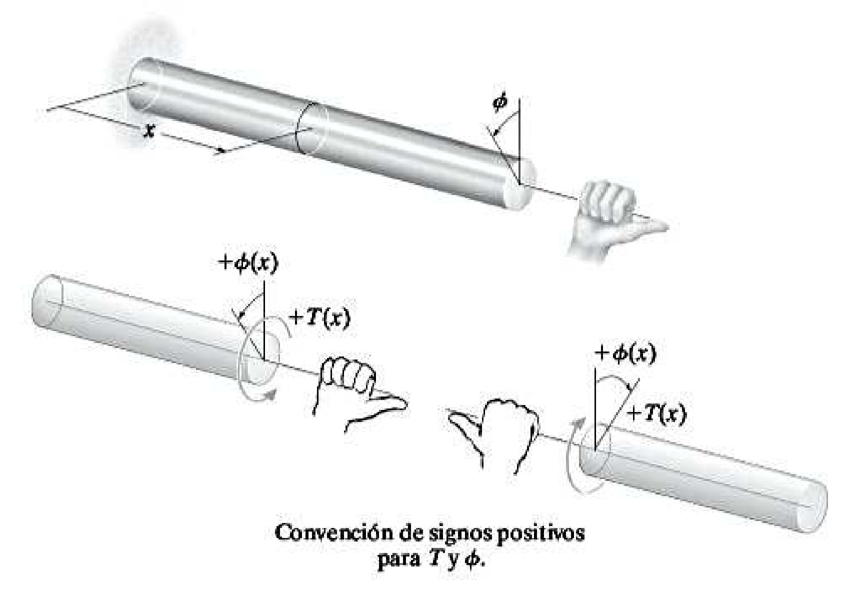
La ecuación 5-15 se utiliza con frecuencia para determinar el módulo de elasticidad cortante G de un material. Para ello, se coloca una probeta de longitud y diámetro conocidos en una máquina para ensayos de torsión, como la que se muestra en la figura 5-16. Después, se mide el par de torsión T aplicado y el ángulo de giro ϕ en toda la longitud L. Si se usa la ecuación 5-15, entonces $G = TL/J\phi$. Por lo general, para obtener un valor más confiable de G, se realizan varias de estas pruebas y se emplea el valor promedio.

Pares de torsión múltiples. Si el eje está sometido a varios pares de torsión diferentes, o el área de la sección transversal o el módulo cortante cambian abruptamente de una región del eje a otra, es posible aplicar la ecuación 5-15 a cada segmento del eje donde todas estas cantidades sean constantes. El ángulo de giro de un extremo del eje con respecto al otro se encuentra a partir de la suma vectorial de los ángulos de giro de cada segmento. Para este caso,

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG} \qquad (5\text{-}16)$$

Convención de signos. Para aplicar esta ecuación es necesario desarrollar una convención de signos, tanto para el par de torsión interno, como para el ángulo de giro de un extremo del eje con respecto al otro. Para ello, se usará la regla de la mano derecha, según la cual el par de torsión y el ángulo serán *positivos*, siempre que el *pulgar* se dirija *hacia fuera* del eje cuando los otros dedos se enroscan indicando la tendencia de rotación, figura 5-17.

Para ilustrar el uso de esta convención de signos, considere el eje mostrado en la figura 5-18*a*. Se desea determinar el ángulo de giro del extremo A con respecto al extremo D. Es necesario considerar tres segmentos del



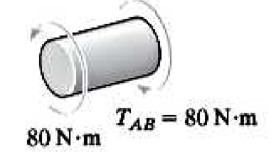
Convención de signos positivos
para T y ϕ.

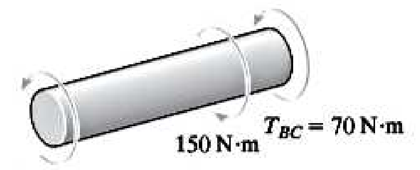
Figura 5-17

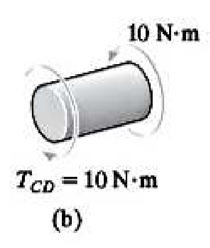
eje, ya que el par interno cambiará en B y en C. Usando el método de las secciones, se determinan los *pares de torsión internos* para cada segmento, figura 5-18*b*. Por la regla de la mano derecha, con pares de torsión positivos dirigidos en sentido opuesto al *extremo seccionado* del eje, se tiene $T_{AB} = +80$ N · m, $T_{BC} = -70$ N · m y $T_{CD} = -10$ N · m. Estos resultados también se muestran en el *diagrama de par de torsión* para el eje, figura 5-18*c*. Al aplicar la ecuación 5-16, se tiene

$$\phi_{A/D} = \frac{(+80\ \text{N}\cdot\text{m})\,L_{AB}}{JG} + \frac{(-70\ \text{N}\cdot\text{m})\,L_{BC}}{JG} + \frac{(-10\ \text{N}\cdot\text{m})\,L_{CD}}{JG}$$

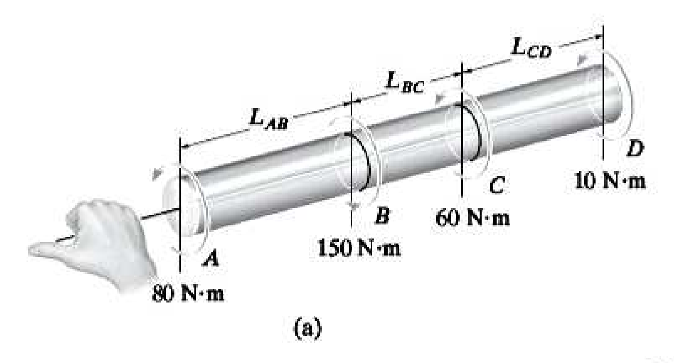
Si se sustituyen los demás datos y se encuentra que la respuesta es una cantidad *positiva*, esto significa que el extremo A girará como lo indica la curva de los dedos de la mano derecha cuando el pulgar se *alejan* del eje, figura 5-18*a*. La notación con doble subíndice se emplea para indicar el ángulo de giro relativo ($\phi_{A/D}$); sin embargo, si el ángulo de giro debe determinarse respecto a un *soporte fijo*, entonces sólo se usará un subíndice. Por ejemplo, si D es un soporte fijo, entonces el ángulo de giro se denotará con ϕ_A.



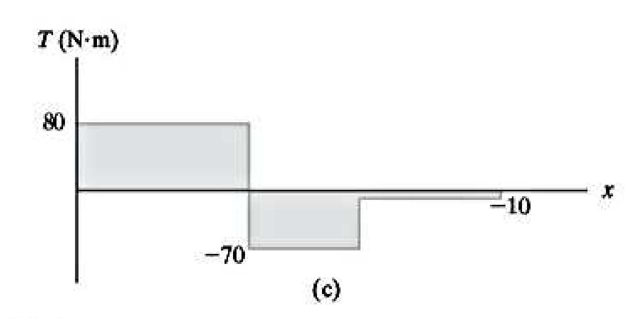




(b)



(a)



(c)

Figura 5-18

Punto importante

- Al aplicar la ecuación 5-14 para determinar el ángulo de giro, es importante que los pares aplicados no causen la cedencia del material y que el material sea homogéneo y se comporte de manera elástico lineal.

Procedimiento de análisis

El ángulo de giro de un extremo de un eje o tubo con respecto al otro extremo puede determinarse mediante el siguiente procedimiento.

Par de torsión interno.

- El *par de torsión interno* en un punto sobre la línea central del eje se encuentra utilizando el método de las secciones y la ecuación de equilibrio de momentos, aplicados a lo largo de la línea central del eje.
- Si el par de torsión varía a lo largo del eje, debe hacerse una sección en la posición arbitraria x a lo largo del eje y el *par de torsión interno* se representa como una función de x, es decir, $T(x)$.
- Si entre los extremos del eje actúan varios pares de torsión externos constantes, debe determinarse el par interno en cada *segmento* del eje, entre cualquiera de los dos pares externos. Los resultados se pueden representar de manera gráfica como un diagrama de par de torsión.

Ángulo de giro.

- Cuando el área circular de la sección transversal del eje varía a lo largo de la línea central del eje, el momento polar de inercia debe expresarse como una función de su posición x a lo largo del eje, $J(x)$.
- Si el momento polar de inercia o el par de torsión interno *cambia repentinamente* entre los extremos del eje, entonces debe aplicarse $\phi = \int (T(x)/J(x)G)\, dx$ o $\phi = TL/JG$ a *cada segmento* para el cual J, G y T sean continuas o constantes.
- Al determinar el par de torsión interno en cada segmento, asegúrese de usar una convención de signos consistente para el eje, como la que se presenta en la figura 5-17. Además asegúrese de usar un conjunto consistente de unidades cuando se realice la sustitución de datos numéricos en las ecuaciones.

5

EJEMPLO 5.5

Los engranes unidos al eje de acero que tiene un extremo fijo están sometidos a los pares de torsión que se muestran en la figura 5-19*a*. Si el módulo de elasticidad cortante es de 80 GPa y el eje tiene un diámetro de 14 mm, determine el desplazamiento del diente *P* en el engrane *A*. El eje gira libremente en el cojinete ubicado en *B*.

E; 40 N·m; D; 280 N·m; C; 0.5 m; 150 N·m; B; P; 100 mm; 0.3 m; 0.4 m; A

(a)

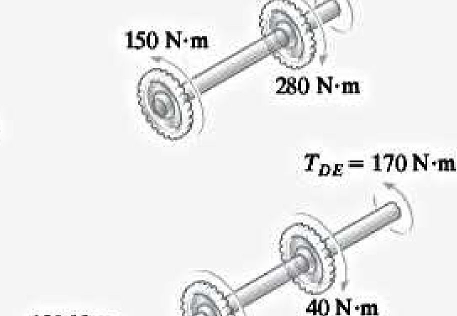
SOLUCIÓN

Par de torsión interno. Por inspección, los pares de torsión en los segmentos *AC*, *CD* y *DE* son diferentes aunque *constantes* a lo largo de cada segmento. En la figura 5-19*b* se muestran los diagramas de cuerpo libre de los segmentos adecuados del eje junto con los pares de torsión internos calculados. Utilizando la regla de la mano derecha y la convención de signos establecida de que el par de torsión positivo se dirige hacia fuera del extremo seccionado del eje, se tiene

$$T_{AC} = +150\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad T_{CD} = -130\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad T_{DE} = -170\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Estos resultados también se muestran en el diagrama de par de torsión, figura 5-19*c*.

$T_{AC} = 150$ N·m; 150 N·m



$T_{DE} = 170$ N·m; 150 N·m; 40 N·m; 280 N·m

(b)

Ángulo de giro. El momento polar de inercia para el eje es

$$J = \frac{\pi}{2}(0.007\ \text{m})^4 = 3.771(10^{-9})\ \text{m}^4$$

Si se aplica la ecuación 5-16 a cada segmento y se suman los resultados algebraicamente, se tiene

$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{(+150\ \text{N}\cdot\text{m})(0.4\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} + \frac{(-130\ \text{N}\cdot\text{m})(0.3\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} + \frac{(-170\ \text{N}\cdot\text{m})(0.5\ \text{m})}{3.771(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} = -0.2121\ \text{rad}$$

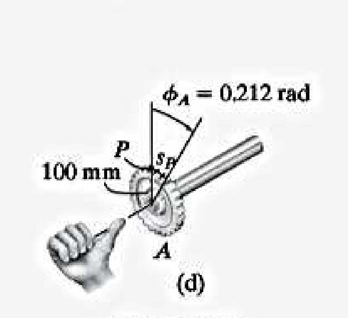
T (N·m); 150; 0; 0.4; 0.7; 1.2; x (m); −130; −170

(c)

Como la respuesta es negativa, por la regla de la mano derecha el pulgar se dirige *hacia* el extremo *E* del eje, por lo que el engrane *A* rotará como se muestra en la figura 5-19*d*.

El desplazamiento del diente *P* en el engrane *A* es

$$s_P = \phi_A r = (0.2121\ \text{rad})(100\ \text{mm}) = 21.2\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$



(d)

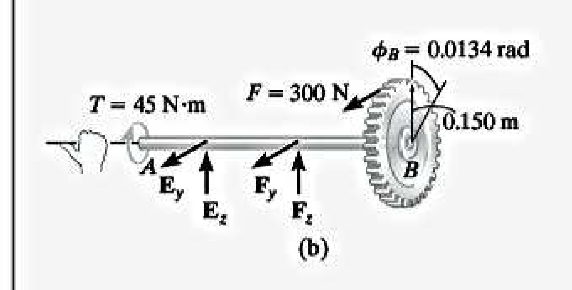
Figura 5-19

NOTA: Recuerde que este análisis sólo es válido si el esfuerzo cortante no excede el límite proporcional del material.

5

EJEMPLO 5.6

Los dos ejes sólidos de acero mostrados en la figura 5-20*a* se acoplan entre sí mediante engranes dentados. Determine el ángulo de giro del extremo *A* del eje *AB* cuando se aplica el par de torsión $T = 45$ N · m. Considere $G = 80$ GPa. El eje *AB* gira libremente en los cojinetes *E* y *F*, mientras que el eje *DC* está fijo en *D*. Cada eje tiene un diámetro de 20 mm.



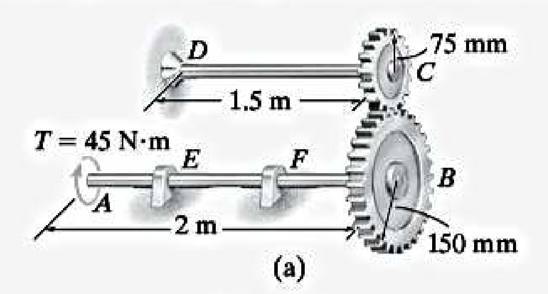
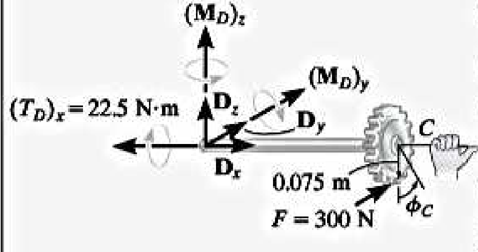


Figura 5-20



SOLUCIÓN

Par de torsión interno. En la figura 5-20*b* y 5-20*c* se muestran los diagramas de cuerpo libre para cada eje. Si se suman los momentos a lo largo de la línea central *x* del eje *AB*, se obtiene la reacción tangencial entre los engranes de $F = 45$ N · m/0.15 m = 300 N. Si se suman los momentos respecto a la línea central *x* del eje *DC*, se observa que esta fuerza crea un par de torsión de $(T_D)_x = 300$ N (0.075 m) = 22.5 N · m sobre el eje *DC*.

Ángulo de giro. Para resolver el problema, primero se calcula la rotación del engrane *C* debido al par de torsión de 22.5 N · m en el eje *DC*, figura 5-20*c*. Este ángulo de giro es

$$\phi_C = \frac{TL_{DC}}{JG} = \frac{(+22.5 \text{ N}\cdot\text{m})(1.5 \text{ m})}{(\pi/2)(0.010 \text{ m})^4[80(10^9) \text{ N/m}^2]} = +0.0269 \text{ rad}$$

Como los engranes en el extremo del eje están endentados, la rotación ϕ_C del engrane *C* ocasiona que el engrane *B* gire ϕ_B, figura 5-20*b*, donde

$$\phi_B(0.15 \text{ m}) = (0.0269 \text{ rad})(0.075 \text{ m})$$
$$\phi_B = 0.0134 \text{ rad}$$

Ahora se determinará el ángulo de giro del extremo *A* con respecto al extremo *B* del eje *AB* causado por el par de torsión de 45 N · m, figura 5-20*b*. Se tiene

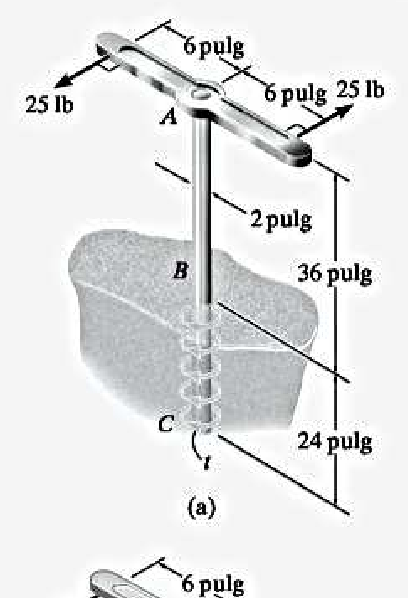
$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} = \frac{(+45 \text{ N}\cdot\text{m})(2 \text{ m})}{(\pi/2)(0.010 \text{ m})^4[80(10^9) \text{ N/m}^2]} = +0.0716 \text{ rad}$$

Por lo tanto, la rotación del extremo *A* se determina mediante la suma de ϕ_B y $\phi_{A/B}$ puesto que ambos ángulos tienen la *misma dirección*, figura 5-20*b*. Resulta

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 0.0134 \text{ rad} + 0.0716 \text{ rad} = +0.0850 \text{ rad} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 5.7

El poste de hierro fundido sólido con 2 pulg de diámetro que se muestra en la figura 5-21*a*, está enterrado 24 pulg en el suelo. Si se aplica un par de torsión sobre su parte superior mediante una llave rígida, determine el esfuerzo cortante máximo en el poste y el ángulo de giro en su parte superior. Suponga que el par de torsión está a punto de hacer girar el poste, y que el suelo ejerce una resistencia uniforme a la torsión de t lb · pulg/pulg en sus 24 pulg de longitud enterrada. Considere que $G = 5.5(10^3)$ ksi.

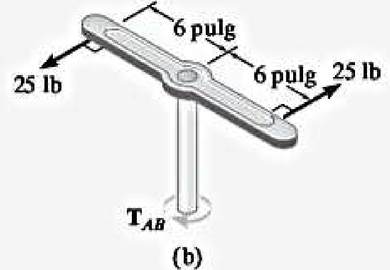


(a)

SOLUCIÓN

Par de torsión interno. El par de torsión interno en el segmento AB del poste es constante. A partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 5-21*b*, se tiene

$$\Sigma M_z = 0; \qquad T_{AB} = 25 \text{ lb } (12 \text{ pulg}) = 300 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$



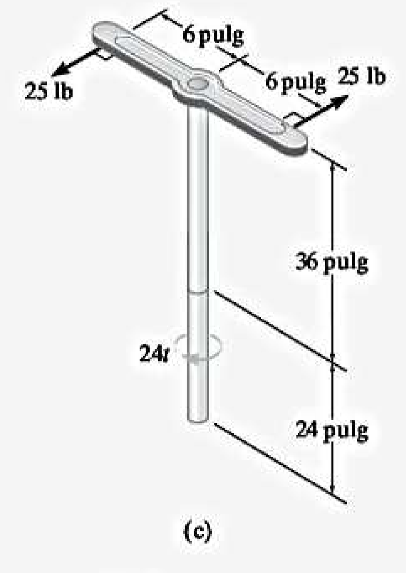
(b)

La magnitud de la distribución uniforme del par de torsión a lo largo del segmento BC enterrado puede determinarse a partir del equilibrio de todo el poste, figura 5-21*c*. Aquí,

$$\Sigma M_z = 0 \qquad 25 \text{ lb } (12 \text{ pulg}) - t(24 \text{ pulg}) = 0$$
$$t = 12.5 \text{ lb} \cdot \text{pulg/pulg}$$

Por lo tanto, a partir de un diagrama de cuerpo libre de una sección del poste ubicada en la posición x, figura 5-21*d*, se tiene

$$\Sigma M_z = 0; \qquad T_{BC} - 12.5x = 0$$
$$T_{BC} = 12.5x$$



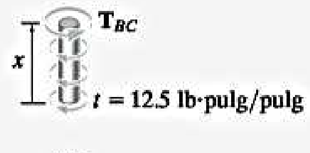
(c)

Esfuerzo cortante máximo. El esfuerzo cortante máximo ocurre en la región AB, ya que el par de torsión más grande se presenta allí y J es constante para el poste. Al aplicar la fórmula de la torsión, resulta

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T_{AB}c}{J} = \frac{(300 \text{ lb} \cdot \text{pulg})(1 \text{ pulg})}{(\pi/2)(1 \text{ pulg})^4} = 191 \text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$

Ángulo de giro. El ángulo de giro en la parte superior se puede determinar en relación con la parte inferior del poste, ya que se encuentra fija y, sin embargo, está a punto de girar. Ambos segmentos AB y BC giran, por lo que en este caso se tiene

$$\phi_A = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} + \int_0^{L_{BC}} \frac{T_{BC}\,dx}{JG}$$
$$= \frac{(300 \text{ lb} \cdot \text{pulg})\, 36 \text{ pulg}}{JG} + \int_0^{24 \text{ pulg}} \frac{12.5x\,dx}{JG}$$
$$= \frac{10\,800 \text{ lb} \cdot \text{pulg}^2}{JG} + \frac{12.5[(24)^2/2] \text{ lb} \cdot \text{pulg}^2}{JG}$$
$$= \frac{14\,400 \text{ lb} \cdot \text{pulg}^2}{(\pi/2)(1 \text{ pulg})^4\, 5500(10^3) \text{ lb/pulg}^2} = 0.00167 \text{ rad} \qquad \textit{Resp.}$$

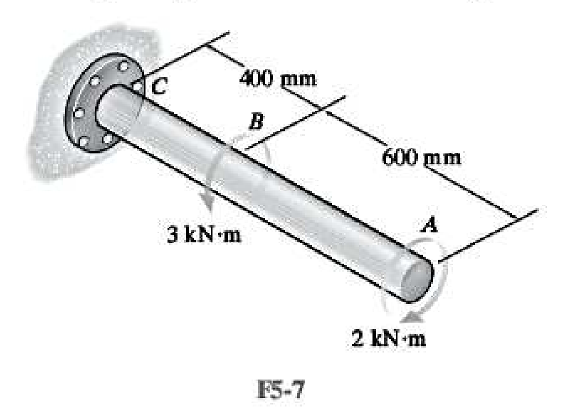


(d)

Figura 5-21

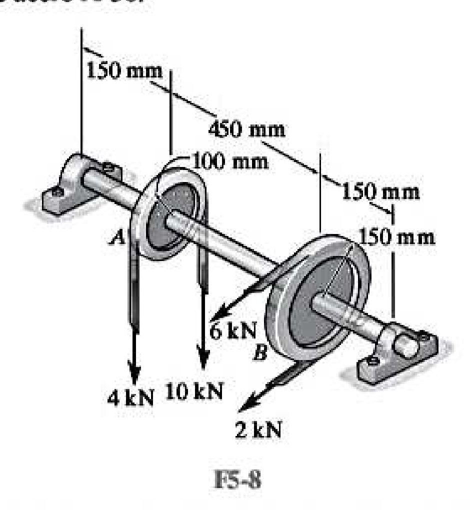
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F5-7. El eje de acero A-36 con un diámetro de 60 mm está sometido a los pares de torsión mostrados en la figura. Determine el ángulo de giro del extremo *A* con respecto a *C*.



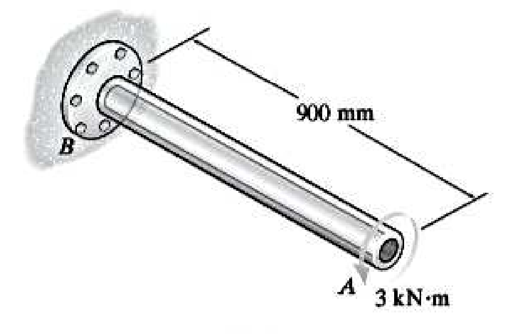
F5-7

F5-8. Determine el ángulo de giro de la rueda *B* con respecto a la rueda *A*. El eje tiene un diámetro de 40 mm y está hecho de acero A-36.



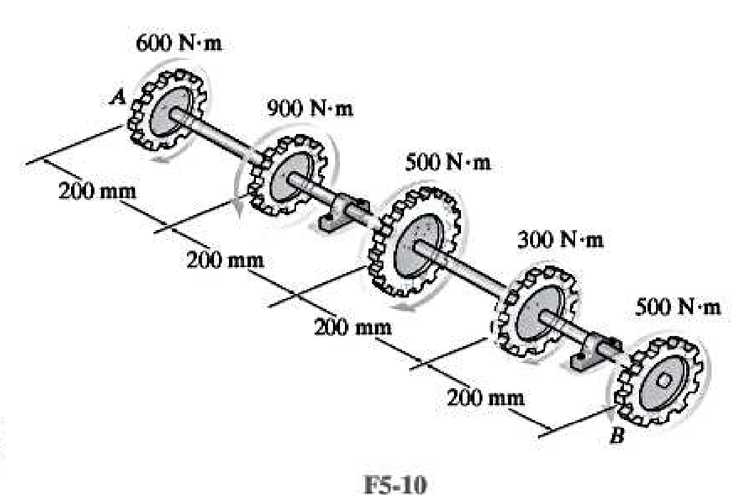
F5-8

F5-9. El eje hueco fabricado de aluminio 6061-T6 tiene radios exterior e interior de $c_o = 40$ mm y $c_i = 30$ mm, respectivamente. Determine el ángulo de giro del extremo *A*. El soporte flexible en *B* tiene una rigidez de torsión $k = 90$ kN · m/rad.



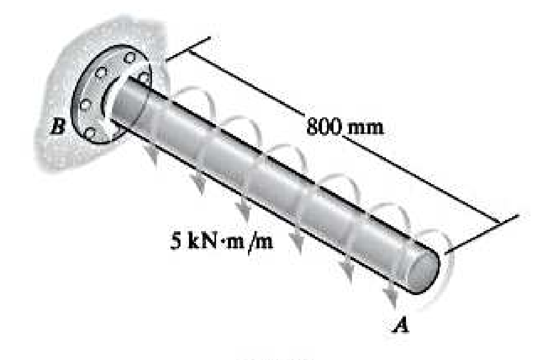
F5-9

F5-10. Una serie de engranes se montan sobre el eje de acero A-36 con un diámetro de 40 mm. Determine el ángulo de giro del engrane *B* con respecto al engrane *A*.



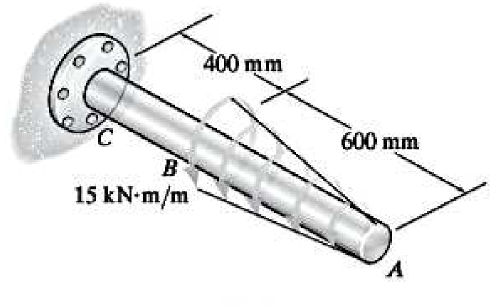
F5-10

F5-11. El eje con un diámetro de 80 mm está fabricado de acero A-36. Si se encuentra sometido al par de torsión uniformemente distribuido que se muestra en la figura, determine el ángulo de giro del extremo *A* con respecto a *B*.



F5-11

F5-12. El eje con un diámetro de 80 mm está fabricado de acero A-36. Si se encuentra sometido a la carga distribuida triangular que se muestra en la figura, determine el ángulo de giro del extremo *A* con respecto a *C*.



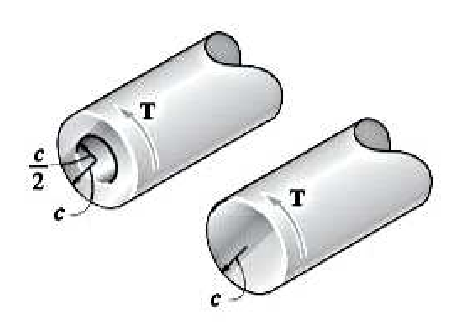
F5-12

5

PROBLEMAS

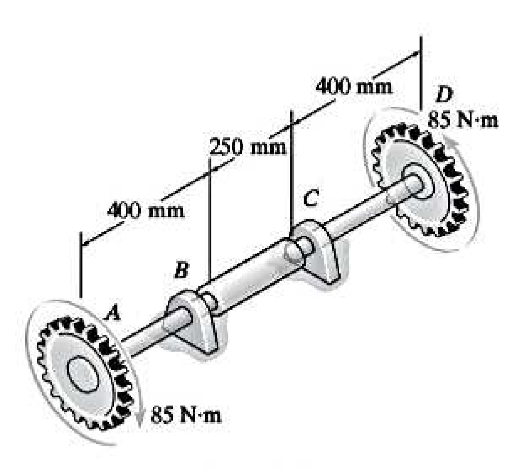
5-47. Las hélices de un barco están conectadas a un eje de acero A-36, que tiene 60 m de largo, un diámetro exterior de 340 mm y un diámetro interior de 260 mm. Si la potencia de salida es de 4.5 MW cuando el eje gira a 20 rad/s, determine el esfuerzo de torsión máximo en el eje y el ángulo de giro.

***5-48.** Un eje se somete a un par de torsión **T**. Compare la efectividad de utilizar el tubo mostrado en la figura contra la de una barra con sección sólida y radio c. Para ello, calcule el porcentaje de aumento en el esfuerzo de torsión y el ángulo de giro por unidad de longitud para el tubo frente a la barra de sección sólida.



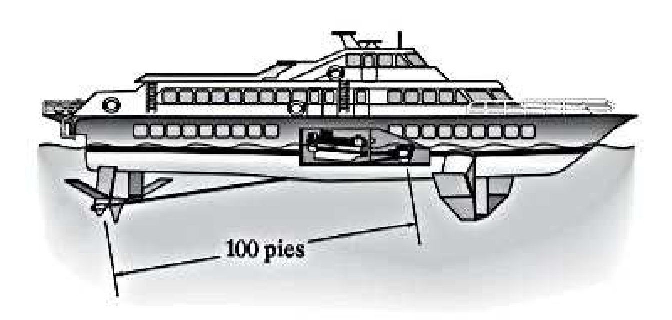
Prob. 5-48

•5-49. La flecha de acero A-36 está fabricada con los tubos AB y CD y con una barra de sección sólida BC. Se apoya en los cojinetes lisos que le permiten girar libremente. Si los engranes, fijos en sus extremos, se someten a un par de torsión de 85 N · m, determine el ángulo de giro del engrane A en relación con el engrane D. Los tubos tienen un diámetro exterior de 30 mm y un diámetro interior de 20 mm. La sección sólida tiene un diámetro de 40 mm.



Prob. 5-49

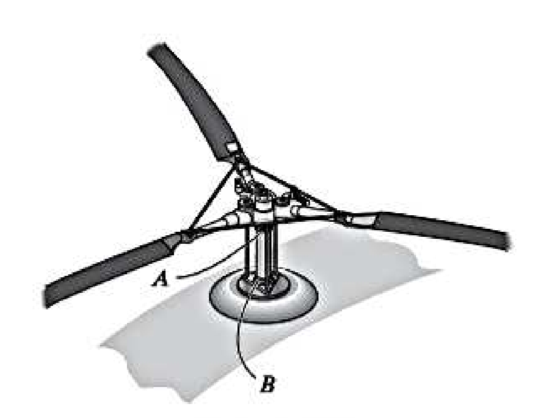
5-50. El barco con hidroalas tiene un eje propulsor de acero A-36 con 100 pies de largo. Está conectado a un motor diesel en línea que genera una potencia máxima de 2500 hp y hace que el eje gire a 1700 rpm. Si el diámetro exterior del eje es de 8 pulg y el grosor de la pared es $\frac{3}{8}$ de pulg, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje. Además, ¿cuál es la "inclinación", o el ángulo de giro en el eje cuando el barco viaja a toda potencia?



Prob. 5-50

5-51. El motor de un helicóptero entrega 600 hp al eje del rotor AB cuando la hélice está girando a 1200 rev/min. Determine con precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg el diámetro del eje AB si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 8$ ksi y las vibraciones limitan el ángulo de torsión del eje a 0.05 rad. El eje tiene 2 pies de largo y está fabricado de acero L2.

***5-52.** El motor de un helicóptero entrega 600 hp al eje del rotor AB cuando la hélice está girando a 1200 rev/min. Determine con precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg el diámetro del eje AB si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 10.5$ ksi y las vibraciones limitan el ángulo de torsión del eje a 0.05 rad. El eje tiene 2 pies de largo y está fabricado de acero L2.



Probs. 5-51/52

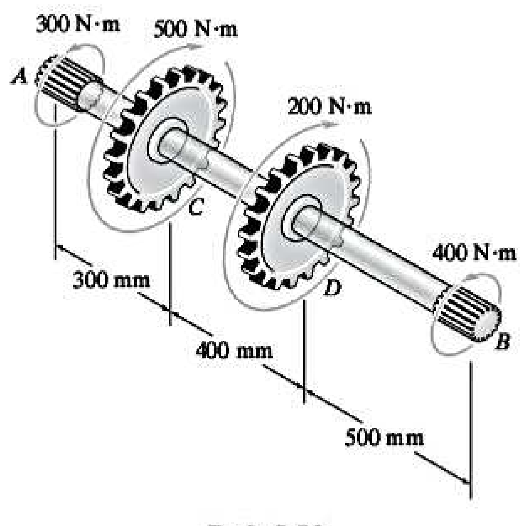
5

•5-53. El eje de acero A-36 con un diámetro de 20 mm está sometido a los pares de torsión mostrados en la figura. Determine el ángulo de giro del extremo *B*.

A
D
C
B
30 N·m
200 mm
600 mm
20 N·m
800 mm
80 N·m

Prob. 5-53

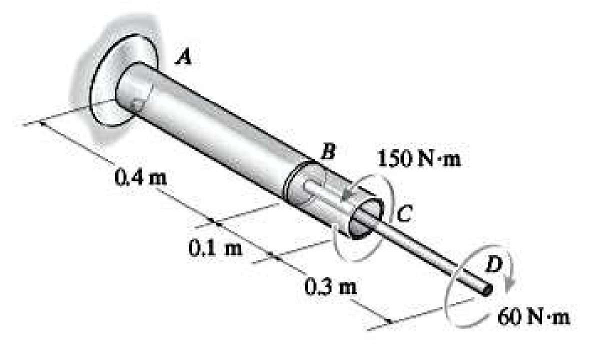
*5-56. Los extremos estriados y los engranes unidos al eje de acero A-36 se encuentran sometidos a los pares de torsión que se muestran en la figura. Determine el ángulo de giro del extremo *B* con respecto al extremo *A*. El eje tiene un diámetro de 40 mm.



Prob. 5-56

5-54. El ensamble está fabricado de acero A-36 y consiste en una barra sólida de 20 mm de diámetro, la cual se encuentra fija en el interior de un tubo mediante un disco rígido en *B*. Determine el ángulo de giro en *D*. El tubo tiene un diámetro exterior de 40 mm y el grosor de la pared es de 5 mm.

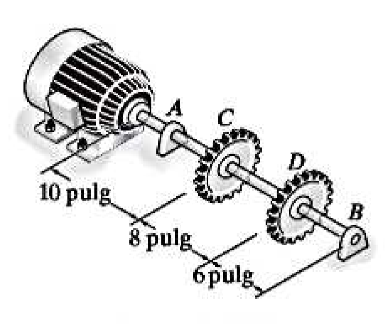
5-55. El ensamble está fabricado de acero A-36 y consiste en una barra sólida de 20 mm de diámetro, la cual se encuentra fija en el interior de un tubo mediante un disco rígido en *B*. Determine el ángulo de giro en *C*. El tubo tiene un diámetro exterior de 40 mm y el grosor de la pared es de 5 mm.



Probs. 5-54/55

•5-57. El motor entrega 40 hp al eje de acero inoxidable 304, mientras gira a 20 Hz. El eje se sostiene sobre cojinetes lisos en *A* y *B*, los cuales permiten la rotación libre del eje. Los engranes *C* y *D* fijos al eje toman 25 y 15 hp, respectivamente. Determine el diámetro del eje con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 8$ ksi y el ángulo de giro permisible de *C* con respecto a *D* es de 0.20°.

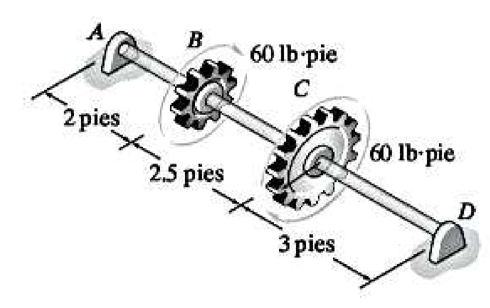
5-58. El motor entrega 40 hp al eje de acero inoxidable 304, mientras gira a 20 Hz. El eje tiene un diámetro de 1.5 pulg y se sostiene sobre cojinetes lisos en *A* y *B*, los cuales permiten la rotación libre del eje. Los engranes *C* y *D* fijos al eje toman 25 y 15 hp, respectivamente. Determine el esfuerzo máximo absoluto en el eje y el ángulo de giro del engrane *C* con respecto al engrane *D*.



Probs. 5-57/58

5-59. El eje está fabricado de acero A-36. Tiene un diámetro de 1 pulg y se apoya en los cojinetes *A* y *D*, los cuales permiten su rotación libre. Determine el ángulo de giro de *B* con respecto a *D*.

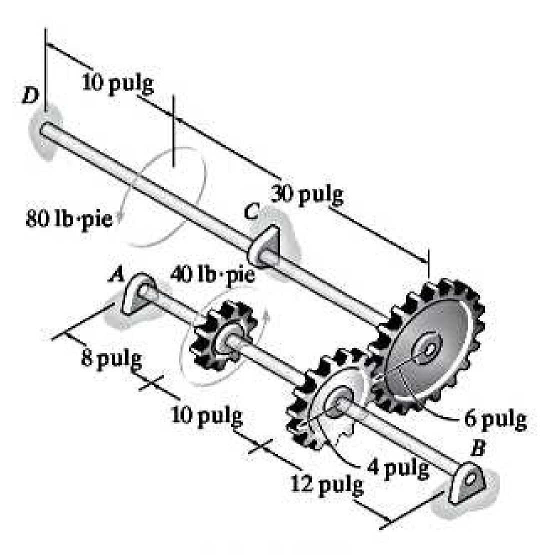
***5-60.** El eje está hecho de acero A-36. Tiene un diámetro de 1 pulg y se apoya en los cojinetes *A* y *D*, los cuales permiten su rotación libre. Determine el ángulo de giro del engrane *C* con respecto a *B*.



Probs. 5-59/60

•**5-61.** Los dos ejes están fabricados de acero A-36. Cada uno tiene un diámetro de 1 pulg y se apoyan en los cojinetes *A*, *B* y *C*, que permiten su rotación libre. Si el apoyo en *D* está fijo, determine el ángulo de giro del extremo *B* cuando se aplican los pares de torsión sobre el ensamble como se muestra en la figura.

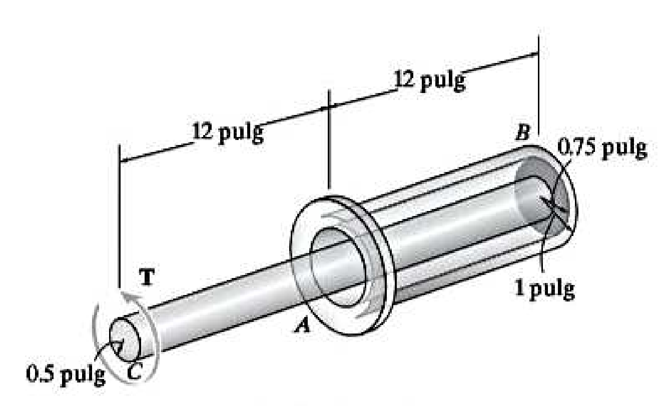
5-62. Los dos ejes están fabricados de acero A-36. Cada uno tiene un diámetro de 1 pulg y se apoyan en los cojinetes *A*, *B* y *C*, que permiten su rotación libre. Si el apoyo en *D* está fijo, determine el ángulo de giro del extremo *A* cuando se aplican los pares de torsión sobre el ensamble como se muestra en la figura.



Probs. 5-61/62

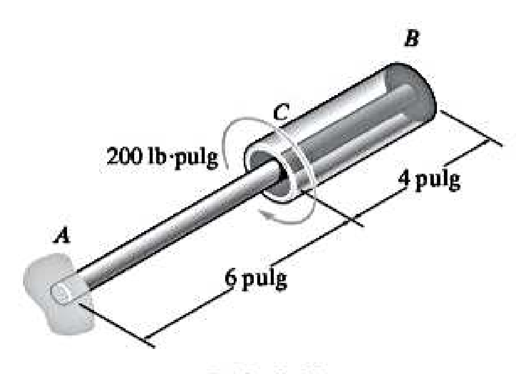
5-63. El dispositivo actúa como un resorte de torsión compacto. Está fabricado de acero A-36 y se compone de un eje interior sólido *CB* que está rodeado y sujeto a un tubo *AB* mediante un anillo rígido en *B*. El anillo en *A* también se puede suponer rígido y está fijo respecto a la rotación. Si se aplica un par de torsión $T = 2$ kip · pulg sobre el eje, determine el ángulo de giro en el extremo *C* y el esfuerzo cortante máximo en el tubo y el eje.

***5-64.** El dispositivo actúa como un resorte de torsión compacto. Está hecho de acero A-36 y se compone de un eje interior sólido *CB* que está rodeado y sujeto a un tubo *AB* mediante un anillo rígido en *B*. El anillo en *A* también se puede suponer rígido y está fijo respecto a la rotación. Si el esfuerzo cortante permisible para el material es $\tau_{perm} = 12$ ksi y el ángulo de giro en *C* está limitado a $\phi_{perm} = 3°$, determine el par de torsión máximo *T* que puede aplicarse sobre el extremo *C*.



Probs. 5-63/64

•**5-65.** El ensamble de acero A-36 consiste en un tubo con un radio exterior de 1 pulg y un grosor de pared de 0.125 pulg. Está conectado al eje sólido *AB* de 1 pulg de diámetro mediante una placa rígida en *B*. Determine la rotación del extremo *C* del tubo si sobre éste se aplica un par de torsión de 200 lb · pulg. El extremo *A* del eje está empotrado.

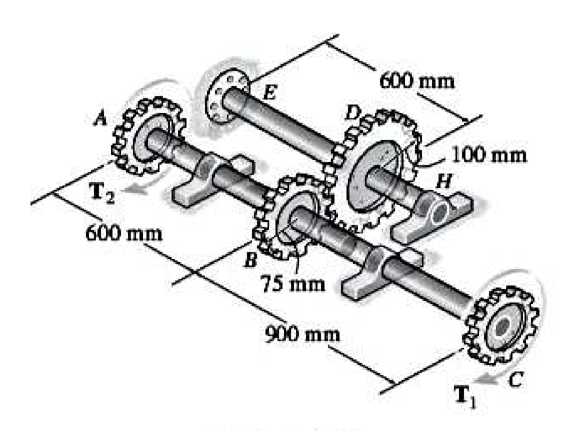


Prob. 5-65

5

5-66. El eje ABC de 60 mm de diámetro se encuentra apoyado en dos chumaceras, mientras que el eje EH con un diámetro de 80 mm está fijo en E y se apoya sobre una chumacera en H. Si $T_1 = 2$ kN · m y $T_2 = 4$ kN · m, determine el ángulo de giro de los engranes A y C. Los ejes están fabricados de acero A-36.

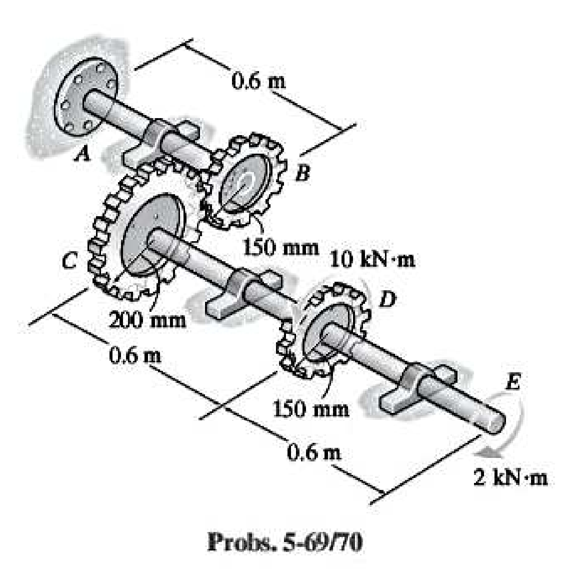
5-67. El eje ABC con un diámetro de 60 mm se encuentra apoyado en dos chumaceras, mientras que el eje EH con un diámetro de 80 mm está fijo en E y se apoya sobre una chumacera en H. Si el ángulo de giro en los engranes A y C debe ser de 0.04 rad, determine las magnitudes de los esfuerzos de torsión T_1 y T_2. Los ejes están hechos de acero A-36.



Probs. 5-66/67

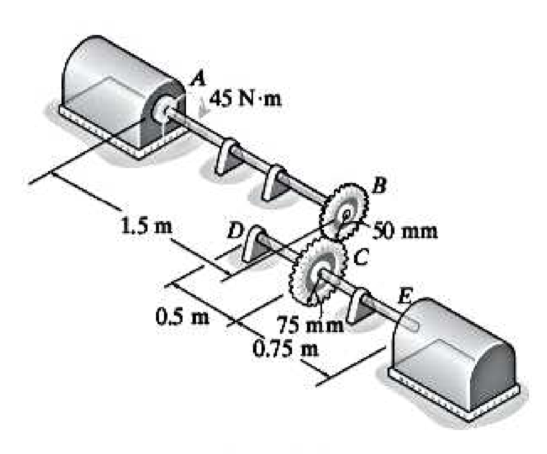
•5-69. Los ejes son de acero A-36 y cada uno tiene un diámetro de 80 mm. Determine el ángulo de giro en el extremo E.

5-70. Los ejes son de acero A-36 y cada uno tiene un diámetro de 80 mm. Determine el ángulo de giro del engrane D.



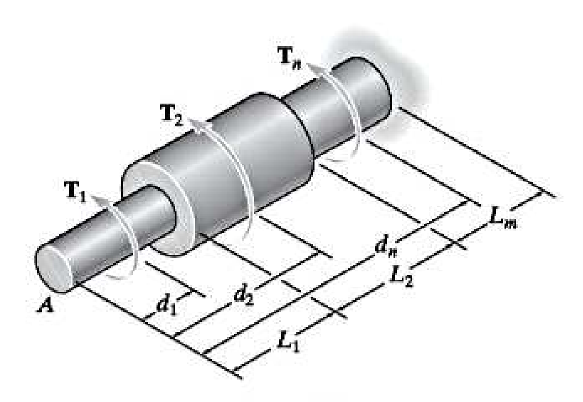
Probs. 5-69/70

***5-68.** Los ejes con un diámetro de 30 mm están fabricados con acero para herramienta L2 y se apoyan sobre cojinetes que permiten una rotación libre del eje. Si el motor en A desarrolla un par de torsión $T = 45$ N · m en el eje AB, mientras que la turbina en E se encuentra fija respecto a la rotación, determine cuánto giran los engranes B y C.



Prob. 5-68

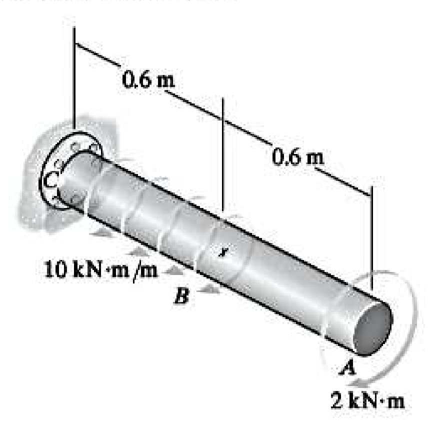
5-71. Considere el problema general de un eje circular formado con m segmentos, cada uno de los cuales con un radio de c_m y un módulo cortante G_m. Si se aplican n pares de torsión sobre el eje, como se muestra en la figura, escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para determinar el ángulo de giro de su extremo A. Muestre una aplicación del programa utilizando los valores $L_1 = 0.5$ m, $c_1 = 0.02$ m, $G_1 = 30$ GPa, $L_2 = 1.5$ m, $c_2 = 0.05$ m, $G_2 = 15$ GPa, $T_1 = -450$ N · m, $d_1 = 0.25$ m, $T_2 = 600$ N · m, $d_2 = 0.8$ m.



Prob. 5-71

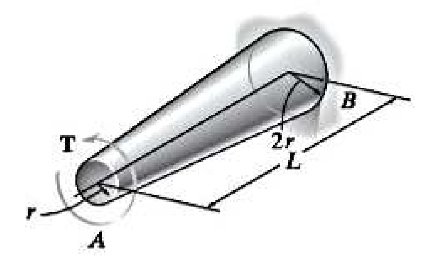
5

*5-72. El eje que tiene un diámetro de 80 mm está fabricado de una aleación de aluminio 6061-T6 y se encuentra sometido a las cargas de torsión mostradas. Determine el ángulo de giro en el extremo A.



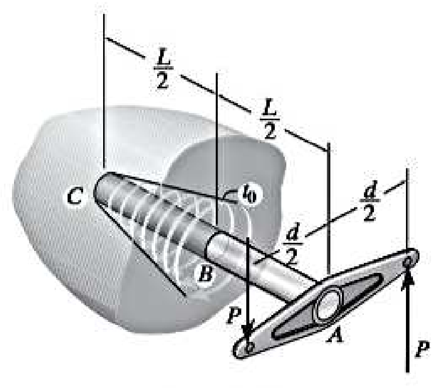
Prob. 5-72

•5-73. El eje cónico tiene una longitud L, un radio r en el extremo A y un radio $2r$ en el extremo B. Si se encuentra fijo en el extremo B y está sometido a un par de torsión T, determine el ángulo de giro del extremo A. El módulo cortante es G.



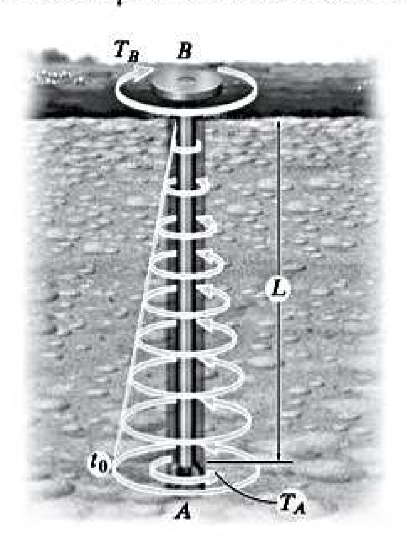
Prob. 5-73

5-74. La barra ABC de radio c está empotrada en un medio donde el par de torsión distribuido varía linealmente desde cero en C hasta t_0 en B. Si se aplican las fuerzas de par P sobre el brazo de la palanca, determine el valor de t_0 necesario para el equilibrio. Además, encuentre el ángulo de torsión del extremo A. La barra está fabricada de un material con módulo cortante G.



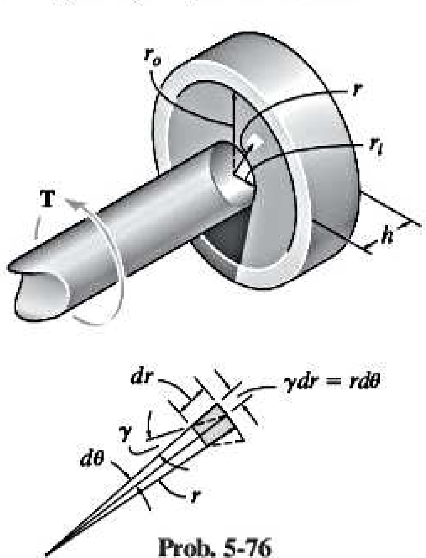
Prob. 5-74

5-75. Al perforar un pozo, se supone que el extremo profundo de la tubería de perforación encuentra una resistencia a la torsión T_A. Por otra parte, la fricción del suelo a lo largo de los lados del tubo crea una distribución lineal del par de torsión por unidad de longitud que varía desde cero en la superficie B hasta t_0 en A. Determine el par de torsión necesario T_B que debe suministrar la unidad propulsora para girar la tubería. Además, ¿cuál es el ángulo relativo de giro de un extremo de la tubería con respecto al otro extremo cuando el tubo está a punto de girar? El tubo tiene un radio exterior r_o y un radio interior r_i. El módulo cortante es G.



Prob. 5-75

*5-76. Un resorte cilíndrico consiste en un anillo de caucho unido a un anillo rígido y a un eje. Si el anillo se mantiene fijo y se aplica un par de torsión sobre el eje rígido, determine el ángulo de giro del eje. El módulo cortante del caucho es G. *Sugerencia:* Como se muestra en la figura, la deformación del elemento en el radio r puede determinarse a partir de $r d\theta = d r \gamma$. Para obtener el resultado, utilice esta expresión junto con $\tau = T/(2\pi r^2 h)$ del problema 5-26.



Prob. 5-76

(a)

5.5 Elementos cargados con pares de torsión estáticamente indeterminados

Un eje cargado a torsión puede clasificarse como estáticamente indeterminado si la ecuación de equilibrio de momentos, aplicada sobre la línea central del eje, no sirve para determinar los pares de torsión desconocidos que actúan sobre éste. En la figura 5-22*a* se presenta un ejemplo de esta situación. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 5-22*b*, los pares de torsión reactivos en los apoyos A y B no se conocen. Se requiere que

$$\Sigma M_x = 0; \qquad T - T_A - T_B = 0$$

A fin de obtener una solución, se utilizará el método de análisis estudiado en la sección 4.4. La condición necesaria de compatibilidad, o condición cinemática, requiere que el ángulo de giro de un extremo del eje con respecto al otro sea igual a cero, ya que los soportes extremos están fijos. Por lo tanto,

$$\phi_{A/B} = 0$$

Siempre que el material sea elástico lineal, es posible aplicar la relación carga-desplazamiento $\phi = TL/JG$ para expresar la condición de compatibilidad en términos de los pares de torsión desconocidos. Considerando que el par de torsión interno en el segmento AC es $+T_A$ y en el segmento CB es $-T_B$, figura 5-22*c*, se tiene

$$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0$$

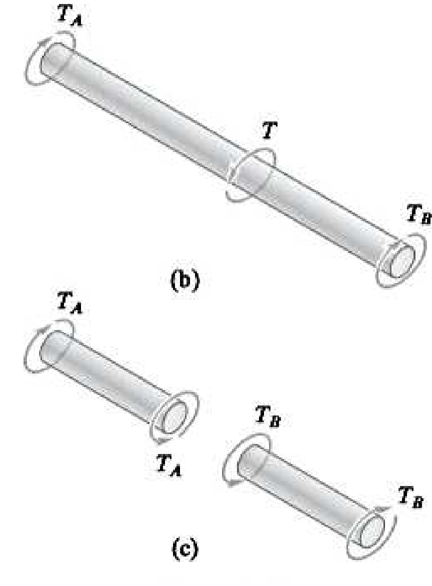


Figura 5-22

Al despejar las reacciones de estas dos ecuaciones y considerando que $L = L_{AC} + L_{BC}$, resulta

$$T_A = T\left(\frac{L_{BC}}{L}\right) \quad \text{y} \quad T_B = T\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Procedimiento de análisis

Los pares de torsión desconocidos en ejes estáticamente indeterminados pueden calcularse al satisfacer las condiciones de equilibrio, compatibilidad y los requisitos par desplazamiento en el eje.

Equilibrio.

- Dibuje un diagrama de cuerpo libre del eje con el fin de identificar todos los pares de torsión externos que actúan sobre éste. A continuación, escriba la ecuación de equilibrio de momentos respecto a la línea central del eje.

Compatibilidad.

- Escriba la ecuación de compatibilidad entre dos puntos a lo largo del eje. Tenga en consideración la manera en que los soportes restringen al eje cuando éste gira.
- Exprese los ángulos de giro en la condición de compatibilidad en términos de los pares de torsión, usando una relación para el desplazamiento y el par de torsión, tal como $\phi = TL/JG$.
- Despeje los pares de torsión reactivos desconocidos de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Si cualquiera de las magnitudes tiene un valor numérico negativo, indica que este par de torsión actúa en sentido contrario a la dirección mostrada en el diagrama de cuerpo libre.

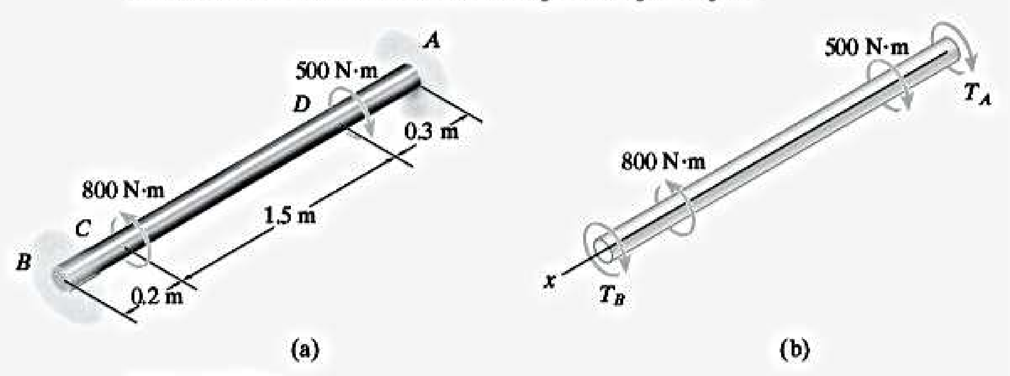


El eje de esta máquina de corte se encuentra fijo en sus extremos y está sometido a un par de torsión en su centro, lo que le permite actuar como un resorte de torsión.

5

EJEMPLO 5.8

El eje sólido de acero que se muestra en la figura 5-23*a* tiene un diámetro de 20 mm. Si está sometido a los dos pares de torsión mostrados, determine las reacciones en los soportes fijos *A* y *B*.



SOLUCIÓN

Equilibrio. Al revisar el diagrama de cuerpo libre de la figura 5-23*b*, puede observarse que el problema es estáticamente indeterminado ya que sólo existe *una* ecuación de equilibrio disponible y hay dos incógnitas. Se requiere

$$\Sigma M_x = 0; \qquad -T_B + 800\ \text{N}\cdot\text{m} - 500\ \text{N}\cdot\text{m} - T_A = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidad. Como los extremos del eje están fijos, el ángulo de giro de un extremo del eje con respecto al otro debe ser igual a cero. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad se convierte en

$$\phi_{A/B} = 0$$

Esta condición puede expresarse en términos de los momentos de torsión desconocidos utilizando la relación carga-desplazamiento, $\phi = TL/JG$. Aquí hay tres regiones del eje donde el par de torsión interno es constante. En los diagramas de cuerpo libre de la figura 5-23*c* se muestran los pares de torsión internos que actúan en los segmentos de la izquierda del eje, los cuales fueron seccionados en cada una de estas regiones. De esta manera el par de torsión interno sólo está en función de T_B. Usando la convención de signos establecida en la sección 5.4, se tiene

$$\frac{-T_B(0.2\ \text{m})}{JG} + \frac{(800 - T_B)(1.5\ \text{m})}{JG} + \frac{(300 - T_B)(0.3\ \text{m})}{JG} = 0$$

de modo que

$$T_B = 645\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Con base en la ecuación 1,

$$T_A = -345\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{T}_A$ actúa en dirección opuesta a la mostrada en la figura 5-23*b*.

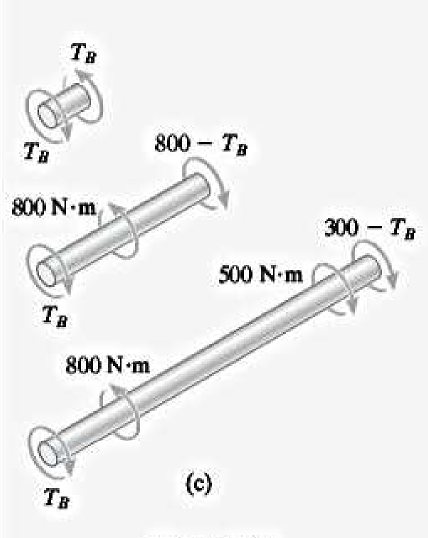


Figura 5-23

EJEMPLO 5.9

El eje mostrado en la figura 5-24*a* está fabricado de un tubo de acero que se encuentra unido a un núcleo de latón. Si se aplica un par de torsión $T = 250$ lb · pie sobre su extremo libre, grafique la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de una línea radial del área de su sección transversal. Considere $G_{st} = 11.4(10^3)$ ksi, $G_{br} = 5.20\,(10^3)$ ksi.

SOLUCIÓN

Equilibrio. En la figura 5-24*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre del eje. La reacción en la pared se ha representado mediante la cantidad desconocida de par de torsión resistida por el acero, T_{st}, y por el latón, T_{br}. Empleando unidades de libras y pulgadas, el equilibrio requiere

$$-T_{st} - T_{br} + (250 \text{ lb}\cdot\text{pie})(12 \text{ pulg/pie}) = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidad. Se requiere que el ángulo de giro del extremo A sea igual tanto para el acero como para el latón, ya que están unidos entre sí. Por lo tanto,

$$\phi = \phi_{st} = \phi_{br}$$

Si se aplica la relación carga-desplazamiento, $\phi = TL/JG$,

$$\frac{T_{st}\,L}{(\pi/2)[(1 \text{ pulg})^4 - (0.5 \text{ pulg})^4]11.4(10^3) \text{ kip/pulg}^2} = \frac{T_{br}L}{(\pi/2)(0.5 \text{ pulg})^4\, 5.20(10^3) \text{ kip/pulg}^2}$$

$$T_{st} = 32.88\,T_{br} \qquad (2)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 2, se obtiene

$$T_{st} = 2911.5 \text{ lb}\cdot\text{pulg} = 242.6 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

$$T_{br} = 88.5 \text{ lb}\cdot\text{pulg} = 7.38 \text{ lb}\cdot\text{pie}$$

El esfuerzo cortante en el núcleo de latón varía desde cero en su centro hasta un máximo en la interfaz donde hace contacto con el tubo de acero. Utilizando la fórmula de la torsión,

$$(\tau_{br})_{máx} = \frac{(88.5 \text{ lb}\cdot\text{pulg})(0.5 \text{ pulg})}{(\pi/2)(0.5 \text{ pulg})^4} = 451 \text{ psi}$$

Para el acero, los esfuerzos cortantes mínimo y máximo son

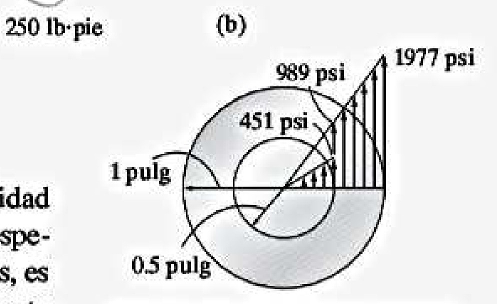
$$(\tau_{st})_{mín} = \frac{(2911.5 \text{ lb}\cdot\text{pulg})(0.5 \text{ pulg})}{(\pi/2)[(1 \text{ pulg})^4 - (0.5 \text{ pulg})^4]} = 989 \text{ psi}$$

$$(\tau_{st})_{máx} = \frac{(2911.5 \text{ lb}\cdot\text{pulg})(1 \text{ pulg})}{(\pi/2)[(1 \text{ pulg})^4 - (0.5 \text{ pulg})^4]} = 1977 \text{ psi}$$

Los resultados se grafican en la figura 5-24*c*. Observe la discontinuidad del *esfuerzo cortante* en la interfaz de latón y el acero. Esto era de esperarse, puesto que los materiales tienen módulos de rigidez diferentes, es decir, el acero es más rígido que el latón ($G_{ac} > G_{br}$) y por lo tanto soporta más esfuerzo cortante en la interfaz. Aunque aquí el esfuerzo cortante es discontinuo, la *deformación cortante* no lo es. Por el contrario, la deformación cortante es la *misma* tanto para el latón como para el acero.

(a)

(b)



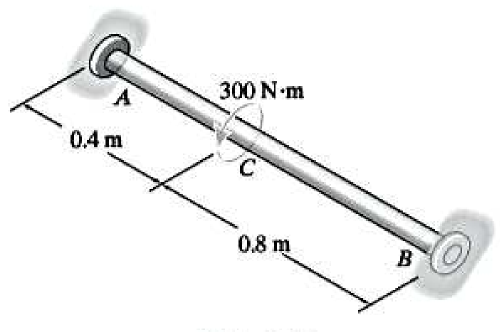
Distribución del esfuerzo cortante

(c)

Figura 5-24

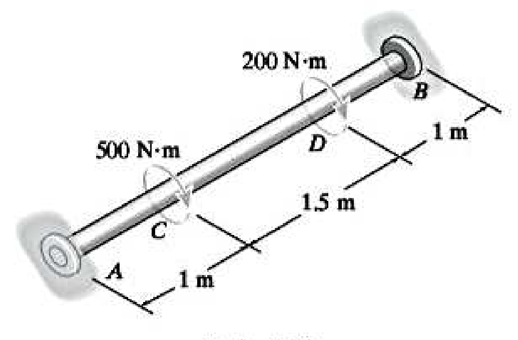
PROBLEMAS

•**5-77.** El eje de acero A-36 tiene un diámetro de 50 mm y se encuentra fijo en sus extremos A y B. Si se somete al par de torsión mostrado, determine el esfuerzo cortante máximo en las regiones AC y CB del eje.



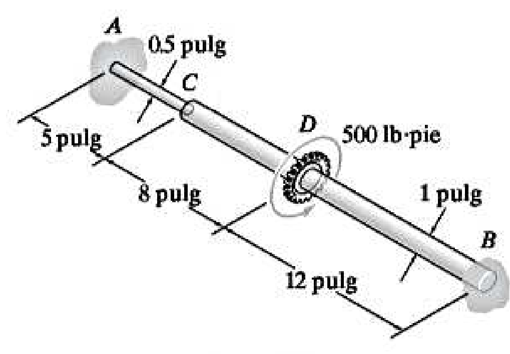
Prob. 5-77

5-78. El eje de acero A-36 tiene un diámetro de 60 mm y se encuentra fijo en sus extremos A y B. Si se somete a los pares de torsión mostrados, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en el eje.



Prob. 5-78

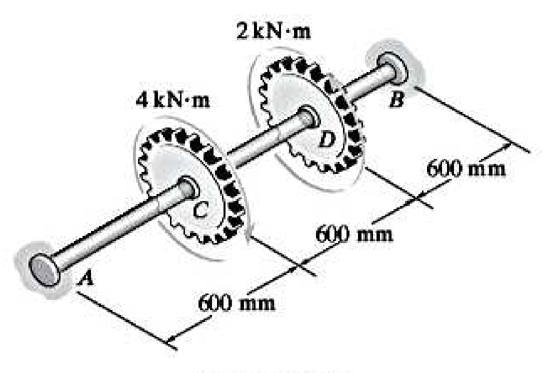
5-79. El eje de acero consta de dos segmentos: AC tiene un diámetro de 0.5 pulg y CB tiene un diámetro de 1 pulg. Si se encuentra fijo en sus extremos A y B, y está sometido a un par de torsión de 500 lb · pie, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje. $G_{ac} = 10.8(10^3)$ ksi.



Prob. 5-79

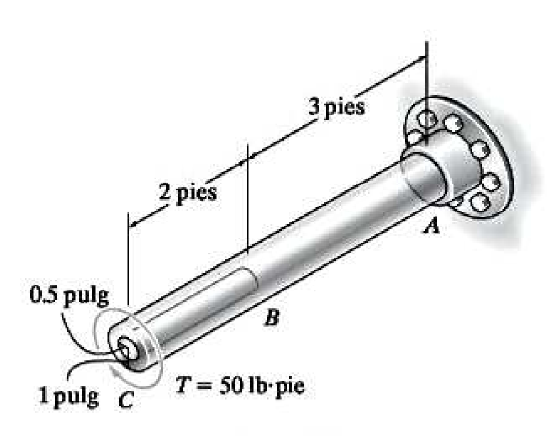
***5-80.** El eje está fabricado de acero A-36, tiene un diámetro de 80 mm y se encuentra fijo en B, mientras que en A está flojo y puede girar 0.005 rad antes de quedar fijo. Si se aplican los pares de torsión mostrados sobre C y D, determine el esfuerzo cortante máximo en las regiones AC y CD del eje.

•**5-81.** El eje está fabricado de acero A-36 y tiene un diámetro de 80 mm. Se encuentra fijo en B y el soporte en A tiene una rigidez a la torsión de $k = 0.5$ MN · m/rad. Si los engranes se someten a los pares de torsión mostrados, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en el eje.



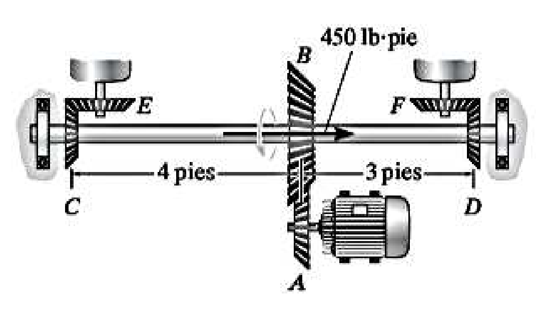
Probs. 5-80/81

5-82. El eje consta de una sección sólida de acero AB y una porción tubular de acero que tiene un núcleo de latón. Si se encuentra fijo a un soporte rígido en A, y se le aplica un par de torsión de $T = 50$ lb · pie en C, determine el ángulo de giro que se produce en C y calcule el esfuerzo cortante máximo y la deformación cortante máxima en el latón y el acero. Considere $G_{ac} = 11.5(10^3)$ ksi y $G_{br} = 5.6(10^3)$ ksi.



Prob. 5-82

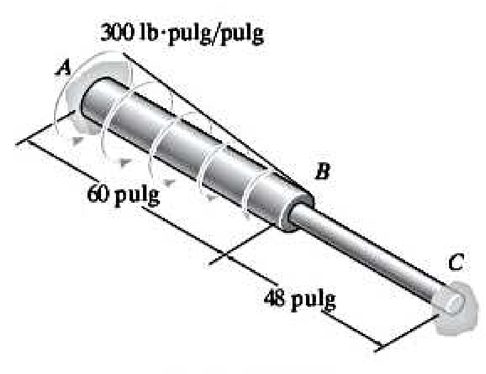
5-83. El motor A desarrolla un par de torsión de 450 lb·pie en el engrane B, el cual se aplica a lo largo de la línea central del eje de acero CD que tiene un diámetro de 2 pulg. Este par de torsión se transmite a los engranes de piñón en E y F. Si los engranes se fijan de manera temporal, determine el esfuerzo cortante máximo en los segmentos CB y BD del eje. Además, ¿cuál es el ángulo de giro de cada uno de estos segmentos? Los cojinetes en C y D sólo ejercen reacciones de fuerza sobre el eje y no se resisten al par de torsión. $G_{ac} = 12(10^3)$ ksi.



Prob. 5-83

***5-84.** Una porción del eje de acero A-36 se somete a una carga de torsión linealmente distribuida. Si el eje tiene las dimensiones indicadas, determine las reacciones en los soportes fijos A y C. El segmento AB tiene un diámetro de 1.5 pulg y el segmento BC tiene un diámetro de 0.75 pulg.

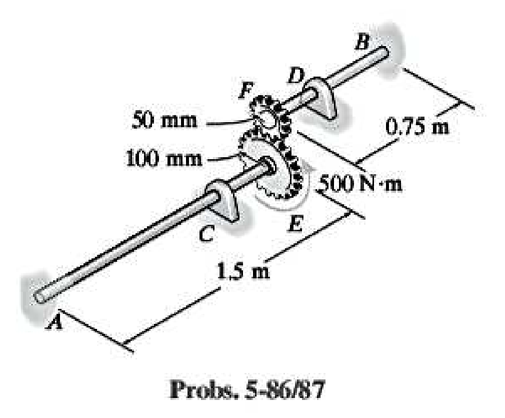
•5-85. Determine la rotación de la junta B y el esfuerzo cortante máximo absoluto en el eje del problema 5-84.



Probs. 5-84/85

5-86. Los dos ejes están fabricados de acero A-36. Cada uno tiene un diámetro de 25 mm y se conecta al otro eje mediante los engranes fijos en sus extremos. Los otros extremos están unidos a soportes fijos en A y B. También se encuentran sostenidos por cojinetes en C y D, los cuales permiten la libre rotación de los ejes a lo largo de sus líneas centrales. Si se aplica un par de torsión de 500 N · m sobre el engrane en E como se muestra en la figura, determine las reacciones en A y B.

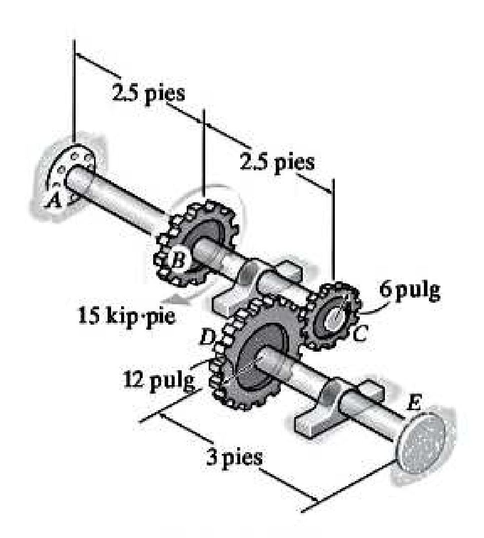
5-87. Determine la rotación del engrane en E del problema 5-86.



Probs. 5-86/87

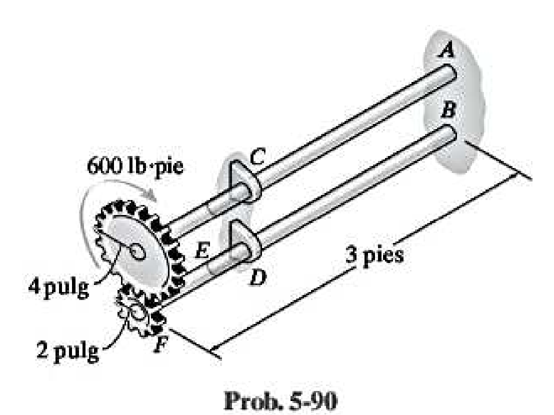
***5-88.** Los ejes son de acero A-36 y tienen el mismo diámetro de 4 pulg. Si se aplica un par de torsión de 15 kip · pie sobre el engrane B, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto desarrollado en el eje.

•5-89. Los ejes son de acero A-36 y tienen el mismo diámetro de 4 pulg. Si se aplica un par de torsión de 15 kip · pie sobre el engrane B, determine el ángulo de giro de dicho engrane.



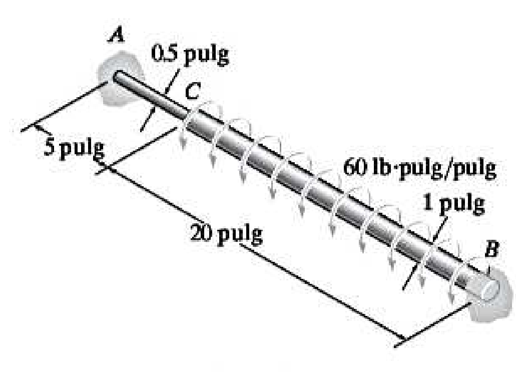
Probs. 5-88/89

5-90. Los dos ejes de 3 pies de largo son de aluminio 2014-T6. Cada uno tiene un diámetro de 1.5 pulg y se conectan entre sí mediante los engranes fijos en sus extremos. Sus otros extremos están unidos a soportes fijos en A y B. También están sostenidos por cojinetes en C y D, los cuales permiten la libre rotación de los ejes a lo largo de sus líneas centrales. Si se aplica un par de torsión de 600 lb · pie sobre el engrane superior como se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo en cada eje.



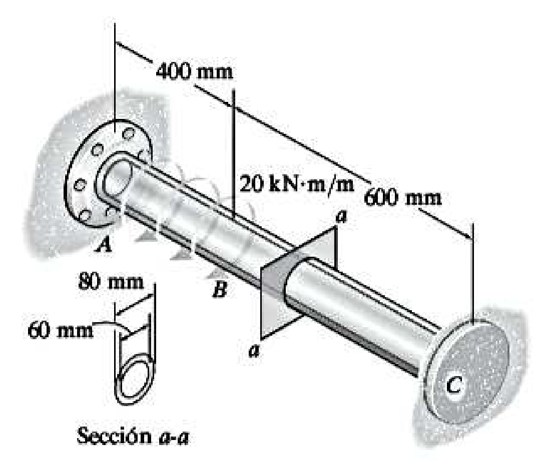
Prob. 5-90

5-91. El eje de acero A-36 está formado por dos segmentos: AC tiene un diámetro de 0.5 pulg y CB tiene un diámetro de 1 pulg. Si el eje está fijo en sus extremos A y B, y se somete a un par de torsión de 60 lb · pulg/pulg uniformemente distribuido a lo largo del segmento CB, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en el eje.



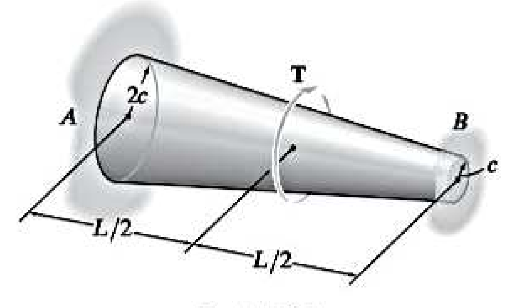
Prob. 5-91

***5-92.** Si el eje está sometido a un par de torsión uniformemente distribuido de $t = 20$ kN · m/m, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje. Éste es de una aleación de aluminio 2014-T6 y se encuentra fijo en A y C.



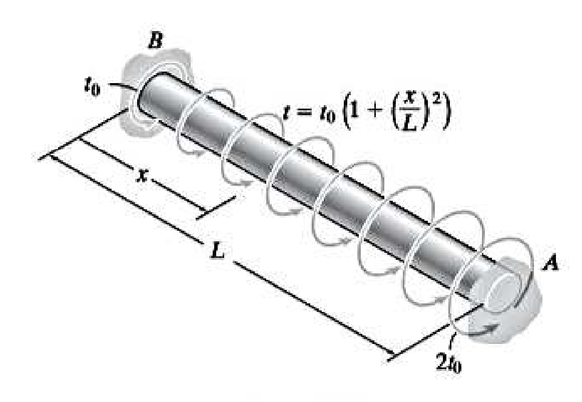
Prob. 5-92

•5-93. El eje ahusado está restringido por los soportes fijos en A y B. Si se aplica un par de torsión $\mathbf{T}$ en su punto medio, determine las reacciones en los soportes.



Prob. 5-93

5-94. El eje de radio c está sometido a un par de torsión distribuido t, el cual se mide en unidades de par de torsión/longitud del eje. Determine las reacciones en los soportes fijos A y B.

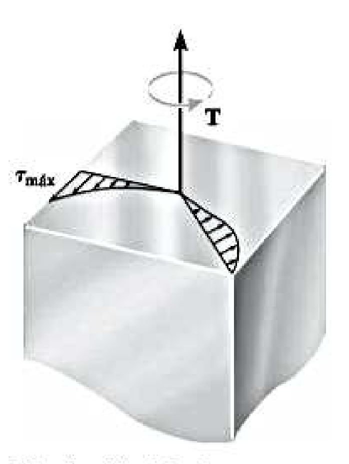


Prob. 5-94

*5.6 Ejes sólidos no circulares

En la sección 5.1 se demostró que al aplicar un par de torsión sobre un eje con sección transversal circular (es decir, sobre un eje con simetría axial) las deformaciones cortantes varían linealmente desde cero en su centro hasta un máximo en su superficie externa. Además, debido a la uniformidad de la deformación cortante en todos los puntos sobre el mismo radio, las secciones transversales no se deforman, sino que permanecen planas después de que el eje ha girado. Por otra parte, los ejes que tienen una sección transversal no circular, *no* poseen simetría axial, por lo que su sección puede ***alabearse*** cuando el eje gira. Una prueba de ello puede verse en las líneas de cuadrícula deformadas en un eje con sección transversal cuadrada cuando el eje se ha girado, figura 5-25. Como consecuencia de esta deformación, el análisis de la torsión de los ejes *no circulares* se vuelve considerablemente más complicado y no se tomará en consideración a lo largo de este libro.

No obstante, mediante un análisis matemático basado en la teoría de la elasticidad, es posible determinar la distribución del esfuerzo cortante en un eje de sección cuadrada. En la figura 5-26*a* se muestran ejemplos de cómo este esfuerzo cortante varía a lo largo de dos líneas radiales del eje. Debido a que estas distribuciones de esfuerzo cortante varían de una manera compleja, las deformaciones cortantes que harán que la sección transversal se *alabe*, como se muestra en la figura 5-26*b*. En particular, observe que los puntos ubicados en las esquinas del eje deben estar sometidos a un esfuerzo cortante nulo y, por consiguiente, tendrán una deformación cortante igual a cero. La razón de esto se puede demostrar considerando un elemento de material que se encuentre en uno de estos puntos, figura 5-26*c*. Se podría esperar que la cara superior de este elemento estuviera sometida a un esfuerzo cortante con el fin de ayudar en la resistencia al par de torsión **T** aplicado. Sin embargo, esto no puede ocurrir porque los esfuerzos cortantes complementarios τ y τ', que actúan sobre la *superficie externa* del eje, deben ser iguales a cero.



Distribución del esfuerzo cortante a lo largo de dos líneas radiales

(a)



Alabeo del área de la sección transversal

(b)

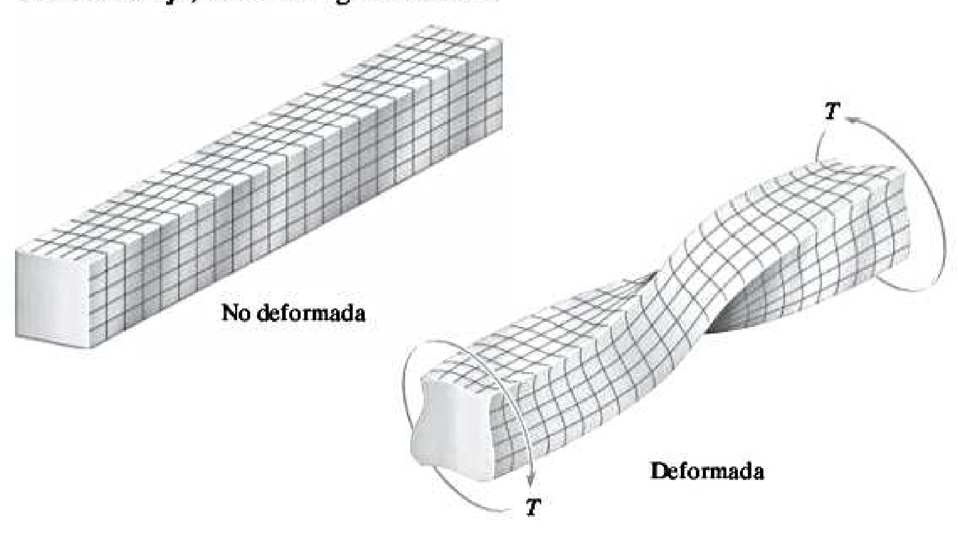
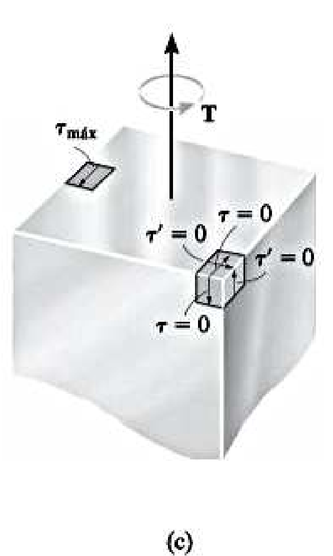
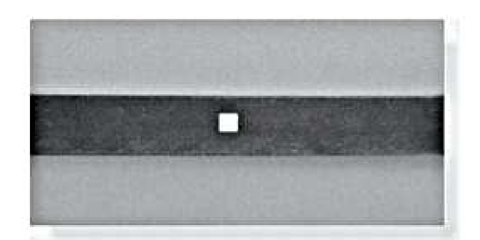


Figura 5-25



(c)

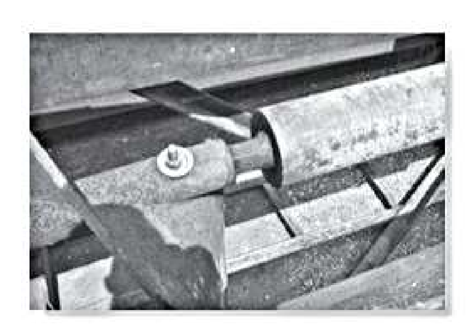
Figura 5-26





Observe la deformación del elemento cuadrado cuando esta barra de caucho se somete a un par de torsión.

En la tabla 5-1 se presentan los resultados del análisis realizado para secciones transversales cuadradas, junto con otros resultados de la teoría de la elasticidad, para ejes con secciones transversales triangulares y elípticas. En todos los casos el *esfuerzo cortante máximo* se produce en un punto sobre el borde de la sección transversal que es el *más cercano* a la línea central del eje. En la tabla 5-1, estas ubicaciones se indican como "puntos" sobre las secciones transversales. Además, se proporcionan las fórmulas para el ángulo de giro de cada eje. Al extender estos resultados a un eje que tiene una sección transversal *arbitraria*, también se puede demostrar que un eje con una sección *circular* es más eficiente, ya que se encuentra sometido a un *menor* esfuerzo cortante máximo y tiene un ángulo de giro *más pequeño* que el correspondiente para un eje de sección transversal no circular sometido al mismo par de torsión.



El eje del taladro está conectado a la broca de perforación mediante un eje con sección transversal cuadrada.

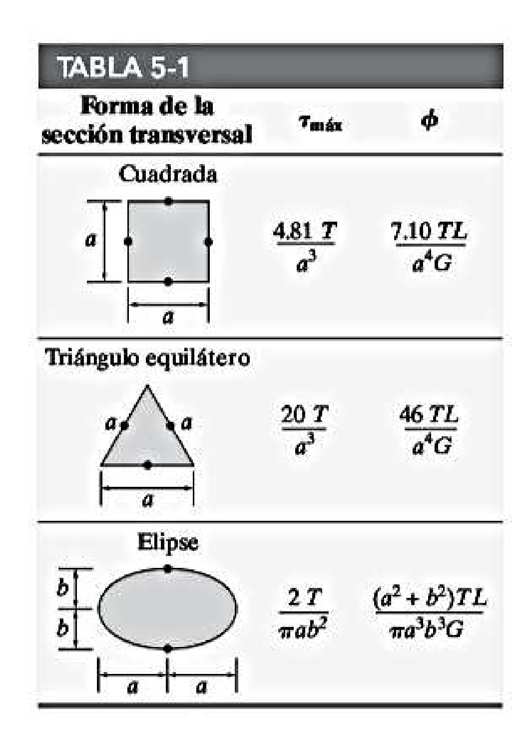


TABLA 5-1

Forma de la sección transversal	$\tau_{máx}$	ϕ
Cuadrada (lado a)	$\dfrac{4.81\,T}{a^3}$	$\dfrac{7.10\,TL}{a^4G}$
Triángulo equilátero (lado a)	$\dfrac{20\,T}{a^3}$	$\dfrac{46\,TL}{a^4G}$
Elipse (semiejes a, b)	$\dfrac{2\,T}{\pi ab^2}$	$\dfrac{(a^2+b^2)TL}{\pi a^3b^3G}$

EJEMPLO 5.10

El eje de aluminio 6061-T6 mostrado en la figura 5-27 tiene una sección transversal con forma de triángulo equilátero. Determine el mayor par de torsión **T** que puede aplicarse sobre el extremo del eje si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 8$ ksi y el ángulo de giro en su extremo está restringido a $\phi_{perm} = 0.02$ rad. ¿De qué tamaño puede ser el par de torsión aplicado a un eje con sección transversal circular hecho con la misma cantidad de material?

SOLUCIÓN

Por inspección, el par de torsión interno resultante en cualquier sección transversal a lo largo de la línea central del eje también es **T**. Utilizando las fórmulas para $\tau_{máx}$ y ϕ en la tabla 5-1, se requiere

$$\tau_{perm} = \frac{20T}{a^3}; \qquad 8(10^3)\ \text{lb/pulg}^2 = \frac{20T}{(1.5\ \text{pulg})^3}$$

$$T = 1350\ \text{lb}\cdot\text{pulg}$$

También,

$$\phi_{perm} = \frac{46TL}{a^4 G_{al}}; \quad 0.02\ \text{rad} = \frac{46T(4\ \text{pies})(12\ \text{pulg/pie})}{(1.5\ \text{pulg})^4[3.7(10^6)\ \text{lb/pulg}^2]}$$

$$T = 170\ \text{lb}\cdot\text{pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

Por comparación, el par de torsión está limitado por el ángulo de giro.

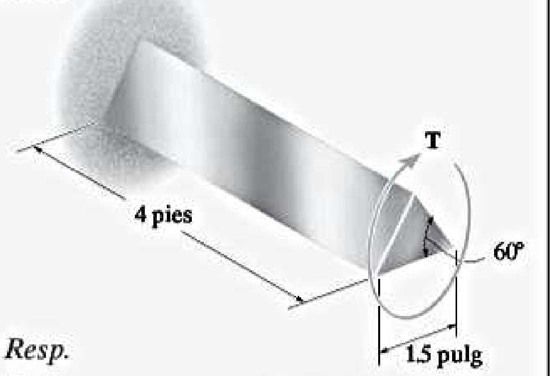


Figura 5-27

Sección transversal circular. Si la misma cantidad de aluminio se utiliza en la fabricación de un eje con la misma longitud pero con una sección circular, entonces es posible calcular el radio de la sección transversal. Se tiene

$$A_{círculo} = A_{triángulo}; \qquad \pi c^2 = \frac{1}{2}(1.5\ \text{pulg})(1.5\ \text{sen}\ 60°)$$

$$c = 0.557\ \text{pulg}$$

Entonces, las limitaciones del esfuerzo y el ángulo de giro requieren que

$$\tau_{perm} = \frac{Tc}{J}; \qquad 8(10^3)\ \text{lb/pulg}^2 = \frac{T(0.557\ \text{pulg})}{(\pi/2)(0.557\ \text{pulg})^4}$$

$$T = 2170\ \text{lb}\cdot\text{pulg}$$

$$\phi_{perm} = \frac{TL}{JG_{al}}; \quad 0.02\ \text{rad} = \frac{T(4\ \text{pies})(12\ \text{pulg/pie})}{(\pi/2)(0.557\ \text{pulg})^4[3.7(10^6)\ \text{lb/pulg}^2]}$$

$$T = 233\ \text{lb}\cdot\text{pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

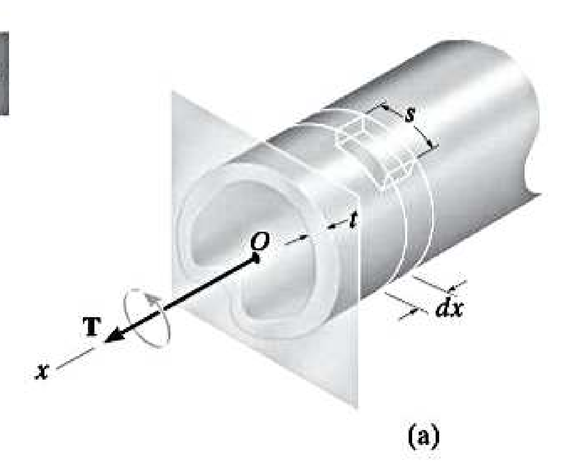
Una vez más, el ángulo de giro limita al par de torsión aplicado.

NOTA: Al comparar este resultado (233 lb · pulg) con el obtenido anteriormente (170 lb · pulg), puede verse que un eje de sección circular puede soportar un par de torsión 37 por ciento más grande que el eje con sección transversal triangular.

*5.7 Tubos de pared delgada con secciones transversales cerradas

Los tubos de pared delgada con sección transversal no circular se utilizan a menudo para construir estructuras ligeras, como las empleadas en aviones. En algunas aplicaciones, pueden someterse a una carga de torsión. En esta sección se analizarán los efectos de la aplicación de un par de torsión sobre un tubo de pared delgada con sección transversal *cerrada*, es decir, un tubo que no tiene ningún tipo de roturas o cortes en toda su longitud. Este tubo, que tiene una forma constante y arbitraria en su sección transversal, y un grosor variable t, se muestra en la figura 5-28*a*. Como las paredes son delgadas, se obtendrá el esfuerzo cortante promedio suponiendo que dicho esfuerzo está *uniformemente distribuido* a través del grosor del tubo en cualquier punto dado. Pero antes de hacerlo, primero se analizarán algunos conceptos preliminares relacionados con la acción del esfuerzo cortante sobre la sección transversal.

5

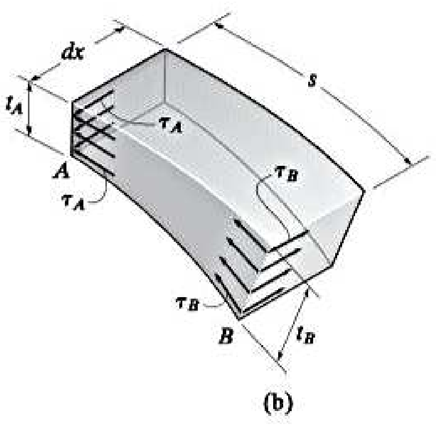


(a)

Flujo cortante. En las figuras 5-28*a* y 5-28*b* se muestra un pequeño elemento del tubo con una longitud finita s y una anchura diferencial dx. En un extremo, el elemento tiene un grosor t_A y en el otro el grosor es t_B. Debido al par de torsión interno **T**, el esfuerzo cortante se desarrolla en la cara frontal del elemento. De manera específica, en el extremo A el esfuerzo cortante es τ_A y en el extremo B es τ_B. Estos esfuerzos pueden relacionarse al observar que los esfuerzos cortantes equivalentes τ_A y τ_B también debe actuar en los lados longitudinales del elemento. Como estos lados tienen una anchura *constante* dx, las fuerzas que actúan sobre ellos son $dF_A = \tau_A(t_A\,dx)$ y $dF_B = \tau_B(t_B\,dx)$. Para el equilibrio se requiere que estas fuerzas tengan la misma magnitud pero sentido opuesto, de modo que

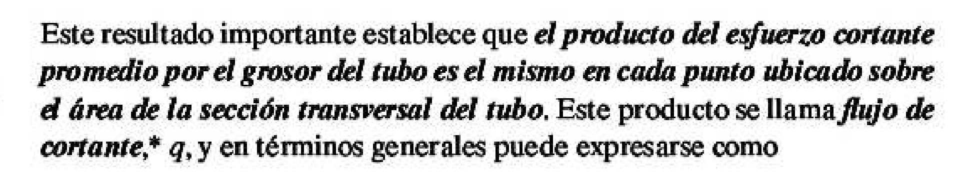


$$\tau_A t_A = \tau_B t_B$$



(b)

Figura 5-28



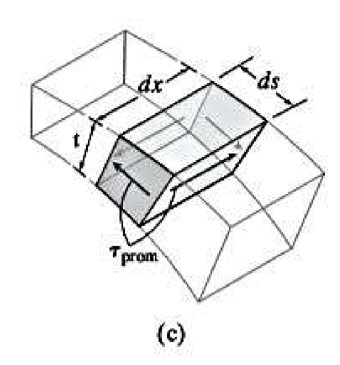
Este resultado importante establece que ***el producto del esfuerzo cortante promedio por el grosor del tubo es el mismo en cada punto ubicado sobre el área de la sección transversal del tubo.*** Este producto se llama ***flujo de cortante,**** q, y en términos generales puede expresarse como

$$q = \tau_{prom}\, t \qquad (5\text{-}17)$$

Como q es constante en toda la sección transversal, el *mayor* esfuerzo cortante promedio debe ocurrir donde el grosor del tubo sea *más pequeño*.

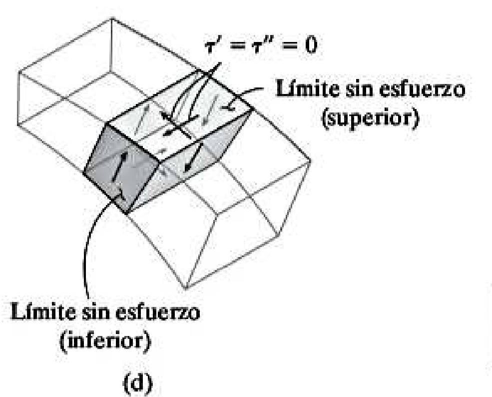
*El término "flujo" se usa porque q es análogo al agua que fluye a través de un tubo de sección transversal rectangular con una profundidad constante y anchura variable w. Aunque la velocidad v del agua en cada punto a lo largo del tubo sea diferente (como τ_{prom}), el flujo $q = vw$ permanecerá constante.

Ahora bien, si un elemento diferencial con grosor t, longitud ds y anchura dx se aísla del tubo, figura 5-28c, se observa que la cara frontal sobre la que actúa el esfuerzo cortante promedio es $dA = t\,ds$. Por consiguiente, $dF = \tau_{prom}\,(t\,ds) = q\,ds$, o $q = dF/ds$. En otras palabras, *el flujo cortante mide la fuerza por unidad de longitud a lo largo del área de la sección transversal del tubo.*



(c)

Es importante darse cuenta que las componentes del esfuerzo cortante mostradas en la figura 5-28c son las únicas que actúan sobre el tubo. Las componentes que actúan en la otra dirección, como se muestra en la figura 5-28d, no puede existir. Lo anterior se debe a que las caras superior e inferior del elemento se encuentran en las paredes interior y exterior del tubo, y estos límites deben estar libres de esfuerzo. En vez de esto, como se señaló anteriormente, el par de torsión aplicado hace que *el flujo cortante y el esfuerzo cortante promedio siempre tengan una dirección tangencial a la pared del tubo, de modo que esto contribuye al par de torsión interno resultante* **T**.

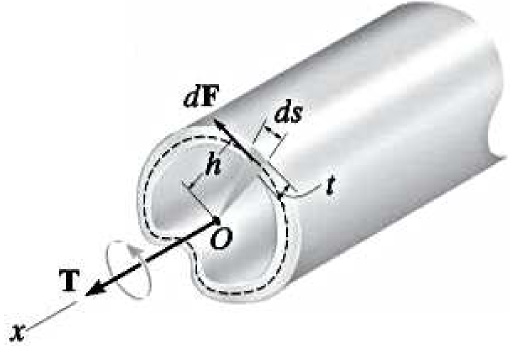


(d)

Esfuerzo cortante promedio.

El esfuerzo cortante promedio se puede relacionar con el par de torsión T al considerar el par de torsión producido por este esfuerzo cortante alrededor de un punto O seleccionado dentro de los límites del tubo, figura 5-28e. Como puede observarse, el esfuerzo cortante desarrolla una fuerza $dF = \tau_{prom}\,dA = \tau_{prom}(t\,ds)$ sobre un elemento del tubo. Esta fuerza actúa tangencialmente a la línea central de la pared del tubo, y si el brazo de momento es h, el par de torsión es

$$dT = h(dF) = h(\tau_{prom}t\,ds)$$



(e)

Para toda la sección transversal, se requiere

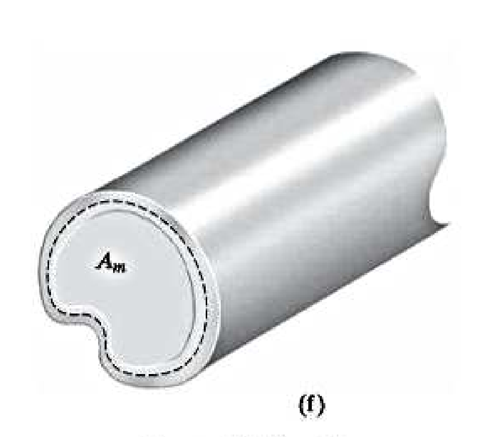
$$T = \oint h\tau_{prom}\,t\,ds$$

Aquí la "integral de línea" indica que la integración debe realizarse *alrededor* de todo el límite del área. Como el flujo cortante $q = \tau_{prom}t$ es *constante*, puede factorizarse y sacarse de la integral, de modo que

$$T = \tau_{prom}\,t\oint h\,ds$$

Ahora puede realizarse una simplificación gráfica para evaluar la integral al señalar que el *área media*, mostrada por el triángulo sombreado en la figura 5-28e, es $dA_m = (1/2)h\,ds$. Por lo tanto,

$$T = 2\tau_{prom}\,t\int dA_m = 2\tau_{prom}\,tA_m$$



(f)

Figura 5-28 (cont.)

5

5

Resolviendo para τ_{prom}, tenemos

$$\tau_{prom} = \frac{T}{2tA_m} \tag{5-18}$$

Donde

τ_{prom} = el esfuerzo cortante promedio que actúa sobre un grosor particular del tubo
T = el par de torsión interno resultante en la sección transversal
t = el grosor del tubo donde debe determinarse τ_{prom}
A_m = el área media incluida dentro del límite de la *línea central* del grosor del tubo. En la figura 5-28*f*, A_m se muestra dentro de la línea discontinua

Como $q = \tau_{prom}t$, entonces el flujo cortante en toda la sección transversal se convierte en

$$q = \frac{T}{2A_m} \tag{5-19}$$

Ángulo de giro. El ángulo de giro de un tubo con pared delgada y longitud L puede determinarse mediante métodos de energía; el desarrollo de la ecuación necesaria se proporcionará más adelante en la forma de un problema.* Si el material se comporta de una manera elástico lineal y G es el módulo cortante, entonces este ángulo ϕ, dado en radianes, puede expresarse como

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2G}\oint\frac{ds}{t} \tag{5-20}$$

De nuevo, la integración debe realizarse una vez más alrededor de todo el límite del área de la sección transversal del tubo.

Puntos importantes

- El flujo cortante q es el producto del grosor del tubo por el esfuerzo cortante promedio. Este valor es el mismo para todos los puntos a lo largo de la sección transversal del tubo. Como resultado, el *mayor* esfuerzo cortante promedio en la sección transversal se producirá donde el grosor sea *más pequeño*.
- Tanto el flujo cortante como el esfuerzo cortante promedio actúan *tangencialmente* a la pared del tubo en todos sus puntos y con una dirección tal que contribuyan al par de torsión interno resultante.

*Vea el problema 14-12.

EJEMPLO 5.11

Calcule el esfuerzo cortante promedio en un tubo de pared delgada con una sección transversal circular de radio medio r_m y grosor t, el cual está sometido a un par de torsión T, figura 5-29*a*. Además, ¿cuál es el ángulo de giro relativo si el tubo tiene una longitud L?

SOLUCIÓN

Esfuerzo cortante promedio. El área media del tubo es $A_m = \pi r_m^2$. Al aplicar la ecuación 5-18 se obtiene

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{T}{2\pi t r_m^2} \qquad \textit{Resp.}$$

La validez de este resultado puede comprobarse al aplicar la fórmula de la torsión. En este caso, si se usa la ecuación 5-9 resulta

$$J = \frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4)$$
$$= \frac{\pi}{2}(r_o^2 + r_i^2)(r_o^2 - r_i^2)$$
$$= \frac{\pi}{2}(r_o^2 + r_i^2)(r_o + r_i)(r_o - r_i)$$

Como $r_m \approx r_o \approx r_i$ y $t = r_o - r_i$, $J = \frac{\pi}{2}(2r_m^2)(2r_m)t = 2\pi r_m^3 t$

de manera que $$\tau_{\text{prom}} = \frac{Tr_m}{J} = \frac{Tr_m}{2\pi r_m^3 t} = \frac{T}{2\pi t r_m^2} \qquad \textit{Resp.}$$

lo que concuerda con el resultado anterior.

En la figura 5-29*b* se presenta la distribución del esfuerzo cortante promedio que actúa en toda la sección transversal del tubo. Además se muestra la distribución del esfuerzo cortante que actúa sobre una línea radial, según se calculó usando la fórmula de la torsión. Observe cómo cada τ_{prom} actúa en una dirección de tal forma que contribuye al par de torsión **T** resultante en la sección. A medida que el grosor del tubo disminuye, el esfuerzo cortante a través del tubo se vuelve más uniforme.

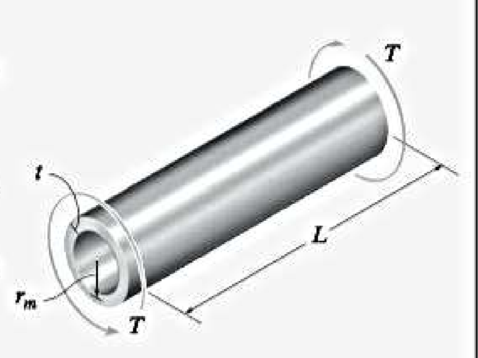
Ángulo de giro. Al aplicar la ecuación 5-20, se tiene

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t} = \frac{TL}{4(\pi r_m^2)^2 G t}\oint ds$$

La integral representa la longitud alrededor del límite de la línea central, que es $2\pi r_m$. Sustituyendo, el resultado final es

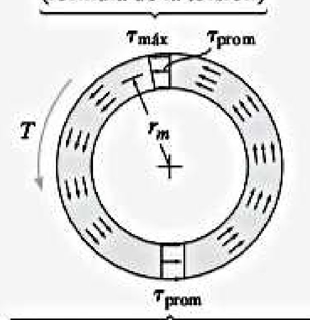
$$\phi = \frac{TL}{2\pi r_m^3 G t} \qquad \textit{Resp.}$$

Demuestre que al emplear la ecuación 5-15 se obtiene el mismo resultado.



(a)

Distribución real del esfuerzo cortante (fórmula de la torsión)



Distribución del esfuerzo cortante promedio (aproximación a pared delgada)

(b)

Figura 5-29

EJEMPLO 5.12

El tubo está fabricado de bronce C86100 y tiene una sección transversal rectangular como se muestra en la figura 5-30*a*. Si se somete a los dos pares de torsión mostrados en la figura, determine el esfuerzo cortante promedio en el tubo en los puntos *A* y *B*. Además, ¿cuál es el ángulo de giro del extremo *C*? El tubo se encuentra fijo en *E*.

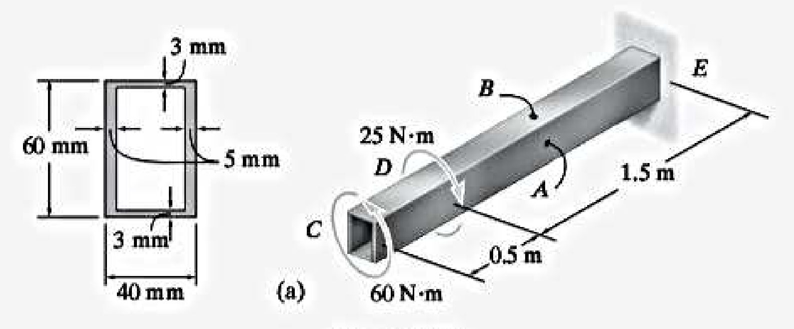


Figura 5-30

SOLUCIÓN

Esfuerzo cortante promedio. Si el tubo se secciona a través de los puntos *A* y *B*, el diagrama de cuerpo libre resultante se muestra en la figura 5-30*b*. El par de torsión interno es de 35 N · m. Como se muestra en la figura 5-30*d*, el área media es

$$A_m = (0.035 \text{ m})(0.057 \text{ m}) = 0.00200 \text{ m}^2$$

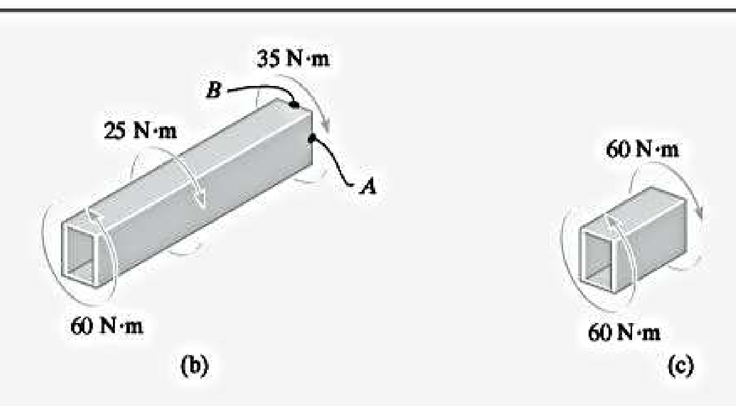
Al aplicar la ecuación 5.18 para el punto *A*, $t_A = 5$ mm, de modo que

$$\tau_A = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35 \text{ N}\cdot\text{m}}{2(0.005 \text{ m})(0.00200 \text{ m}^2)} = 1.75 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Y para el punto *B*, $t_B = 3$ mm, por lo tanto

$$\tau_B = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35 \text{ N}\cdot\text{m}}{2(0.003 \text{ m})(0.00200 \text{ m}^2)} = 2.92 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Estos resultados se muestran sobre los elementos de material localizados en los puntos *A* y *B*, figura 5-30*e*. Observe con cuidado cómo el par de torsión de 35 N · m en la figura 5-30*b* crea estos esfuerzos en los reversos de cada elemento.



Ángulo de giro. A partir de los diagramas de cuerpo libre mostrados en las figuras 5-30*b* y 5-30*c*, los pares de torsión internos en las regiones *DE* y *CD* son de 35 N · m y 60 N · m, respectivamente. Siguiendo la convención de signos descrita en la sección 5.4, los dos pares de torsión son positivos. Así, la ecuación 5-20 se convierte en

$$\phi = \sum \frac{TL}{4A_m^2G}\oint\frac{ds}{t}$$

$$= \frac{60\text{ N}\cdot\text{m }(0.5\text{ m})}{4(0.00200\text{ m}^2)^2(38(10^9)\text{ N/m}^2)}\left[2\left(\frac{57\text{ mm}}{5\text{ mm}}\right) + 2\left(\frac{35\text{ mm}}{3\text{ mm}}\right)\right]$$

$$+ \frac{35\text{ N}\cdot\text{m }(1.5\text{ m})}{4(0.00200\text{ m}^2)^2(38(10^9)\text{ N/m}^2)}\left[2\left(\frac{57\text{ mm}}{5\text{ mm}}\right) + 2\left(\frac{35\text{ mm}}{3\text{ mm}}\right)\right]$$

$$= 6.29(10^{-3})\text{ rad}$$ *Resp.*

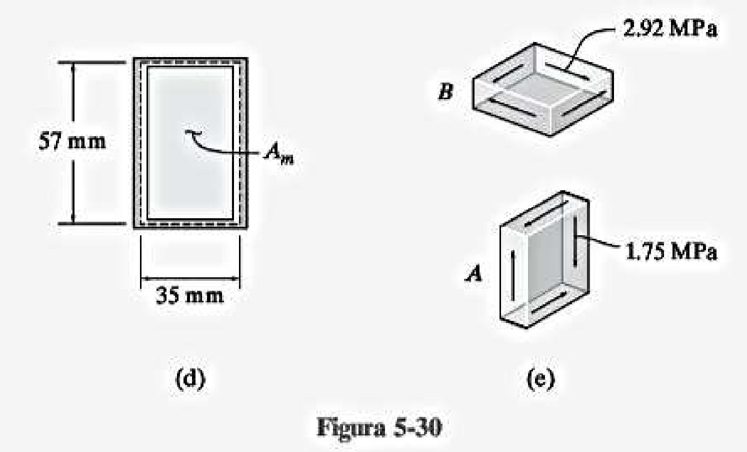
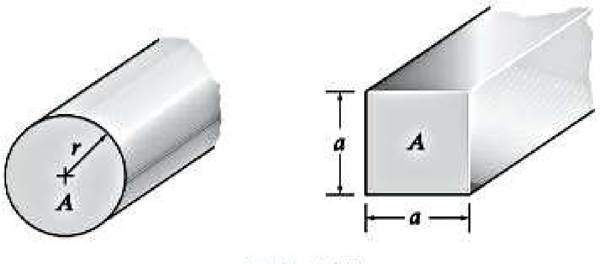


Figura 5-30

PROBLEMAS

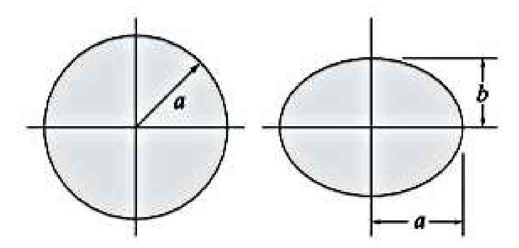
5-95. Compare los valores del esfuerzo cortante elástico máximo y el ángulo de giro desarrollados en ejes de acero inoxidable 304 con secciones transversales circular y cuadrada. Cada eje tiene la misma área de 9 pulg^2 en su sección transversal, una longitud de 36 pulg y se somete a un par de torsión de 4000 lb · pulg.



Prob. 5-95

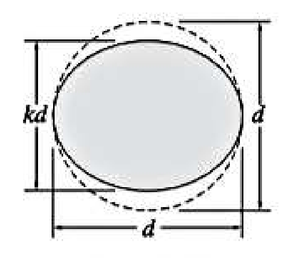
5

***5-96.** Si $a = 25$ mm y $b = 15$ mm, determine el esfuerzo cortante máximo en los ejes circular y elíptico, cuando se aplica un par de $T = 80$ N · m. ¿En qué porcentaje es más eficiente el eje de sección circular que el eje de sección elíptica para resistir el par de torsión?



Prob. 5-96

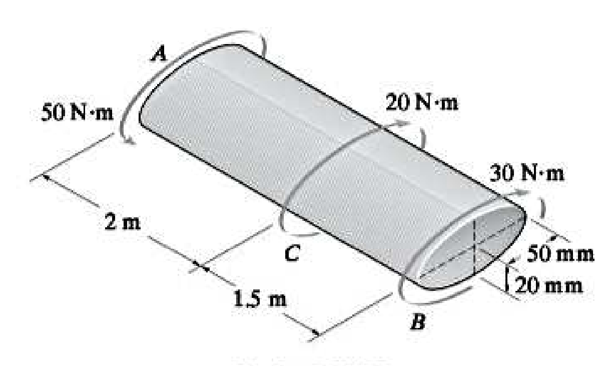
•5-97. Se pretende fabricar una barra circular para resistir un par de torsión; sin embargo, la barra se hizo elíptica durante el proceso de fabricación, con una dimensión más pequeña que la otra por un factor k, como se muestra en la figura. Determine el factor por el cual se incrementa el esfuerzo cortante máximo.



Prob. 5-97

5-98. El eje está hecho de latón rojo C83400 y tiene una sección transversal elíptica. Si se somete a las cargas de torsión mostradas, determine el esfuerzo cortante máximo dentro de las regiones AC y BC, también encuentre el ángulo de giro ϕ del extremo B con respecto al extremo A.

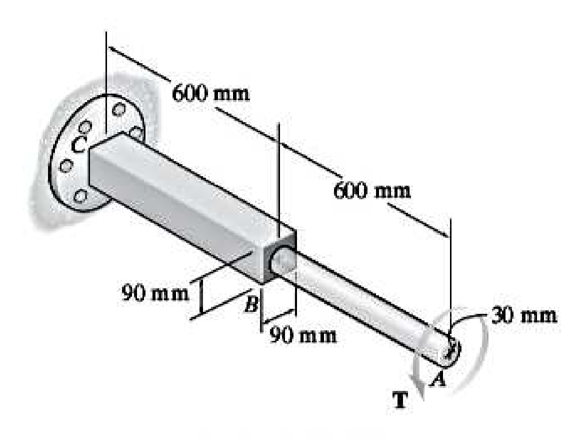
5-99. Resuelva el problema 5-98 para el esfuerzo cortante máximo dentro de las regiones AC y BC, así como para el ángulo de giro ϕ del extremo B con respecto a C.



Probs. 5-98/99

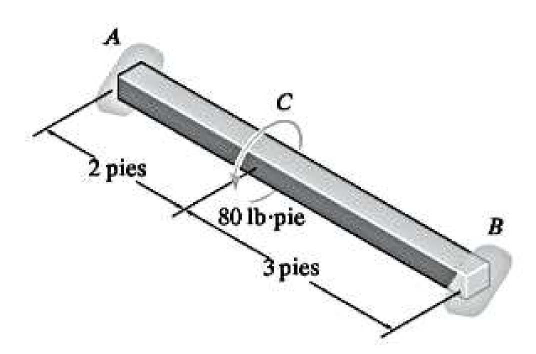
***5-100.** Los segmentos AB y BC del eje tienen secciones transversales circular y cuadrada, respectivamente. Si el extremo A se somete a un par de torsión $T = 2$ kN · m, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto desarrollado en el eje y el ángulo de giro del extremo A. El eje está fabricado de acero A-36 y se encuentra fijo en C.

•5-101. Los segmentos AB y BC del eje tienen secciones transversales circular y cuadrada, respectivamente. El eje está fabricado de acero A-36 con un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 75$ MPa, y un ángulo de giro en el extremo A que no puede ser mayor a 0.02 rad. Determine el máximo par permisible **T** que puede aplicarse sobre el extremo A. El eje se encuentra fijo en C.



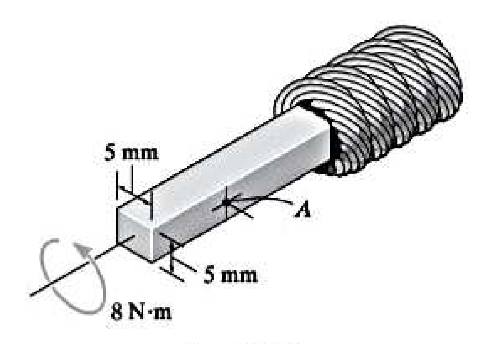
Probs. 5-100/101

5-102. El puntal de aluminio se encuentra fijo entre dos paredes en A y B. Si tiene una sección transversal cuadrada de 2 × 2 pulg y se somete al par de torsión de 80 lb · pie en C, determine las reacciones en los soportes fijos. Además, ¿cuál es el ángulo de giro en C? $G_{al} = 3.8(10^3)$ ksi.



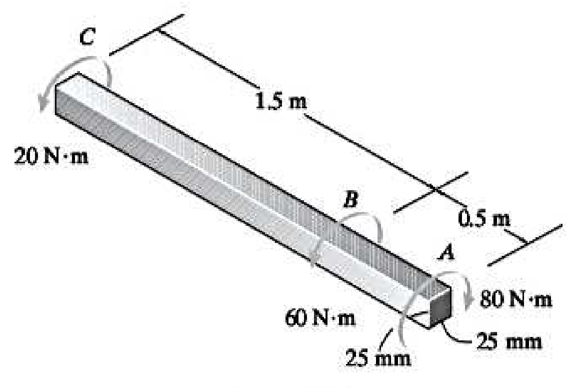
Prob. 5-102

5-103. El eje cuadrado se usa en el extremo de un cable de transmisión para registrar la rotación del cable sobre un medidor. Si tiene las dimensiones mostradas en la figura y se somete a un par de torsión de 8 N · m, determine el esfuerzo cortante en el eje sobre el punto A. Muestre el esfuerzo cortante sobre un elemento de volumen ubicado en este punto.



Prob. 5-103

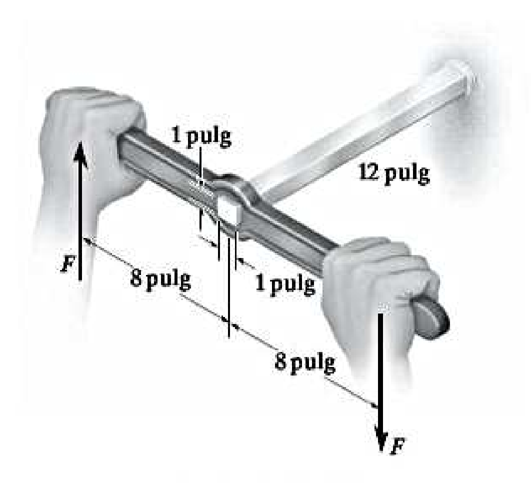
***5-104.** La barra de aluminio 6061-T6 tiene una sección transversal cuadrada de 25 × 25 mm. Si tiene 2 m de largo, determine el esfuerzo cortante máximo en la barra y la rotación de uno de los extremos en relación con el otro.



Prob. 5-104

•**5-105.** El eje de acero tiene 12 pulg de largo y se atornilla a la pared mediante una llave. Determine las mayores fuerzas F de par que pueden aplicarse sobre el eje sin causar la cedencia del acero. $\tau_Y = 8$ ksi.

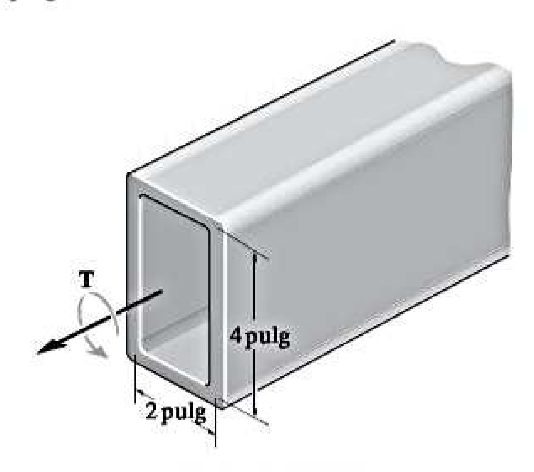
5-106. El eje de acero tiene 12 pulg de largo y se atornilla a la pared mediante una llave. Determine el esfuerzo cortante máximo en el eje y cuánto se desplaza cada fuerza de par si éstas tienen una magnitud de $F = 30$ lb. $G_{ac} = 10.8(10^3)$ ksi.



Probs. 5-105/106

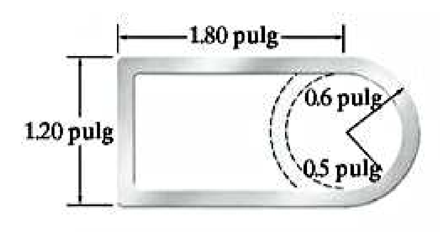
5-107. Determine el grosor constante del tubo rectangular si el esfuerzo cortante promedio no debe exceder 12 ksi, cuando se le aplica un par de torsión de $T = 20$ kip · pulg. No tome en cuenta las concentraciones de esfuerzo en las esquinas. En la figura se muestran las dimensiones medias del tubo.

***5-108.** Determine el par de torsión T que puede aplicarse al tubo rectangular si el esfuerzo cortante promedio no debe exceder 12 ksi. No tome en cuenta las concentraciones de esfuerzo en las esquinas. En la figura se muestran las dimensiones medias del tubo, el cual tiene un grosor de 0.125 pulg.



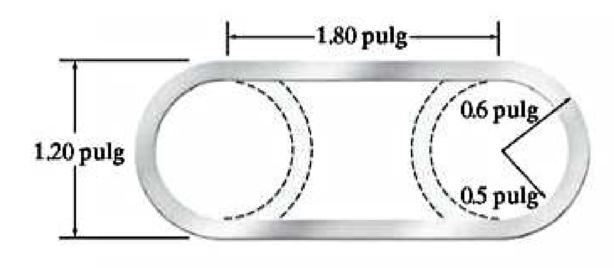
Probs. 5-107/108

•5-109. Para un esfuerzo cortante máximo dado, determine el factor por el que se incrementa la capacidad de carga de un par de torsión si la sección semicircular del tubo se invierte desde la posición indicada por la línea discontinua hasta la sección mostrada en la figura. El tubo tiene un grosor de 0.1 pulg.



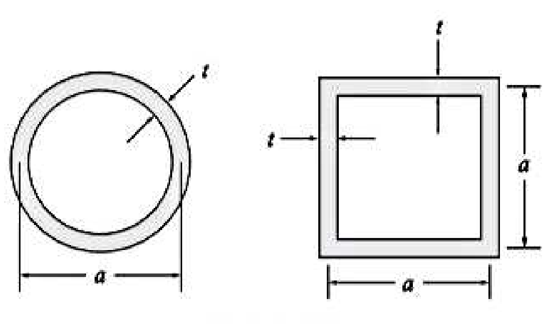
Prob. 5-109

5-110. Para un esfuerzo cortante promedio dado, determine el factor por el cual se aumenta la capacidad de carga de un par de torsión si las secciones semicirculares del tubo se invierten desde las posiciones indicadas por la línea discontinua hasta la sección mostrada en la figura. El tubo tiene un grosor de 0.1 pulg.



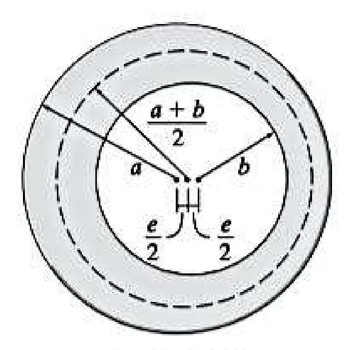
Prob. 5-110

5-111. Un par de torsión **T** se aplica sobre dos tubos que tienen las secciones transversales mostradas en la figura. Compare el flujo cortante desarrollado en cada tubo.



Prob. 5-111

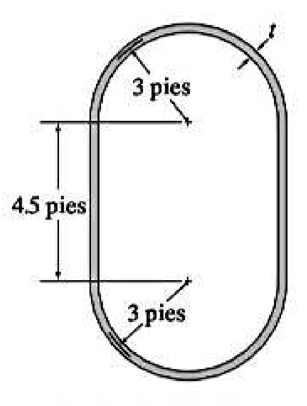
*5-112. Debido a un error de fabricación, el círculo interior del tubo es excéntrico con respecto al círculo exterior. ¿En qué porcentaje se reduce la resistencia a la torsión si la excentricidad e representa una cuarta parte de la diferencia entre los radios?



Prob. 5-112

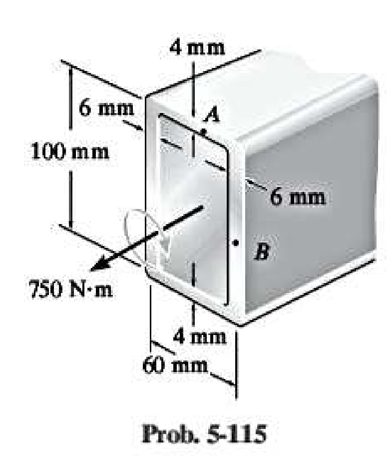
•5-113. En la figura se muestran las dimensiones medias de la sección transversal del fuselaje de un avión. Si el fuselaje está fabricado de una aleación de aluminio 2014-T6, con un esfuerzo cortante permisible $\tau_{perm} = 18$ ksi y se somete a un par de 6000 kip · pie, determine el grosor mínimo requerido t de la sección transversal con una precisión de $\frac{1}{16}$ de pulg. Además, encuentre el ángulo de giro correspondiente por pie de longitud en el fuselaje.

5-114. En la figura se muestran las dimensiones medias de la sección transversal del fuselaje de un avión. Si el fuselaje está fabricado de una aleación de aluminio 2014-T6, con un esfuerzo cortante permisible $\tau_{perm} = 18$ ksi y el ángulo de giro por pie de longitud del fuselaje no puede exceder 0.001 rad/pie, determine el par de torsión máximo permisible que puede soportar el fuselaje. El grosor de la pared es $t = 0.25$ pulg.



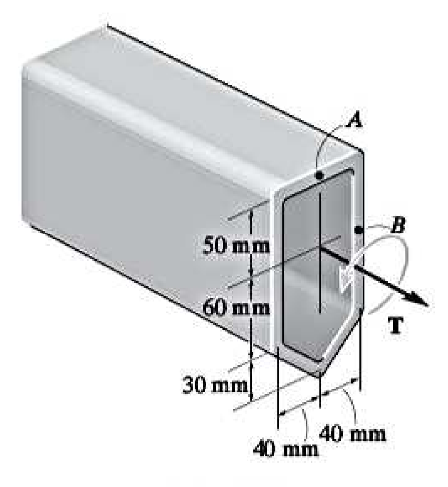
Probs. 5-113/114

5-115. El tubo está sometido a un par de torsión de 750 N·m. Determine el esfuerzo cortante promedio en los puntos *A* y *B* del tubo.



Prob. 5-115

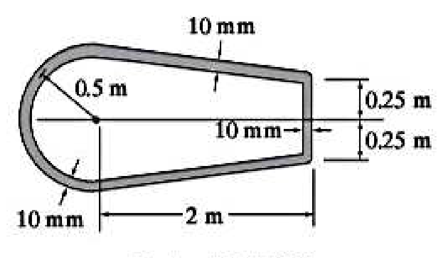
•5-116. El tubo está hecho de plástico, tiene 5 mm de grosor y las dimensiones medias que se muestran en la figura. Determine el esfuerzo cortante promedio en los puntos *A* y *B* si el tubo está sometido al par de torsión de $T = 5$ N·m. Muestre el esfuerzo cortante sobre los elementos de volumen ubicados en estos puntos.



Prob. 5-116

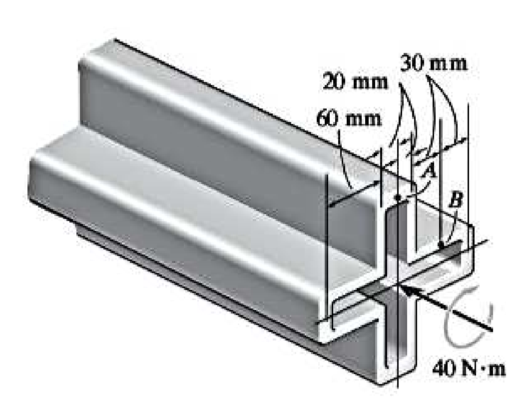
•5-117. Las dimensiones medias de la sección transversal del borde delantero y la caja de torsión del ala de un avión pueden aproximarse como se muestra en la figura. Si el ala está fabricada de una aleación de aluminio 2014-T6 con un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 125$ MPa y el grosor de su pared es de 10 mm, determine el par de torsión máximo permisible y el ángulo de giro correspondiente por metro de longitud del ala.

5-118. Las dimensiones medias de la sección transversal del borde delantero y la caja de torsión del ala de un avión pueden aproximarse de la forma mostrada en la figura. Si el ala se somete a un par de torsión de 4.5 MN · m y el grosor de su pared es de 10 mm, determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en el ala y su ángulo de giro por metro de longitud. El ala está fabricada de una aleación de aluminio 2014-T6.



Probs. 5-117/118

5-119. El tubo simétrico está fabricado de un acero de alta resistencia, con las dimensiones medias mostradas en la figura y un grosor de 5 mm. Si se somete a un par de torsión de $T = 40$ N · m, determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en los puntos *A* y *B*. Indique el esfuerzo cortante sobre elementos de volumen ubicados en esos puntos.



Prob. 5-119

5

5.8 Concentración del esfuerzo

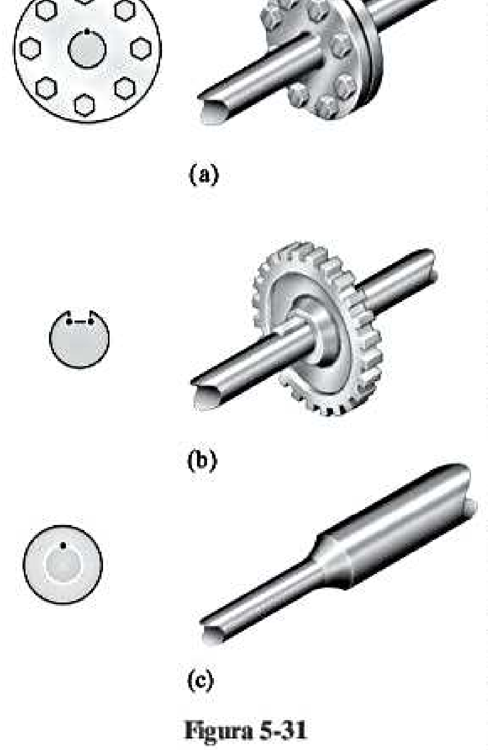


Figura 5-31

La fórmula de la torsión, $\tau_{máx} = Tc/J$, no puede aplicarse a las regiones de un eje que tienen un cambio repentino en su sección transversal. Aquí, las distribuciones de esfuerzo cortante y deformación cortante en el eje se vuelven complejas, por lo que sólo se pueden obtener mediante el uso de métodos experimentales o, posiblemente, por medio de un análisis matemático basado en la teoría de la elasticidad. En la figura 5-31 se muestran tres discontinuidades comunes que se producen en las secciones transversales. Están en los *acoplamientos*, que se utilizan para conectar entre sí dos ejes colineales, figura 5-31*a*; en *cuñeros*, empleados para conectar engranes o poleas a un eje, figura 5-31*b*, y en *filetes*, usados para fabricar un solo eje colineal a partir de dos ejes de diámetro diferente, figura 5-31*c*. En cada caso, el esfuerzo cortante máximo se producirá en la ubicación (punto) indicado en la sección transversal.

La necesidad de realizar un complejo análisis de esfuerzo en una discontinuidad del eje para obtener el esfuerzo cortante máximo, puede eliminarse mediante el uso de un ***factor de concentración de esfuerzos de torsión***, K. Como en el caso de los elementos cargados axialmente, sección 4.7, K suele tomarse de un gráfico basado en datos experimentales. En la figura 5-32 se muestra un ejemplo para el eje con filete. Para usar este gráfico, primero se encuentra la relación geométrica D/d a fin de definir la curva adecuada y, después de calcular la abscisa r/d, se determina el valor de K a lo largo de la ordenada.

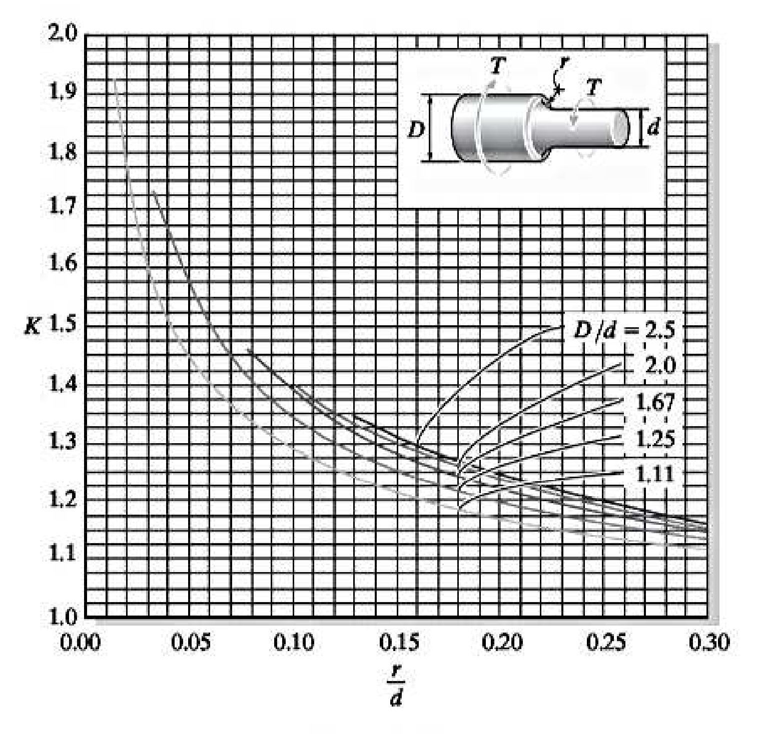


Figura 5-32

Entonces, el esfuerzo cortante máximo se determina a partir de

$$\tau_{\text{máx}} = K\frac{Tc}{J} \tag{5-21}$$

Aquí la fórmula de la torsión se aplica al *más pequeño* de los dos ejes conectados, puesto que $\tau_{\text{máx}}$ ocurre en la base del filete, figura 5-31*c*.

Observe en la gráfica que el *aumento* del radio *r* del filete causa una *disminución* de *K*. Por lo tanto, el esfuerzo cortante máximo en el eje puede *reducirse* al *aumentar* el radio del filete. Además, si el diámetro del eje mayor se reduce, la relación D/d será menor, por lo que el valor de *K* y por ende el de $\tau_{\text{máx}}$ serán inferiores.

Al igual que en el caso de los elementos cargados axialmente, los factores de concentración del esfuerzo de torsión deben utilizarse *siempre* que se diseñen ejes fabricados con *materiales frágiles*, o al diseñar ejes que estarán sometidos a *fatiga* o *cargas de torsión cíclicas*. Estas condiciones dan lugar a la formación de grietas en la concentración de esfuerzos, y a menudo pueden conducir a una fractura súbita. Por otra parte, si se aplican grandes cargas de torsión *estática* sobre un eje fabricado con *material dúctil*, entonces, se desarrollarán *deformaciones inelásticas* dentro del eje. La cedencia del material hará que los esfuerzos se *distribuyan de manera más uniforme* en todo el eje, de modo que el esfuerzo máximo no estará limitado a la región de concentración de esfuerzos. Este fenómeno se analizará con mayor detalle en la siguiente sección.



En el acoplamiento de estos ejes pueden surgir concentraciones de esfuerzo, y lo anterior debe tenerse en cuenta al diseñar el eje.

5

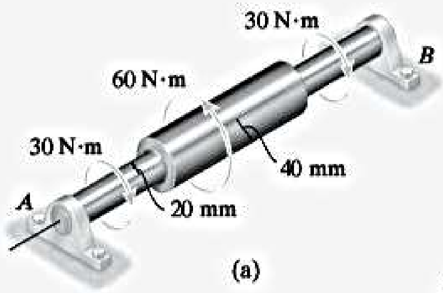
Puntos importantes

- Las *concentraciones de esfuerzo* en los ejes se producen en los puntos donde hay un cambio súbito de sección transversal, como en acoplamientos, cuñeros y filetes. Entre más grave sea el cambio en la geometría, mayor será la concentración de esfuerzos.
- Para el diseño o el análisis no es necesario conocer la distribución exacta del esfuerzo cortante sobre la sección transversal. En vez de esto, es posible obtener el esfuerzo cortante máximo mediante un factor de concentración de esfuerzos, *K*, que se ha determinado a partir de la experimentación, y sólo está en función de la geometría del eje.
- Por lo general, al diseñar un eje dúctil sometido a un par de torsión estático *no* será necesario considerar la concentración de esfuerzos; sin embargo, si el material es *frágil*, o está sometido a cargas de *fatiga*, entonces las concentraciones de esfuerzo se vuelven importantes.

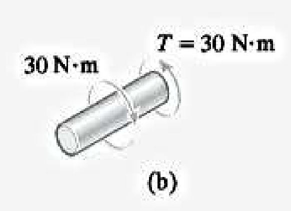
5

EJEMPLO 5.13

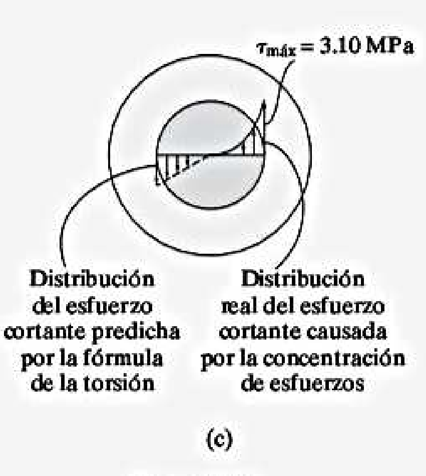
El eje escalonado que se muestra en la figura 5-33*a*, está apoyado sobre cojinetes en *A* y *B*. Determine el esfuerzo máximo en el eje debido a los pares de torsión aplicados. El filete ubicado en la unión de cada eje tiene un radio de $r = 6$ mm.



(a)



(b)



(c)

Figura 5-33

SOLUCIÓN

Par de torsión interno. Por inspección, se satisface el equilibrio de momentos respecto a la línea central del eje. Como el esfuerzo cortante máximo se produce en los extremos de los ejes con *menor* diámetro, el par de torsión interno (30 N · m) se puede encontrar aplicando el método de las secciones, figura 5-33*b*.

Esfuerzo cortante máximo. El factor de concentración de esfuerzos puede determinarse mediante el uso de la figura 5-32. A partir de la geometría del eje se tiene

$$\frac{D}{d} = \frac{2(40 \text{ mm})}{2(20 \text{ mm})} = 2$$

$$\frac{r}{d} = \frac{6 \text{ mm}}{2(20 \text{ mm})} = 0.15$$

Con estos parámetros, se obtiene el valor de $K = 1.3$.

Al aplicar la ecuación 5-21, resulta

$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{J}; \quad \tau_{máx} = 1.3\left[\frac{30 \text{ N}\cdot\text{m }(0.020 \text{ m})}{(\pi/2)(0.020 \text{ m})^4}\right] = 3.10 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Con base en la evidencia experimental, la distribución real del esfuerzo a lo largo de una línea radial de la sección transversal en la sección crítica es similar a la mostrada en la figura 5-33*c*. Observe cómo se compara esto con la distribución lineal del esfuerzo encontrada a partir de la fórmula de la torsión.

*5.9 Torsión inelástica

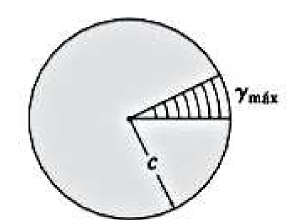
Si las cargas de torsión aplicadas sobre el eje son excesivas, entonces el material puede presentar cedencia y, en consecuencia, debe usarse un "análisis plástico" para determinar la distribución del esfuerzo cortante y el ángulo de giro. Al igual que antes, para realizar este análisis es necesario que el eje cumpla con las condiciones de deformación y equilibrio.



Torcimiento severo de una probeta de aluminio originado por la aplicación de un par de torsión plástico.

En la sección 5.1 se mostró que sin importar el comportamiento del material, las deformaciones cortantes que se desarrollan en un eje circular varían *linealmente*, desde cero en el centro del eje hasta un máximo en su límite exterior, figura 5-34*a*. Además, el par interno resultante en la sección debe ser equivalente al par de torsión causado por toda la distribución del esfuerzo cortante sobre la sección transversal. Esta condición se puede expresar de forma matemática considerando el esfuerzo cortante τ que actúa sobre un elemento de área dA ubicado a una distancia ρ del centro del eje, figura 5-34*b*. La fuerza producida por el esfuerzo es $dF = \tau\, dA$, y el par de torsión producido es $dT = \rho\, dF = \rho(\tau\, dA)$. Para todo el eje se requiere

$$T = \int_A \rho\tau\, dA \tag{5-22}$$

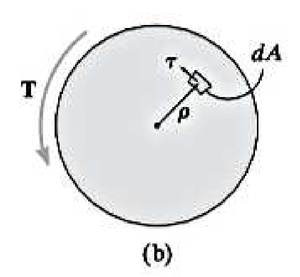


Distribución de la deformación cortante lineal

(a)

Si el área dA sobre la que actúa τ no se puede definir como un *anillo diferencial* con un área de $dA = 2\pi\rho\, d\rho$, figura 5-34*c*, entonces la ecuación anterior puede escribirse como

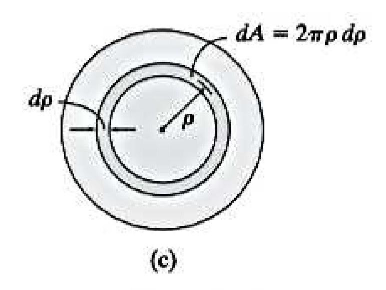
$$\boxed{T = 2\pi \int_0^c \tau\rho^2\, d\rho} \tag{5-23}$$



(b)

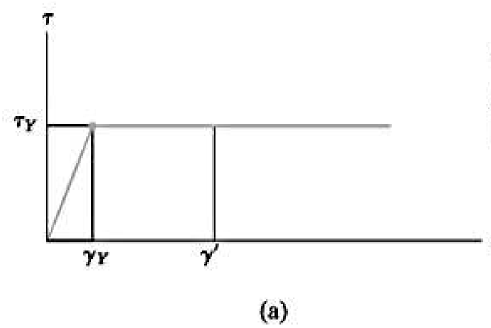
Estas condiciones de geometría y carga se usarán ahora para determinar la distribución del esfuerzo cortante en un eje, cuando éste se encuentra sometido a dos tipos de par de torsión.

Par de torsión elastoplástico. Considere que el material de un eje exhibe un comportamiento elástico perfectamente plástico. Como se muestra en la figura 5-35*a*, éste se caracteriza por un diagrama de esfuerzo-deformación cortante para el cual el material experimenta una deformación cortante creciente cuando el esfuerzo cortante alcanza el punto de cedencia τ_Y.

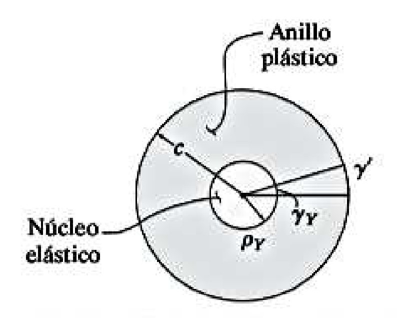


(c)

Figura 5-34

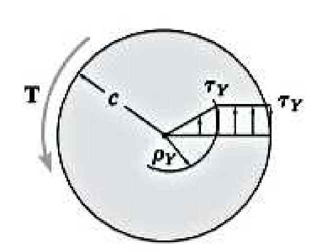


(a)



Distribución de la deformación cortante

(b)



Distribución del esfuerzo cortante

(c)

Figura 5-35

Si el par interno produce la deformación cortante *elástica* máxima, γ_Y, en el límite exterior del eje, entonces el par de torsión elástico máximo T_Y que produce esta distribución puede encontrarse a partir de la fórmula de la torsión, $\tau_Y = T_Y c/[(\pi/2)c^4]$, de modo que

$$T_Y = \frac{\pi}{2}\tau_Y c^3 \qquad (5\text{-}24)$$

Por otra parte, el ángulo de giro puede determinarse a partir de la ecuación 5-13, a saber,

$$d\phi = \gamma\frac{dx}{\rho} \qquad (5\text{-}25)$$

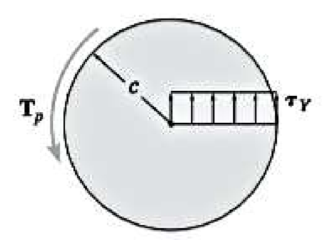
Si el par de torsión aplicado aumenta su magnitud por encima de T_Y, se comienza a producir la cedencia. Primero en el límite exterior del eje, $\rho = c$, y después cuando la deformación cortante máxima aumenta, digamos hasta γ' en la figura 5-35*a*, el límite de cedencia avanzará hacia el centro del eje, figura 5-35*b*. Como puede observarse, esto produce un *núcleo elástico*, donde, por proporción, el radio del núcleo es $\rho_Y = (\gamma_Y/\gamma')c$. Además, la parte externa del material forma un *aro* o *anillo plástico*, ya que las deformaciones cortantes γ dentro de esta región son mayores que γ_Y. En la figura 5-35*c* se muestra la distribución del esfuerzo cortante correspondiente a lo largo de una línea radial del eje. Ésta se establece al tomar puntos sucesivos en la distribución de la deformación cortante en la figura 5-35*b* y al encontrar el valor correspondiente del esfuerzo cortante en el diagrama τ-γ, figura 5-35*a*. Por ejemplo, en $\rho = c$, γ' da τ_Y y en $\rho = \rho_Y$, γ_Y también da τ_Y; etcétera.

Como τ en la figura 5-35*c* ahora puede expresarse como una función de ρ, es posible aplicar la ecuación 5-23 para determinar el par de torsión. Se tiene

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\int_0^c \tau\rho^2\,d\rho \\
&= 2\pi\int_0^{\rho_Y}\left(\tau_Y\frac{\rho}{\rho_Y}\right)\rho^2\,d\rho + 2\pi\int_{\rho_Y}^c \tau_Y\rho^2\,d\rho \\
&= \frac{2\pi}{\rho_Y}\tau_Y\int_0^{\rho_Y}\rho^3\,d\rho + 2\pi\tau_Y\int_{\rho_Y}^c \rho^2\,d\rho \\
&= \frac{\pi}{2\rho_Y}\tau_Y\rho_Y^4 + \frac{2\pi}{3}\tau_Y(c^3 - \rho_Y^3) \\
&= \frac{\pi\tau_Y}{6}(4c^3 - \rho_Y^3) \qquad (5\text{-}26)
\end{aligned}$$

5

Par de torsión plástico. Los aumentos adicionales en T tienden a reducir el radio del núcleo elástico hasta que todo el material cede, es decir, $\rho_Y \rightarrow 0$, figura 5-35*b*. El material del eje estará sometido a un *comportamiento perfectamente plástico* y la distribución del esfuerzo cortante se vuelve uniforme, por lo que $\tau = \tau_Y$, figura 5-35*d*. Ahora se puede aplicar la ecuación 5-23 para determinar el ***par de torsión plástico*** T_p, lo que representa el mayor par de torsión posible que el eje puede soportar.



Par de torsión completamente plástico

(d)

Figura 5-35 (cont.)

$$T_p = 2\pi \int_0^c \tau_Y \rho^2 \, d\rho$$

$$= \frac{2\pi}{3} \tau_Y c^3 \qquad \text{(5-27)}$$

En comparación con el par de torsión elástico máximo T_Y, ecuación 5-24, se puede observar que

$$T_p = \frac{4}{3} T_Y$$

En otras palabras, el par de torsión plástico es 33 por ciento mayor que el par de torsión elástico máximo.

Desafortunadamente, el ángulo de giro ϕ para la distribución del esfuerzo cortante *no puede* definirse de manera única. Esto se debe a que $\tau = \tau_Y$ no corresponde a ningún valor único de deformación cortante $\gamma \geq \gamma_Y$. Como resultado, una vez que se aplica $\mathbf{T}_p$, el eje continuará deformándose o girando sin un aumento correspondiente del esfuerzo cortante.

*5.10 Esfuerzo residual

Cuando un eje se somete a deformaciones cortantes plásticas causadas por torsión, el retiro del par de torsión hará que algunos esfuerzos cortantes permanezcan en el eje. Este esfuerzo se denomina ***esfuerzo residual***, y su distribución puede calcularse mediante superposición y recuperación elástica. (Vea la sección 4.9.)

Por ejemplo, si T_p hace que el material en el límite exterior del eje se deforme hasta γ_1, que se muestra como el punto C de la curva τ-γ en la figura 5-36, el retiro de T_p ocasionará un esfuerzo cortante inverso, de tal manera que el comportamiento del material seguirá el segmento CD en línea recta, creando cierta *recuperación elástica* de la deformación cortante γ_1. Esta línea es paralela a la parte inicial AB en línea recta del diagrama τ-γ, por lo que ambas líneas tienen una pendiente G como se indica en la figura.

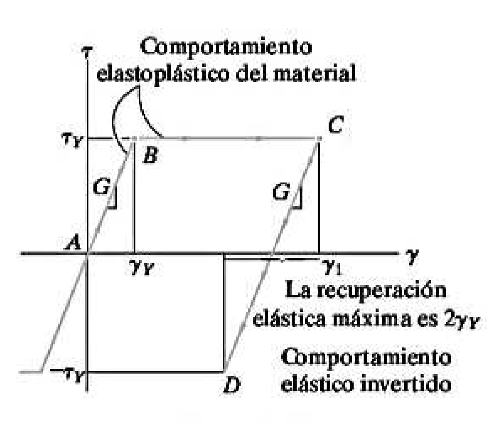
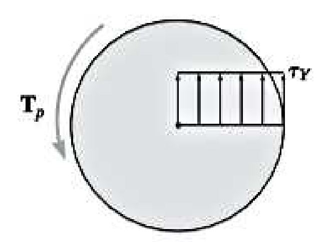
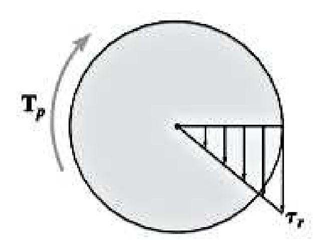


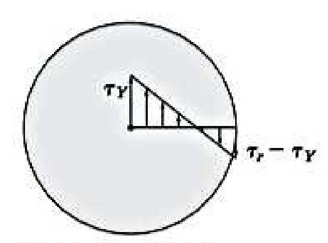
Figura 5-36



Par de torsión plástico aplicado que causa deformaciones cortantes plásticas en todo el eje
(a)



Par de torsión plástico invertido que causa deformaciones cortantes elásticas en todo el eje
(b)



Distribución del esfuerzo cortante residual en el eje
(c)

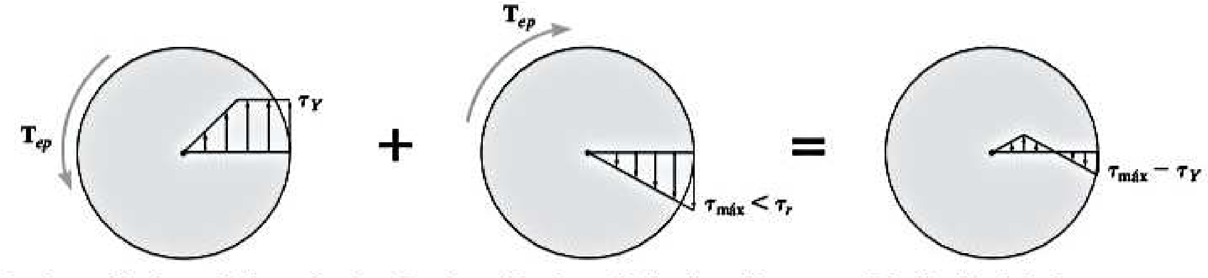
Como se produce una recuperación elástica, es posible superponer en la distribución del esfuerzo de torsión plástica de la figura 5-37*a* una *distribución lineal del esfuerzo* causada por la aplicación del par de torsión plástico $\mathbf{T}_p$ en dirección *opuesta*, figura 5-37*b*. Aquí, el esfuerzo cortante máximo τ_r para esta distribución de esfuerzo, se llama el *módulo de ruptura* para la torsión. Éste se determina a partir de la fórmula de la torsión*, de donde se obtiene

$$\tau_r = \frac{T_p c}{J} = \frac{T_p c}{(\pi/2)c^4}$$

Usando la ecuación 5-27,

$$\tau_r = \frac{[(2/3)\pi\tau_Y c^3]c}{(\pi/2)c^4} = \frac{4}{3}\tau_Y$$

Observe que aquí es posible la aplicación invertida de $\mathbf{T}_p$ usando la distribución lineal del esfuerzo cortante de la figura 5-37*b*, ya que la recuperación máxima de la deformación cortante elástica es $2\gamma_Y$, como se indica en la figura 5-37. Esto corresponde a un esfuerzo cortante máximo aplicado de $2\tau_Y$, que es *mayor* que el esfuerzo cortante máximo de $\frac{4}{3}\tau_Y$ calculado anteriormente. De ahí que, mediante la superposición de las distribuciones de esfuerzo que implican aplicaciones y el posterior retiro del par de torsión plástico, se obtiene la distribución del esfuerzo cortante residual en el eje, como se muestra en la figura 5-37*c*. Debe señalarse a partir de este diagrama que el esfuerzo cortante en el centro del eje, que se muestra como τ_Y, en realidad debe ser *cero*, ya que el material a lo largo de la línea central del eje nunca se deforma. La razón de que no sea cero es porque se supone que *todo* el material del eje se deformó más allá del punto de cedencia con el fin de determinar el par de torsión plástico, figura 5-37*a*. Para ser más realista, al modelar el comportamiento del material debe considerarse un par de torsión elastoplástico. Al hacer esto, se da lugar a una superposición de la distribución de esfuerzo como en la figura 5-37*d*.



Par de torsión elastoplástico aplicado | Par de torsión elastoplástico invertido | Distribución del esfuerzo cortante residual en el eje
(d)

Figura 5-37

*La fórmula de la torsión es válida sólo cuando el material se comporta de manera elástica lineal; sin embargo, el módulo de ruptura se llama así porque supone que el material se comporta elásticamente y de manera súbita *se rompe* en el límite proporcional.

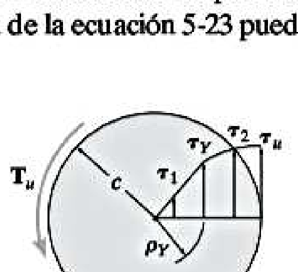
Par de torsión último. En general, la mayoría de los materiales de ingeniería tendrá un diagrama de esfuerzo-deformación cortante como el mostrado en la figura 5-38*a*. En consecuencia, si T aumenta de modo que la deformación cortante máxima en el eje se convierta en $\gamma = \gamma_u$, figura 5-38*b*, entonces por proporción γ_Y se produce en $\rho_Y = (\gamma_Y/\gamma_u)c$. Del mismo modo, las deformaciones cortantes en, por ejemplo, $\rho = \rho_1$ y $\rho = \rho_2$, pueden encontrarse por proporción, es decir, $\gamma_1 = (\rho_1/c)\gamma_u$ y $\gamma_2 = (\rho_2/c)\gamma_u$. Si los valores correspondientes de τ_1, τ_Y, τ_2 y τ_u se toman del diagrama τ-γ y se grafican, se obtiene la distribución del esfuerzo cortante que actúa a lo largo de una línea radial de la sección transversal, figura 5-38*c*. El par de torsión producido por esta distribución del esfuerzo se denomina ***par de torsión último***, T_u.

La magnitud de $\mathbf{T}_u$ puede determinarse al integrar "gráficamente" la ecuación 5-23. Para hacer esto, el área de la sección transversal del eje se segmenta en un número finito de anillos, como el que se muestra en gris oscuro en la figura 5-38*d*. El área de este anillo, $\Delta A = 2\pi\rho\Delta\rho$, se multiplica por el esfuerzo cortante τ que actúa sobre ella, de modo que se pueda determinar la fuerza $\Delta F = \tau\,\Delta A$. El par de torsión creado por esta fuerza es entonces $\Delta T = \rho\Delta F = \rho(\tau\Delta A)$. La suma de todos los pares de torsión, determinados de esta manera, para toda la sección transversal proporciona el par de torsión último T_u; es decir, la ecuación 5-23 se convierte en $T_u \approx 2\pi\Sigma\tau\rho^2\Delta\rho$. Sin embargo, si la distribución del esfuerzo puede expresarse como una función analítica, $\tau = f(\rho)$, como en los casos de los pares de torsión elástico y plástico, entonces la integración de la ecuación 5-23 puede realizarse de manera directa.

(a)

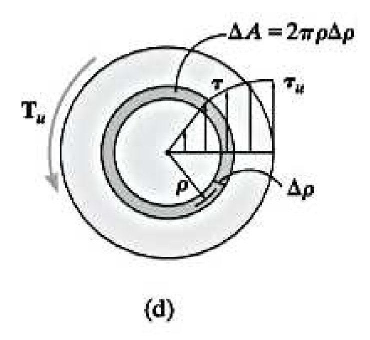
Distribución de la deformación cortante última

(b)



Distribución del esfuerzo cortante último

(c)



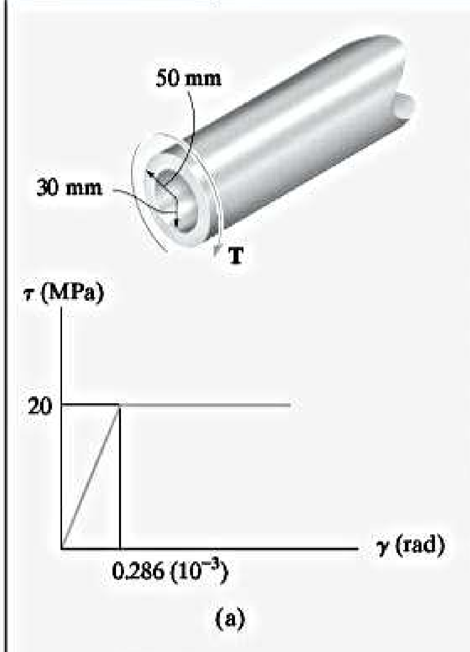
(d)

Figura 5-38

Puntos importantes

- La distribución de la *deformación cortante* a lo largo de una línea radial en la sección transversal de un eje se basa en consideraciones geométricas y se sabe que *siempre* varía linealmente a lo largo de la línea radial. Una vez establecida, la distribución del esfuerzo cortante puede determinarse utilizando el diagrama de esfuerzo-deformación cortante.
- Si se establece la distribución del esfuerzo cortante para el eje, ésta produce un par de torsión respecto a la línea central del eje que es equivalente al par de torsión interno resultante que actúa sobre la sección transversal.
- El *comportamiento perfectamente plástico* supone que la distribución del esfuerzo cortante es *constante*. Cuando esto ocurre, el eje continuará girando sin aumento del par de torsión. Este par se conoce como el *par de torsión plástico*.

EJEMPLO 5.14



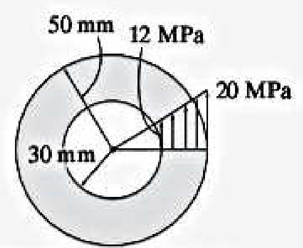
El eje tubular de la figura 5-39*a* está fabricado de una aleación de aluminio la cual se supone tiene un diagrama τ-γ elastoplástico como se muestra en la figura. Determine el par de torsión máximo que puede aplicarse al eje sin causar que el material ceda, y el par de torsión máximo o par de torsión plástico que se puede aplicar al eje. Además, ¿cuál debe ser la deformación cortante mínima en la pared exterior para que se desarrolle un par de torsión totalmente plástico?

SOLUCIÓN

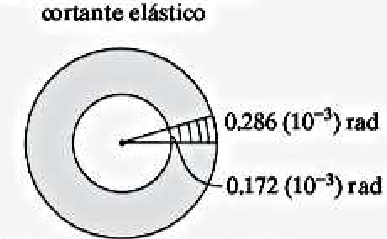
Par de torsión elástico máximo. Se requiere que el esfuerzo cortante en la fibra exterior sea de 20 MPa. Usando la fórmula de la torsión, se tiene

$$\tau_Y = \frac{T_Y c}{J}; \qquad 20(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{T_Y(0.05\ \text{m})}{(\pi/2)[(0.05\ \text{m})^4 - (0.03\ \text{m})^4]}$$

$$T_Y = 3.42\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



Distribución del esfuerzo cortante elástico



Distribución de la deformación cortante elástica

(b)

En la figura 5-39*b* se muestran las distribuciones de esfuerzo cortante y deformación cortante para este caso. Los valores en la pared interna del tubo se obtuvieron por proporción.

Par de torsión plástico. En la figura 5-39*c* se muestra la distribución del esfuerzo cortante en este caso. La aplicación de la ecuación 5-23 requiere que $\tau = \tau_Y$, se tiene

$$T_p = 2\pi \int_{0.03\ \text{m}}^{0.05\ \text{m}} [20(10^6)\ \text{N/m}^2]\rho^2\, d\rho = 125.66(10^6)\frac{1}{3}\rho^3 \Big|_{0.03\ \text{m}}^{0.05\ \text{m}}$$

$$= 4.11\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

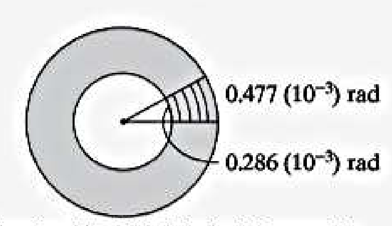
Para este tubo, T_p representa un aumento del 20 por ciento en la capacidad del par de torsión en comparación con el par de torsión elástico T_Y.

Deformación cortante del radio exterior. El tubo se vuelve totalmente plástico cuando la deformación cortante en la *pared interna* se convierte en $0.286(10^{-3})$ rad, como se muestra en la figura 5-39*c*. Como la deformación cortante *permanece lineal* a lo largo de la sección transversal, la deformación plástica en las fibras exteriores del tubo en la figura 5-39*c* está determinada por la proporción.

$$\frac{\gamma_o}{50\ \text{mm}} = \frac{0.286(10^{-3})\ \text{rad}}{30\ \text{mm}}$$

$$\gamma_o = 0.477(10^{-3})\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

Distribución del esfuerzo cortante plástico



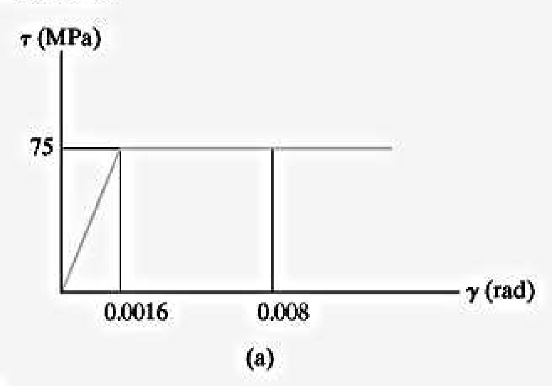
Distribución inicial de la deformación cortante plástica

(c)

Figura 5-39

EJEMPLO 5.15

Un eje circular sólido tiene un radio de 20 mm y una longitud de 1.5 m. El material tiene un diagrama τ-γ elastoplástico como se muestra en la figura 5-40*a*. Determine el par de torsión necesario para girar el eje un ángulo de $\phi = 0.6$ rad.



(a)

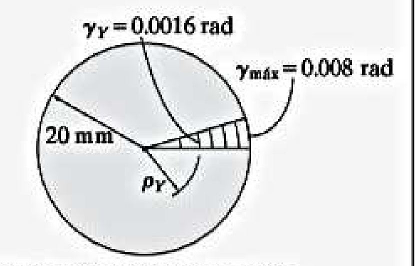
SOLUCIÓN

Primero se obtiene la distribución de la deformación cortante y después se establece la distribución del esfuerzo cortante. Una vez que se conoce esto, es posible determinar el par de torsión aplicado.

La deformación cortante máxima ocurre en la superficie del eje, $\rho = c$. Como el ángulo de giro es $\phi = 0.6$ rad para toda la longitud del eje de 1.5 m, entonces al usar la ecuación 5-25 para toda la longitud se tiene

$$\phi = \gamma\frac{L}{\rho}; \qquad 0.6 = \frac{\gamma_{máx}(1.5 \text{ m})}{(0.02 \text{ m})}$$

$$\gamma_{máx} = 0.008 \text{ rad}$$



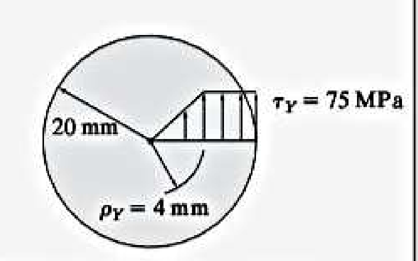
Distribución de la deformación cortante

(b)

En la figura 5-40*b* se muestra la distribución de la deformación cortante. Tenga en cuenta que se produce la cedencia del material puesto que $\gamma_{máx} > \gamma_Y = 0.0016$ rad en la figura 5-40*a*. El radio del núcleo elástico, ρ_Y, se puede obtener por proporción. A partir de la figura 5-40*b*,

$$\frac{\rho_Y}{0.0016} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.008}$$

$$\rho_Y = 0.004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$$



Distribución del esfuerzo cortante

(c)

Figura 5-40

Con base en la distribución de la deformación cortante, en la figura 5-40*c* se muestra la distribución del esfuerzo cortante, graficada sobre un segmento de línea radial. Ahora, el par de torsión se puede obtener mediante la ecuación 5-26. Al sustituir en los datos numéricos se obtiene

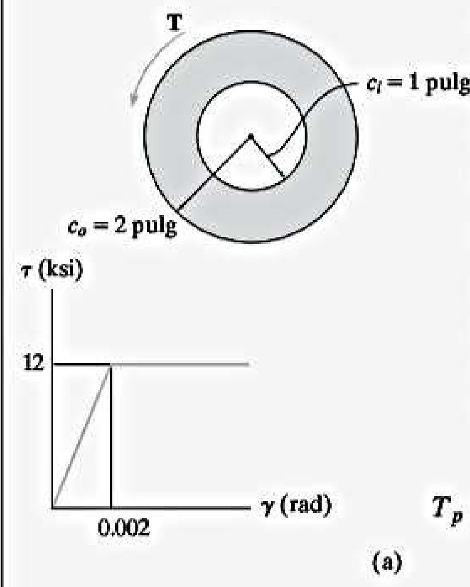
$$T = \frac{\pi\tau_Y}{6}(4c^3 - \rho_Y^3)$$

$$= \frac{\pi[75(10^6) \text{ N/m}^2]}{6}[4(0.02 \text{ m})^3 - (0.004 \text{ m})^3]$$

$$= 1.25 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 5.16





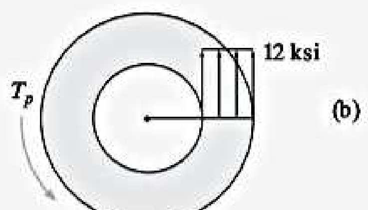
El tubo de la figura 5-41*a* tiene una longitud de 5 pies y su diagrama elastoplástico τ-γ también se muestra en la figura 5-41*a*. Determine el par de torsión T_p plástico. ¿Cuál es la distribución del esfuerzo cortante residual si $\mathbf{T}_p$ se retira *justo después* de que el tubo se vuelve totalmente plástico?

SOLUCIÓN

Par de torsión plástico. El par de torsión plástico $\mathbf{T}_p$ deformará el tubo de modo que todo el material ceda. De ahí que la distribución del esfuerzo será como se muestra en la figura 5-41*b*. Al aplicar la ecuación 5-23, se tiene

$$T_p = 2\pi \int_{c_i}^{c_o} \tau_Y \rho^2\, d\rho = \frac{2\pi}{3}\tau_Y (c_o^3 - c_i^3)$$

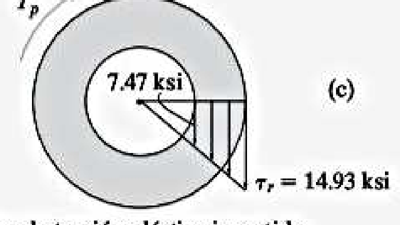
$$= \frac{2\pi}{3}(12(10^3)\text{ lb/pulg}^2)[(2\text{ pulg})^3 - (1\text{ pulg})^3] = 175.9\text{ kip}\cdot\text{pulg} \qquad \textit{Resp.}$$



Par de torsión plástico aplicado

Justo cuando el tubo se vuelve completamente plástico, comienza la cedencia en la pared interior, es decir, en $c_i = 1$ pulg, $\gamma_Y = 0.002$ rad, figura 5-41*a*. El ángulo de giro que se produce puede determinarse a partir de la ecuación 5-25, que para todo el tubo se convierte en

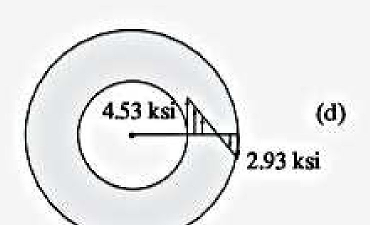
$$\phi_p = \gamma_Y \frac{L}{c_i} = \frac{(0.002)(5\text{ pies})(12\text{ pulg/pie})}{(1\text{ pulg})} = 0.120\text{ rad}$$



Par de torsión plástico invertido

Cuando *se retira* $\mathbf{T}_p$, o de hecho se vuelve a aplicar en la dirección opuesta, la distribución "ficticia" lineal del esfuerzo cortante mostrada en la figura 5-41*c* debe superponerse a la que se muestra en la figura 5-41*b*. En la figura 5-41*c*, el esfuerzo cortante máximo o el módulo de ruptura se encuentra a partir de la fórmula de la torsión

$$\tau_r = \frac{T_p c_o}{J} = \frac{(175.9\text{ kip}\cdot\text{pulg})(2\text{ pulg})}{(\pi/2)[(2\text{ pulg})^4 - (1\text{ pulg})^4]} = 14.93\text{ ksi}$$



Distribución del esfuerzo cortante residual

Figura 5-41

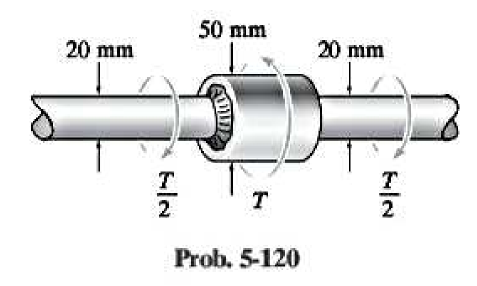
Además, en la pared interior del tubo el esfuerzo cortante es

$$\tau_i = (14.93\text{ ksi})\left(\frac{1\text{ pulg}}{2\text{ pulg}}\right) = 7.47\text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

La distribución del esfuerzo cortante residual que resulta se muestra en la figura 5-41*d*.

PROBLEMAS

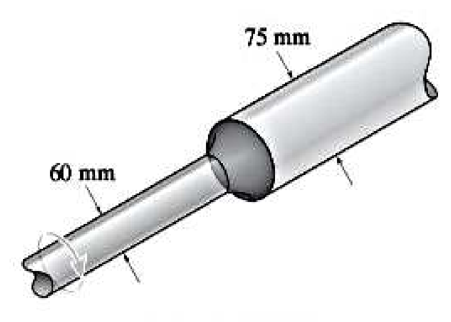
*5-120. El acero usado para fabricar el eje tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 8$ MPa. Si los elementos están conectados con una soldadura de filete de radio $r = 4$ mm, determine el máximo par de torsión T que puede aplicarse.



Prob. 5-120

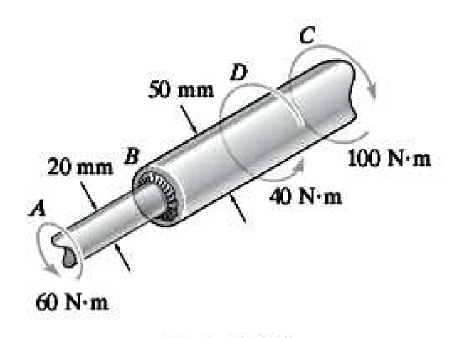
•5-121. El eje compuesto debe diseñarse para girar a 720 rpm, mientras transmite 30 kW de potencia. ¿Es posible esto? El esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 12$ MPa.

5-122. El eje compuesto está diseñado para girar a 540 rpm. Si el radio de la soldadura de filete que conecta a los ejes es $r = 7.20$ mm y el esfuerzo cortante permisible para el material es $\tau_{perm} = 55$ MPa, determine la potencia máxima que puede transmitir el eje.



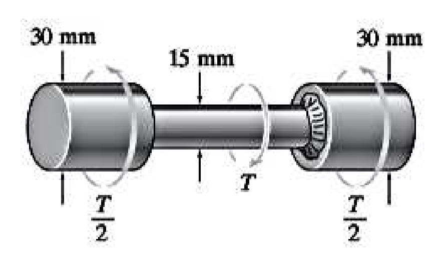
Probs. 5-121/122

5-123. El eje de acero está hecho a partir de dos segmentos: AB y BC, que se conectan mediante una soldadura de filete con un radio de 2.8 mm. Determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje.



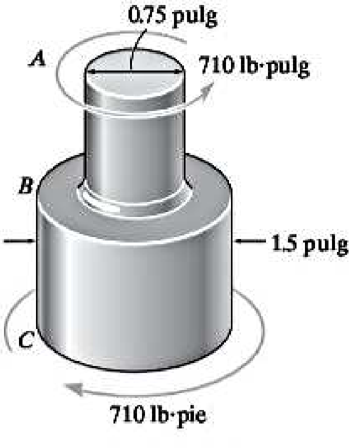
Prob. 5-123

*5-124. El acero utilizado para fabricar el eje tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 8$ MPa. Si los elementos se conectan entre sí mediante una soldadura de filete con un radio $r = 2.25$ mm, determine el máximo par de torsión T que puede aplicarse.



Prob. 5-124

•5-125. El ensamble está sometido a un par de torsión de 710 lb · pulg. Si el esfuerzo cortante permisible para el material es $\tau_{perm} = 12$ ksi, determine el radio del filete más pequeño que puede utilizarse para transmitir el par de torsión.



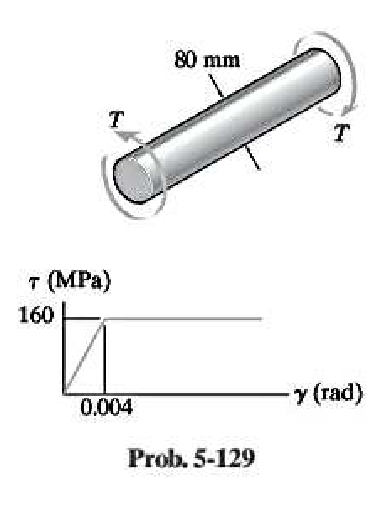
Prob. 5-125

5-126. Un eje sólido está sometido al par de torsión T, el cual hace que el material ceda. Si el material es elastoplástico, demuestre que el par de torsión se puede expresar en términos del ángulo de giro ϕ del eje como $T = \frac{4}{3}T_Y(1 - \phi^3_Y/4\phi^3)$, donde T_Y y ϕ_Y son el par de torsión y el ángulo de giro cuando el material comienza a ceder.

5-127. Un eje sólido con diámetro de 2 pulg está hecho de material elastoplástico con un límite de elasticidad de $\tau_Y = 16$ ksi y un módulo cortante $G = 12(10^3)$ ksi. Determine el par de torsión necesario para desarrollar un núcleo elástico en el eje con un diámetro de 1 pulg. Además, ¿cuál es el par de torsión plástico?

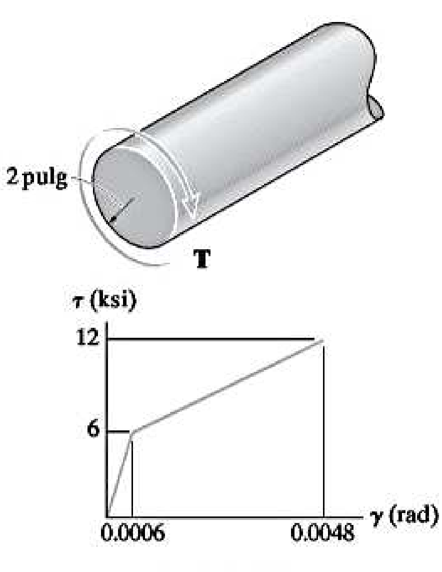
*5-128. Determine el par de torsión necesario para torcer un alambre corto de acero con un diámetro de 3 mm mediante varias revoluciones; considere que está fabricado de un acero elastoplástico y que tiene un esfuerzo de cedencia de $\tau_Y = 80$ MPa. Suponga que el material se vuelve completamente plástico.

•5-129. El eje sólido está fabricado de un material elástico perfectamente plástico como se muestra en la figura. Determine el par de torsión T necesario para formar un núcleo elástico en el eje con radio de $\rho_Y = 20$ mm. ¿Cuál es el ángulo que gira uno de los extremos del eje con respecto al otro si el éste tiene 3 m de largo? Cuando el par de torsión se retira, determine la distribución del esfuerzo residual en el eje y el ángulo de giro permanente.



Prob. 5-129

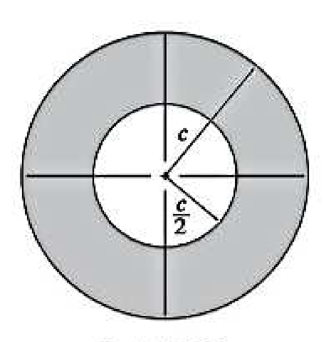
5-130. El eje está sometido a una deformación cortante máxima de 0.0048 rad. Determine el par de torsión aplicado al eje si el material tiene endurecimiento por deformación, como se muestra en el diagrama de esfuerzo-deformación cortante.



Prob. 5-130

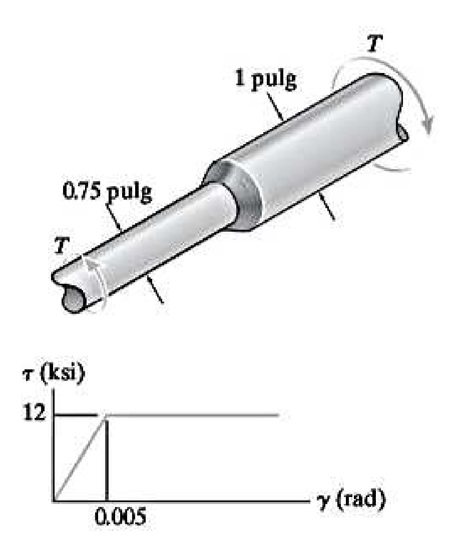
5-131. Un eje circular sólido con un diámetro de 80 mm está fabricado de un material elástico perfectamente plástico, con un esfuerzo cortante de cedencia $\tau_Y = 125$ MPa. Determine (a) el máximo par de torsión elástico T_Y; y (b) el par de torsión plástico T_p.

***5-132.** El eje hueco tiene la sección transversal mostrada en la figura y está fabricado de un material elástico perfectamente plástico, con un esfuerzo cortante de cedencia τ_Y. Determine la relación entre el par de torsión plástico T_p sobre el máximo par de torsión elástico T_Y.



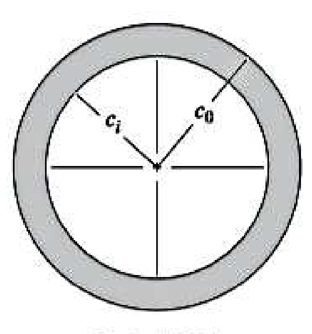
Prob. 5-132

5-133. El eje consta de dos secciones que están rígidamente conectadas. Si el material es elastoplástico como se muestra en la figura, determine el mayor par de torsión T que puede aplicarse al eje. Además, señale la distribución del esfuerzo cortante sobre una línea radial para cada sección. No tome en cuenta el efecto de la concentración de esfuerzos.



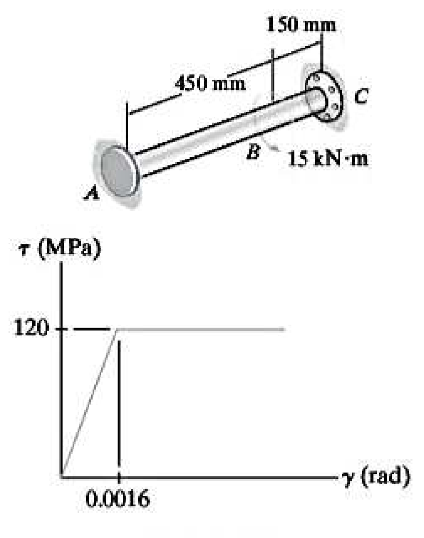
Prob. 5-133

5-134. El eje hueco está fabricado de un material elástico perfectamente plástico con un módulo cortante G y un esfuerzo cortante de cedencia τ_Y. Determine el par de torsión $\mathbf{T}_p$ aplicado cuando el material de la superficie interior está a punto de ceder (par de torsión plástico). Además, encuentre el ángulo de giro correspondiente y la deformación cortante máxima. El eje tiene una longitud de L.



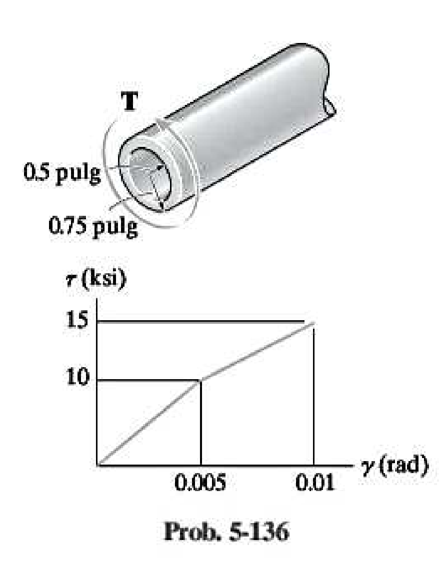
Prob. 5-134

5-135. El eje hueco tiene diámetros interno y externo de 60 mm y 80 mm, respectivamente. Si está fabricado de un material elástico perfectamente plástico y tiene el diagrama τ-γ que se muestra en la figura, determine las reacciones en los soportes fijos A y C.



Prob. 5-135

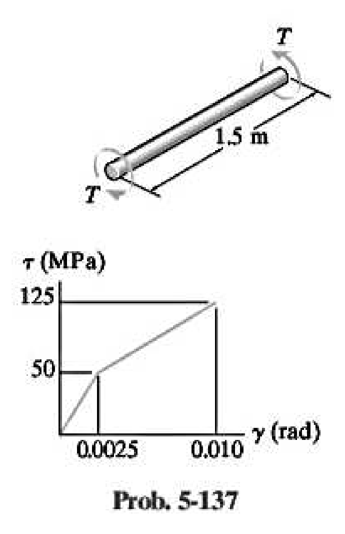
***5-136.** El eje tubular está fabricado de un material con endurecimiento por deformación que tiene un diagrama τ-γ como el mostrado en la figura. Determine el par de torsión T que debe aplicarse al eje para que la deformación cortante máxima sea de 0.01 rad.



Prob. 5-136

5

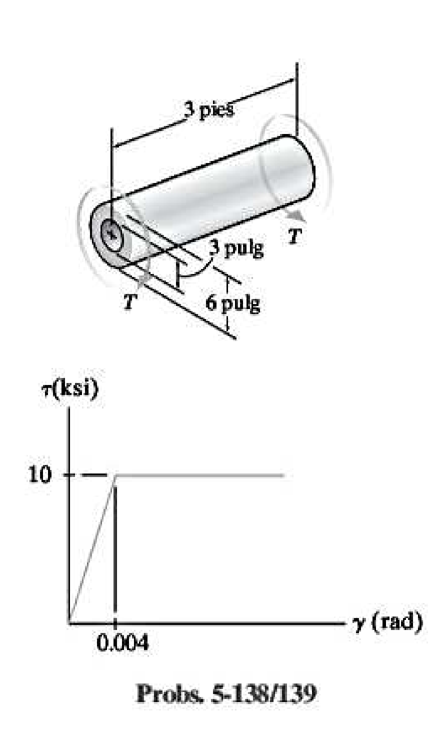
•5-137. El diagrama de esfuerzo-deformación cortante para un eje sólido con un diámetro de 50 mm puede aproximarse como se muestra en la figura. Determine el par de torsión T necesario para provocar un esfuerzo cortante máximo en el eje de 125 MPa. Si el eje tiene 1.5 m de largo, ¿cuál es el ángulo de giro correspondiente?



Prob. 5-137

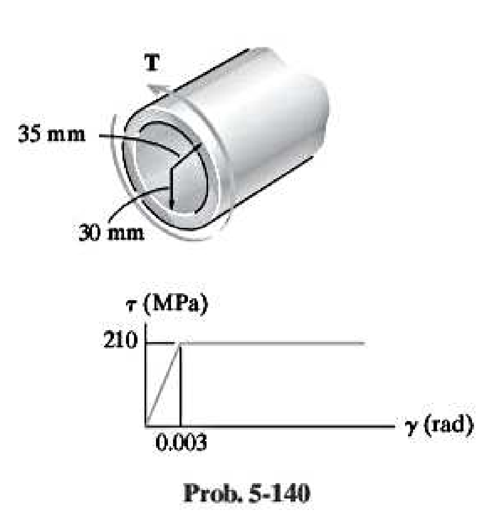
5-138. Un tubo está fabricado de material elástico perfectamente plástico y tiene el diagrama τ-γ que se muestra en la figura. Si el radio del núcleo elástico es $\rho_Y = 2.25$ pulg, determine el par de torsión T aplicado. Además, encuentre la distribución del esfuerzo cortante residual en el eje y el ángulo de giro permanente de uno de los extremos en relación con el otro al retirarse el par de torsión.

5-139. El tubo está fabricado de un material elástico perfectamente plástico y tiene el diagrama τ-γ que se muestra en la figura. Determine el par de torsión T que ocasiona que la superficie interna del eje comience a ceder. Además, encuentre la distribución del esfuerzo cortante residual en el eje al retirarse el par de torsión.



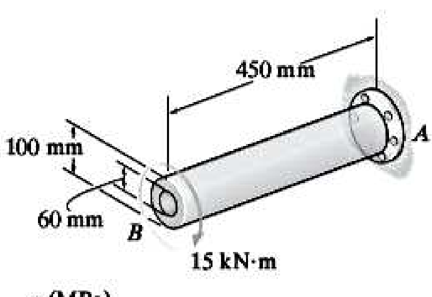
Probs. 5-138/139

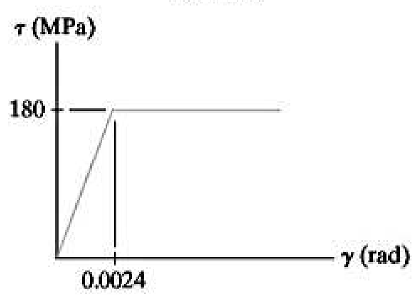
***5-140.** El tubo de 2 m de largo está fabricado de un material elástico perfectamente plástico como se muestra en la figura. Determine el par de torsión T aplicado que somete al material del borde exterior del tubo a una deformación cortante de $\gamma_{máx} = 0.006$ rad. ¿Cuál es el ángulo permanente de giro del tubo cuando este par de torsión se retira? Dibuje la distribución del esfuerzo residual en el tubo.

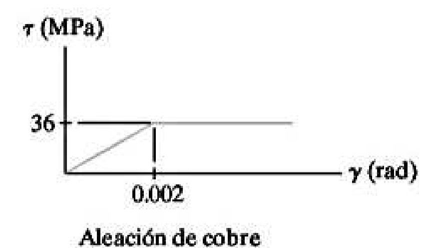


Prob. 5-140

•5-141. Un núcleo fabricado con una aleación de acero está unido firmemente a un tubo fabricado con una aleación de cobre para formar el eje mostrado en la figura. Si los materiales tienen el diagrama τ-γ que se muestra, determine el par de torsión resistido por el núcleo y el tubo.







Prob. 5-141

5-142. Un par de torsión se aplica al eje de radio r. Si el material tiene una relación de esfuerzo-deformación cortante de $\tau = k\gamma^{1/6}$, donde k es una constante, determine el esfuerzo cortante máximo en el eje.



Prob. 5-142

REPASO DE CAPÍTULO

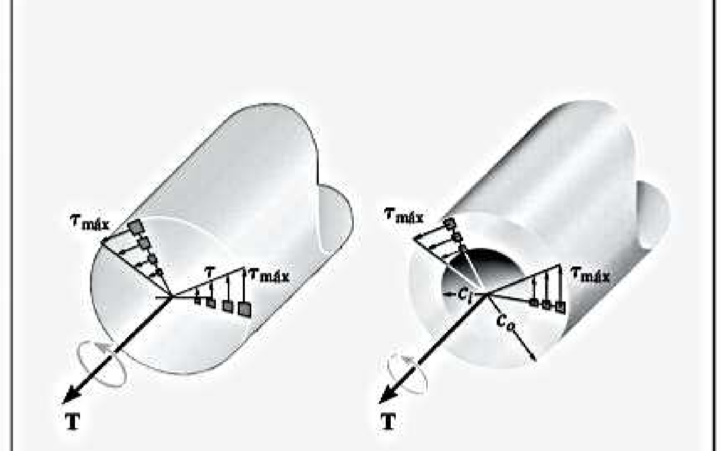
Un par de torsión hace que un eje con sección transversal circular gire, de modo que la deformación cortante en el eje sea proporcional a su distancia radial desde el centro del eje. Siempre que el material sea homogéneo y elástico lineal, el esfuerzo cortante se determina a partir de la fórmula de la torsión,

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

El diseño de un eje requiere encontrar el parámetro geométrico,

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{perm}}}$$

A menudo es necesario reportar la potencia P suministrada a un eje que gira con velocidad angular ω, en cuyo caso el par de torsión se determina a partir de $P = T\omega$.



5

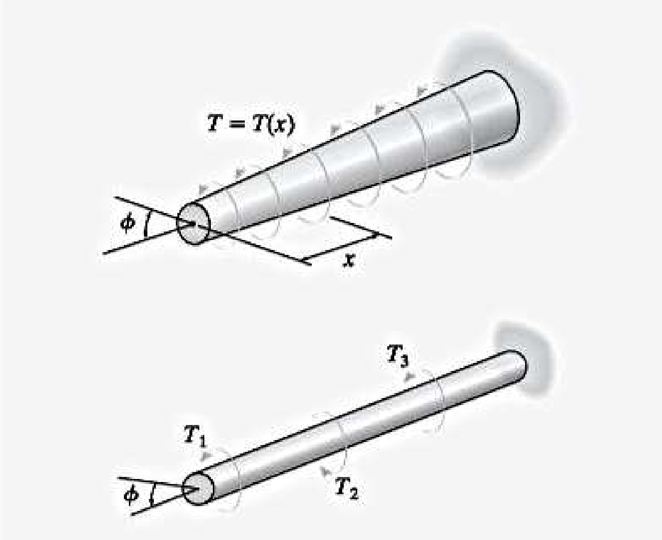
El ángulo de giro de un eje circular se determina a partir de

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{JG}$$

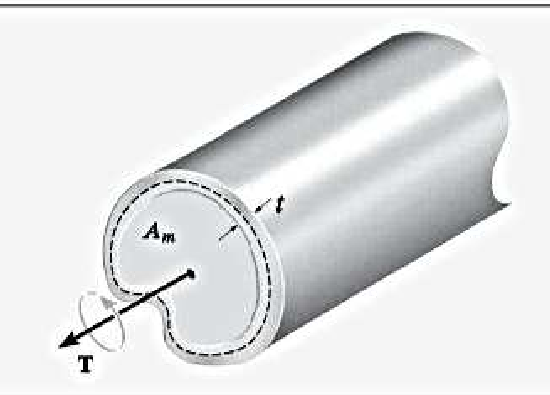
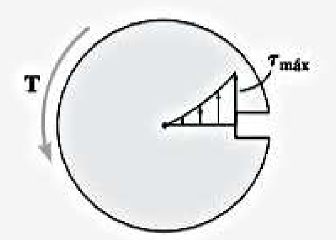
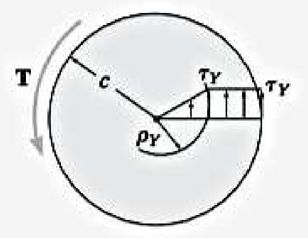
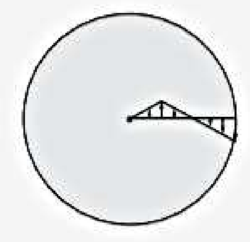
Si el par de torsión interno y JG son constantes dentro de cada segmento del eje, entonces

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG}$$

Para su aplicación, es necesario utilizar una convención de signos para el par de torsión interno y para asegurar que el material se conserve elástico lineal.



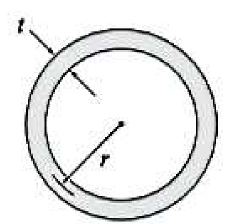
Si el eje es estáticamente indeterminado, entonces los pares de torsión reactivos se determinan a partir del equilibrio, la compatibilidad del giro y una relación par de torsión-giro, tal como $\phi = TL/JG$.

Los ejes sólidos no circulares tienden a pandearse fuera del plano cuando se someten a un par de torsión. Existen fórmulas disponibles para determinar el esfuerzo cortante elástico máximo y el giro para estos casos.	
El esfuerzo cortante promedio en tubos de pared delgada se determina suponiendo que el esfuerzo cortante a través de cada espesor t del tubo es constante. Su valor se determina a partir de $\tau_{\text{prom}} = \dfrac{T}{2tA_m}$.	
Las concentraciones de esfuerzo ocurren en los ejes cuando su sección transversal cambia de manera súbita. El esfuerzo cortante máximo se determina mediante un factor de concentración del esfuerzo K, el cual se determina con base en experimentación y se representa en forma gráfica. Una vez obtenido, $\tau_{\text{máx}} = K\left(\dfrac{Tc}{J}\right)$.	
Si el par de torsión aplicado hace que el material exceda el límite elástico, entonces la distribución del esfuerzo no será proporcional a la distancia radial desde la línea central del eje. En cambio, el par de torsión interno se relaciona con la distribución del esfuerzo usando el diagrama de esfuerzo cortante-deformación cortante y el equilibrio.	
Si un eje se somete a un par de torsión plástico, que después se retira, éste causará que el material responda elásticamente, ocasionando el desarrollo de un esfuerzo cortante residual en el eje.	

5

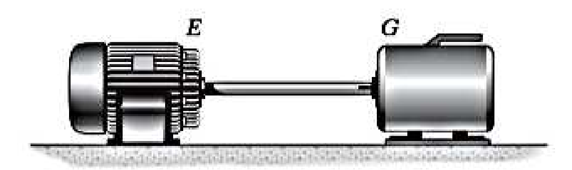
PROBLEMAS DE REPASO

5-143. Considere un tubo de pared delgada con radio medio r y grosor t. Demuestre que el esfuerzo cortante máximo en el tubo debido a la aplicación de un par de torsión T se aproxima al esfuerzo cortante promedio calculado a partir de la ecuación 5-18 como $r/t \rightarrow \infty$.



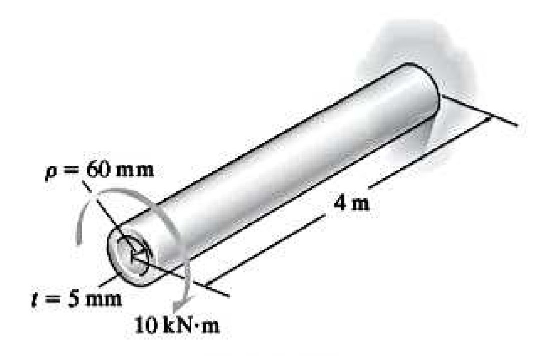
Prob. 5-143

***5-144.** El eje de acero inoxidable 304 tiene 3 m de longitud y un diámetro exterior de 60 mm. Cuando gira a 60 rad/s transmite 30 kW de potencia desde el motor E hasta el generador G. Determine el menor grosor posible del eje si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 150$ MPa y el eje no se puede torcer más de 0.08 rad.



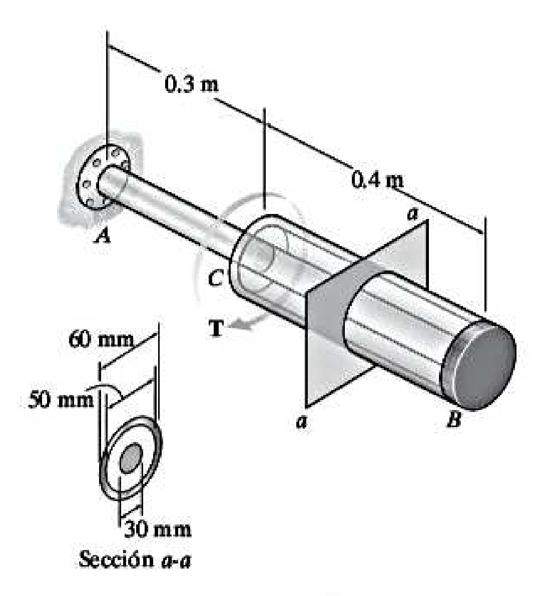
Prob. 5-144

•**5-145.** El tubo circular de acero A-36 está sometido a un par de torsión de 10 kN · m. Determine el esfuerzo cortante en el radio medio $\rho = 60$ mm y calcule el ángulo de giro del tubo si tiene 4 m de largo y se encuentra fijo en su extremo lejano. Resuelva el problema usando las ecuaciones 5-7 y 5-15, y empleando las ecuaciones 5-18 y 5-20.



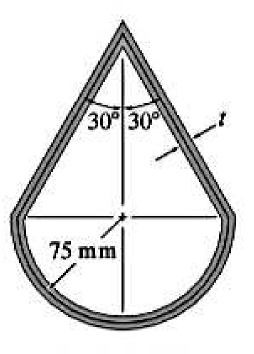
Prob. 5-145

5-146. La barra AB está fabricada de acero A-36 con un esfuerzo cortante permisible de $(\tau_{perm})_{ac} = 75$ MPa, y el tubo BC está fabricado de una aleación de magnesio AM1004-T61 con un esfuerzo cortante permisible de $(\tau_{perm})_{mg} = 45$ MPa. El ángulo de giro del extremo C no puede superar los 0.05 rad. Determine el máximo par de torsión permisible **T** que puede aplicarse al ensamble.



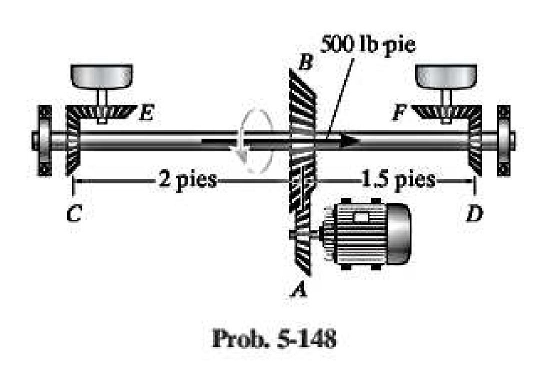
Prob. 5-146

5-147. Un eje tiene la sección transversal mostrada en la figura y está fabricado de una aleación de aluminio 2014-T6 con un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 125$ MPa. Si el ángulo de giro por metro de longitud no puede exceder los 0.03 rad, determine el grosorsor de pared mínimo requerido t al milímetro más cercano, cuando el eje está sometido a un par de torsión de $T = 15$ kN · m.



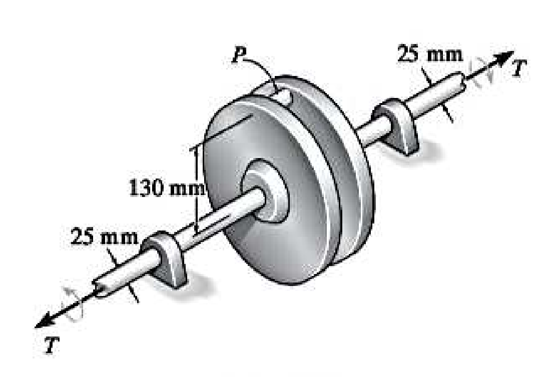
Prob. 5-147

***5-148.** El motor A desarrolla un par de torsión en el engrane B de 500 lb · pie, el cual se aplica a lo largo del eje de 2 pulg de diámetro fabricado de acero A-36. Este par de torsión debe transmitirse a los engranes de piñón en E y F. Si dichos engranes se encuentran temporalmente fijos, determine el esfuerzo cortante máximo en los segmentos CB y BD del eje. Además, ¿cuál es el ángulo de giro de cada uno de estos segmentos? Los cojinetes en C y D sólo ejercen fuerzas sobre el eje.



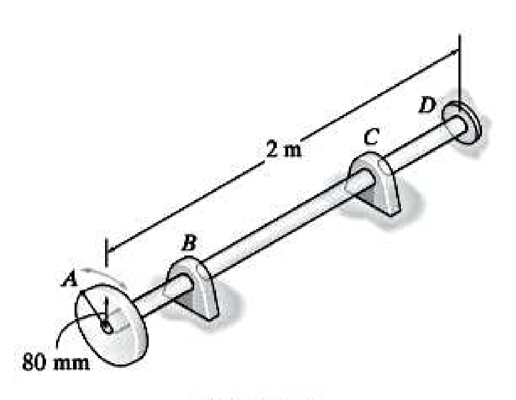
Prob. 5-148

5-149. El acoplamiento consiste en dos discos fijos que separan los ejes, cada uno con un diámetro de 25 mm. Los ejes se apoyan sobre chumaceras que permiten la rotación libre. Con el fin de limitar el par de torsión **T** que puede transmitirse, se emplea un "pasador cortante" P para conectar los discos entre sí. Si este pasador puede soportar una fuerza cortante *promedio* de 550 N antes de fallar, determine el máximo par de torsión constante T que puede transmitirse de un eje al otro. Además, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en cada eje cuando el "pasador cortante" está a punto de fallar?



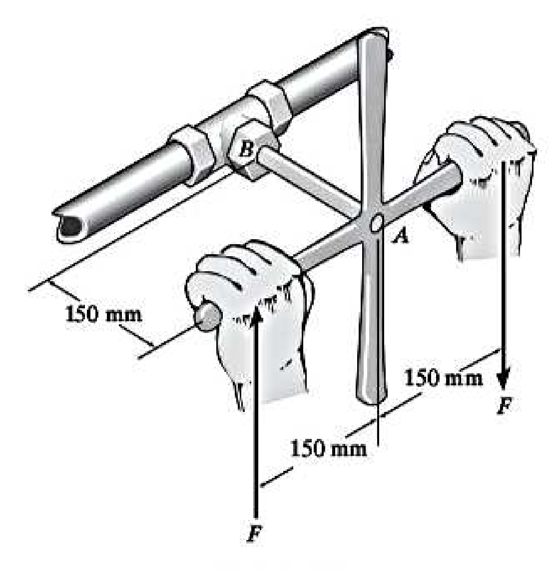
Prob. 5-149

5-150. El volante y el eje se detienen súbitamente en D cuando el cojinete se traba. Esto hace que el volante oscile en sentido horario y antihorario, de modo que un punto A en el borde exterior del volante se desplaza en un arco de 10 mm en cualquier dirección. Determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el eje tubular de acero inoxidable 304 debido a esta oscilación. El eje tiene un diámetro interior de 25 mm y un diámetro exterior de 35 mm. Los cojinetes en B y C permiten que el eje gire libremente.



Prob. 5-150

5-151. Si el eje sólido AB al que está conectada la manivela de una válvula es de latón rojo C83400 y tiene un diámetro de 10 mm, determine las máximas fuerzas de par F que pueden aplicarse a la manivela justo antes de que el material comience a fallar. Considere $\tau_{perm} = 40$ MPa. ¿Cuál es el ángulo de giro de la manivela? El eje se encuentra fijo en A.



Prob. 5-151

5



Las vigas son elementos estructurales importantes que se utilizan en la construcción de edificios. Con frecuencia, su diseño se basa en su capacidad para resistir el esfuerzo flexionante, que representa el objeto de estudio del presente capítulo.

Flexión

6

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Las vigas y los ejes son elementos estructurales y mecánicos importantes en la ingeniería. En este capítulo se determinará el esfuerzo que produce la flexión en estos elementos. El capítulo comienza con un análisis de cómo se establecen los diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga o eje. Al igual que los diagramas de fuerza normal y de par de torsión, los diagramas de fuerza cortante y de momento proporcionan un medio útil para determinar la fuerza cortante y el momento máximos en un elemento, así como para especificar dónde ocurren esos máximos. Una vez que se ha determinado el momento interno en una sección, es posible calcular el esfuerzo flexionante. Primero se considerarán los elementos rectos, con una sección transversal simétrica y que están hechos de un material elástico lineal homogéneo. Después se abordarán los casos especiales que involucran la flexión asimétrica y los elementos fabricados con materiales compuestos. Además, se estudiarán los elementos curvos, las concentraciones de esfuerzo, la flexión inelástica y los esfuerzos residuales.

6.1 Diagramas de fuerza cortante y de momento

Los elementos delgados que soportan cargas aplicadas en forma perpendicular a su eje longitudinal se denominan ***vigas***. En general, las vigas son barras largas, lineales, con un área constante en su sección transversal. A menudo se clasifican de acuerdo con la forma en que están apoyadas. Por ejemplo, una *viga simplemente apoyada* está articulada en un extremo y sostenida por un rodillo en el otro, figura 6-1; una *viga en voladizo* se encuentra fija en un extremo y libre en el otro, y una *viga con voladizo* si tiene uno o ambos extremos extendidos más allá de los apoyos. Se considera que las vigas están entre los elementos estructurales más importantes. Se utilizan para sostener el piso de un edificio, la cubierta de un puente o el ala de un avión. Además, el eje de un automóvil, el aguilón de una grúa e incluso muchos de los huesos del cuerpo humano actúan como vigas.



Figura 6-1

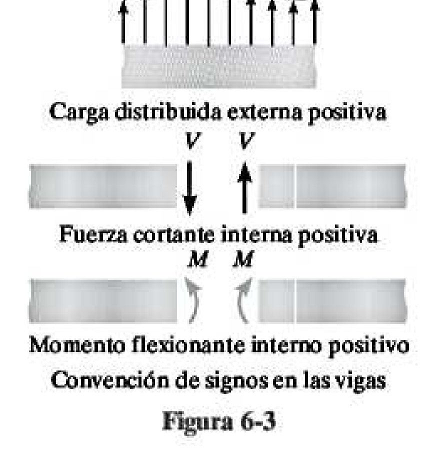
Debido a las cargas aplicadas, las vigas desarrollan una fuerza cortante interna y un momento flexionante que, en general, varían de un punto a otro a lo largo del eje de la viga. Por lo tanto, para diseñar correctamente una viga es necesario determinar la fuerza cortante y el momento *máximos* en la viga. Una forma de hacerlo es expresar V y M en función de su posición arbitraria x sobre el eje de la viga. Después, estas *funciones de fuerza cortante y de momento* pueden representarse mediante gráficas llamadas ***diagramas de fuerza cortante y de momento.*** Los valores máximos de V y M pueden obtenerse a partir de estas gráficas. Además, como los diagramas de fuerza cortante y de momento proporcionan información detallada sobre la *variación* de la fuerza cortante y del momento en el eje de la viga, son utilizados con frecuencia por los ingenieros para decidir dónde colocar los materiales de refuerzo dentro de la viga o para determinar la proporción del tamaño de la viga en varios puntos de toda su longitud.

Para formular V y M en términos de x es necesario elegir el origen y el sentido positivo de x. Aunque la elección es arbitraria, a menudo el origen se encuentra en el extremo izquierdo de la viga y la dirección positiva es hacia la derecha.

En general, las funciones de x para la fuerza cortante interna y el momento serán *discontinuas*, o sus pendientes serán discontinuas, en los puntos donde una carga distribuida cambia o bien donde se aplican fuerzas concentradas o momentos de par. Debido a esto, las funciones de fuerza cortante y de momento deben determinarse para *cada región* de la viga *entre* cualesquiera dos discontinuidades de la carga. Por ejemplo, las coordenadas x_1, x_2 y x_3 tendrán que usarse para describir la variación de V y M en toda la longitud de la viga mostrada en la figura 6-2. Estas coordenadas *sólo* serán válidas dentro de las regiones desde A hasta B para x_1, desde B hasta C para x_2, y desde C hasta D para x_3.

Figura 6-2

Convención de signos para las vigas. Antes de presentar un método para determinar la fuerza cortante y el momento en función de x, y para luego graficar esas funciones (diagramas de fuerza cortante y de momento), primero es necesario establecer *una convención de signos* para definir los valores "positivos" o "negativos" de V y M. Aunque la elección de una convención de signos es arbitraria, aquí se utilizará aquella que se emplea con mayor frecuencia en la práctica de la ingeniería y que se muestra en la figura 6-3. Las *direcciones positivas* son las siguientes: la *carga distribuida* actúa *hacia arriba* sobre la viga; la *fuerza cortante* interna ocasiona un giro *en sentido horario* del segmento de viga sobre el que actúa, y el *momento* interno causa *compresión* en las fibras *superiores* del segmento, de modo que éste se dobla como para retener agua. Las cargas que son opuestas a las descritas anteriormente se consideran negativas.



Convención de signos en las vigas

Figura 6-3

Puntos importantes

- Las *vigas* son elementos largos y rectos que están sometidos a cargas perpendiculares a su eje longitudinal. Se clasifican de acuerdo con la forma en que están apoyadas; por ejemplo, simplemente apoyadas, en voladizo o con voladizos.
- Para diseñar una viga de manera correcta, es importante conocer la *variación* de la fuerza cortante y el momento internos a lo largo de su eje a fin de encontrar los puntos en que dichos valores son máximos.
- Mediante el uso de una convención de signos establecida para la fuerza cortante y el momento positivos, es posible determinar la fuerza cortante y el momento en función de su posición x sobre la viga, y después estas funciones pueden graficarse para formar el diagrama de fuerza cortante y de momento.

Procedimiento de análisis

Los diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga pueden construirse mediante el siguiente procedimiento.

Reacciones en los apoyos.

- Determine todas las fuerzas reactivas y los momentos que actúan sobre la viga, después descomponga todas las fuerzas en componentes que actúen de forma perpendicular y paralela al eje de la viga.

Funciones de fuerza cortante y de momento.

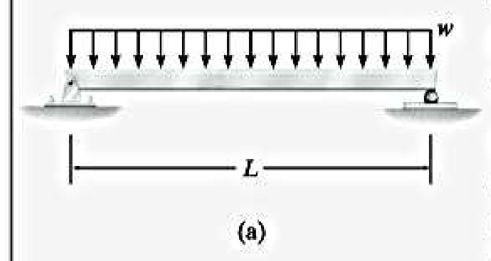
- Especifique por separado las coordenadas x que tienen un origen en el *extremo izquierdo* de la viga y se extienden a las regiones de ésta ubicadas entre fuerzas y momentos concentrados, o bien donde no haya discontinuidad de la carga distribuida.
- Seccione la viga a cada distancia x y dibuje el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los segmentos. Asegúrese de que **V** y **M** se muestren actuando en su sentido positivo, de acuerdo con la convención de signos dada en la figura 6-3.
- La fuerza cortante se obtiene si se suman las fuerzas perpendiculares al eje de la viga.
- Para eliminar V, el momento se obtiene de manera directa al sumar los momentos alrededor del extremo seccionado del segmento.

Diagramas de fuerza cortante y de momento.

- Grafique el diagrama de fuerza cortante (V y x) y el diagrama de momento (M y x). Si los valores numéricos de las funciones que describen a V y M son *positivos*, éstos se representarán por encima del eje x, mientras que los valores negativos se graficarán por debajo de dicho eje.
- En general, es conveniente mostrar los diagramas de fuerza cortante y de momento por debajo del diagrama de cuerpo libre de la viga.

EJEMPLO 6.1

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga que se muestra en la figura 6-4*a*.

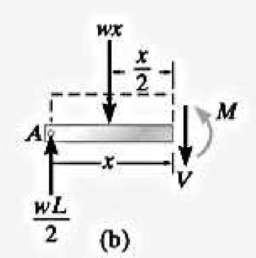


(a)

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las reacciones en los apoyos se muestran en la figura 6-4*c*.

Funciones de fuerza cortante y de momento. En la figura 6-4*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo de la viga. La carga distribuida en este segmento, wx, se representa mediante su fuerza resultante sólo *después* de que el segmento se aísla como un diagrama de cuerpo libre. Esta fuerza actúa a través del centroide del área que incluye a la carga distribuida, a una distancia de $x/2$ desde el extremo derecho. Al aplicar las dos ecuaciones de equilibrio se obtiene



(b)

6

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{wL}{2} - wx - V = 0$$

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad -\left(\frac{wL}{2}\right)x + (wx)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w}{2}\ Lx - x^2 \qquad (2)$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Los diagramas de fuerza cortante y de momento, que se muestran en la figura 6-4*c*, se obtienen al graficar las ecuaciones 1 y 2. El punto de *fuerza cortante cero* puede encontrarse a partir de la ecuación 1:

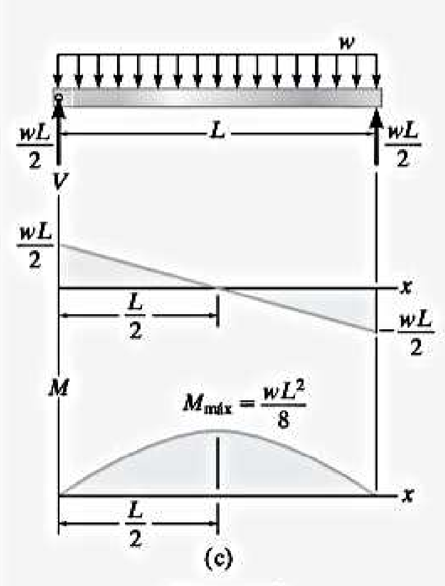
$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

NOTA: Con base en el diagrama de momento, este valor de x representa el punto de la viga donde se produce el *momento máximo*, dado que a partir de la ecuación 6-2 (vea la sección 6.2) la *pendiente* $V = dM/dx = 0$. De la ecuación 2, se tiene

$$M_{\text{máx}} = \frac{w}{2}\left[L\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{wL^2}{8}$$

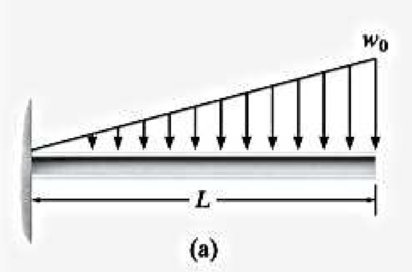


(c)

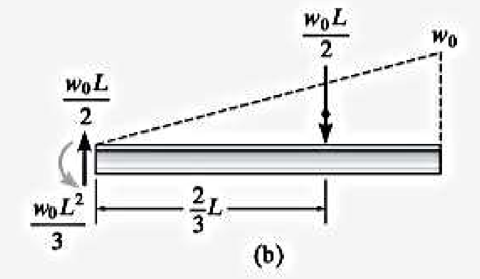
Figura 6-4

EJEMPLO 6.2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga mostrada en la figura 6-5*a*.



(a)

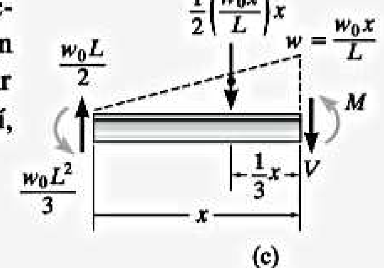


(b)

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. La carga distribuida se remplaza por su fuerza resultante y las reacciones se determinan de la manera mostrada en la figura 6-5*b*.

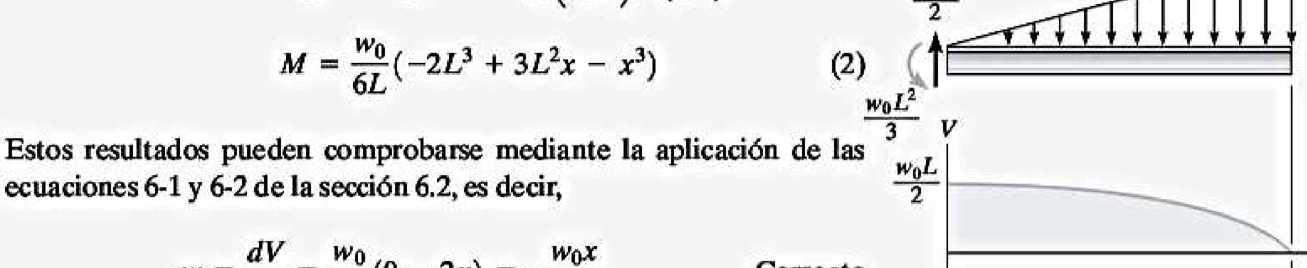
Funciones de fuerza cortante y de momento. En la figura 6-5*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre de un segmento de viga con longitud x. Observe que la intensidad de la carga triangular en la sección se determina mediante proporción, es decir, $w/x = w_0/L$ o bien $w = w_0x/L$. Al conocerse la intensidad de la carga, es posible determinar la resultante de la carga distribuida como el área bajo el diagrama. Así,



(c)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{w_0L}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0x}{L}\right)x - V = 0$$

$$V = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2) \qquad (1)$$



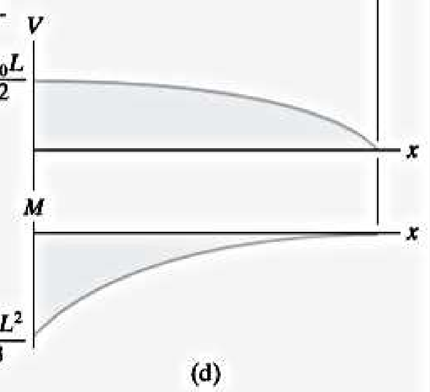
$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad \frac{w_0L^2}{3} - \frac{w_0L}{2}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0x}{L}\right)x\left(\frac{1}{3}x\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w_0}{6L}(-2L^3 + 3L^2x - x^3) \qquad (2)$$

Estos resultados pueden comprobarse mediante la aplicación de las ecuaciones 6-1 y 6-2 de la sección 6.2, es decir,

$$w = \frac{dV}{dx} = \frac{w_0}{2L}(0 - 2x) = -\frac{w_0x}{L} \qquad \text{Correcto}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{w_0}{6L}(0 + 3L^2 - 3x^2) = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2) \qquad \text{Correcto}$$

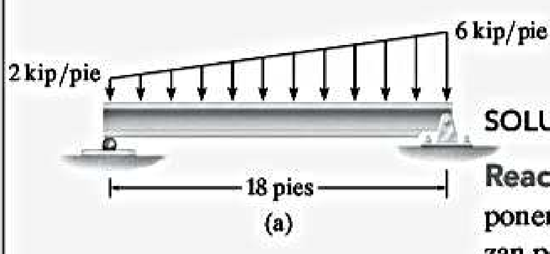


(d)

Figura 6-5

Diagramas de fuerza cortante y de momento. En la figura 6-5*d* se muestran las gráficas de las ecuaciones 1 y 2.

EJEMPLO 6.3

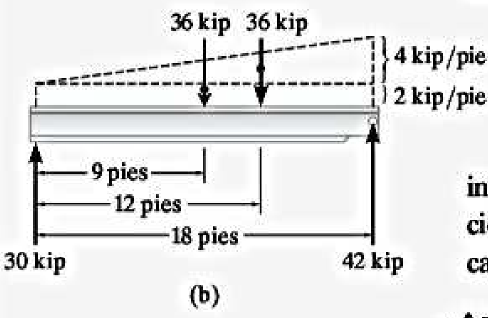


(a)

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga mostrada en la figura 6-6*a*.

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. La carga distribuida se divide en componentes de cargas, triangular y rectangular, y dichas cargas se reemplazan por sus fuerzas resultantes. Las reacciones se determinan de la manera mostrada en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 6-6*b*.



(b)

Funciones de fuerza cortante y de momento. En la figura 6-6*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo. Como se hizo anteriormente, la carga trapezoidal se sustituye por las distribuciones rectangulares y triangulares. Observe que la intensidad de la carga triangular en la sección se encuentra por proporción. También se muestra la fuerza resultante y la ubicación de cada carga distribuida. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

(c)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 30\text{ kip} - (2\text{ kip/pie})x - \frac{1}{2}(4\text{ kip/pie})\left(\frac{x}{18\text{ pies}}\right)x - V = 0$$

$$V = \left(30 - 2x - \frac{x^2}{9}\right)\text{kip} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$-30\text{ kip}(x) + (2\text{ kip/pie})x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(4\text{ kip/pie})\left(\frac{x}{18\text{ pies}}\right)x\left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

$$M = \left(30x - x^2 - \frac{x^3}{27}\right)\text{kip}\cdot\text{pie} \qquad (2)$$

La ecuación 2 puede comprobarse observando que $dM/dx = V$, es decir, la ecuación 1. Además, $w = dv/dx = -2 - \frac{2}{9}x$. Esto comprueba la ecuación, ya que cuando $x = 0$, $w = -2$ kip/pie, y cuando $x = 18$ pies, $w = -6$ kip/pie, figura 6-6*a*.

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Las ecuaciones 1 y 2 se grafican en la figura 6-6*d*. Como el punto de momento máximo ocurre cuando $dM/dx = V = 0$ (ecuación 6-2), entonces, de la ecuación 1,

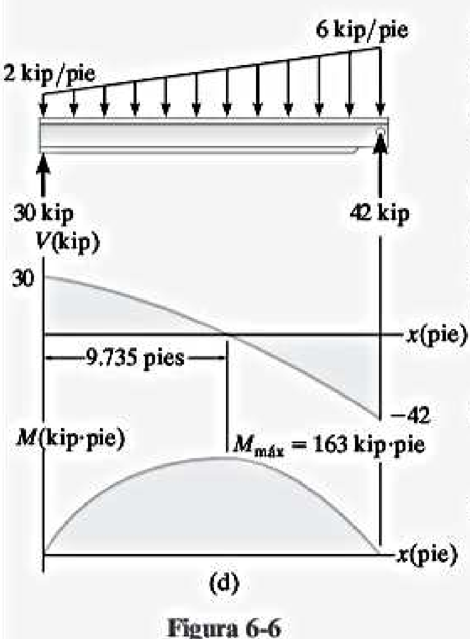
$$V = 0 = 30 - 2x - \frac{x^2}{9}$$

Si se elige la raíz positiva,

$$x = 9.735\text{ pies}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación 2,

$$M_{\text{máx}} = 30(9.735) - (9.735)^2 - \frac{(9.735)^3}{27}$$
$$= 163\text{ kip}\cdot\text{pie}$$

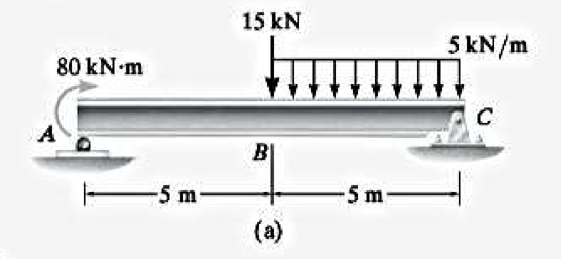


(d)

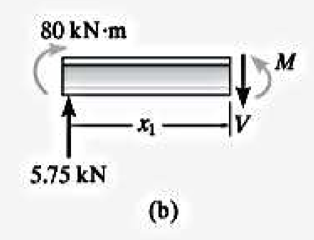
Figura 6-6

EJEMPLO 6.4

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga mostrada en la figura 6-7*a*.



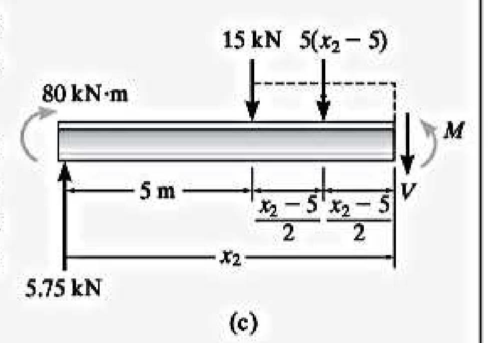
(a)



(b)

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Se han determinado las reacciones en los apoyos y se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 6-7*d*.



(c)

Funciones de fuerza cortante y de momento. Como existe una discontinuidad de la carga distribuida y también una carga concentrada en el centro de la viga, deben considerarse dos regiones de x a fin de describir las funciones de fuerza cortante y de momento para toda la viga.

$0 \leq x_1 < 5$ m, figura 6-7*b*:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 5.75 \text{ kN} - V = 0$$

$$V = 5.75 \text{ kN} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad -80 \text{ kN}\cdot\text{m} - 5.75 \text{ kN } x_1 + M = 0$$

$$M = (5.75x_1 + 80) \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad (2)$$

$5 \text{ m} < x_2 \leq 10$ m, figura 6-7*c*:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 5.75 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m}(x_2 - 5 \text{ m}) - V = 0$$

$$V = (15.75 - 5x_2) \text{ kN} \qquad (3)$$

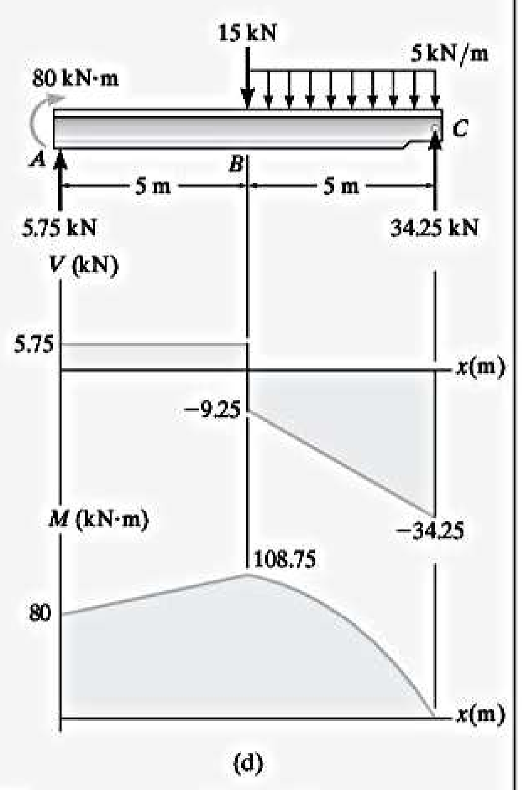
$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad -80 \text{ kN}\cdot\text{m} - 5.75 \text{ kN } x_2 + 15 \text{ kN}(x_2 - 5 \text{ m})$$

$$+ 5 \text{ kN/m}(x_2 - 5 \text{ m})\left(\frac{x_2 - 5 \text{ m}}{2}\right) + M = 0$$

$$M = (-2.5x_2^2 + 15.75x_2 + 92.5) \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad (4)$$

Estos resultados pueden comprobarse, en parte, al señalar que $w = dV/dx$ y $V = dM/dx$. Además, cuando $x_1 = 0$, de las ecuaciones 1 y 2 resulta $V = 5.75$ kN y $M = 80$ kN · m; cuando $x_2 = 10$ m, de las ecuaciones 3 y 4 se obtiene $V = -34.25$ kN y $M = 0$. Estos valores coinciden con las reacciones de apoyo mostradas en el diagrama de cuerpo libre, figura 6-7*d*.

Diagramas de fuerza cortante y de momento. En la figura 6-7*d* se grafican las ecuaciones 1 a 4.



(d)

Figura 6-7



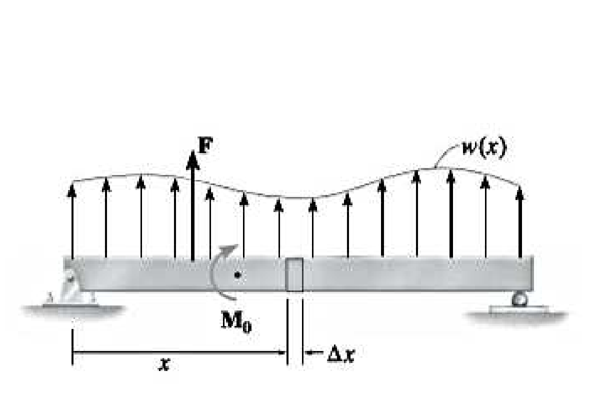
La falla de esta mesa se produjo en el puntal de apoyo ubicado en su lado derecho. Si se dibujara, el diagrama de momento flexionante para la carga en la mesa indicaría que éste es el punto donde ocurre el momento interno máximo.

6.2 Método gráfico para la construcción de diagramas de fuerza cortante y de momento

En los casos donde se somete una viga a *varias* cargas diferentes, la determinación de V y M como funciones de x para después graficar esas ecuaciones puede resultar un proceso bastante tedioso. En esta sección se analiza un método más sencillo para la construcción de los diagramas de fuerza cortante y de momento; este método se basa en dos relaciones diferenciales, una que existe entre la carga distribuida y la fuerza cortante, y otra entre la fuerza cortante y el momento.

Regiones de carga distribuida. Con el fin de generalizar, considere la viga de la figura 6-8*a*, que está sometida a una carga arbitraria. En la figura 6-8*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre para un pequeño segmento Δx de la viga. Como este segmento se ha elegido en una posición x donde no hay fuerza concentrada o momento, los resultados que se obtengan *no* se aplicarán en estos puntos de carga concentrada.

Observe que todas las cargas mostradas sobre el segmento actúan en sus direcciones positivas de acuerdo con la convención de signos establecida, figura 6-3. Asimismo, tanto la fuerza cortante como el momento resultantes internos, que actúan en la cara derecha del segmento, deben cambiarse por una cantidad pequeña para mantener al segmento en equilibrio. La carga distribuida se sustituye por una fuerza resultante $w(x)\,\Delta x$ que actúa a una distancia fraccional $k(\Delta x)$ desde el lado derecho, donde $0 < k < 1$ [por ejemplo, si $w(x)$ es *uniforme*, $k = \frac{1}{2}$]. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio para el segmento, se tiene



(a)

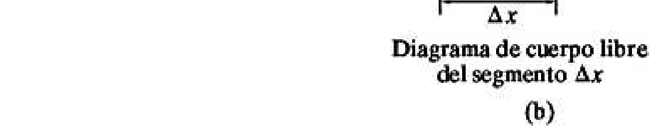


Diagrama de cuerpo libre del segmento Δx

(b)

Figura 6-8

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V + w(x)\,\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$
$$\Delta V = w(x)\,\Delta x$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = 0; \quad -V\,\Delta x - M - w(x)\,\Delta x[k(\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0$$
$$\Delta M = V\,\Delta x + w(x)\,k(\Delta x)^2$$

Al dividir entre Δx y tomar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, las dos ecuaciones anteriores se convierten en

$$\frac{dV}{dx} = w(x) \qquad (6\text{-}1)$$

pendiente del diagrama de fuerza cortante en cada punto = intensidad de la carga distribuida en cada punto

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad (6\text{-}2)$$

pendiente del diagrama de momento en cada punto = fuerza cortante en cada punto

Estas dos ecuaciones proporcionan un medio conveniente para obtener rápidamente los diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga. La ecuación 6-1 establece que en un punto la *pendiente* del diagrama de fuerza cortante es igual a la intensidad de la carga distribuida. Por ejemplo, considere la viga de la figura 6-9*a*. La carga distribuida es negativa y aumenta desde cero hasta w_B. Por lo tanto, el diagrama de fuerza cortante será una curva con *pendiente negativa*, la cual aumenta desde cero hasta $-w_B$. En la figura 6-9*b* se muestran las pendientes específicas $w_A = 0$, $-w_C$, $-w_D$ y $-w_B$.

De manera similar, la ecuación 6-2 establece que en un punto la *pendiente* del diagrama de momento es igual a la fuerza cortante. Observe que el diagrama de fuerza cortante en la figura 6-9*b* comienza en $+V_A$, decrece hasta cero y luego pasa a ser negativo y disminuye hasta $-V_B$. El diagrama de momento tendrá entonces una pendiente inicial de $+V_A$ que decrece hasta cero, después la pendiente se vuelve negativa y disminuye hasta $-V_B$. En la figura 6-9*c* se muestran las pendientes específicas V_A, V_C, V_D, 0 y $-V_B$.

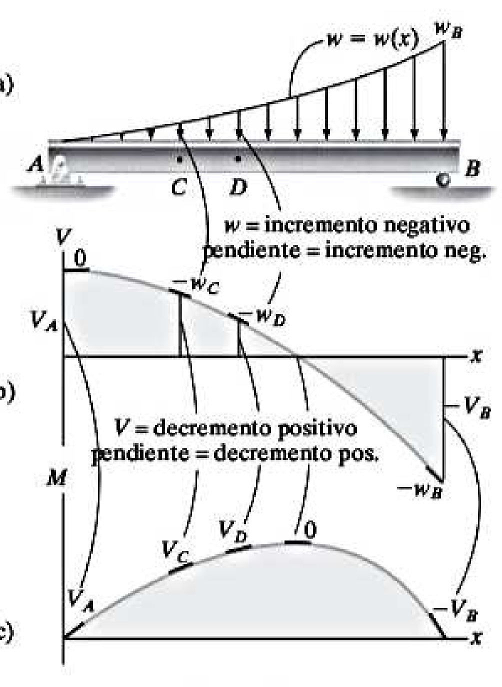


Figura 6-9

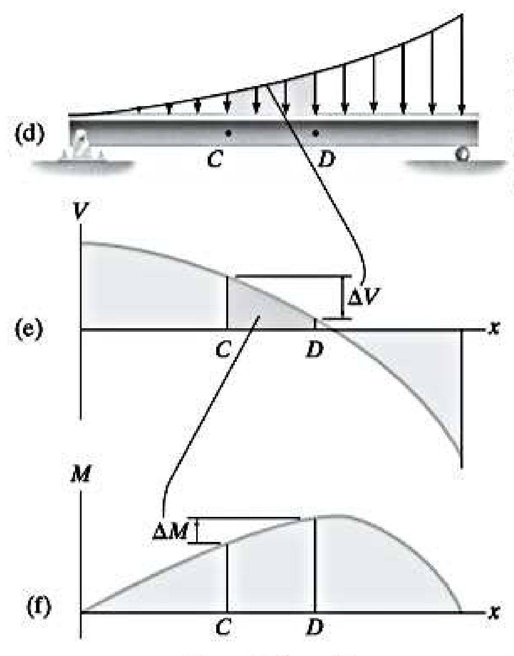


Fig. 6-9 (cont.)

Las ecuaciones 6-1 y 6-2 también pueden rescribirse en la forma $dV = w(x)\,dx$ y $dM = V\,dx$. Si se tiene en cuenta que $w(x)\,dx$ y $V\,dx$ representan áreas diferenciales bajo la carga distribuida y el diagrama de fuerza cortante, respectivamente, es posible integrar estas áreas entre dos puntos cualesquiera C y D de la viga, figura 6-9d, y escribir

$$\Delta V = \int w(x)\,dx \tag{6-3}$$

cambio en la fuerza cortante = área bajo la carga distribuida

$$\Delta M = \int V(x)\,dx \tag{6-4}$$

cambio en momento = área bajo el diagrama de fuerza cortante

La ecuación 6-3 establece que el *cambio en la fuerza cortante* entre C y D es igual al *área* bajo la curva de la carga distribuida entre esos dos puntos, figura 6-9d. En este caso, el cambio es negativo ya que la carga distribuida actúa hacia abajo. Del mismo modo, a partir de la ecuación 6-4, el cambio en el momento entre C y D, figura 6-9f, es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante en la región entre C y D. Aquí, el cambio es positivo.

Como las ecuaciones anteriores no se aplican en los puntos donde actúa una fuerza o un momento concentrado, a continuación se considerará cada uno de estos casos.

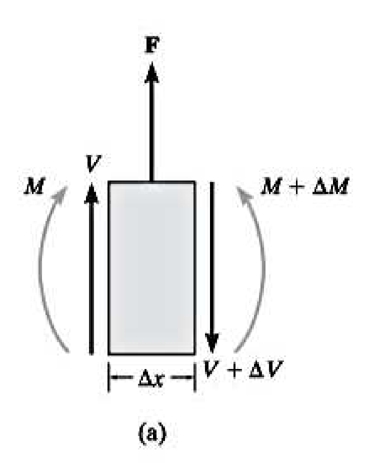
6

Regiones de fuerza y momento concentrados. En la figura 6-10b se muestra un diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento de la viga mostrada en la figura 6-10a; el segmento se tomó por debajo de la fuerza. Aquí se puede ver que el equilibrio de fuerzas requiere

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V + F - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = F \tag{6-5}$$

Así, cuando **F** actúa *hacia arriba* sobre la viga, ΔV es *positivo* por lo que la fuerza cortante "saltará" *hacia arriba*. Del mismo modo, si **F** actúa *hacia abajo*, el salto (ΔV) será *hacia abajo*.



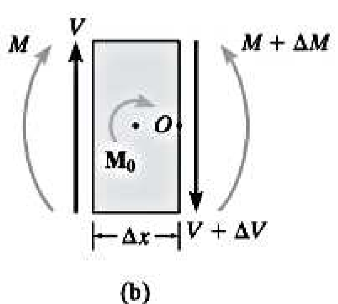
(a)

Cuando el segmento de viga incluye al momento M_0, figura 6-10b, entonces el equilibrio de momentos requiere que el cambio en el momento sea

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad M + \Delta M - M_0 - V\,\Delta x - M = 0$$

Si se hace que $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene

$$\Delta M = M_0 \tag{6-6}$$



(b)

Figura 6-10

En este caso, si $\mathbf{M}_0$ se aplica en *sentido horario*, ΔM es *positivo* por lo que el diagrama de momento "saltará" *hacia arriba*. Del mismo modo, cuando $\mathbf{M}_0$ actúa en *sentido antihorario*, el salto (ΔM) será *hacia abajo*.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método para construir los diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga, con base en las relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento.

Reacciones en los apoyos.

- Determine las reacciones de apoyo y descomponga las fuerzas que actúan sobre la viga en sus componentes perpendiculares y paralelas al eje de la viga.

Diagrama de fuerza cortante.

- Establezca los ejes V y x, y grafique los valores conocidos de la fuerza cortante en los dos *extremos* de la viga.
- Observe cómo varían los valores de la carga distribuida a lo largo de la viga, y note que cada uno de estos valores indica la pendiente que tendrá el diagrama de fuerza cortante ($dV/dx = w$). Aquí w es positiva cuando actúa hacia arriba.
- Si debe determinarse un valor numérico para la fuerza cortante en un punto dado, tal valor puede encontrarse mediante el método de las secciones y la ecuación de equilibrio de fuerzas, o bien por medio de $\Delta V = \int w(x)\,dx$, que establece que *el cambio en la fuerza cortante* entre dos puntos cualesquiera es igual al *área bajo el diagrama de carga* entre esos dos puntos.

Diagrama de momento.

- Establezca los ejes M y x, y grafique los valores conocidos del momento en los *extremos* de la viga.
- Observe cómo varían los valores del diagrama de fuerza cortante a lo largo de la viga, y tenga en cuenta que cada uno de estos valores indica la pendiente que tendrá el diagrama de momento ($dM/dx = V$).
- En el punto donde la fuerza cortante es cero, $dM/dx = 0$; por lo tanto, en este punto ocurre un momento máximo o mínimo.
- Si debe determinarse un valor numérico para el momento en un punto dado, tal valor puede encontrarse mediante el método de las secciones y la ecuación de equilibrio de momentos, o bien por medio de $\Delta M = \int V(x)dx$, que establece que el *cambio en el momento* entre dos puntos cualesquiera es igual al *área bajo el diagrama de fuerza cortante* entre esos dos puntos.
- Como $w(x)$ debe *integrarse* a fin de obtener ΔV, y $V(x)$ se integra para obtener $M(x)$, entonces si $w(x)$ es una curva de grado n, $V(x)$ será una curva de grado $n+1$ y $M(x)$ será una curva de grado $n+2$. Por ejemplo, si $w(x)$ es uniforme, $V(x)$ será lineal y $M(x)$ será una parábola.

6

EJEMPLO 6.5

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga mostrada en la figura 6-11*a*.

P P L L

(a)

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. La reacción en el soporte fijo se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 6-11*b*.

Diagrama de fuerza cortante. Primero se representa la fuerza cortante en cada extremo de la viga, figura 6-11*c*. Como no hay carga distribuida sobre la viga, la pendiente del diagrama de fuerza cortante es cero, tal como se indica. Observe que la fuerza P en el centro de la viga hace que el diagrama de fuerza cortante salte en forma descendente una cantidad P, dado que esta fuerza actúa hacia abajo.

Diagrama de momento. Se grafican los momentos en los extremos de la viga, figura 6-11*d*. Aquí el diagrama de momento consta de dos líneas inclinadas, una con pendiente de $+2P$ y la otra con pendiente de $+P$.

El valor del momento en el centro de la viga puede determinarse por el método de las secciones, o con base en el área bajo el diagrama de fuerza cortante. Si se elige la mitad izquierda del diagrama de fuerza cortante,

$$M|_{x=L} = M|_{x=0} + \Delta M$$

$$M|_{x=L} = -3PL + (2P)(L) = -PL$$

P P 2P 3PL

$w = 0$ (b)
pendiente = 0
fuerza P hacia abajo
salto P hacia abajo

V 2P P x

(c)

V = constante positiva
pendiente = constante positiva

M x $-PL$ $-3PL$

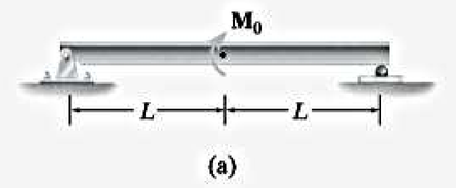
(d)

Figura 6-11

6

EJEMPLO 6.6

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga mostrada en la figura 6-12*a*.



(a)

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las reacciones se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6-12*b*.

Diagrama de fuerza cortante. En primer lugar se representa la fuerza cortante en cada extremo, figura 6-12*c*. Como no hay carga distribuida sobre la viga, el diagrama de fuerza cortante tiene pendiente cero y por lo tanto es una línea horizontal.

Diagrama de momento. El momento es igual a cero en cada uno de los extremos, figura 6-12*d*. El diagrama de momento tiene una pendiente constante negativa de $-M_0/2L$ puesto que es la fuerza cortante en cada punto de la viga. Observe que el momento de par M_0 ocasiona un salto en el diagrama de momento justo en el centro de la viga, pero no afecta al diagrama de fuerza cortante en ese punto.

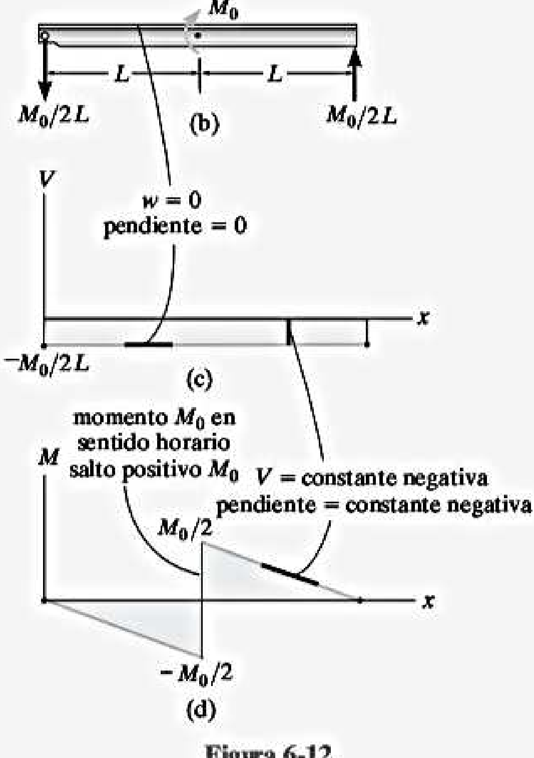


Figura 6-12

EJEMPLO 6.7

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para cada una de las vigas mostradas en las figuras 6-13*a* y 6-14*a*.

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las reacciones en el soporte fijo se muestran en cada diagrama de cuerpo libre de las figuras 6-13*b* y 6-14*b*.

Diagrama de fuerza cortante. En primer lugar se representa la fuerza cortante en cada punto extremo, figuras 6-13*c* y 6-14*c*. La carga distribuida en cada viga indica la pendiente del diagrama de fuerza cortante y produce así los perfiles mostrados.

Diagrama de momento. Primero se representa el momento en cada punto extremo, figuras 6-13*d* y 6-14*d*. Los diferentes valores de la fuerza cortante en cada punto de la viga indican la pendiente del diagrama de momento en ese punto. Tenga en cuenta que esta variación produce las curvas mostradas.

NOTA: Observe cómo el grado de las curvas de w, V y M aumenta debido a la integración de $dV = w\,dx$ y $dM = V\,dx$. Por ejemplo, en la figura 6-14, la carga distribuida lineal produce un diagrama de fuerza cortante parabólica y un diagrama de momento cúbico.

6

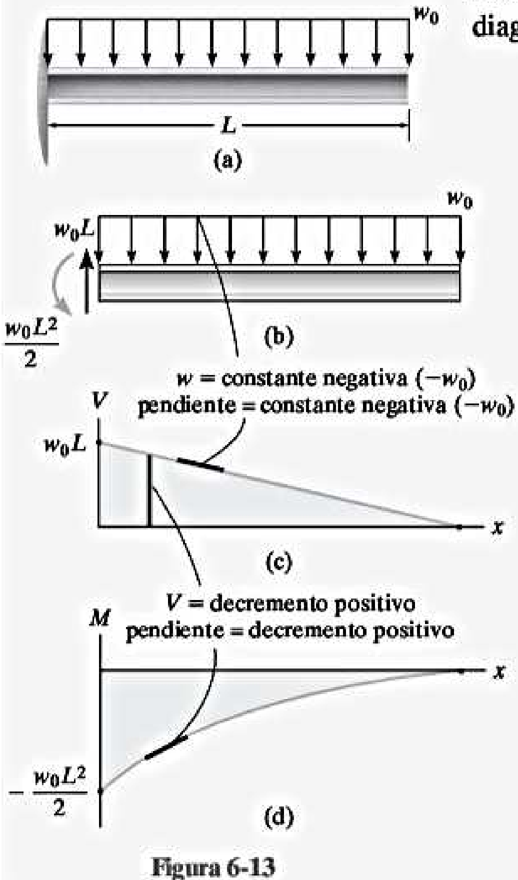


Figura 6-13

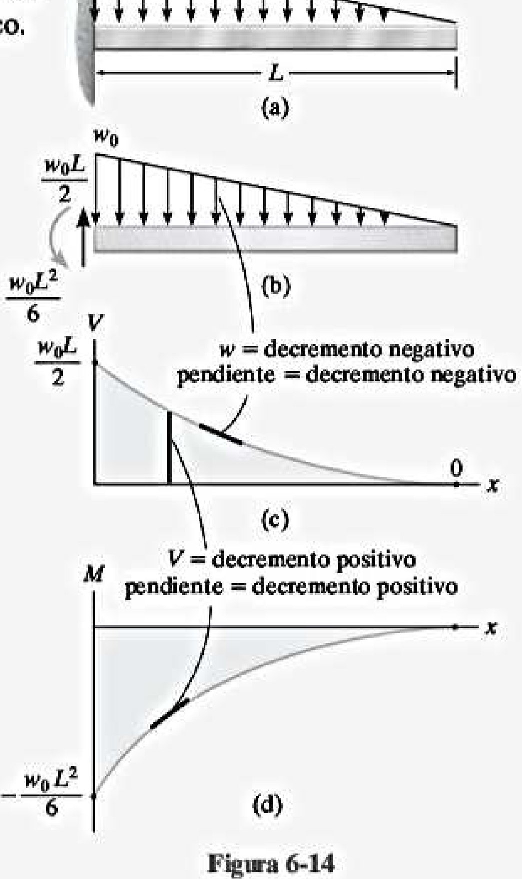
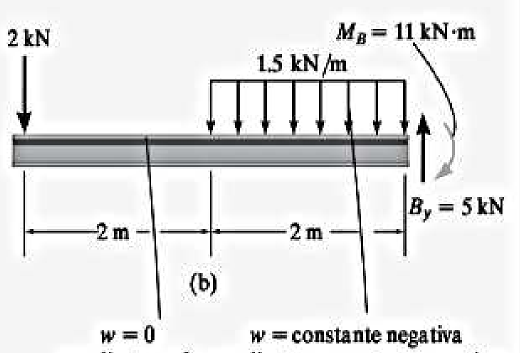


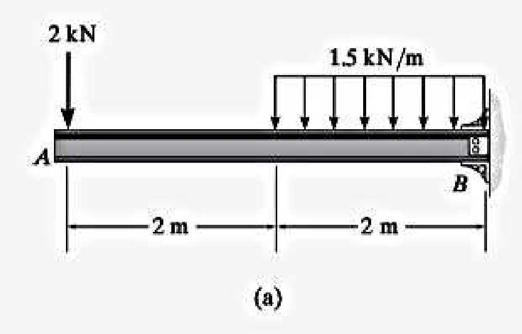
Figura 6-14

EJEMPLO 6.8

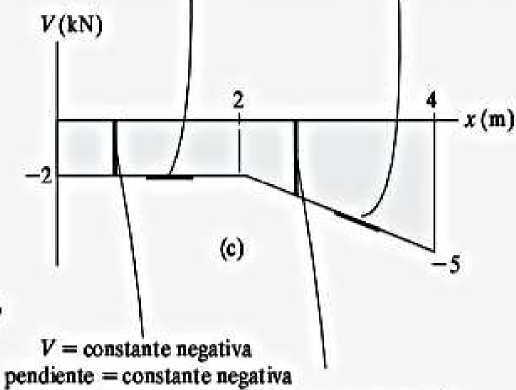
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo mostrada en la figura 6-15*a*.



(b)



(a)



(c)

V = constante negativa
pendiente = constante negativa
V = constante negativa
pendiente = constante negativa

M (kN·m)
0
2
4
x (m)
−4
−11

(d)

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las reacciones en el soporte fijo *B* se muestran en la figura 6-15*b*.

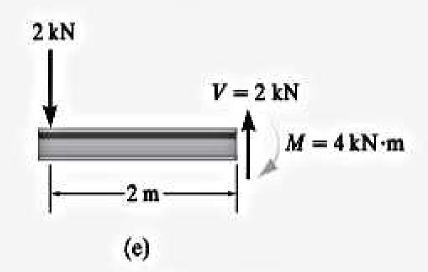
Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante en el extremo *A* es de −2 kN. Este valor se grafica en $x = 0$, figura 6-15*c*. Observe cómo el diagrama de fuerza cortante se construye siguiendo las pendientes definidas por la carga *w*. La fuerza cortante en $x = 4$ m es de −5 kN, ésta es la reacción en la viga. El valor anterior puede verificarse al encontrar el área bajo la carga distribuida, ecuación 6-3.

$$V|_{x=4\text{ m}} = V|_{x=2\text{ m}} + \Delta V = -2\text{ kN} - (1.5\text{ kN/m})(2\text{ m}) = -5\text{ kN}$$

Diagrama de momento. El momento con valor cero en $x = 0$ se representa en la figura 6-15*d*. Observe cómo el diagrama de momento se construye con base en el conocimiento de su pendiente, que es igual a la fuerza cortante en cada punto. El cambio del momento desde $x = 0$ hasta $x = 2$ m se determina a partir del área bajo el diagrama de fuerza cortante. De ahí que el momento en $x = 2$ m sea

$$M|_{x=2\text{ m}} = M|_{x=0} + \Delta M = 0 + [-2\text{ kN}(2\text{ m})] = -4\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Este mismo valor puede determinarse con base en el método de las secciones, figura 6-15*e*.

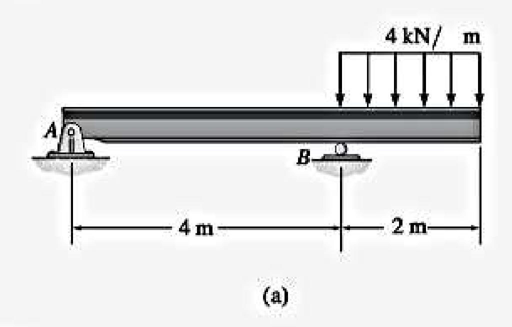


(e)

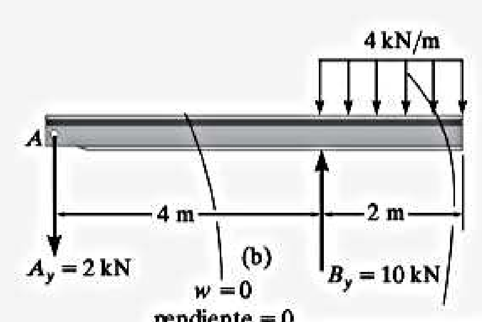
Figura 6-15

EJEMPLO 6.9

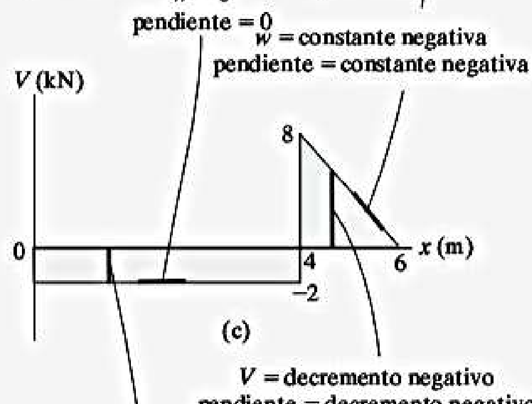
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga saliente mostrada en la figura 6-16*a*.



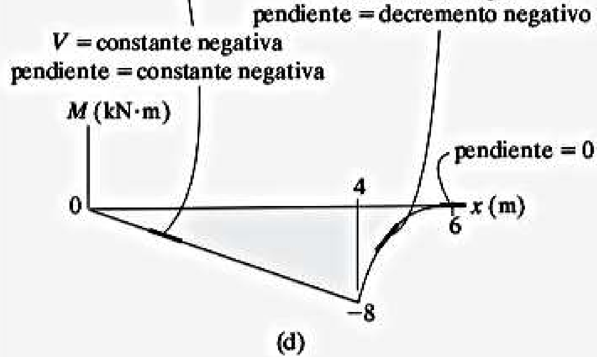
(a)



(b)



(c)



(d)

SOLUCIÓN

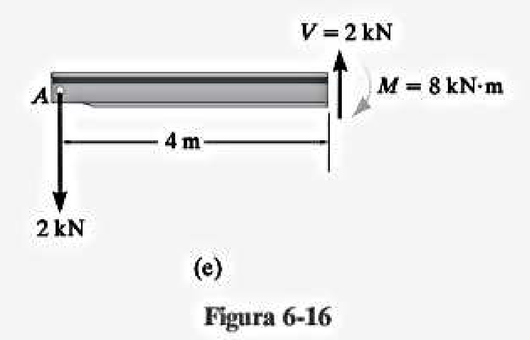
Reacciones en los apoyos. Las reacciones en los apoyos se muestran en la figura 6-16*b*.

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante de −2 kN en el extremo *A* de la viga se grafica en $x = 0$, figura 6-16*c*. Las pendientes se determinan con base en la carga y a partir de esto se construye el diagrama de fuerza cortante, tal como lo indica la figura. En particular, observe el salto positivo de 10 kN en $x = 4$ m debido a la fuerza B_y mostrada en la figura.

Diagrama de momento. El momento con valor de cero se grafica en $x = 0$, figura 6-16*d*. Después se construye el diagrama de momento siguiendo el comportamiento de la pendiente, la cual se determina a partir del diagrama de fuerza cortante. El momento en $x = 4$ m se encuentra con base en el área bajo el diagrama de fuerza cortante.

$$M|_{x=4\text{ m}} = M|_{x=0} + \Delta M = 0 + [-2\text{ kN}(4\text{ m})] = -8\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Este valor también se puede obtener por medio del método de las secciones, como se muestra en la figura 6-16*e*.

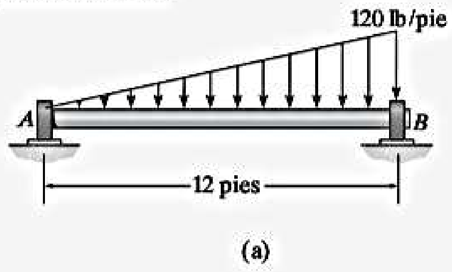


(e)

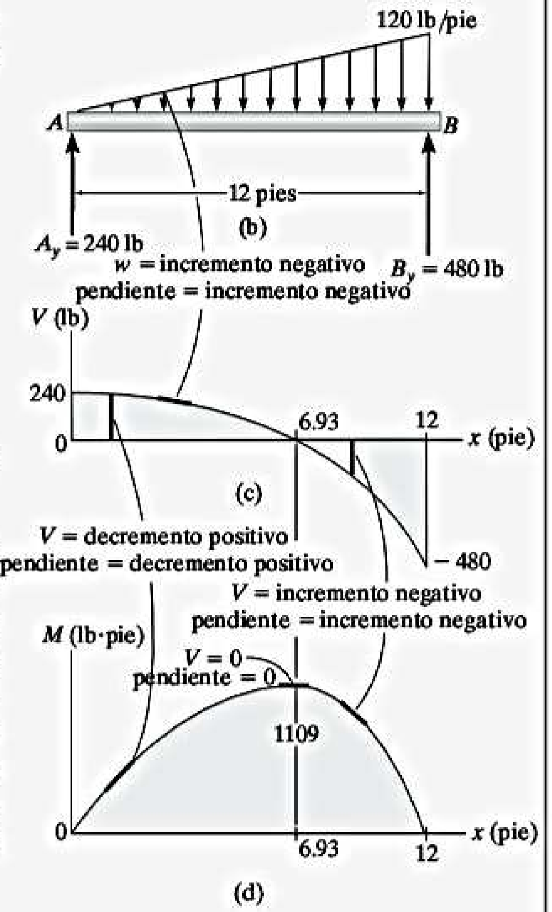
Figura 6-16

EJEMPLO 6.10

El eje mostrado en la figura 6-17*a* se sostiene mediante un cojinete de empuje en *A* y una chumacera en *B*. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento.



(a)



SOLUCIÓN

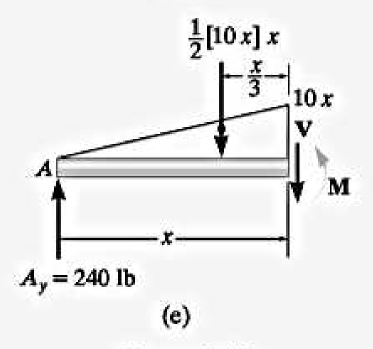
Reacciones en los apoyos. Las reacciones en los apoyos se muestran en la figura 6-17*b*.

Diagrama de fuerza cortante. Como se muestra en la figura 6-17*c*, la fuerza cortante en $x = 0$ es $+240$ lb. El diagrama de fuerza cortante se construye siguiendo la pendiente definida por la carga, donde su valor en *B* es de -480 lb. Como la fuerza cortante cambia de signo, debe localizarse el punto donde $V = 0$. Para ello se usará el método de las secciones. En la figura 6-17*e* se muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo del eje, seccionado en una posición arbitraria *x*. Observe que la intensidad de la carga distribuida en *x* es $w = 10x$, que se encontró usando triángulos semejantes; es decir, $120/12 = w/x$.

Así, para $V = 0$,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 240 \text{ lb} - \tfrac{1}{2}(10x)x = 0$$

$$x = 6.93 \text{ pies}$$



(e)

Figura 6-17

Diagrama de momento. El diagrama de momento inicia en 0 puesto que no hay momento en *A*; después se construye con base en la pendiente determinada por el diagrama de fuerza cortante. El momento máximo se produce en $x = 6.93$ pies, donde la fuerza cortante es igual a cero, ya que $dM/dx = V = 0$, figura 6-17*d*,

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$M_{\text{máx}} + \tfrac{1}{2}[(10)(6.93)]\,6.93\left(\tfrac{1}{3}(6.93)\right) - 240(6.93) = 0$$

$$M_{\text{máx}} = 1109 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

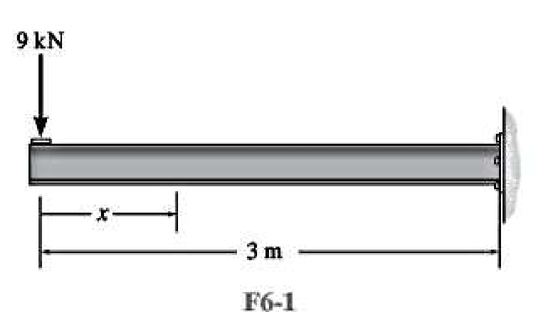
Por último, observe cómo la integración, primero de la carga *w* que es lineal, produce un diagrama de fuerza cortante que es parabólico, y luego un diagrama de momento que es cúbico.

NOTA: Después de haber estudiado estos ejemplos, pruebe sus conocimientos reconsiderando los diagramas de fuerza cortante y de momento en los ejemplos 6-1 a 6-4 y vea si los puede construir usando los conceptos analizados aquí.

6

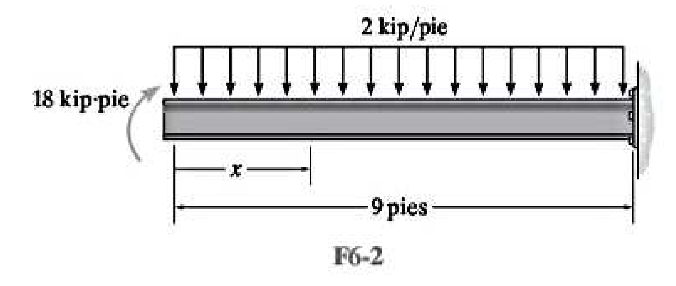
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F6-1. Exprese las funciones de fuerza cortante y de momento en términos de x, y después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo.



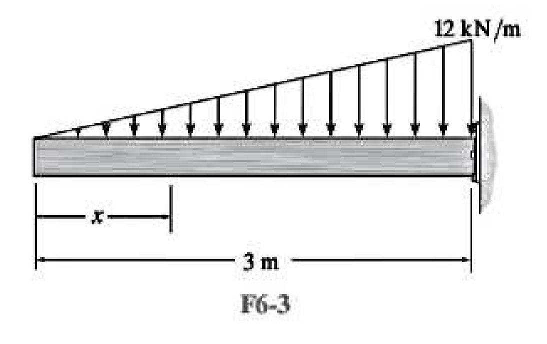
F6-1

F6-2. Exprese las funciones de fuerza cortante y de momento en términos de x, y después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo.



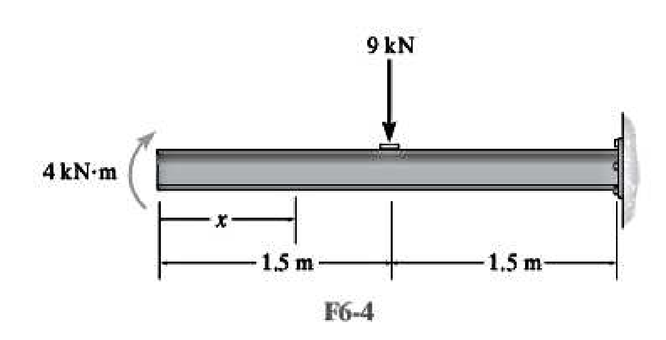
F6-2

F6-3. Exprese las funciones de fuerza cortante y de momento en términos de x, y después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo.

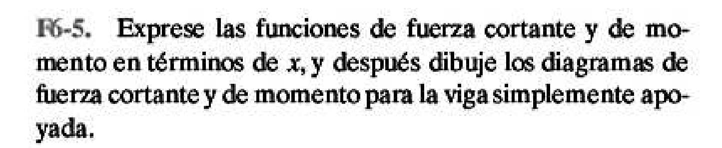


F6-3

F6-4. Exprese las funciones de fuerza cortante y de momento en términos de x, donde $0 < x < 1.5$ m y $1.5 \text{ m} < x < 3$ m, y luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo.



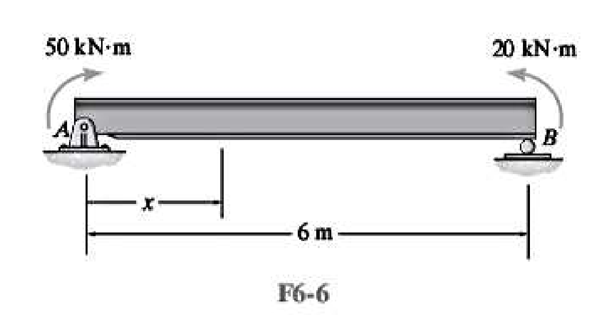
F6-4



F6-5. Exprese las funciones de fuerza cortante y de momento en términos de x, y después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.

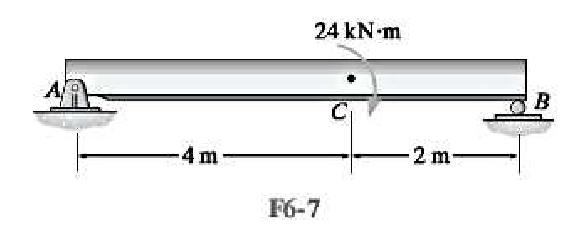
F6-5

F6-6. Exprese las funciones de fuerza cortante y de momento en términos de x, y después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



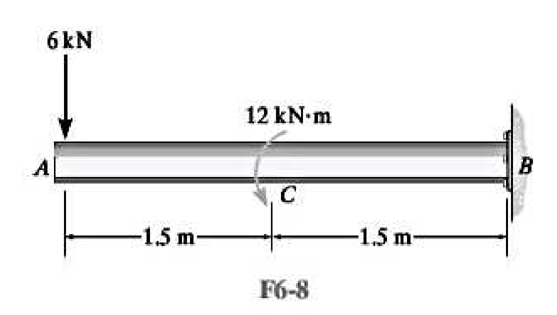
F6-6

F6-7. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



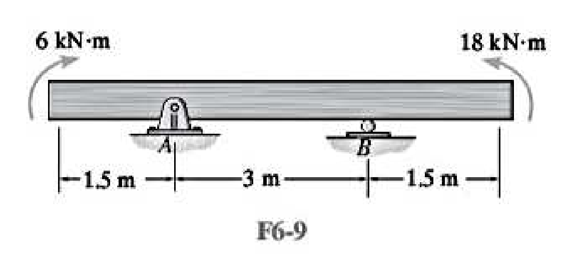
F6-7

F6-8. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo.



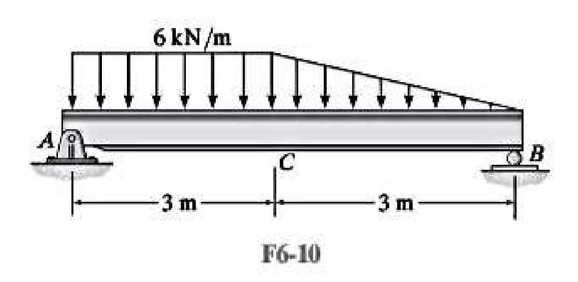
F6-8

F6-9. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga con doble voladizo.



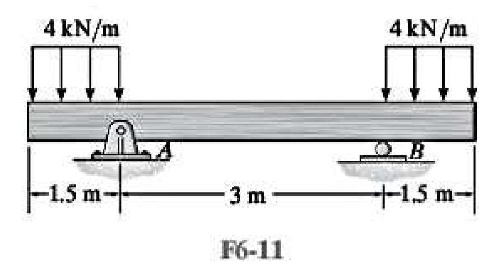
F6-9

F6-10. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



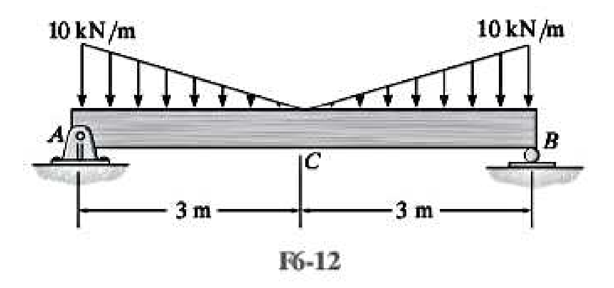
F6-10

F6-11. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga con doble voladizo.



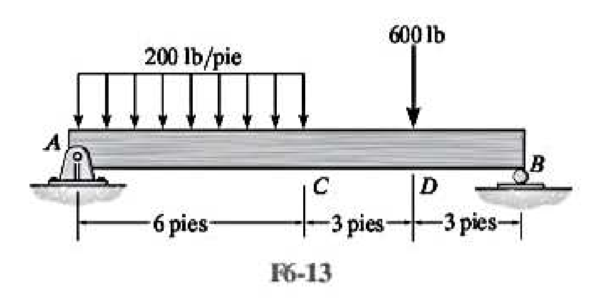
F6-11

F6-12. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



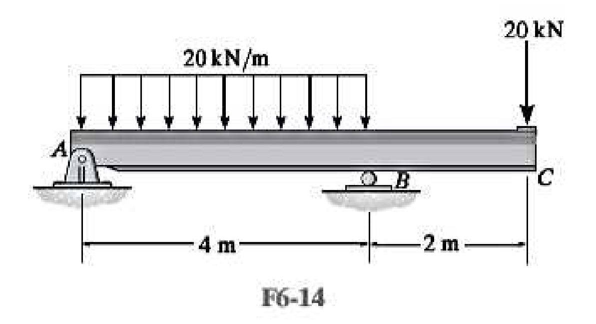
F6-12

F6-13. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



F6-13

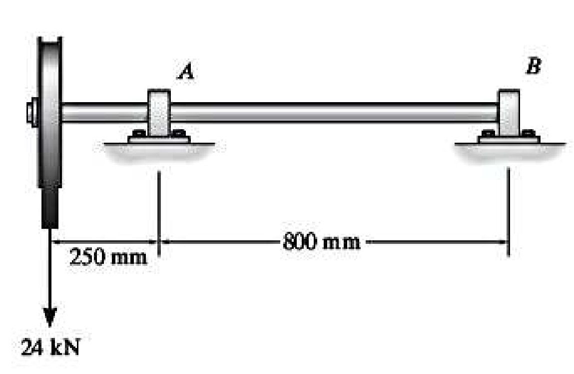
F6-14. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga con voladizo.



F6-14

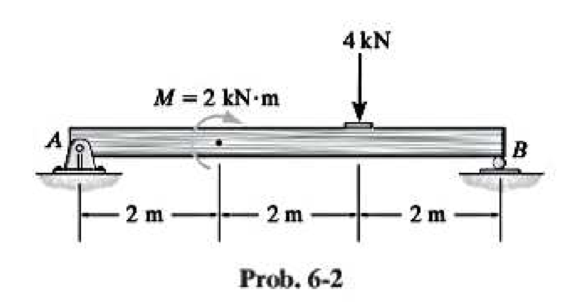
PROBLEMAS

6-1. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el eje. Los cojinetes en *A* y *B* sólo ejercen reacciones verticales sobre el eje.



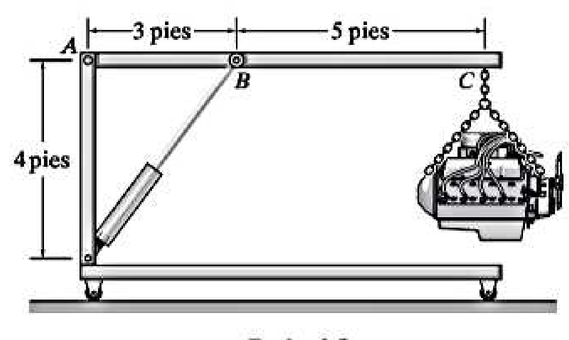
Prob. 6-1

6-2. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



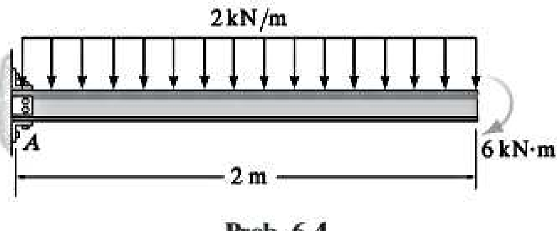
Prob. 6-2

6-3. Una grúa se usa para sostener el motor que tiene un peso de 1200 lb. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento del aguilón *ABC* cuando se encuentra en la posición horizontal mostrada.



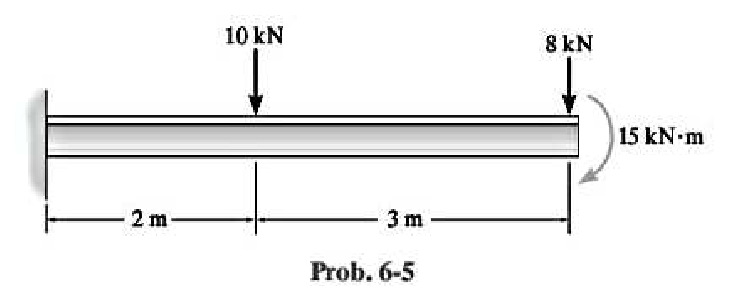
Prob. 6-3

***6-4.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga en voladizo.



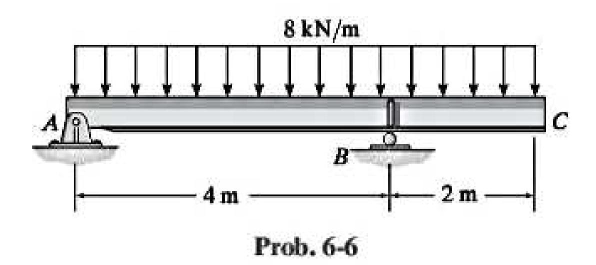
Prob. 6-4

6-5. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



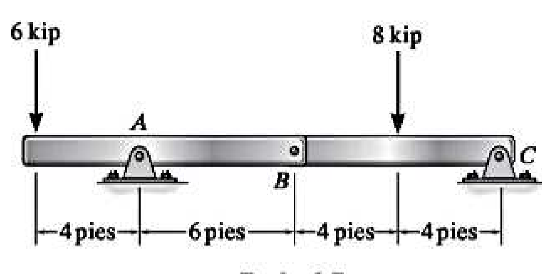
Prob. 6-5

6-6. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga con voladizo.



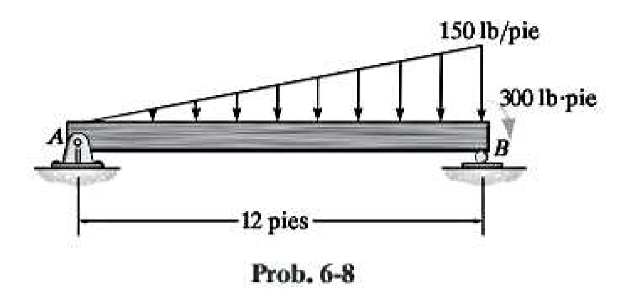
Prob. 6-6

6-7. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga compuesta que está conectada mediante un pasador en *B*.



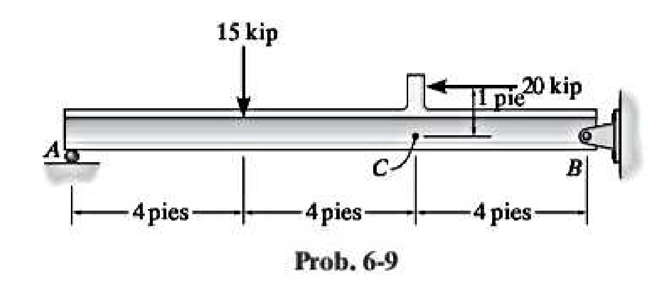
Prob. 6-7

*6-8. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



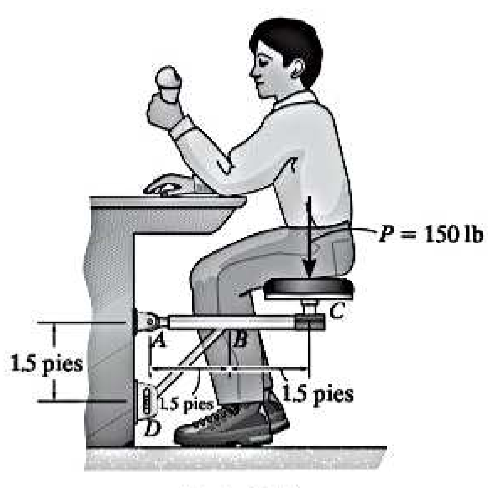
Prob. 6-8

6-9. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. *Sugerencia:* La carga de 20 kip debe remplazarse por cargas equivalentes en el punto C sobre el eje de la viga.



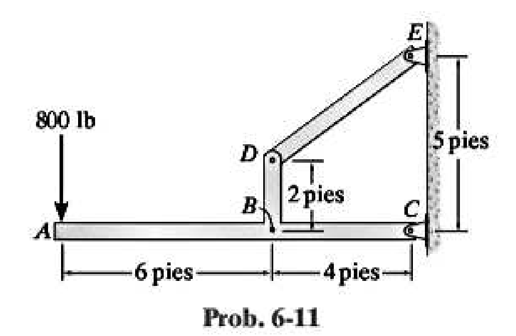
Prob. 6-9

6-10. Los elementos ABC y BD de la silla mostrada están rígidamente conectados en B y el collarín liso en D puede moverse con libertad a lo largo de la ranura vertical. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el elemento ABC.



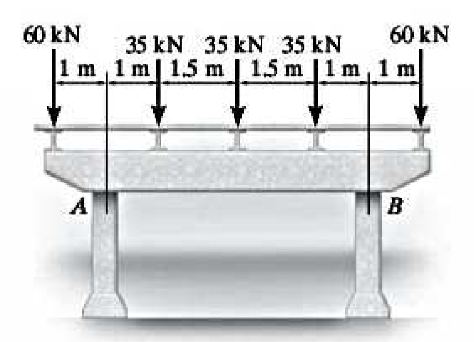
Prob. 6-10

6-11. La viga con voladizo se fabricó incluyendo en ella un brazo proyectado BD. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga ABC si soporta una carga de 800 lb. *Sugerencia:* La carga en el puntal de apoyo DE debe remplazarse por cargas equivalentes en el punto B sobre el eje de la viga.



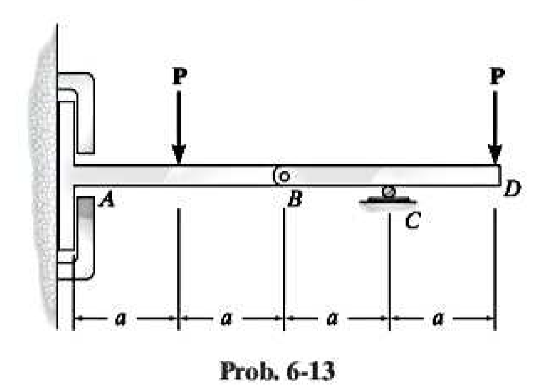
Prob. 6-11

*6-12. Un muelle de concreto reforzado se utiliza para sostener los largueros de la calzada de un puente. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el muelle cuando se somete a las cargas indicadas. Suponga que las columnas A y B sólo ejercen reacciones verticales sobre el muelle.



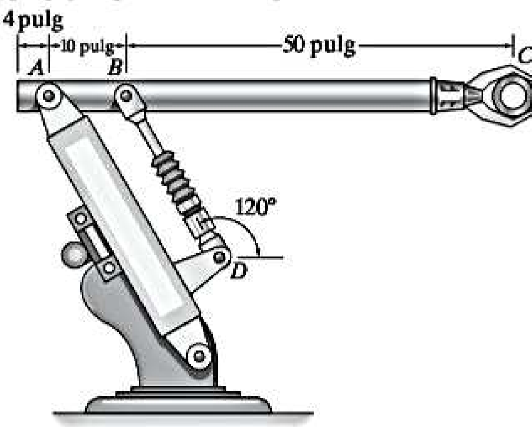
Prob. 6-12

6-13. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga compuesta. Ésta se sostiene mediante una placa lisa en A la cual se desliza dentro de la ranura por lo que no puede soportar una fuerza vertical, aunque sí puede hacerlo con un momento y una carga axial.



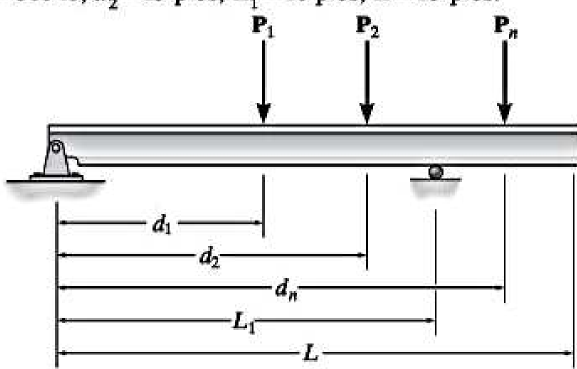
Prob. 6-13

6-14. El robot industrial se mantiene en la posición estacionaria que se muestra en la figura. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento del brazo de *ABC* si éste se encuentra conectado mediante un pasador en *A* y unido al cilindro hidráulico *BD* (elemento de dos fuerzas). Suponga que el brazo y la empuñadura tienen un peso uniforme de 1.5 lb/pulg, y soportan una carga de 40 lb en *C*.



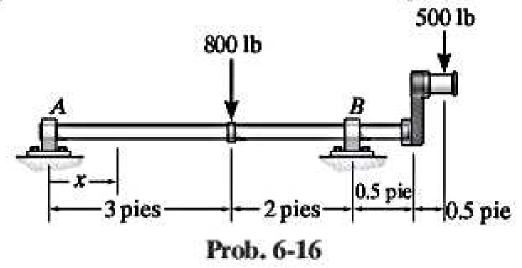
Prob. 6-14

6-15. Considere el problema general de la viga sometida a *n* cargas concentradas. Escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para determinar la fuerza cortante y el momento internos en cualquier ubicación *x* dada a lo largo de la viga; asimismo grafique los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Muestre una aplicación del programa usando los valores de $P_1 = 500$ lb, $d_1 = 5$ pies, $P_2 = 800$ lb, $d_2 = 15$ pies, $L_1 = 10$ pies, $L = 15$ pies.



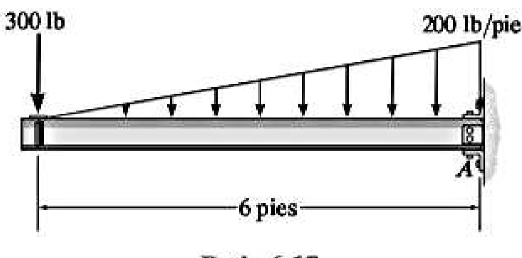
Prob. 6-15

***6-16.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el eje y determine la fuerza cortante y el momento en todo el eje como una función de *x*. Los cojinetes en *A* y *B* sólo ejercen reacciones verticales sobre el eje.



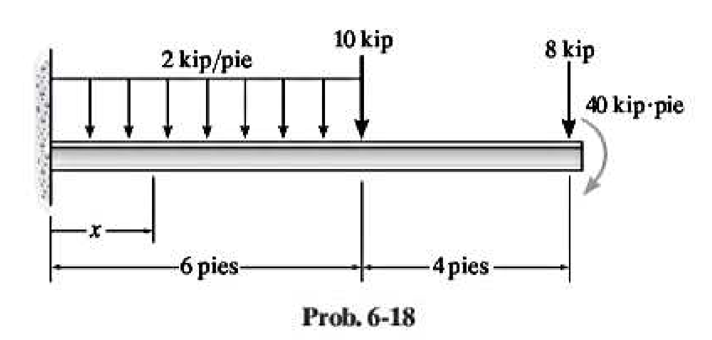
Prob. 6-16

•6-17. Dibuje los diagramas de cortante y de momento para la viga en voladizo.



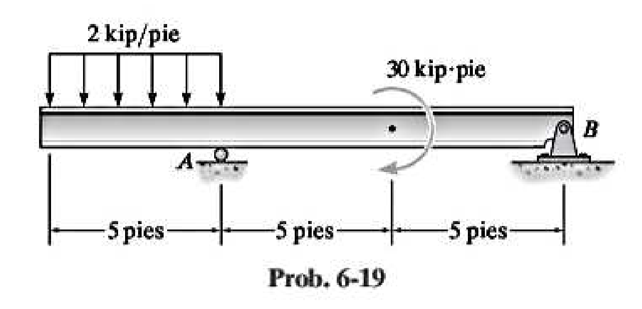
Prob. 6-17

6-18. Dibuje los diagramas de cortante y de momento para la viga; asimismo determine la fuerza cortante y el momento a lo largo de la viga como funciones de *x*.



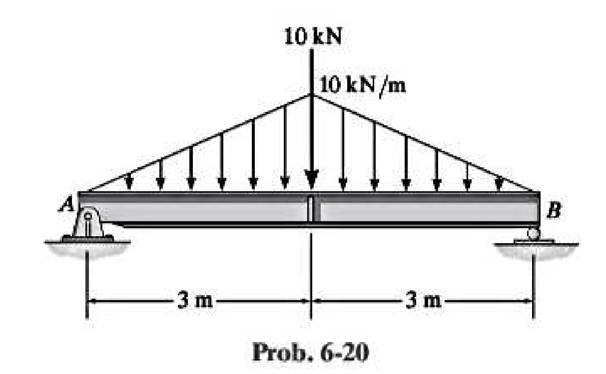
Prob. 6-18

6-19. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



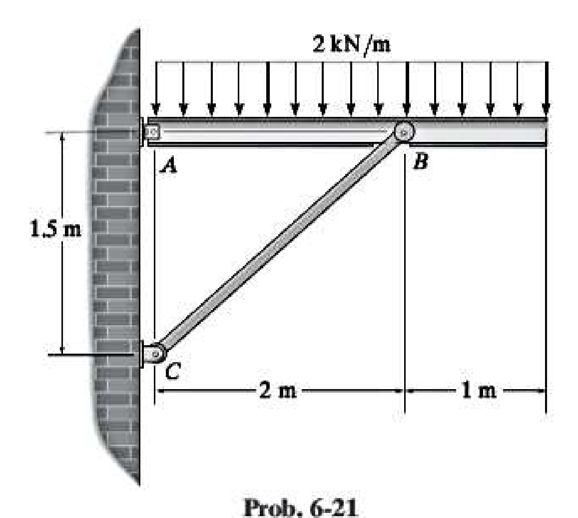
Prob. 6-19

***6-20.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



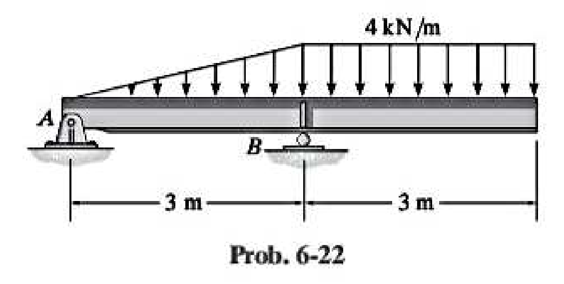
Prob. 6-20

•6-21. La viga está sometida a la carga uniformemente distribuida que se muestra en la figura. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



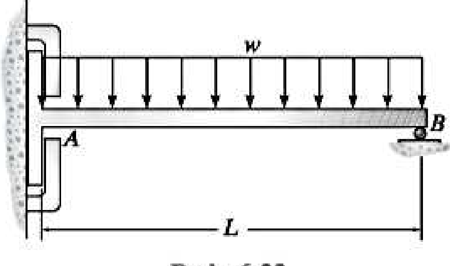
Prob. 6-21

6-22. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga con voladizo.



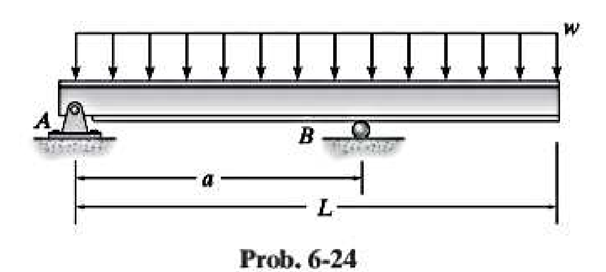
Prob. 6-22

6-23. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Ésta se sostiene mediante una placa lisa en A que se desliza dentro de una ranura por lo que no puede soportar una fuerza vertical, pero sí puede hacerlo con un momento y una carga axial.



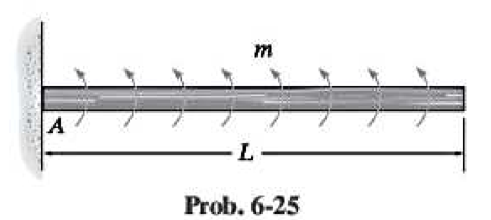
Prob. 6-23

*6-24. Determine la distancia a en la que debe colocarse un soporte de rodillo de modo que el valor absoluto más grande del momento sea mínimo. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para esta condición.



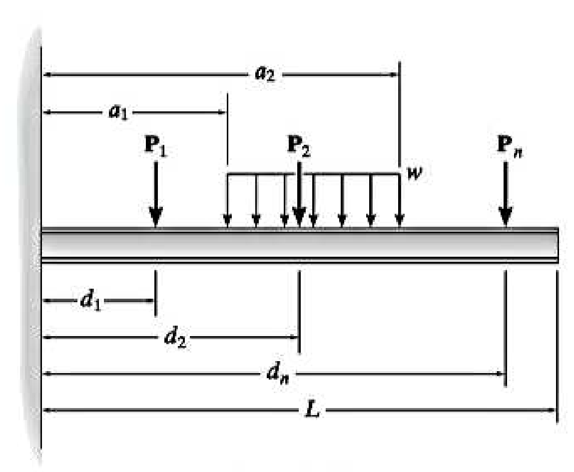
Prob. 6-24

6-25. La viga está sometida al momento uniformemente distribuido m (momento/longitud). Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 6-25

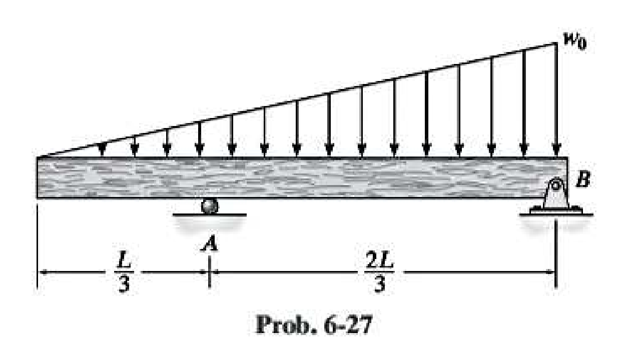
6-26. Considere el problema general de una viga en voladizo sometida a n cargas concentradas y una carga distribuida constante w. Escriba un programa de computadora que pueda utilizarse para determinar la fuerza cortante y el momento en cualquier ubicación dada x a lo largo de la viga. Además, grafique los diagramas de fuerza cortante y momento para la viga. Muestre una aplicación del programa usando los valores de $P_1 = 4$ kN, $d_1 = 2$ m, $w = 800$ N/m, $a_1 = 2$ m, $a_2 = 4$ m, $L = 4$ m.



Prob. 6-26

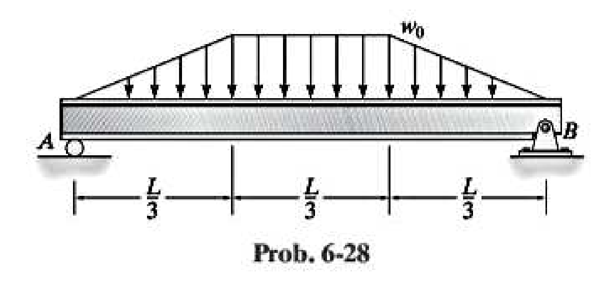
6

6-27. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



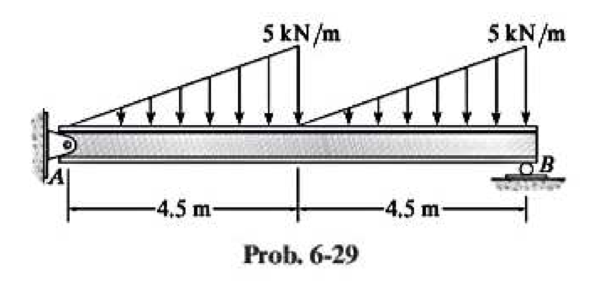
Prob. 6-27

***6-28.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



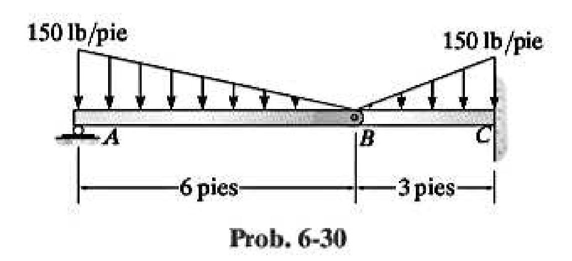
Prob. 6-28

•6-29. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



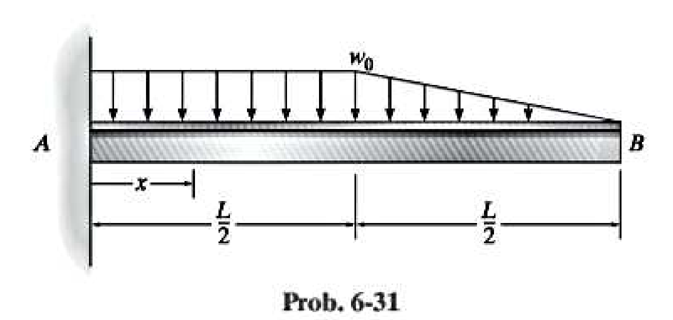
Prob. 6-29

6-30. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga compuesta.



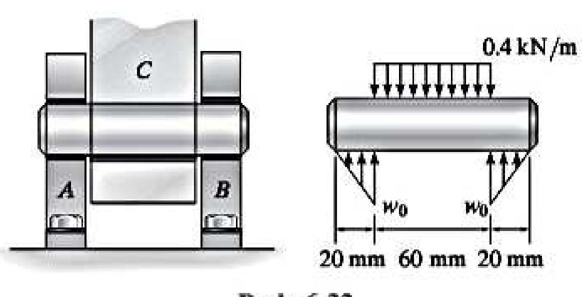
Prob. 6-30

6-31. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga; asimismo determine la fuerza cortante y el momento en la viga como funciones de x.



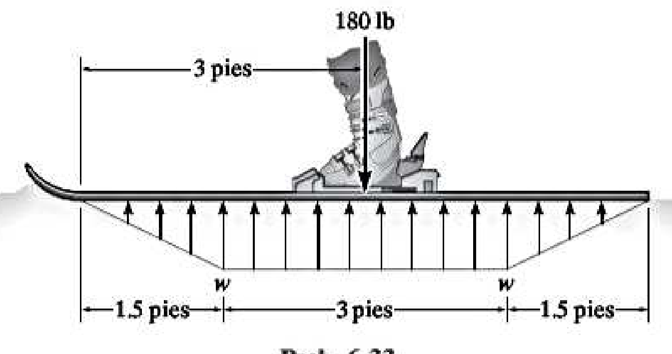
Prob. 6-31

***6-32.** El pasador liso se sostiene mediante dos silletas A y B, y está sometido a una carga de compresión de 0.4 kN/m causada por la barra C. Determine la intensidad de la carga distribuida w_0 en las silletas sobre el pasador y dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el pasador.



Prob. 6-32

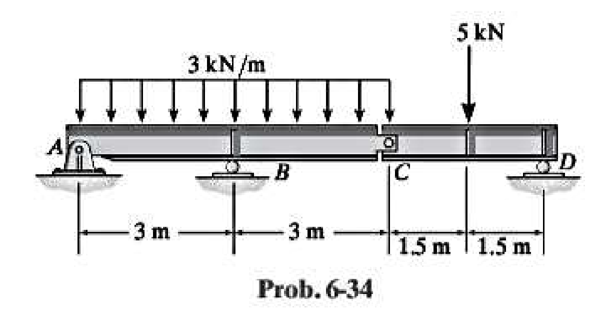
•6-33. Un esquí soporta el peso de 180 libras de un hombre. Si la carga de la nieve en su superficie inferior es trapezoidal como se muestra en la figura, determine la intensidad w, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el esquí.



Prob. 6-33

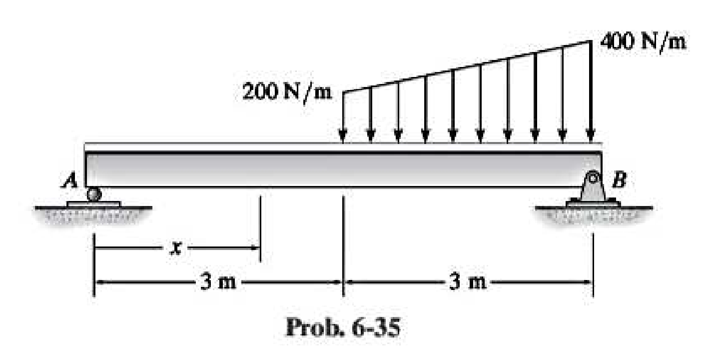
6

6-34. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga compuesta.



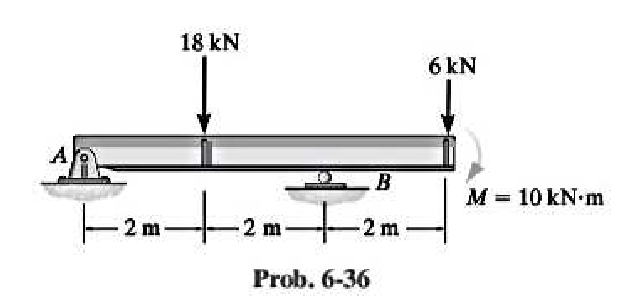
Prob. 6-34

6-35. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga y determine la fuerza cortante y el momento en función de x.



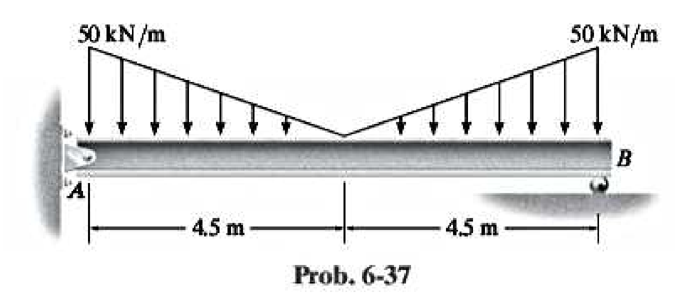
Prob. 6-35

***6-36.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga con voladizo.



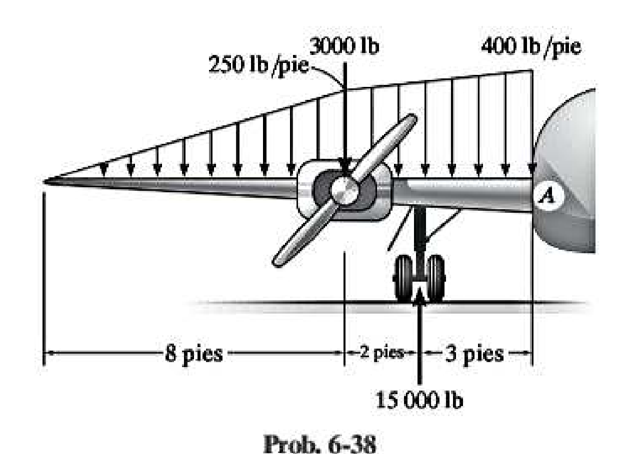
Prob. 6-36

6-37. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



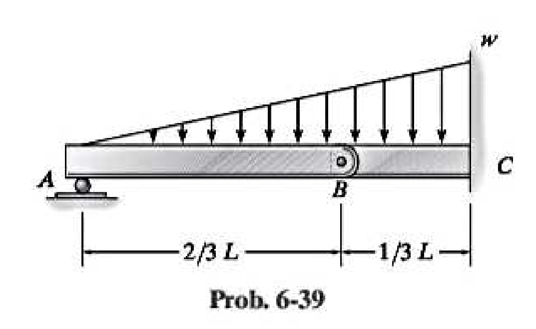
Prob. 6-37

6-38. En la figura se muestra la carga por el peso muerto a lo largo del ala de avión. Si el ala se encuentra fija al fuselaje en A, determine las reacciones en A y después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el ala.



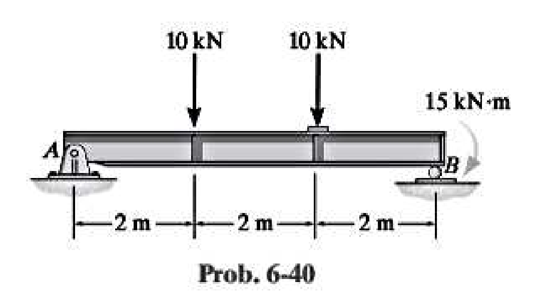
Prob. 6-38

6-39. La viga compuesta consiste en dos segmentos que están conectados entre sí mediante un pasador en B. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga si ésta soporta la carga distribuida que se muestra en la figura.



Prob. 6-39

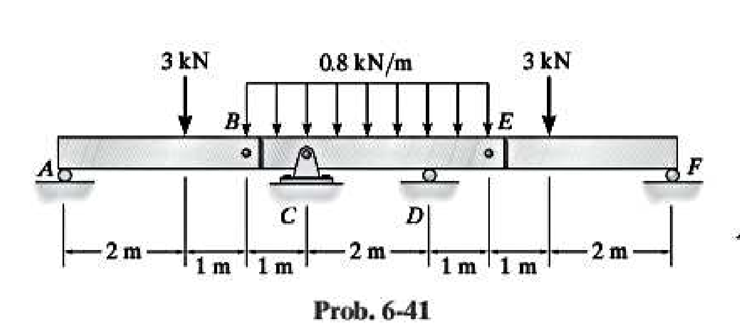
***6-40.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga simplemente apoyada.



Prob. 6-40

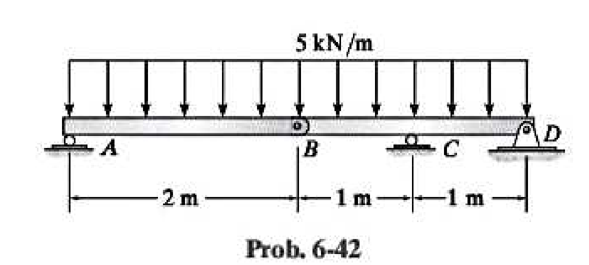
6

6-41. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga compuesta. Los tres segmentos están conectados mediante pasadores en B y E.



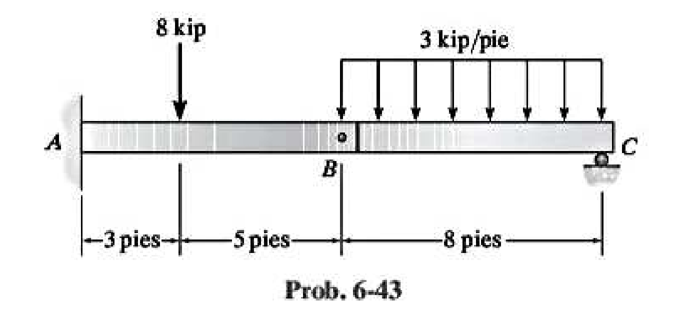
Prob. 6-41

6-42. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga compuesta.



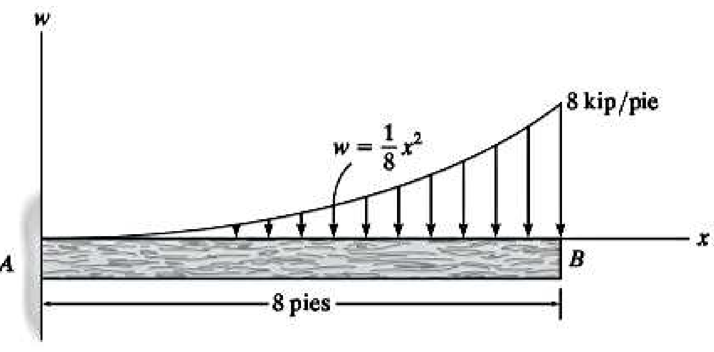
Prob. 6-42

6-43. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Los dos segmentos están unidos en B.



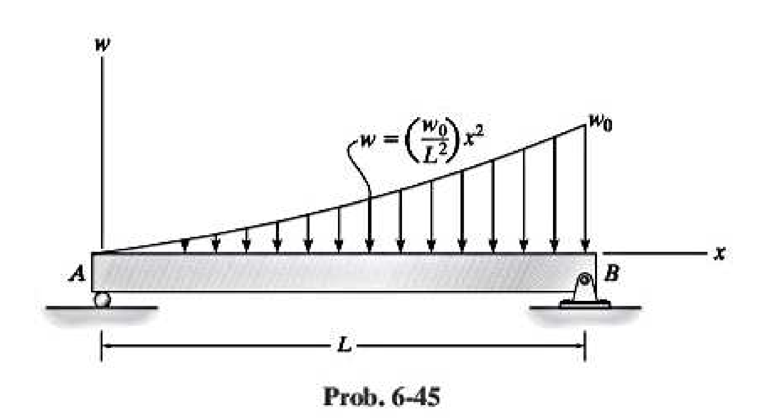
Prob. 6-43

***6-44.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



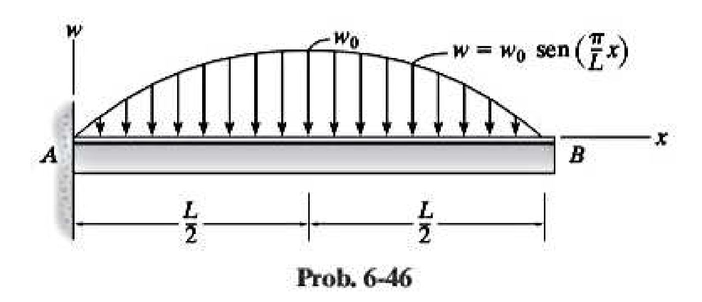
Prob. 6-44

•6-45. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 6-45

6-46. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.



Prob. 6-46

6.3 Deformación flexionante de un elemento recto

En esta sección se analizarán las deformaciones producidas cuando una viga prismática recta, fabricada con un material homogéneo, se somete a flexión. El análisis se limitará a las vigas que tienen un área transversal simétrica con respecto a un eje, en las que el momento flexionante se aplica alrededor de un eje perpendicular a dicho eje de simetría, como se muestra en la figura 6-18. El comportamiento de los elementos que tienen secciones transversales asimétricas, o que están fabricados con diversos materiales, se basa en observaciones similares y se estudiará por separado en las secciones posteriores de este capítulo.

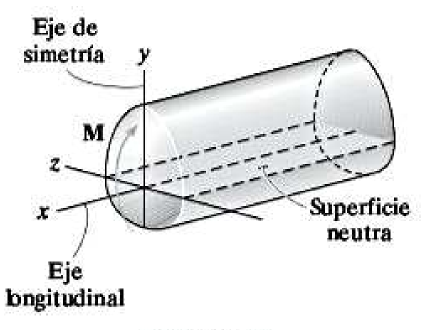


Figura 6-18

Un material altamente deformable como el caucho puede usarse para ilustrar lo que sucede cuando un elemento prismático recto se somete a un momento flexionante. Por ejemplo, considere la barra no deformada de la figura 6-19*a*, la cual tiene una sección transversal cuadrada y está marcada con líneas rectas longitudinales y transversales para formar una cuadrícula. Cuando se aplica un momento flexionante, éste tiende a distorsionar las líneas al patrón que se muestra en la figura 6-19*b*. Observe que las líneas longitudinales *se curvan* mientras que las líneas transversales verticales *permanecen rectas* aunque experimentan una *rotación*.

El momento flexionante hace que el material de la porción *inferior* de la barra se *estire* y que el material en la parte *superior* se *comprima*. En consecuencia, entre estas dos regiones debe haber una superficie, llamada *superficie neutra*, en la que las fibras longitudinales del material no sufrirán ningún cambio de longitud, figura 6-18.

6

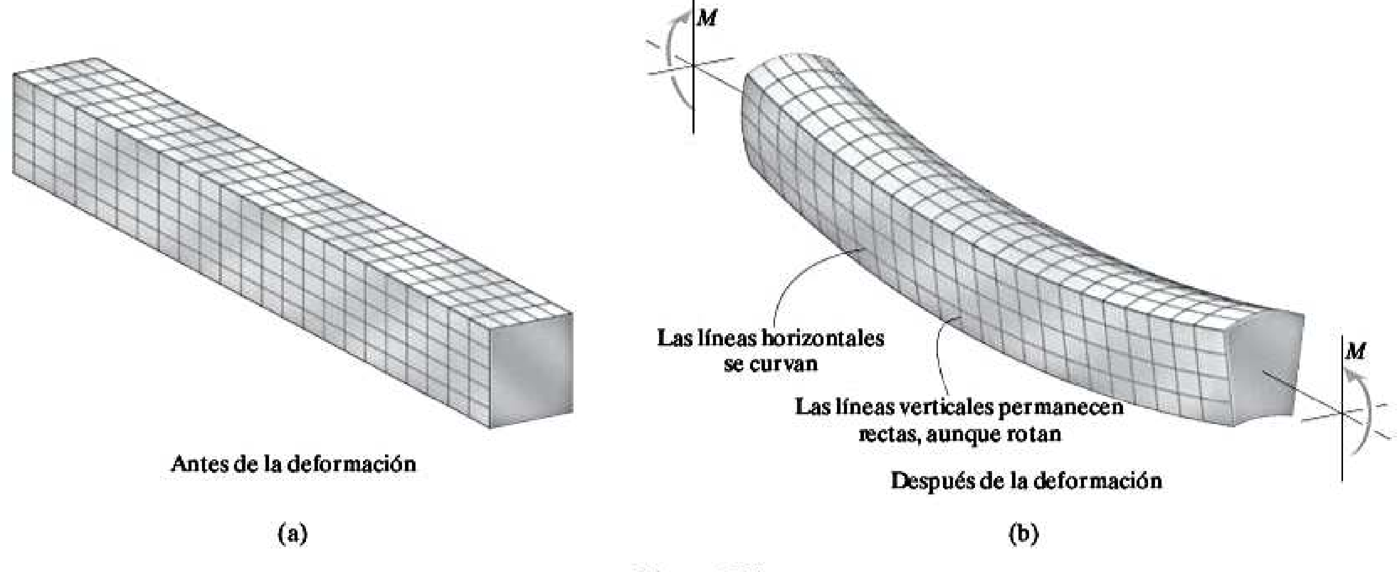
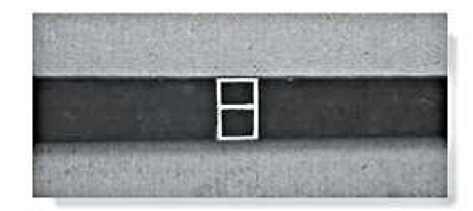


Figura 6-19





Observe la distorsión de las líneas debida a la flexión de esta barra de caucho. La línea superior se estira, la línea inferior se comprime y la línea central conserva su longitud. Por otra parte, las líneas verticales rotan y, sin embargo, siguen siendo rectas.

A partir de estas observaciones pueden hacerse los siguientes tres supuestos acerca de la forma en que el esfuerzo deforma al material. En primer lugar, el *eje longitudinal* x, que se encuentra en la superficie neutra, figura 6-20*a*, *no* experimenta ningún *cambio en su longitud*. En vez de eso, el momento tiende a deformar la viga para que esta línea se *convierta en una curva* ubicada en el plano de simetría x-y, figura 6-20*b*. Segundo, todas las ***secciones transversales*** de la viga ***permanecen planas*** y perpendiculares al eje longitudinal durante la deformación. Y en tercer lugar, *cualquier deformación* de la *sección transversal* dentro de su propio plano, como se observa en la figura 6-19*b*, podrá *pasarse por alto*. En particular, el eje z, ubicado en el plano de la sección transversal y alrededor del cual gira la sección transversal, se denomina *eje neutro*, figura 6-20*b*.

A fin de mostrar la manera en que esta distorsión deforma al material, se aislará un pequeño segmento de la viga ubicado a una distancia x a lo largo de la viga y con un grosor no deformado Δx, figura 6-20*a*. En la figura 6-21, este elemento tomado de la viga se muestra de perfil en las posiciones deformada y sin deformar. Observe que cualquier segmento de recta

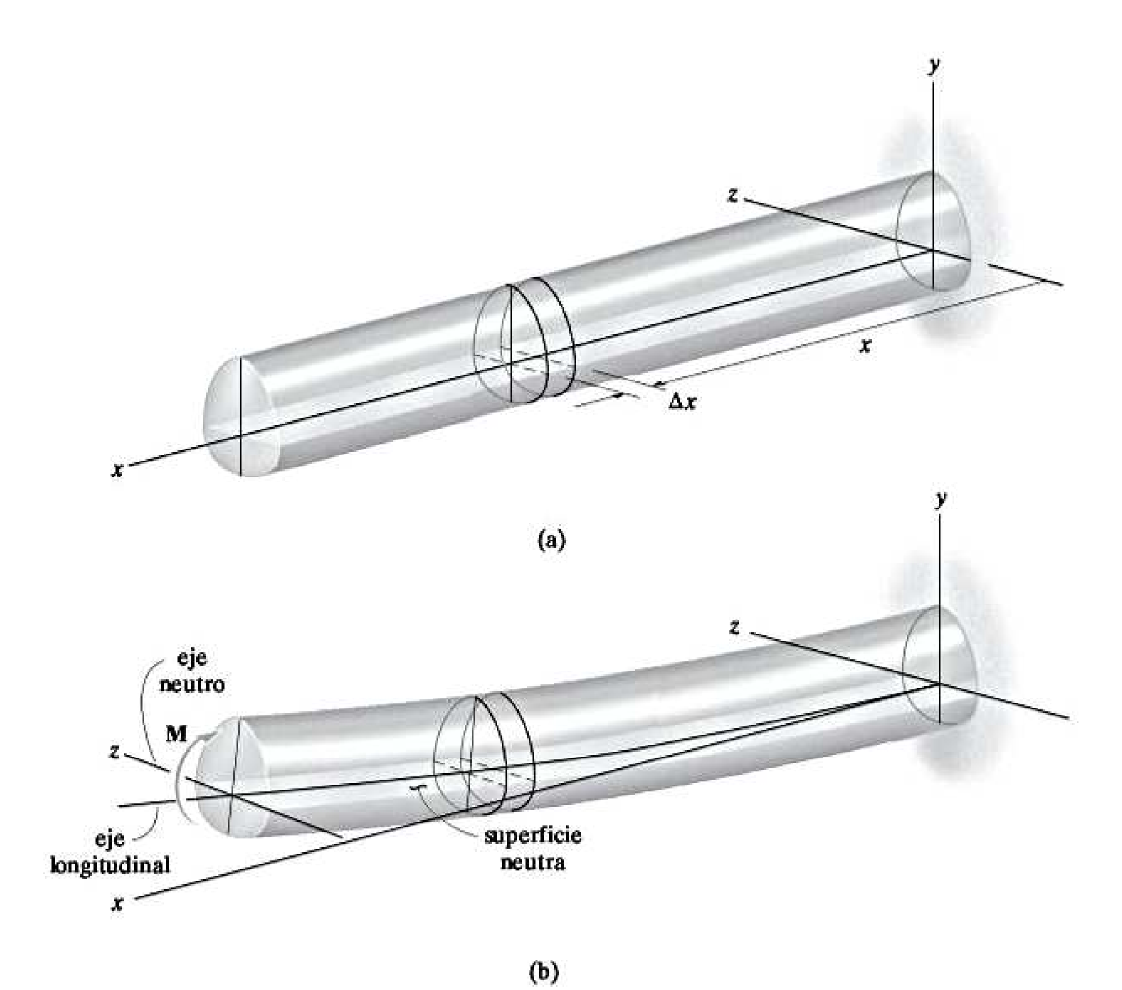


Figura 6-20

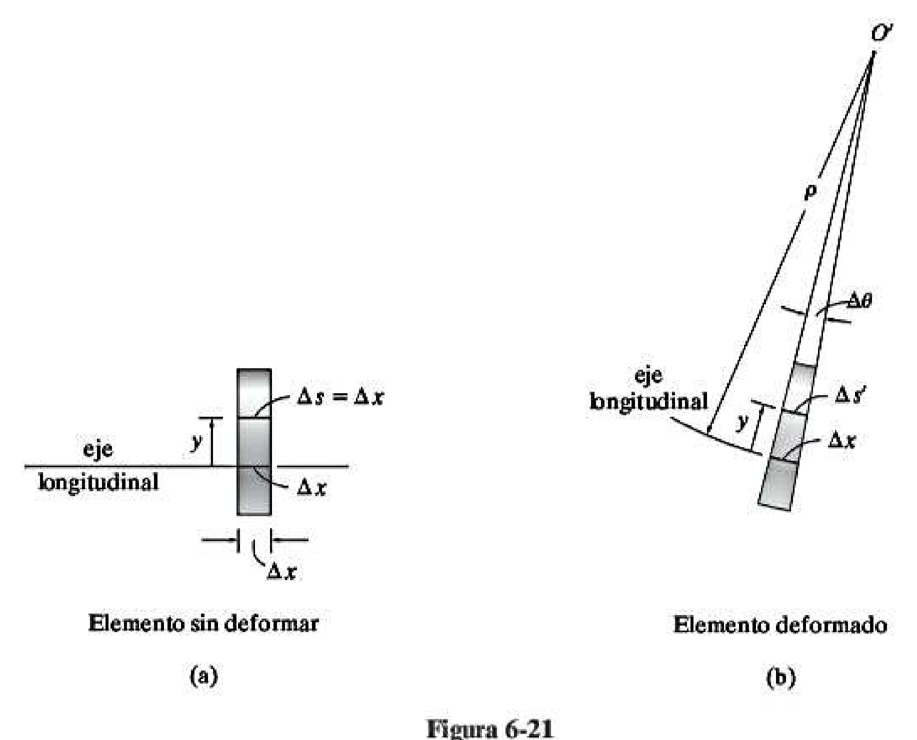


Figura 6-21

Δx, situado en la superficie neutra no cambia su longitud, mientras que cualquier segmento de recta Δs, ubicado a una distancia arbitraria y por encima de la superficie neutra, se contraerá y se convertirá en $\Delta s'$ después de la deformación. Por definición, la deformación normal a lo largo de Δs se determina con base en la ecuación 2-2, a saber,

$$\epsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

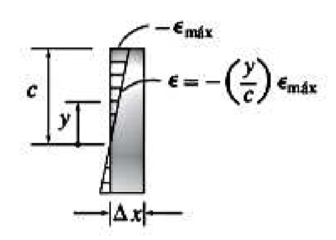
Ahora, esta deformación se representará en términos de la ubicación y del segmento y del radio de curvatura ρ del eje longitudinal del elemento. Antes de la deformación, $\Delta s = \Delta x$, figura 6-21*a*. Después de la deformación Δx tiene un radio de curvatura ρ, con el centro de curvatura en el punto O', figura 6-21*b*. Como $\Delta\theta$ define el ángulo entre los lados del elemento, $\Delta x = \Delta s = \rho\Delta\theta$. De la misma manera, la longitud deformada de Δs se convierte en $\Delta s' = (\rho - y)\Delta\theta$. Al sustituir en la ecuación anterior se obtiene

$$\epsilon = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}$$

o bien

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho} \qquad (6\text{-}7)$$

Este resultado importante indica que la deformación normal longitudinal de cualquier elemento dentro de la viga depende de su ubicación y



Distribución de la deformación normal

Figura 6-22

de la sección transversal, y del radio de curvatura del eje longitudinal de la viga en ese punto. En otras palabras, para cualquier sección transversal específica, la ***deformación normal longitudinal variará linealmente*** con y desde el eje neutro. En las fibras situadas por encima del eje neutro $(+y)$ se producirá una contracción $(-\epsilon)$, mientras que en las fibras situadas por debajo del eje $(-y)$ ocurrirá una elongación $(+\epsilon)$. Esta variación en la deformación sobre la sección transversal se muestra en la figura 6-22. Aquí, la deformación máxima se produce en la fibra más externa, ubicada a una distancia $y = c$ del eje neutro. Usando la ecuación 6-7, y como $\epsilon_{máx} = c/\rho$, entonces por división,

6

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{máx}} = -\left(\frac{y/\rho}{c/\rho}\right)$$

De modo que

$$\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right)\epsilon_{máx} \tag{6-8}$$

Esta deformación normal sólo depende de los supuestos hechos respecto a la *deformación*. Por lo tanto, cuando un momento se aplica a la viga, éste sólo causará un *esfuerzo normal* en la dirección longitudinal o dirección x. Todos los demás componentes de los esfuerzos normal y cortante serán iguales a cero. Este estado uniaxial de esfuerzo es lo que ocasiona que el material tenga la componente de deformación normal longitudinal ϵ_x, definido por la ecuación 6-8. Además, por la razón de Poisson, *también* debe haber componentes de deformación asociados $\epsilon_y = -\nu\epsilon_x$ y $\epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, que deforman el plano del área de la sección transversal, aunque aquí no se toman en cuenta tales deformaciones. Sin embargo, estas deformaciones ocasionan que las *dimensiones de la sección transversal* sean más pequeñas por debajo del eje neutro y más grandes por encima de éste. Por ejemplo, si la viga tiene una sección transversal cuadrada, en realidad se deformará como lo muestra la figura 6-23.

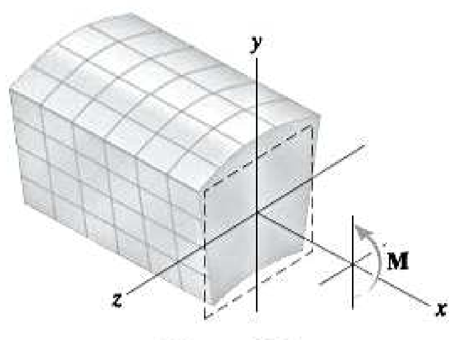
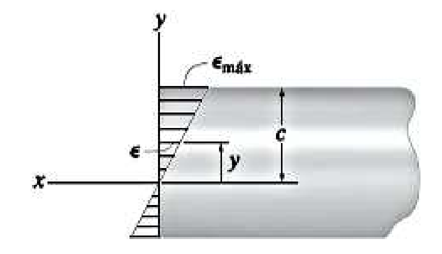


Figura 6-23

6.4 La fórmula de la flexión

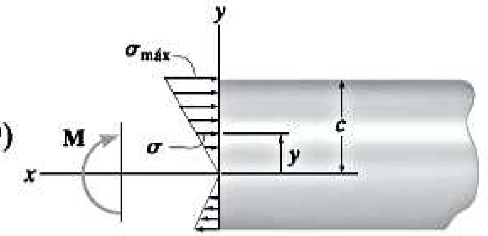
En esta sección se desarrollará una ecuación que relaciona la distribución del esfuerzo en una viga con el momento flexionante resultante interno que actúa en la sección transversal de esa viga. Para ello se supondrá que el material se comporta en forma elástica lineal y, por lo tanto, una ***variación lineal de la deformación normal***, figura 6-24*a*, debe ser resultado de una ***variación lineal en el esfuerzo normal***, figura 6-24*b*. Por consiguiente, al igual que la variación de la deformación normal, σ variará desde cero en el eje neutro del elemento hasta un valor máximo, $\sigma_{máx}$, en la distancia c más alejada del eje neutro. Debido a la proporcionalidad de triángulos, figura 6-23*b*, o mediante el uso de la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, y de la ecuación 6-8, se puede escribir



Variación de la deformación normal (vista de perfil)

(a)

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{máx} \tag{6-9}$$



Variación del esfuerzo flexionante (vista de perfil)

(b)

Figura 6-24

Esta ecuación describe la distribución del esfuerzo sobre el área de la sección transversal. La convención de signos establecida aquí es significativa. Para **M** positivo, que actúa en la dirección $+z$, los valores positivos de y proporcionan valores negativos para σ, es decir, un esfuerzo de compresión, ya que actúa en la dirección x negativa. De manera similar, los valores negativos de y dan valores positivos o de tensión para σ. Si se selecciona un elemento de volumen del material en un punto específico de la sección transversal, sólo actuarán sobre él estos esfuerzos de tensión o de compresión normales. Por ejemplo, en la figura 6-24*c* se muestra el elemento ubicado en $+y$.

La posición del eje neutro de la sección transversal puede localizarse al cumplir la siguiente condición: la *fuerza resultante* producida por la distribución del esfuerzo sobre el área de la sección transversal debe ser igual a *cero*. Considerando que la fuerza $dF = \sigma\, dA$ actúa sobre el elemento arbitrario dA de la figura 6-24*c*, se requiere

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad 0 = \int_A dF = \int_A \sigma\, dA$$

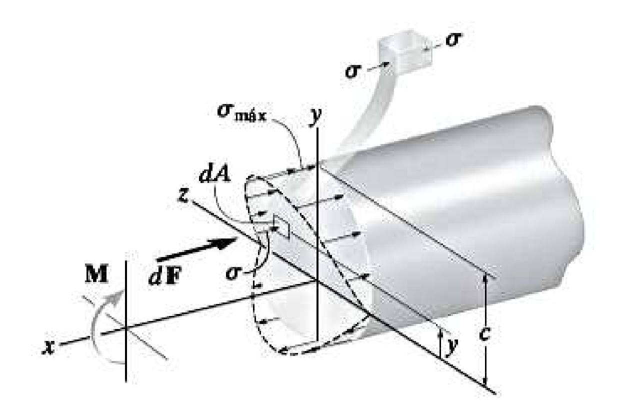
$$= \int_A -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{máx}\, dA$$

$$= \frac{-\sigma_{máx}}{c}\int_A y\, dA$$



Esta probeta de madera falló en flexión debido a que sus fibras se aplastaron en la parte superior y se desgarraron en la parte inferior.

6



Variación del esfuerzo flexionante

(c)

Figura 6-24 (cont.)

6

Como $\sigma_{\text{máx}}/c$ no es igual a cero, entonces

$$\int_A y\, dA = 0 \qquad (6\text{-}10)$$

En otras palabras, el primer momento del área transversal del elemento con respecto al eje neutro debe ser igual a cero. Esta condición sólo puede cumplirse si el *eje neutro* también es el *eje centroidal* horizontal de la sección transversal.* En consecuencia, una vez determinado el centroide del área de la sección transversal del elemento, se conoce la ubicación del eje neutro.

El esfuerzo en la viga puede determinarse a partir del siguiente requerimiento: el momento interno M resultante debe ser igual al momento producido por la distribución del esfuerzo respecto al eje neutro. El momento de $d\mathbf{F}$ en la figura 6-24*c* respecto al eje neutro es $dM = y\,dF$. Como $dF = \sigma\, dA$, a partir de la ecuación 6-9, se tiene para toda la sección transversal,

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \quad M = \int_A y\, dF = \int_A y(\sigma\, dA) = \int_A y\left(\frac{y}{c}\sigma_{\text{máx}}\right) dA$$

o bien

$$M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c}\int_A y^2\, dA \qquad (6\text{-}11)$$

*Recuerde que la ubicación $\bar{y}$ para el centroide del área de la sección transversal se define a partir de la ecuación $\bar{y} = \int y\, dA / \int dA$. Si $\int y\, dA = 0$, entonces $\bar{y} = 0$, por lo que el centroide se encuentra en el eje de referencia (neutro). Vea el apéndice A.

La integral representa el *momento de inercia* del área de la sección transversal respecto al eje neutro. Su valor se simbolizará con I. Por consiguiente, se puede despejar $\sigma_{\text{máx}}$ de la ecuación 6-11 y escribir

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} \tag{6-12}$$

Aquí

$\sigma_{\text{máx}}$ = el esfuerzo normal máximo en el elemento, que se produce en el punto sobre el área de la sección transversal que está *más alejado* del eje neutro

M = el momento interno resultante, determinado a partir del método de las secciones y de las ecuaciones de equilibrio; se calcula respecto al eje neutro de la sección transversal

c = la distancia perpendicular desde el eje neutro hasta el punto más alejado del eje neutro. Aquí es donde actúa $\sigma_{\text{máx}}$

I = el momento de inercia del área de la sección transversal respecto al eje neutro

Como $\sigma_{\text{máx}}/c = -\sigma/y$, ecuación 6-9, el esfuerzo normal en la distancia intermedia y puede determinarse a partir de una fórmula similar a la ecuación 6-12. Se tiene

$$\sigma = -\frac{My}{I} \tag{6-13}$$

Tenga en cuenta que el signo negativo es necesario, ya que concuerda con los ejes x, y, z establecidos. Por la regla de la mano derecha, M es positivo a lo largo del eje $+z$, y es positiva hacia arriba y, por lo tanto, σ debe ser negativa (compresiva) porque actúa en la dirección negativa de x, figura 6-24*c*.

Cualquiera de las dos ecuaciones anteriores suele denominarse como ***fórmula de la flexión***. Se utiliza para determinar el esfuerzo normal en un elemento recto, el cual tiene una sección transversal simétrica con respecto a un eje, y un momento aplicado de manera perpendicular a dicho eje. Aunque se ha supuesto que el elemento es prismático, en la mayoría de los casos dentro del diseño de ingeniería también se puede utilizar la fórmula de la flexión para determinar el esfuerzo normal en elementos que tienen un *ligero ahusamiento*. Por ejemplo, si se usa un análisis matemático basado en la teoría de la elasticidad, un elemento con sección transversal rectangular y una longitud ahusada en 15° tendrá un esfuerzo normal máximo real de alrededor de 5.4 por ciento *menor* que el calculado cuando se utiliza la fórmula de la flexión.

6

Puntos importantes

- La sección transversal de una viga recta se *mantiene plana* cuando la viga se deforma debido a la flexión. Esto provoca esfuerzos de tensión en una porción de la sección transversal y esfuerzos de compresión en la parte restante. En medio de estas porciones, existe el *eje neutro* que se encuentra sometido a un *esfuerzo cero*.
- Debido a la deformación, la *deformación longitudinal* varía *linealmente* desde cero en el eje neutro hasta un máximo en las fibras exteriores de la viga. Siempre que el material sea homogéneo y elástico lineal, el *esfuerzo* también variará de forma *lineal* sobre la sección transversal.
- El eje neutro pasa por el *centroide* del área de la sección transversal. Este resultado se basa en el hecho de que la fuerza normal resultante que actúa sobre la sección transversal debe ser igual a cero.
- La fórmula de la flexión se basa en el requisito de que el momento resultante interno en la sección transversal debe ser igual al momento producido por la distribución de esfuerzos normales respecto al eje neutro.

Procedimiento de análisis

Con el fin de aplicar la fórmula de la flexión, se sugiere el siguiente procedimiento.

6

Momento interno.

- Seccione el elemento en el punto donde debe determinarse el esfuerzo flexionante o normal y obtenga el momento interno M en la sección. Es necesario conocer el eje centroidal o neutro para la sección transversal, dado que *M debe* calcularse respecto a ese eje.
- Si debe determinarse el esfuerzo flexionante máximo absoluto, entonces dibuje el diagrama de momento a fin de determinar el momento máximo en el elemento.

Propiedad de la sección.

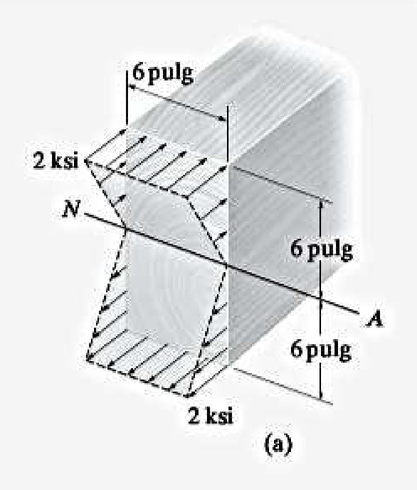
- Determine el momento de inercia del área de la sección transversal respecto al eje neutro. Los métodos utilizados para este cálculo se analizan en el apéndice A, y en la página final de este libro (al reverso de la contraportada) se proporciona una tabla de valores de I para varias formas geométricas comunes.

Esfuerzo normal.

- Especifique la distancia y, medida en forma perpendicular al eje neutro y al punto donde debe determinarse el esfuerzo normal. Después, aplique la ecuación $\sigma = -My/I$, o si debe calcularse el esfuerzo flexionante máximo, utilice $\sigma_{\text{máx}} = Mc/I$. Al sustituir los datos, asegúrese de que las unidades sean consistentes.
- El esfuerzo actúa en una dirección de tal forma que la fuerza creada en el punto contribuye con un momento respecto al eje neutro, el cual tiene la misma dirección que el momento interno **M**, figura 6-24*c*. De esta manera puede trazarse la distribución del esfuerzo que actúa sobre toda la sección transversal, o bien puede aislarse un elemento de volumen del material a fin de utilizarlo en la representación gráfica del esfuerzo normal que actúa sobre el punto.

EJEMPLO 6.11

Una viga tiene una sección transversal rectangular y está sometida a la distribución de esfuerzos que se muestra en la figura 6-25*a*. Determine el momento interno **M** en la sección causado por la distribución de esfuerzos, para ello (a) utilice la fórmula de la flexión, (b) encuentre la resultante de la distribución de esfuerzos empleando los principios básicos.



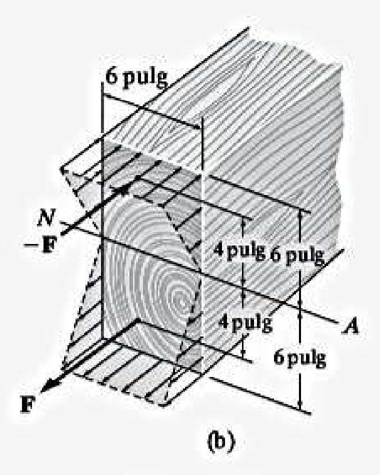


Figura 6-25

SOLUCIÓN

Parte (a). La fórmula de la flexión es $\sigma_{\text{máx}} = Mc/I$. Con base en la figura 6-25*a*, $c = 6$ pulg y $\sigma_{\text{máx}} = 2$ ksi. El eje neutro se define como la línea *NA*, ya que el esfuerzo es cero a lo largo de esta línea. Como la sección transversal tiene una forma rectangular, el momento de inercia del área respecto a *NA* se determina a partir de la fórmula para un rectángulo dada en la página final de este libro, es decir,

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(6\text{ pulg})(12\text{ pulg})^3 = 864\text{ pulg}^4$$

Por lo tanto,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \qquad 2\text{ kip/pulg}^2 = \frac{M(6\text{ pulg})}{864\text{ pulg}^4}$$

$$M = 288\text{ kip}\cdot\text{pulg} = 24\text{ kip}\cdot\text{pie} \qquad \textit{Resp.}$$

Parte (b). La fuerza resultante para cada una de las dos distribuciones *triangulares* de esfuerzo mostradas en la figura 6-25*b* es gráficamente equivalente al *volumen* contenido dentro de cada distribución de esfuerzos. Por lo tanto, cada volumen es

$$F = \frac{1}{2}(6\text{ pulg})(2\text{ kip/pulg}^2)(6\text{ pulg}) = 36\text{ kip}$$

Estas fuerzas, que forman un par, actúan en la misma dirección que los esfuerzos incluidos en cada distribución, figura 6-25*b*. Además, actúan a través del *centroide* de cada volumen, es decir, a $\frac{2}{3}(6\text{ pulg}) = 4$ pulg del eje neutro de la viga. Por consiguiente, la distancia entre ellos es de 8 pulg como se muestra en la figura. En consecuencia, el momento del par es

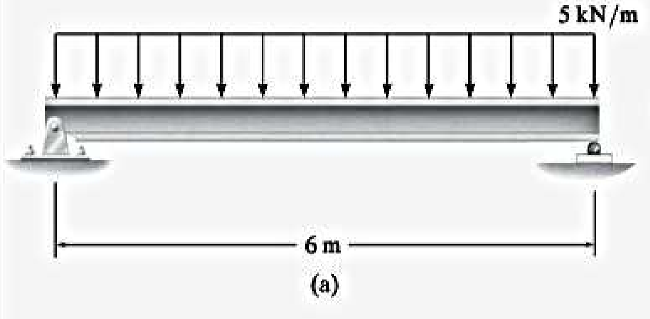
$$M = 36\text{ kip}\,(8\text{ pulg}) = 288\text{ kip}\cdot\text{pulg} = 24\text{ kip}\cdot\text{pie} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Este resultado también puede obtenerse al elegir una franja horizontal de área $dA = (6\text{ pulg})\,dy$ y al integrarla aplicando la ecuación 6-11.

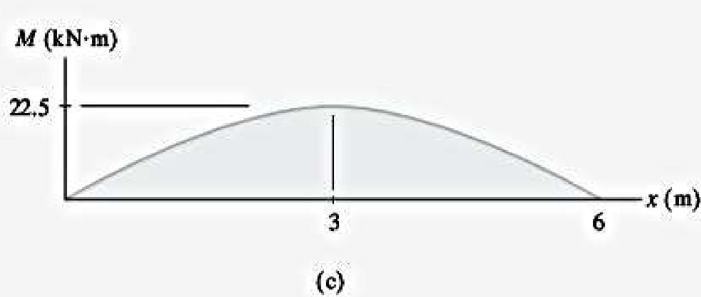
6

EJEMPLO 6.12

La viga simplemente apoyada de la figura 6-26*a* tiene la sección transversal que se muestra en la figura 6-26*b*. Determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto y dibuje la distribución del esfuerzo sobre la sección transversal en esta ubicación.



(a)



(c)

(b)

(d)

Figura 6-26

SOLUCIÓN

Momento interno máximo. El momento interno máximo en la viga, $M = 22.5$ kN · m, se produce en el centro.

Propiedad de la sección. Por razones de simetría, el eje neutro pasa por el centroide C en la altura media de la viga, figura 6-26*b*. El área se subdivide en las tres partes mostradas y el momento de inercia de cada porción se calcula respecto al eje neutro y usando el teorema de los ejes paralelos. (Vea la ecuación A-5 del apéndice A.) Si se elige trabajar en metros, se tiene

$$I = \Sigma(\bar{I} + Ad^2)$$

$$= 2\left[\frac{1}{12}(0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.160 \text{ m})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(0.020 \text{ m})(0.300 \text{ m})^3\right]$$

$$= 301.3(10^{-6}) \text{ m}^4$$

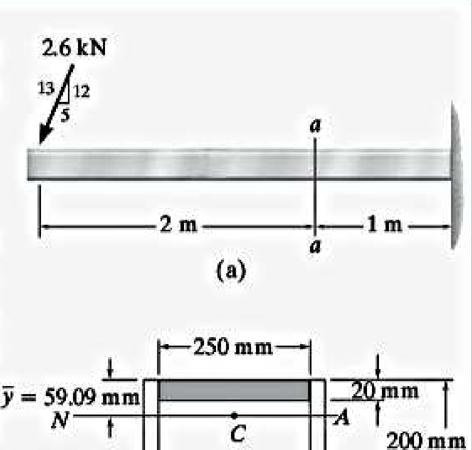
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{\text{máx}} = \frac{22.5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.170 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 12.7 \text{ MPa} \quad \textit{Resp.}$$

En la figura 6-26*d* se muestra una vista tridimensional de la distribución de esfuerzos. Observe cómo el esfuerzo en los puntos B y D de la sección transversal desarrolla una fuerza que contribuye con un momento respecto al eje neutro, el cual tiene la misma dirección que **M**. De manera específica, en el punto B, $y_B = 150$ mm, y así

$$\sigma_B = -\frac{My_B}{I}; \qquad \sigma_B = -\frac{22.5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.150 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = -11.2 \text{ MPa}$$

EJEMPLO 6.13

La viga mostrada en la figura 6-27*a* tiene una sección transversal en forma de canal, figura 6-27*b*. Determine el esfuerzo flexionante máximo que se produce en la viga en la sección *a-a*.



SOLUCIÓN

Momento interno. Aquí no es necesario determinar las reacciones de la viga en los apoyos. En vez de esto, mediante el método de las secciones, puede usarse el segmento a la izquierda de la sección *a-a*, figura 6-27*c*. En particular, debe tenerse en cuenta que la fuerza axial interna resultante **N** pasa a través del centroide de la sección transversal. Además, se observa que *el momento interno resultante debe calcularse con respecto al eje neutro de la viga* en la sección *a-a*.

Para encontrar la ubicación del eje neutro, el área de la sección transversal se subdivide en tres partes componentes como se muestra en la figura 6-27*b*. Con base en la ecuación A-2 del apéndice A, se tiene

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[0.100 \text{ m}](0.200 \text{ m})(0.015 \text{ m}) + [0.010 \text{ m}](0.02 \text{ m})(0.250 \text{ m})}{2(0.200 \text{ m})(0.015 \text{ m}) + 0.020 \text{ m}(0.250 \text{ m})}$$

$$= 0.05909 \text{ m} = 59.09 \text{ mm}$$

Esta dimensión se muestra en la figura 6-27*c*.

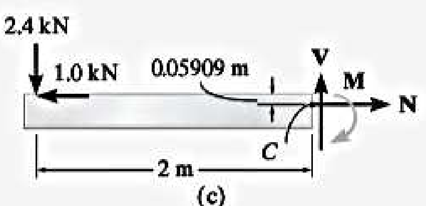


Figura 6-27

Al aplicar la ecuación de equilibrio de los momentos con respecto al eje neutro, se tiene

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \quad 2.4 \text{ kN}(2 \text{ m}) + 1.0 \text{ kN}(0.05909 \text{ m}) - M = 0$$

$$M = 4.859 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Propiedad de la sección. El momento de inercia respecto al eje neutro se determina utilizando el teorema de los ejes paralelos aplicado a cada una de las tres partes que componen el área de la sección transversal. Si se trabaja en metros, resulta

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.250 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.250 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.05909 \text{ m} - 0.010 \text{ m})^2\right]$$

$$+ 2\left[\frac{1}{12}(0.015 \text{ m})(0.200 \text{ m})^3 + (0.015 \text{ m})(0.200 \text{ m})(0.100 \text{ m} - 0.05909 \text{ m})^2\right]$$

$$= 42.26(10^{-6}) \text{ m}^4$$

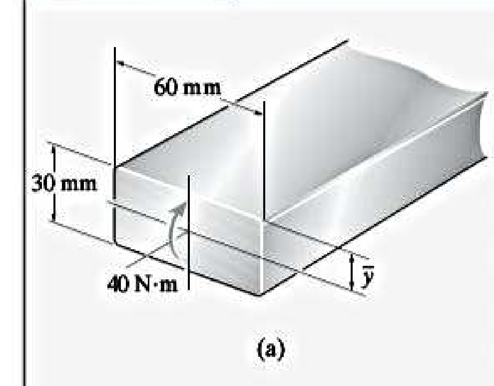
Esfuerzo flexionante máximo. El esfuerzo flexionante máximo ocurre en los puntos más alejados del eje neutro. Esto es en la parte inferior de la viga, $c = 0.200 \text{ m} - 0.05909 \text{ m} = 0.1409 \text{ m}$. Por lo tanto,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{4.859(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}(0.1409 \text{ m})}{42.26(10^{-6}) \text{ m}^4} = 16.2 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

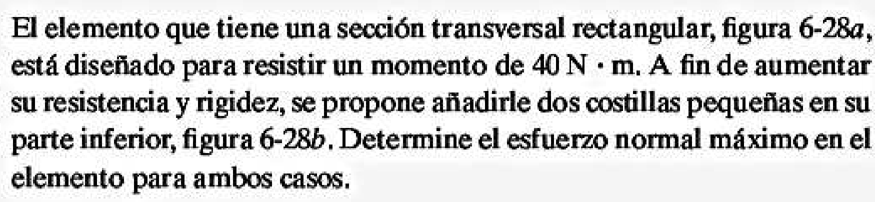
Demuestre que en la parte superior de la viga el esfuerzo flexionante es $\sigma' = 6.79$ MPa.

NOTA: La fuerza normal $N = 1$ kN y la fuerza cortante $V = 2.4$ kN también contribuirán con esfuerzo adicional sobre la sección transversal. La superposición de todos estos efectos se analizará en el capítulo 8.

EJEMPLO 6.14



(a)


El elemento que tiene una sección transversal rectangular, figura 6-28*a*, está diseñado para resistir un momento de 40 N · m. A fin de aumentar su resistencia y rigidez, se propone añadirle dos costillas pequeñas en su parte inferior, figura 6-28*b*. Determine el esfuerzo normal máximo en el elemento para ambos casos.

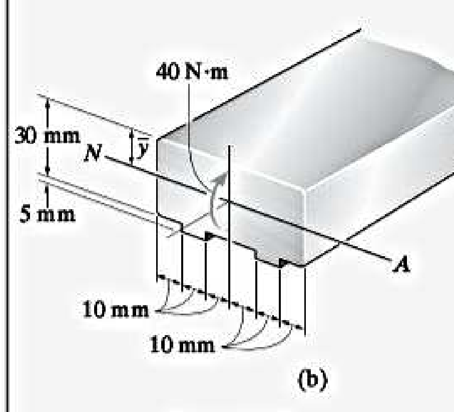
SOLUCIÓN

Sin costillas. Es evidente que el eje neutro está en el centro de la sección transversal, figura 6-28*a*, por lo que $\bar{y} = c = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m}$. Así,

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 = 0.135(10^{-6}) \text{ m}^4$$

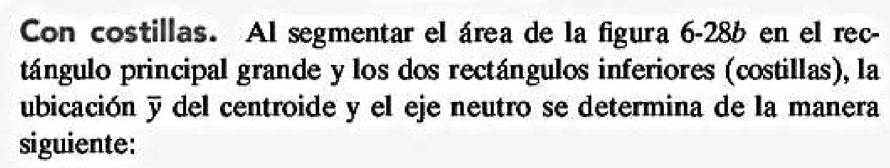
Por lo tanto, el esfuerzo normal máximo es de

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ N}\cdot\text{m})(0.015 \text{ m})}{0.135(10^{-6}) \text{ m}^4} = 4.44 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Figura 6-28


Con costillas. Al segmentar el área de la figura 6-28*b* en el rectángulo principal grande y los dos rectángulos inferiores (costillas), la ubicación $\bar{y}$ del centroide y el eje neutro se determina de la manera siguiente:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{[0.015 \text{ m}](0.030 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2[0.0325 \text{ m}](0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}{(0.03 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2(0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}$$

$$= 0.01592 \text{ m}$$

Este valor no representa a c. En vez de eso,

$$c = 0.035 \text{ m} - 0.01592 \text{ m} = 0.01908 \text{ m}$$

Con base en el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia respecto al eje neutro es

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 + (0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})(0.01592 \text{ m} - 0.015 \text{ m})^2\right]$$

$$+ 2\left[\frac{1}{12}(0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})^3 + (0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})(0.0325 \text{ m} - 0.01592 \text{ m})^2\right]$$

$$= 0.1642(10^{-6}) \text{ m}^4$$

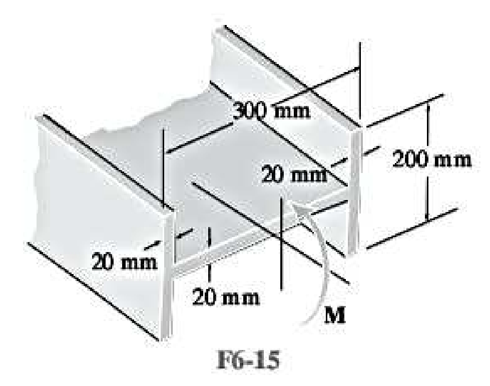
Por lo tanto, el esfuerzo normal máximo es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{40 \text{ N}\cdot\text{m}(0.01908 \text{ m})}{0.1642(10^{-6}) \text{ m}^4} = 4.65 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Este sorprendente resultado indica que la adición de las costillas a la sección transversal *incrementará* el esfuerzo normal en lugar de disminuirlo, por tal razón las costillas deben omitirse.

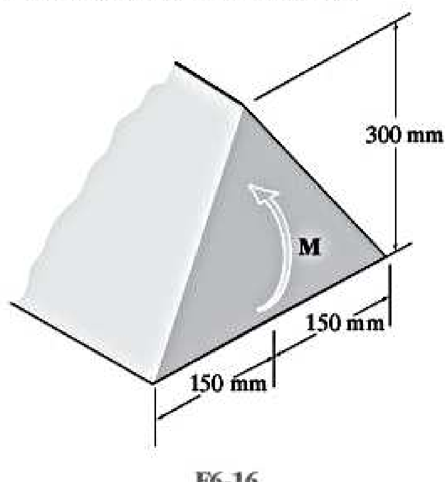
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F6-15. Si la viga está sometida a un momento flexionante de $M = 20$ kN · m, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga.



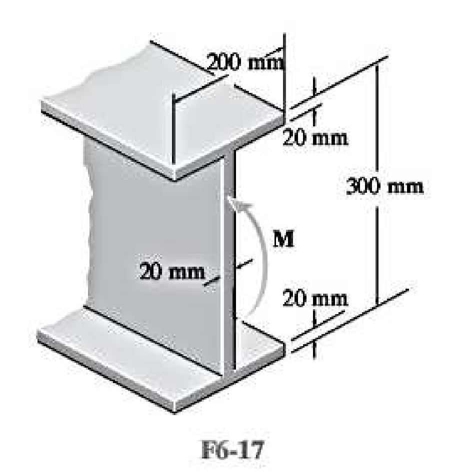
F6-15

F6-16. Si la viga está sometida a un momento flexionante de $M = 50$ kN · m, dibuje la distribución del esfuerzo flexionante sobre la sección transversal de la viga.



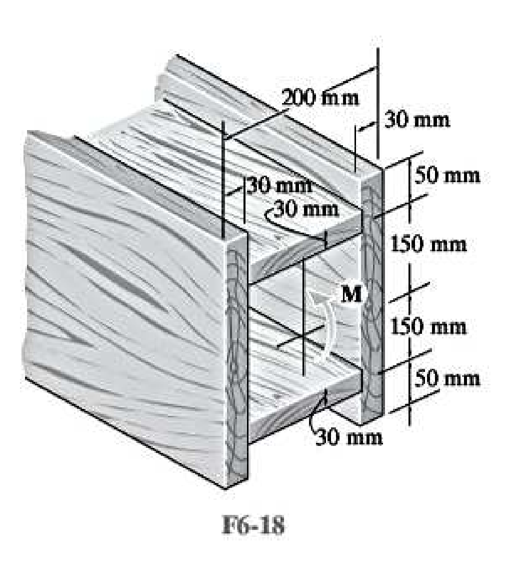
F6-16

F6-17. Si la viga está sometida a un momento flexionante de $M = 50$ kN · m, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga.



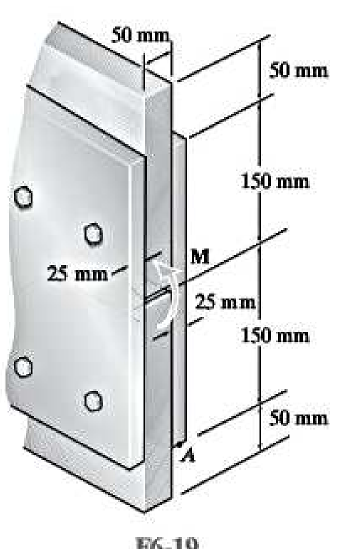
F6-17

F6-18. Si la viga está sometida a un momento flexionante de $M = 10$ kN · m, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga.



F6-18

F6-19. Si la viga está sometida a un momento flexionante de $M = 5$ kN · m, determine el esfuerzo flexionante desarrollado en el punto A.

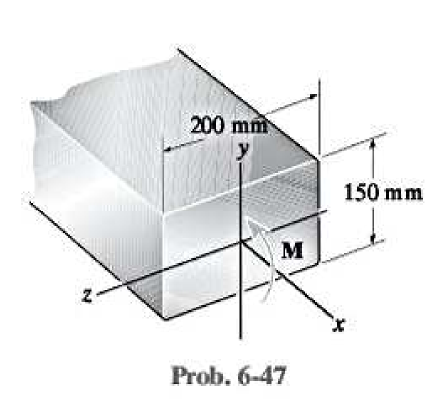


F6-19

6

PROBLEMAS

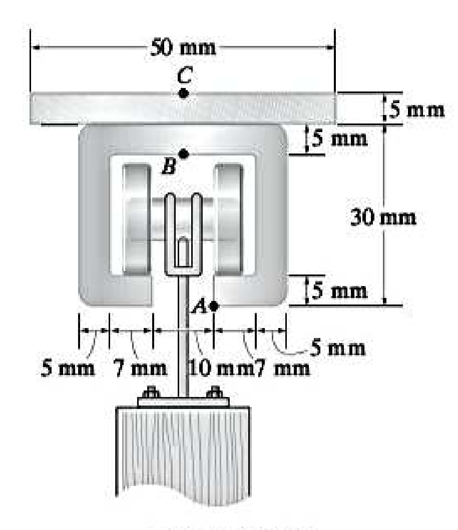
6-47. Un elemento que tiene las dimensiones mostradas en la figura se usa para resistir un momento flexionante interno de $M = 90$ kN · m. Determine el esfuerzo máximo en el elemento si el momento se aplica (a) alrededor del eje z (como en la figura), (b) alrededor del eje y. Dibuje la distribución de esfuerzos para cada caso.



Prob. 6-47

6-50. El perfil en canal mostrado se usa como riel de guía para una carrucha. Si el momento máximo en el perfil es $M = 30$ N · m, determine el esfuerzo flexionante en los puntos A, B y C.

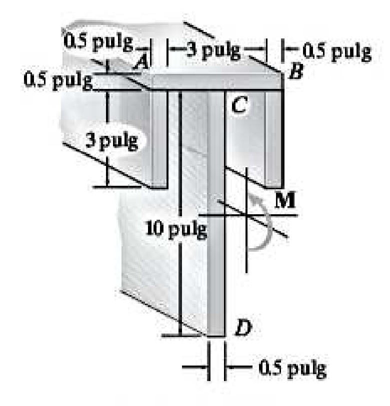
6-51. El perfil en canal mostrado se usa como riel de guía para una carrucha. Si el esfuerzo flexionante permisible para el material es $\sigma_{perm} = 175$ MPa, determine el momento flexionante máximo que resistirá el perfil.



Probs. 6-50/51

***6-48.** Determine el momento M que producirá un esfuerzo máximo de 10 ksi en la sección transversal.

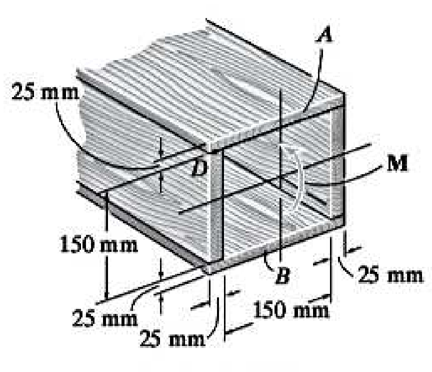
•6-49. Determine los esfuerzos flexionantes máximos de compresión y de tensión en la viga si ésta se somete a un momento de $M = 4$ kip · pie.



Probs. 6-48/49

***6-52.** La viga está sometida a un momento **M**. Determine el porcentaje de este momento que es resistido por los esfuerzos que actúan sobre las tablas superior e inferior, A y B, de la viga.

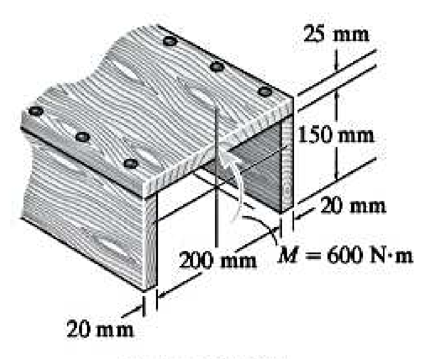
•6-53. Determine el momento **M** que debe aplicarse a la viga a fin de crear un esfuerzo de compresión en el punto D de $\sigma_D = 30$ MPa. Además, dibuje la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal y calcule el esfuerzo máximo desarrollado en la viga.



Probs. 6-52/53

6-54. La viga está fabricada con tres tablones clavados entre sí, como se muestra en la figura. Si el momento que actúa sobre la sección transversal es $M = 600$ N · m, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga. Dibuje una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.

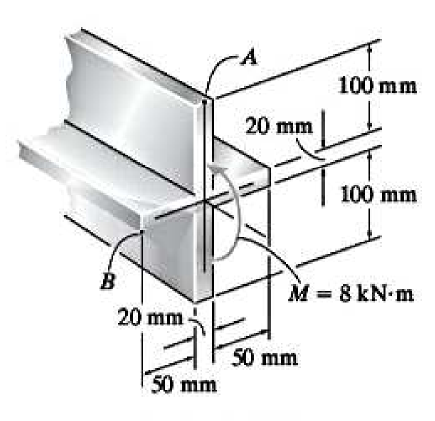
6-55. La viga está fabricada con tres tablones clavados entre sí, como se muestra en la figura. Si el momento que actúa sobre la sección transversal es $M = 600$ N · m, determine la fuerza resultante que produce el esfuerzo flexionante en el tablón superior.



Probs. 6-54/55

*6-56. El puntal de aluminio tiene una sección transversal en forma de cruz. Si se somete al momento $M = 8$ kN · m, determine el esfuerzo flexionante que actúa en los puntos A y B, además muestre los resultados que actúan sobre los elementos de volumen ubicados en estos puntos.

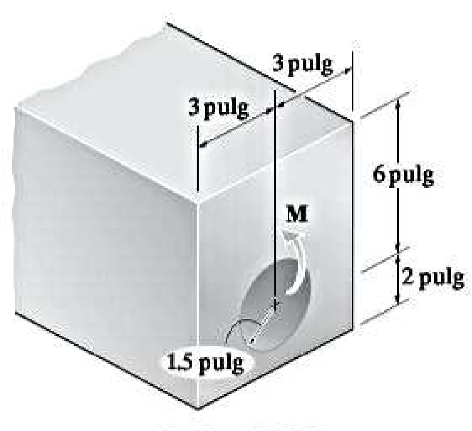
•6-57. El puntal de aluminio tiene una sección transversal en forma de cruz. Si se somete al momento $M = 8$ kN · m, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga, asimismo dibuje una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre toda el área de la sección transversal.



Probs. 6-56/57

6-58. Si la viga está sometida a un momento interno $M =$ 100 kip · pie, determine el esfuerzo flexionante máximo de tensión y de compresión en la viga.

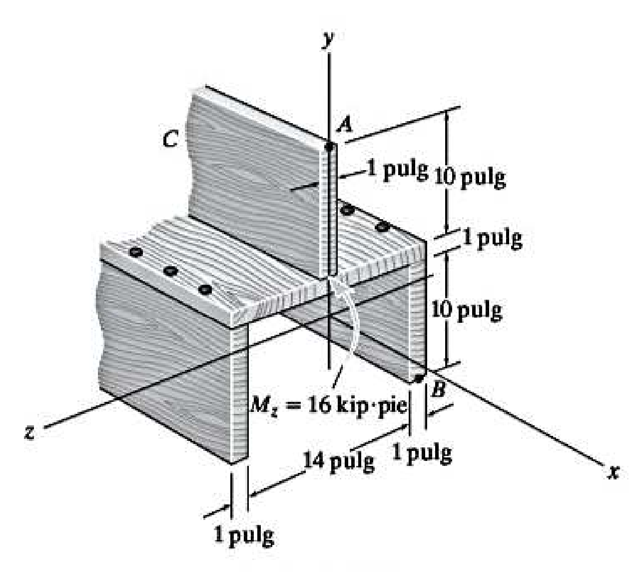
6-59. Si la viga está fabricada de un material con un esfuerzo permisible de tensión y de compresión, $(\sigma_{perm})_t = 24$ ksi y $(\sigma_{perm})_c = 22$ ksi, respectivamente, determine el momento interno máximo permisible **M** que puede aplicarse a la viga.



Probs. 6-58/59

*6-60. La viga está construida a partir de cuatro tablones como se muestra en la figura. Si se somete a un momento de $M_z = 16$ kip · pie, determine el esfuerzo en los puntos A y B. Dibuje una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo.

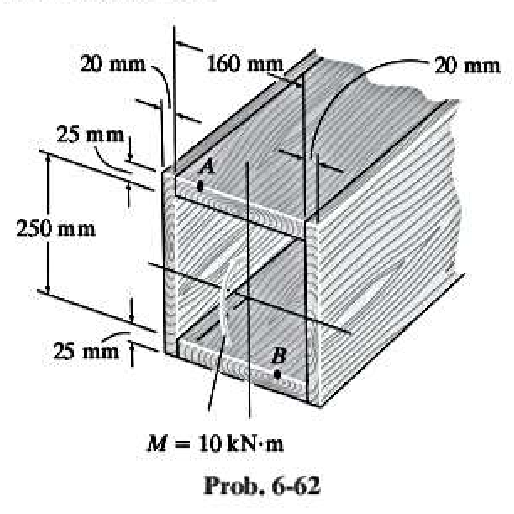
•6-61. La viga está construida a partir de cuatro tablones como se muestra en la figura. Si se somete a un momento de $M_z = 16$ kip · pie, determine la fuerza resultante que produce el esfuerzo sobre el tablón superior C.



Probs. 6-60/61

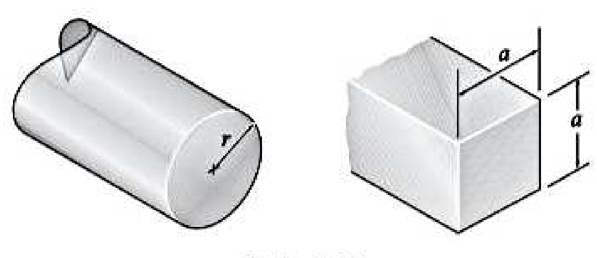
6

6-62. Una viga de caja está construida a partir de cuatro piezas de madera pegadas como se muestra en la figura. Si el momento que actúa sobre la sección transversal es de 10 kN · m, determine el esfuerzo en los puntos A y B, y muestre los resultados que actúan sobre los elementos de volumen ubicados en estos puntos.



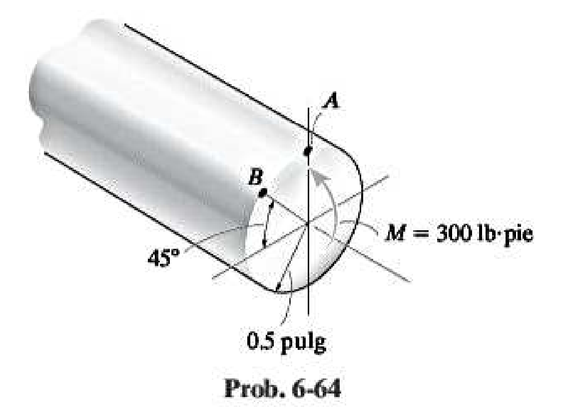
Prob. 6-62

6-63. Determine la dimensión a de una viga con sección transversal cuadrada en términos del radio r de una viga con sección transversal circular si ambas vigas están sometidas al mismo momento interno, el cual resulta en el mismo esfuerzo flexionante máximo.



Prob. 6-63

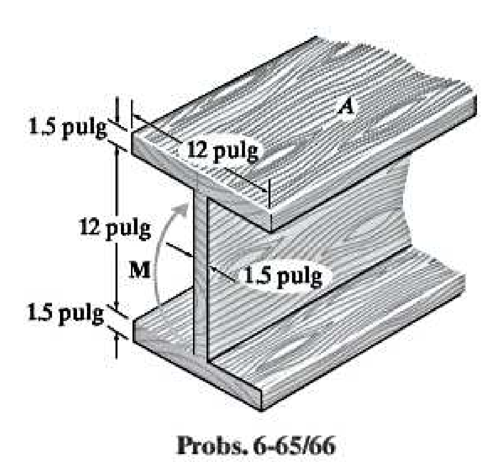
***6-64.** La varilla de acero tiene un diámetro de 1 pulg y está sometida a un momento interno de $M = 300$ lb · pie. Determine el esfuerzo creado en los puntos A y B. Además, dibuje una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.



Prob. 6-64

•6-65. Si el momento que actúa sobre la sección transversal de la viga es $M = 4$ kip · pie, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga. Dibuje una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.

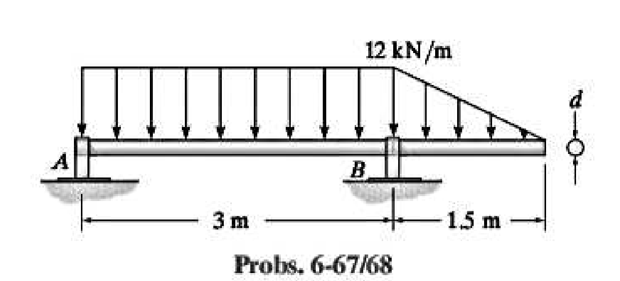
6-66. Si $M = 4$ kip · pie, determine la fuerza resultante que produce el esfuerzo flexionante sobre el tablón superior A de la viga.



Probs. 6-65/66

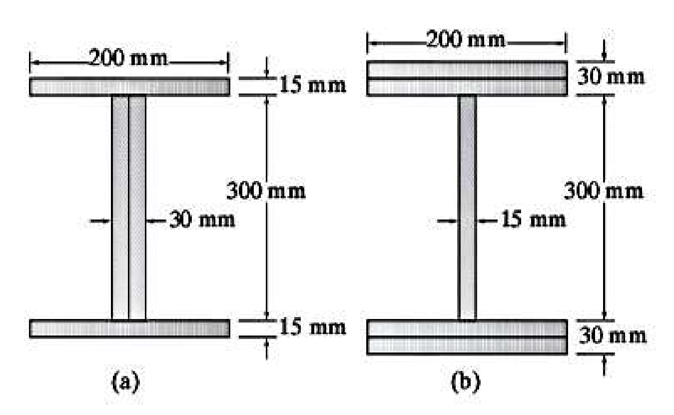
6-67. La barra se sostiene mediante chumaceras lisas en A y B, las cuales sólo ejercen reacciones verticales sobre el eje. Si $d = 90$ mm, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga, y dibuje la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.

***6-68.** La barra se sostiene mediante chumaceras lisas en A y B, las cuales sólo ejercen reacciones verticales sobre el eje. Determine su diámetro d más pequeño si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 180$ MPa.



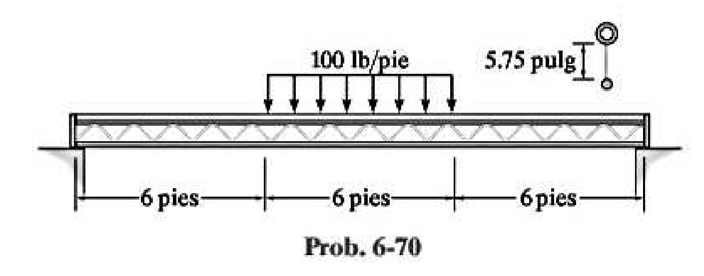
Probs. 6-67/68

•6-69. Se deben considerar dos diseños para una viga. Determine cuál soportará un momento de $M = 150$ kN · m con el menor esfuerzo flexionante. ¿Cuál es ese esfuerzo?



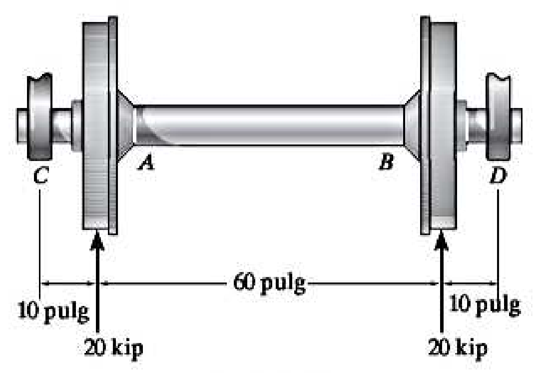
Prob. 6-69

6-70. La armadura simplemente apoyada está sometida a una carga distribuida central. No tome en cuenta el efecto de los elementos en diagonal y determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la armadura. El elemento superior es un tubo con un diámetro exterior de 1 pulg y grosor de $\frac{3}{16}$ de pulg; el elemento inferior es una barra sólida con un diámetro de $\frac{1}{2}$ pulg.



Prob. 6-70

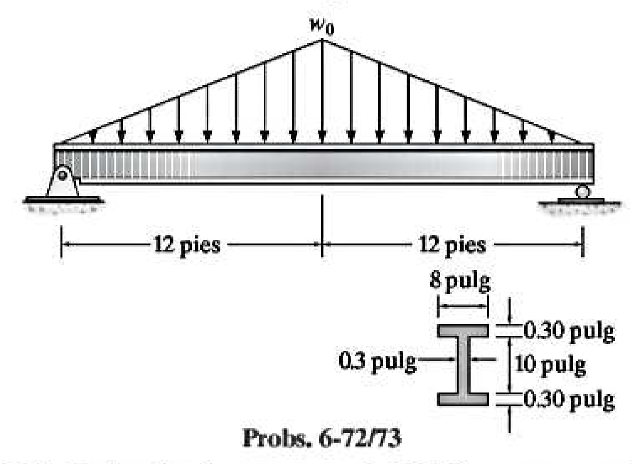
6-71. El eje del carro de ferrocarril está sometido a cargas sobre las ruedas de 20 kip. Si se sostiene mediante dos chumaceras en C y D, determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en el centro del eje, cuando el diámetro es de 5.5 pulg.



Prob. 6-71

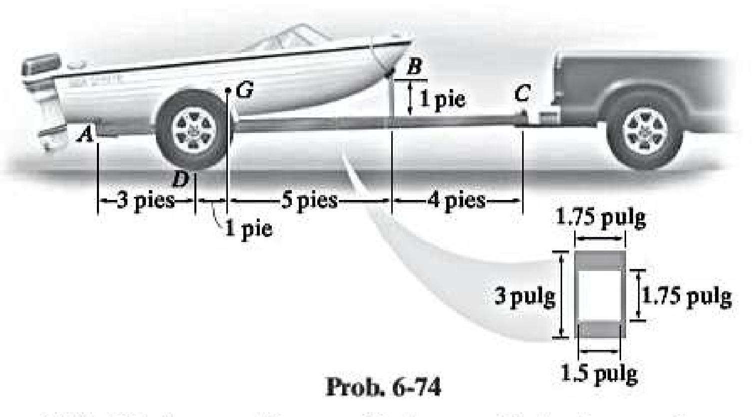
*6-72. La viga de acero tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la mayor intensidad de la carga distribuida w_0 que puede soportar la viga de modo que el esfuerzo flexionante máximo no sea superior a $\sigma_{máx} = 22$ ksi.

•6-73. La viga de acero tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si $w_0 = 0.5$ kip/pie, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga.



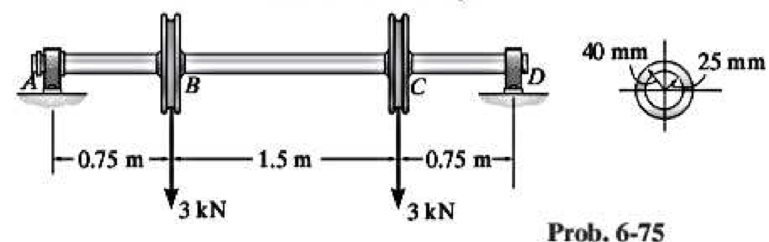
Probs. 6-72/73

6-74. La lancha tiene un peso de 2300 lb y un centro de gravedad en G. Si descansa sobre el remolque en el contacto liso A y puede considerarse articulada en B, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto desarrollado en el puntal principal del remolque. Considere que el puntal es una viga de caja, que tiene las dimensiones indicadas y se encuentra articulada en C.



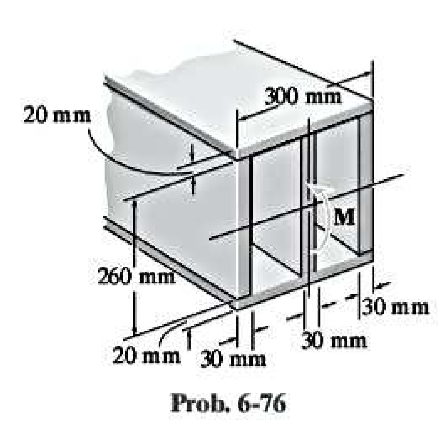
Prob. 6-74

6-75. El eje se sostiene mediante un cojinete de empuje liso en A y una chumacera lisa en D. Si el eje tiene la sección transversal mostrada en la figura, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en el eje.



Prob. 6-75

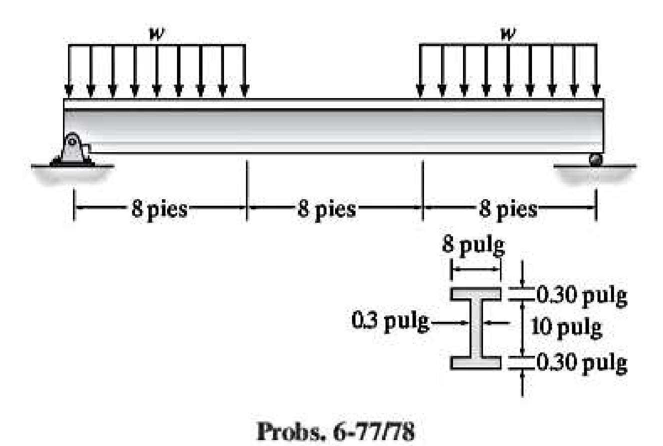
*6-76. Determine el momento **M** que debe aplicarse a la viga con el fin de crear un esfuerzo máximo de 80 MPa. Además dibuje la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.



Prob. 6-76

•6-77. La viga de acero tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la mayor intensidad de la carga distribuida w que puede soportar la viga de modo que el esfuerzo flexionante no exceda $\sigma_{máx} = 22$ ksi.

6-78. La viga de acero tiene la sección transversal mostrada. Si $w = 5$ kip/pie, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.



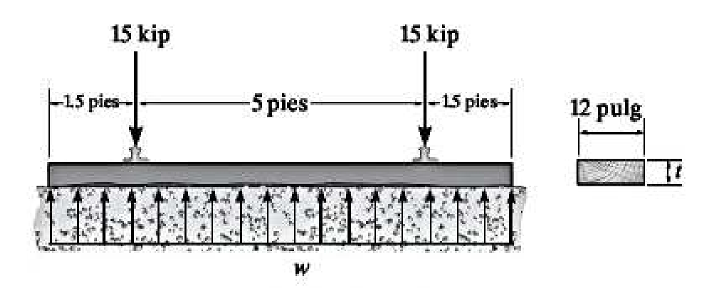
Probs. 6-77/78

6-79. Si la viga ACB del problema 6-9 tiene una sección transversal cuadrada, de 6 × 6 pulg, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.

*6-80. Si el aguilón ABC de la grúa del problema 6-3 tiene una sección transversal rectangular con base de 2.5 pulg, determine su altura requerida h con una precisión de $\frac{1}{4}$ de pulg si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 24$ ksi.

•6-81. Si la reacción del terreno sobre el durmiente de una vía puede suponerse uniformemente distribuida en toda su longitud como se muestra en la figura, determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en el durmiente. Éste tiene una sección transversal rectangular con grosor $t = 6$ pulg.

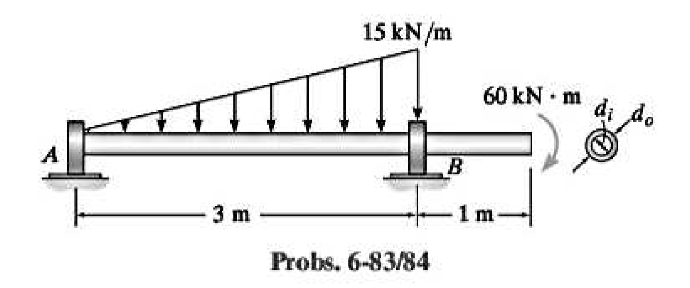
6-82. La reacción del terreno sobre el durmiente de una vía puede suponerse uniformemente distribuida en toda su longitud como se muestra en la figura. Si la madera tiene un esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 1.5$ ksi, determine el grosor mínimo requerido t del área de la sección transversal rectangular del durmiente con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg.



Probs. 6-81/82

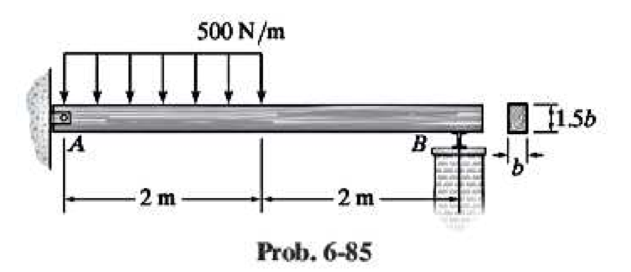
6-83. Determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en el eje tubular si $d_i = 160$ mm y $d_o = 200$ mm.

*6-84. El eje tubular debe tener una sección transversal de tal manera que su diámetro interior y diámetro exterior estén relacionados por $d_i = 0.8d_o$. Determine estas dimensiones requeridas si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 155$ MPa.



Probs. 6-83/84

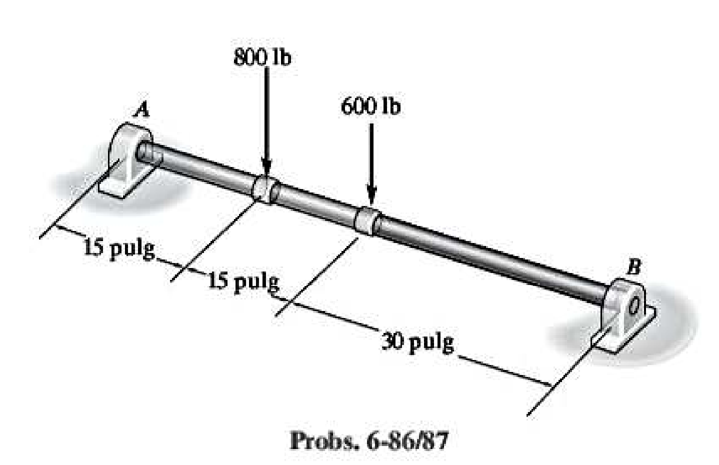
6-85. La viga de madera tiene una sección transversal rectangular en la proporción mostrada. Determine su dimensión requerida b si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 10$ MPa.



Prob. 6-85

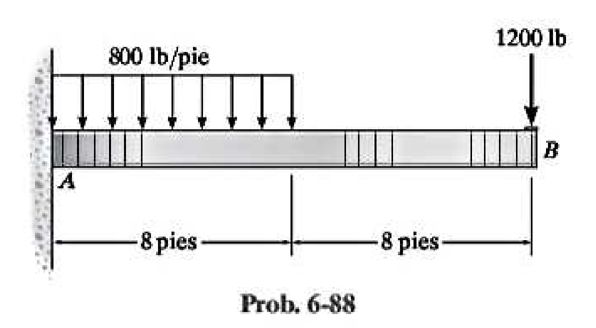
6-86. Determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto de un eje de 2 pulg de diámetro que se encuentra sometido a las fuerzas concentradas que se muestran en la figura. Las chumaceras en A y B sólo soportan fuerzas verticales.

6-87. Determine el diámetro más pequeño permisible para un eje que está sometido a las fuerzas concentradas que se muestran en la figura. Los cojinetes en A y B sólo soportan fuerzas verticales. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi.



Probs. 6-86/87

***6-88.** Si la viga tiene una sección transversal cuadrada de 9 pulg por lado, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.



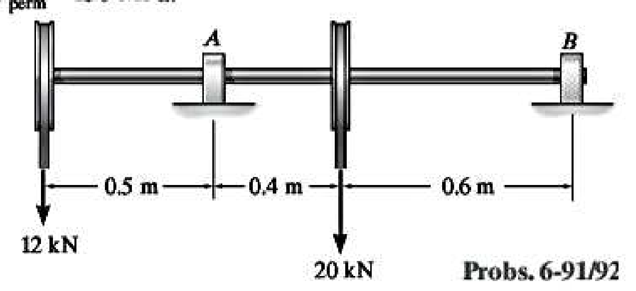
Prob. 6-88

•6-89. Si la viga compuesta del problema 6-42 tiene una sección transversal cuadrada, determine su dimensión a si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 150$ MPa.

6-90. Si la viga del problema 6-28 tiene una sección transversal rectangular con anchura b y altura h, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.

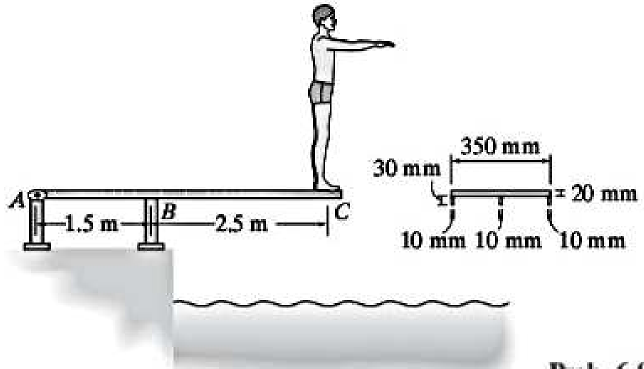
6-91. Determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en el eje de 80 mm de diámetro, el cual se encuentra sometido a las fuerzas concentradas, como se muestra en la figura. Las chumaceras en A y B sólo soportan fuerzas verticales.

***6-92.** Determine el menor diámetro permisible para el eje que está sometido a las fuerzas concentradas, como se muestra en la figura. Las chumaceras en A y B sólo soportan fuerzas verticales. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 150$ MPa.



Probs. 6-91/92

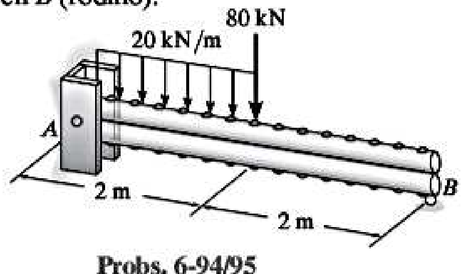
•6-93. El hombre tiene una masa de 78 kg y permanece inmóvil en el extremo del trampolín. Si éste tiene la sección transversal mostrada en la figura, determine el esfuerzo normal máximo desarrollado en el trampolín. El módulo de elasticidad del material es $E = 125$ GPa. Suponga que A es un pasador y B es un rodillo.



Prob. 6-93

6-94. Las dos barras de acero sólido están unidas entre sí en toda su longitud y soportan la carga mostrada en la figura. Suponga que el soporte en A es un pasador y en B es un rodillo. Determine el diámetro requerido d para cada una de las barras si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 130$ MPa.

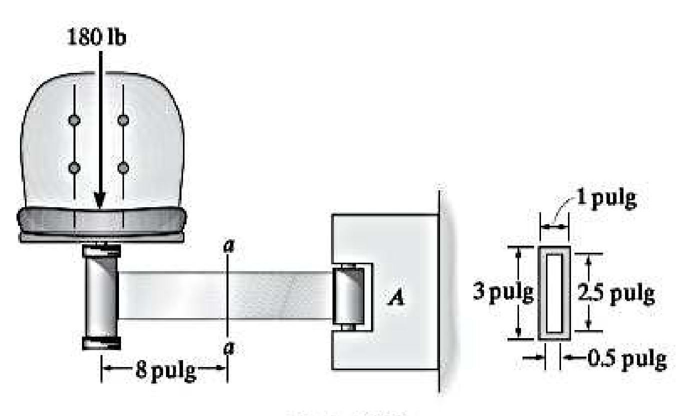
6-95. Resuelva el problema 6-94 si las barras se rotan 90° de modo que ambas descansen sobre los soportes en A (pasador) y en B (rodillo).



Probs. 6-94/95

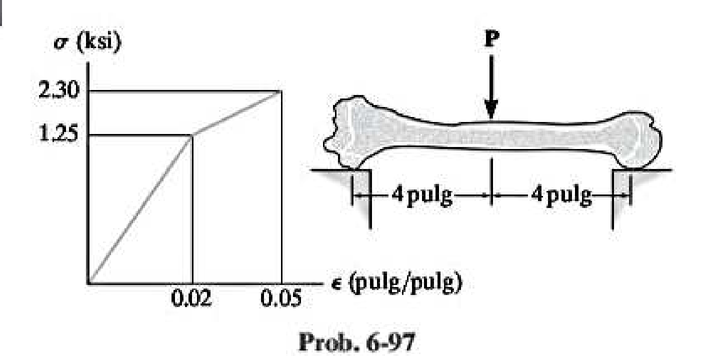
6

*6-96. La silla se sostiene mediante un brazo que está articulado de manera que gira alrededor del eje vertical en A. Si la carga en la silla es de 180 lb y el brazo es una sección de tubo hueco con las dimensiones mostradas en la figura, determine el esfuerzo flexionante máximo en la sección a-a.



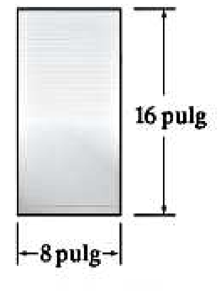
Prob. 6-96

•6-97. Una parte del fémur puede modelarse como un tubo con un diámetro interno de 0.375 pulg y un diámetro exterior de 1.25 pulg. Determine la máxima fuerza estática elástica P que puede aplicarse a su centro. Suponga que el hueso se apoya en sus extremos sobre rodillos. El diagrama σ-ϵ para la masa del hueso que se muestra en la figura, es el mismo en tensión y en compresión.



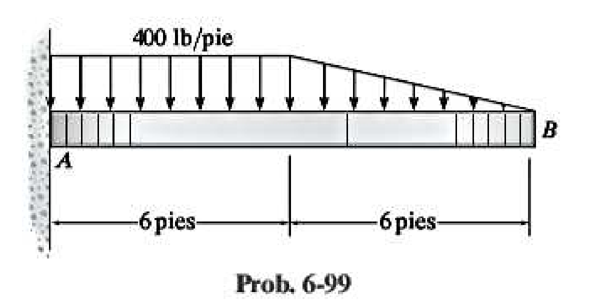
Prob. 6-97

6-98. Si la viga del problema 6-18 tiene una sección transversal rectangular con una anchura de 8 pulg y una altura de 16 pulg, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.



Prob. 6-98

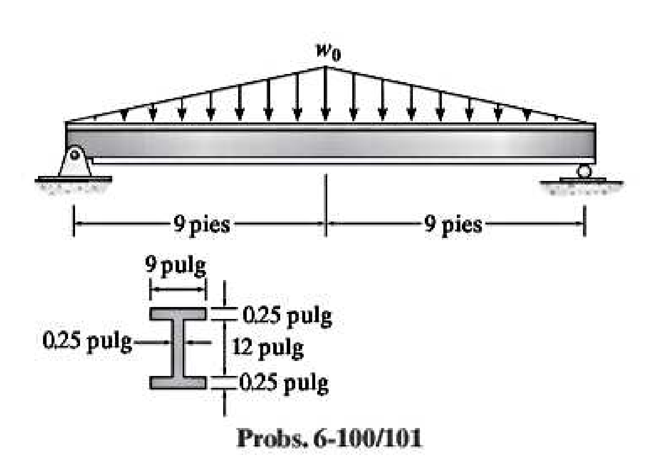
6-99. Si la viga tiene una sección cuadrada de 6 pulg en cada lado, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.



Prob. 6-99

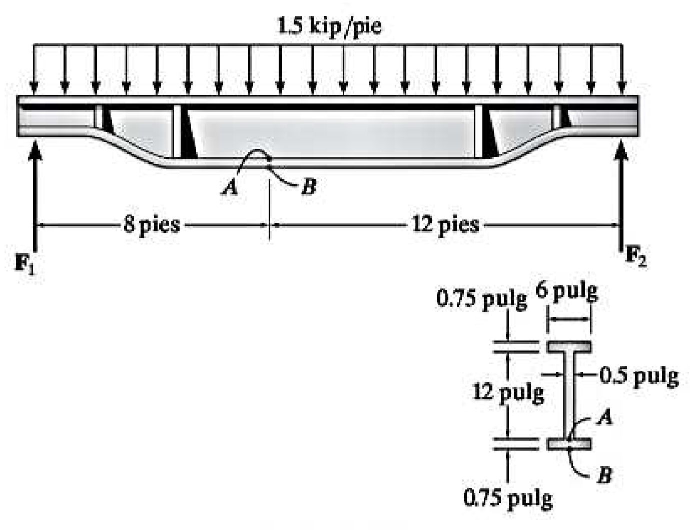
*6-100. La viga de acero tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la mayor intensidad de la carga distribuida w_0 que puede soportar la viga de manera que el esfuerzo flexionante máximo no sea superior a $\sigma_{perm} =$ 22 ksi.

•6-101. La viga de acero tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si $w_0 = 2$ kip/pie, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga.



Probs. 6-100/101

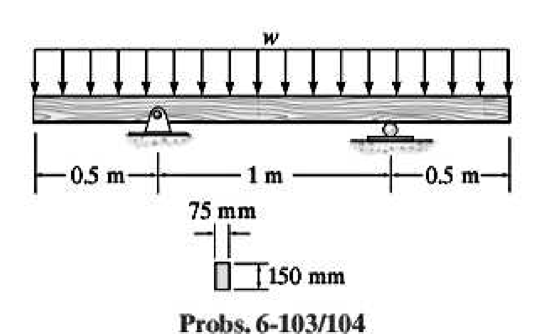
6-102. El bastidor o soporte principal en el chasis de un camión se somete a la carga uniforme distribuida mostrada. Determine el esfuerzo flexionante en los puntos A y B.



Prob. 6-102

6-103. Determine la mayor carga distribuida uniforme w que puede soportar la viga de manera que el esfuerzo flexionante no sea superior a $\sigma_{perm} = 5$ MPa.

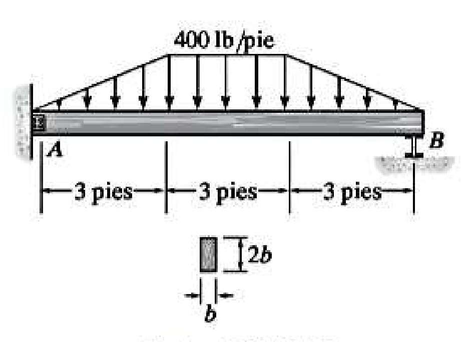
***6-104.** Si $w = 10$ kN/m, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga. Dibuje la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.



Probs. 6-103/104

•6-105. Si el esfuerzo flexionante permisible en la viga de madera es $\sigma_{perm} = 150$ psi, determine la dimensión requerida b en su sección transversal con una precisión de $\frac{1}{4}$ de pulg. Suponga que el soporte en A es un pasador y el soporte en B es un rodillo.

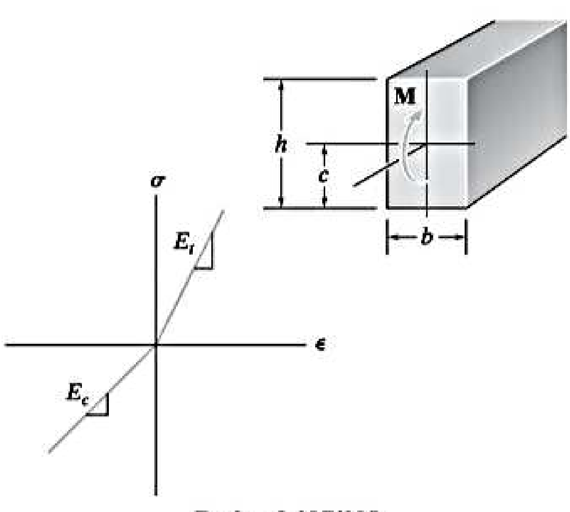
6-106. La viga de madera tiene una sección transversal rectangular con las proporciones mostradas. Si $b = 7.5$ pulg, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.



Probs. 6-105/106

6-107. Una viga está fabricada de un material que tiene un módulo de elasticidad en compresión diferente al módulo dado para la tensión. Determine la ubicación c del eje neutro y deduzca una expresión para el esfuerzo de tensión máximo en la viga que tiene las dimensiones mostradas en la figura y que se encuentra sometida al momento flexionante **M**.

***6-108.** La viga tiene una sección transversal rectangular y está sometida a un momento flexionante **M**. Si el material del que está hecha tiene un módulo de elasticidad diferente para la tensión y la compresión como se muestra en la figura, determine la ubicación c del eje neutro y el esfuerzo de compresión máximo en la viga.



Probs. 6-107/108

6.5 Flexión asimétrica

Al desarrollar la fórmula de la flexión se impuso la condición de que el área de la sección transversal fuese *simétrica* respecto a un eje perpendicular al eje neutro; además, el momento interno resultante **M** actúa a lo largo del eje neutro. Tal es el caso de las secciones "en T" o de canal que se muestran en la figura 6-29. Sin embargo, estas condiciones son innecesarias y en la presente sección se mostrará que la fórmula de la flexión también puede aplicarse a una viga con un área arbitraria en su sección transversal o a una viga con un momento resultante interno que actúa en cualquier dirección.

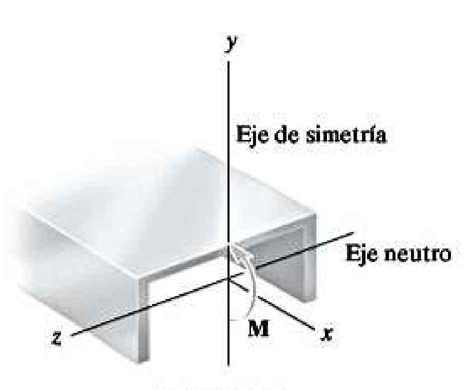


Figura 6-29

Momento aplicado alrededor del eje principal.

Considere que la sección transversal de la viga tiene una forma asimétrica como la mostrada en la figura 6-30*a*. Al igual que en la sección 6.4, el sistema de coordenadas derecho x, y, z se establecerá de manera que el origen se encuentre en el centroide C de la sección transversal, y el momento interno resultante **M** actúe a lo largo del eje $+z$. Se requiere que la distribución de esfuerzos que actúa sobre toda la superficie de la sección transversal tenga una fuerza resultante cero, el momento interno resultante alrededor del eje y es cero y el momento interno resultante respecto al eje z es igual a **M**.* Estas tres condiciones pueden expresarse de manera matemática considerando la fuerza que actúa sobre el elemento diferencial dA ubicado en $(0, y, z)$, figura 6-30*a*. Esta fuerza es $dF = \sigma\, dA$, y por lo tanto se tiene

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad 0 = -\int_A \sigma\, dA \tag{6-14}$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad 0 = -\int_A z\sigma\, dA \tag{6-15}$$

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \qquad M = \int_A y\sigma\, dA \tag{6-16}$$

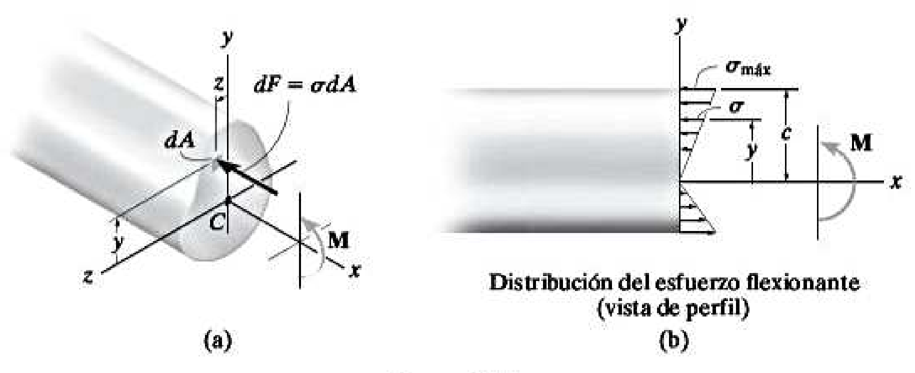


Figura 6-30

*La condición de que los momentos respecto al eje y deben ser iguales a cero no se consideró en la sección 6.4, ya que la distribución del esfuerzo flexionante era *simétrica* con respecto al eje y, y una de las distribuciones de esfuerzo produce automáticamente un momento cero con respecto al eje y. Vea la figura 6-24*c*.

Como se muestra en la sección 6.4, la ecuación 6-14 se cumple ya que el eje z pasa por el *centroide* del área. Además, como el eje z representa el *eje neutro* de la sección transversal, el esfuerzo normal varía linealmente desde cero en el eje neutro hasta un máximo en $y = c$, figura 6-30*b*. De ahí que la distribución del esfuerzo está definida por $\sigma = -(y/c)\sigma_{\text{máx}}$. Cuando se sustituye esta expresión en la ecuación 6-16 y se integra, resulta la fórmula de la flexión $\sigma_{\text{máx}} = Mc/I$. Al sustituirla en la ecuación 6-15, se obtiene

$$0 = \frac{-\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A yz \, dA$$

la cual requiere

$$\int_A yz \, dA = 0$$

Esta integral se llama el ***producto de inercia*** del área. Como se indica en el apéndice A, en efecto será igual a cero siempre que los ejes y y z se elijan como los ***ejes de inercia principales*** del área. Para un área de forma arbitraria, la orientación de los ejes principales siempre se puede determinar usando las ecuaciones de transformación de inercia o mediante el círculo de inercia de Mohr, como se explica en el apéndice A, secciones A.4 y A.5. Sin embargo, si el área tiene un eje de simetría, los ***ejes principales*** pueden determinarse fácilmente ***puesto que siempre estarán orientados a lo largo del eje de simetría y en forma perpendicular a éste***.

6

Por ejemplo, considere los elementos de la figura 6-31. En cada uno de estos casos, y y z deben definir los ejes principales de inercia de la sección transversal a fin de cumplir las ecuaciones de la 6-14 a la 6-16. En la figura 6-31*a* los ejes principales se encuentran por simetría, y en las figuras 6-31*b* y 6-31*c* su orientación se determina utilizando los métodos del apéndice A. Como **M** se aplica alrededor de uno de los ejes principales (eje z), la distribución del esfuerzo se determina a partir de la fórmula de la flexión, $\sigma = -My/I_z$, y se muestra para cada caso.

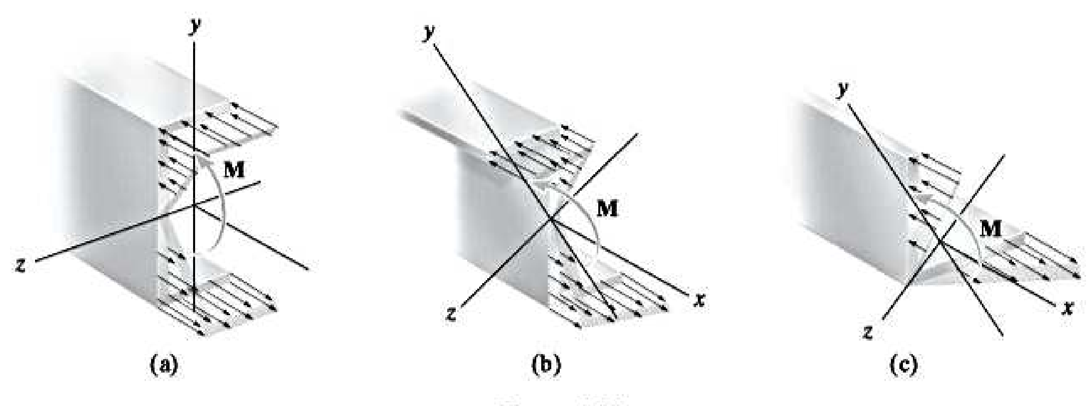
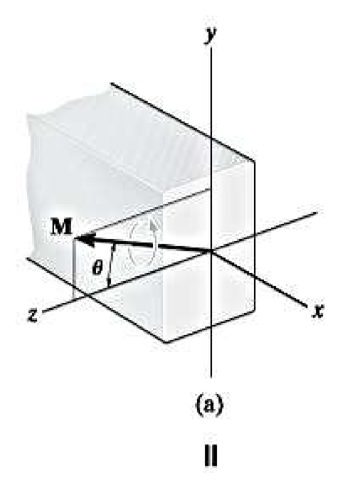
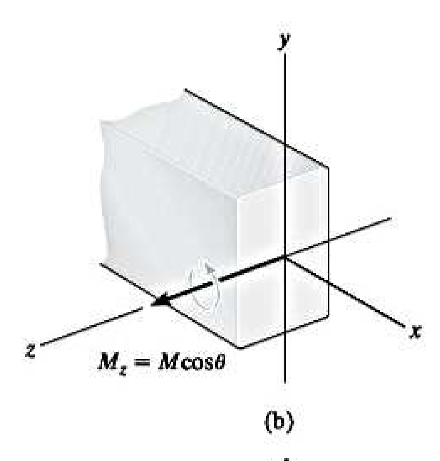


Figura 6-31



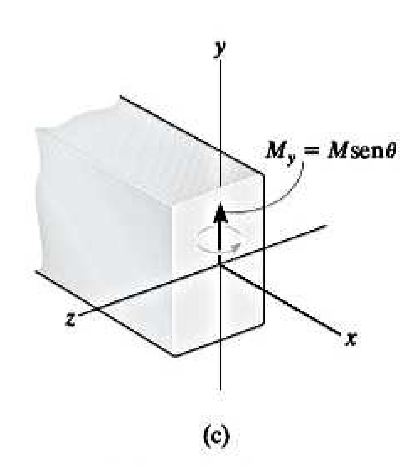
(a)

=



(b)

+



(c)

Figura 6-32

Momento aplicado arbitrariamente. En ocasiones un elemento puede cargarse de modo que **M** no actúe sobre uno de los ejes principales de la sección transversal. Cuando esto ocurre, el momento deberá primero descomponerse en sus componentes dirigidos a lo largo de los ejes principales, después puede usarse la fórmula de la flexión para determinar el esfuerzo normal causado por *cada* componente del momento. Por último, mediante el uso del principio de superposición, será posible determinar el esfuerzo normal resultante.

Para mostrar esto, considere que la viga tiene una sección transversal rectangular y está sometida al momento **M**, figura 6-32*a*. Aquí **M** forma un ángulo θ con el eje *principal* z. Se supondrá que θ es positivo cuando esté dirigido desde el eje $+z$ hacia el eje $+y$, como se muestra en la figura. Al descomponer a **M** en sus componentes a lo largo de los ejes z y y, se tiene $M_z = M\cos\theta$ y $M_y = M\,\text{sen}\,\theta$, como se muestra en las figuras 6-32*b* y 6-32*c*. Las distribuciones de esfuerzos normales que producen **M** y sus componentes $\mathbf{M}_z$ y $\mathbf{M}_y$ se muestran en las figuras 6-32*d*, 6-32*e* y 6-32*f*, donde se supone que $(\sigma_x)_{\text{máx}} > (\sigma'_x)_{\text{máx}}$. Por inspección, los esfuerzos máximos en tensión y compresión $[(\sigma_x)_{\text{máx}} + (\sigma'_x)_{\text{máx}}]$ se producen en dos esquinas opuestas de la sección transversal, figura 6-32*d*.

Al aplicar la fórmula de la flexión a cada componente del momento en las figuras 6-32*b* y 6-32*c*, y al sumar los resultados algebraicamente, entonces el esfuerzo normal resultante en cualquier punto de la sección transversal, figura 6-32*d*, es

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad (6\text{-}17)$$

En este caso,

σ = el esfuerzo normal en el punto

y, z = las coordenadas del punto medidas desde los ejes x, y, z, que tienen su origen en el centroide del área de la sección transversal y forman un sistema de coordenadas derecho. El eje x está dirigido hacia afuera de la sección transversal y los ejes y y z representan los ejes principales de los momentos de inercia máximo y mínimo, respectivamente

M_y, M_z = las componentes del momento interno resultante, dirigidas a lo largo de los ejes principales y y z. Éstas serán positivas si están dirigidas a lo largo de los ejes $+y$ y $+z$, en caso contrario serán negativas. O, dicho de otro modo, $M_y = M\,\text{sen}\,\theta$ y $M_z = M\cos\theta$, donde θ se mide en forma positiva desde el eje $+z$ hacia el eje $+y$

I_y, I_z = los *momentos principales de inercia* calculados respecto a los ejes y y z, respectivamente. Vea el apéndice A

Los ejes x, y, z forman un sistema derecho y cuando se aplica esta ecuación deben asignarse los signos algebraicos adecuados a las componentes del momento y a las coordenadas. Cuando este es el caso, el esfuerzo resultante será de *tensión* si es *positivo* y de *compresión* si es *negativo*.

Orientación del eje neutro. El ángulo α del eje neutro en la figura 6-32*d* puede determinarse al aplicar la ecuación 6-17 con $\sigma = 0$, ya que por definición no actúa esfuerzo normal sobre el eje neutro. Se tiene

$$y = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} z$$

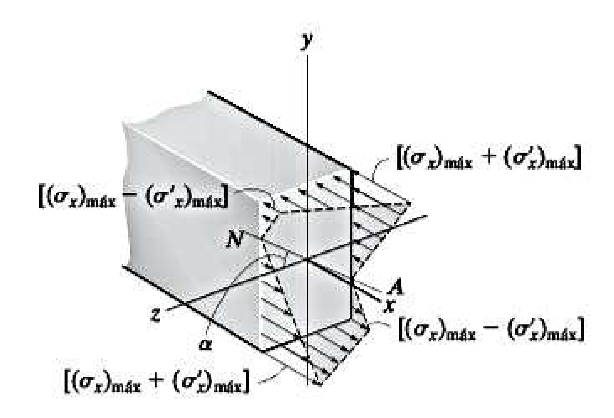
Como $M_z = M \cos\theta$ y $M_y = M \operatorname{sen}\theta$, entonces

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y}\tan\theta\right)z \qquad (6\text{-}18)$$

Esta ecuación define el eje neutro para la sección transversal. Como la pendiente de esta línea es $\tan\alpha = y/z$, entonces

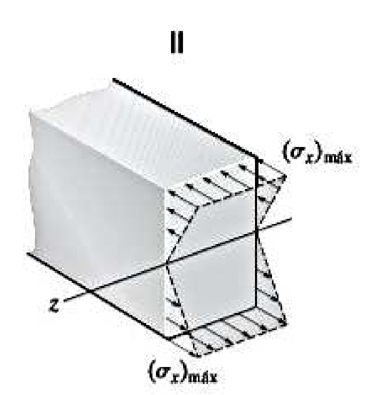
$$\boxed{\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta} \qquad (6\text{-}19)$$

Aquí puede observarse que, a menos que $I_z = I_y$, el ángulo θ que define la dirección del momento **M**, figura 6-32*a*, *no será igual* a α, el ángulo que define la inclinación del eje neutro, figura 6-32*d*.



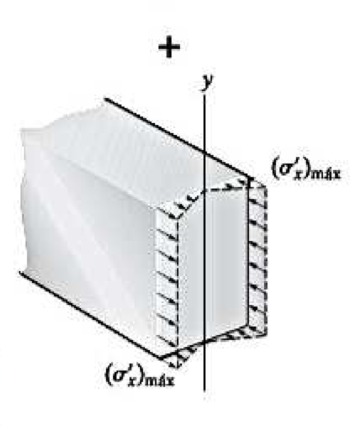
(d)

=



(e)

+



(f)

Figura 6-32 (cont.)

Puntos importantes

- La fórmula de la flexión puede aplicarse sólo cuando ésta se produce alrededor de los ejes que representan los *ejes principales de inercia* para la sección transversal. Estos ejes tienen su origen en el centroide y se orientan a lo largo y en forma perpendicular a un eje de simetría, si es que existe alguno.
- Si el momento se aplica sobre un eje arbitrario, entonces el momento debe descomponerse en sus componentes a lo largo de cada uno de los ejes principales, y el esfuerzo en un punto dado se determina mediante la superposición del esfuerzo causado por cada una de las componentes del momento.

6

EJEMPLO 6.15

La sección transversal rectangular que se muestra en la figura 6-33*a* está sometida a un momento flexionante de $M = 12$ kN · m. Determine el esfuerzo normal desarrollado en cada esquina de la sección, y especifique la orientación del eje neutro.

SOLUCIÓN

Componentes del momento interno. Por inspección se observa que los ejes y y z representan los ejes principales de inercia puesto que son ejes de simetría para la sección transversal. Para cumplir un requisito, se establece el *eje z* como el eje principal para el momento de inercia *máximo*. El momento se descompone en sus componentes y y z, donde

$$M_y = -\frac{4}{5}(12 \text{ kN}\cdot\text{m}) = -9.60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_z = \frac{3}{5}(12 \text{ kN}\cdot\text{m}) = 7.20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Propiedades de la sección. Los momentos de inercia respecto a los ejes y y z son

$$I_y = \frac{1}{12}(0.4 \text{ m})(0.2 \text{ m})^3 = 0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0.2 \text{ m})(0.4 \text{ m})^3 = 1.067(10^{-3}) \text{ m}^4$$

Esfuerzo flexionante. Por lo tanto,

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7.20(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}(0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}(-0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = 2.25 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_C = -\frac{7.20(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}(0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}(0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = -4.95 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_D = -\frac{7.20(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}(-0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}(0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = -2.25 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_E = -\frac{7.20(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}(-0.2 \text{ m})}{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4} + \frac{-9.60(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}(-0.1 \text{ m})}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} = 4.95 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

La distribución del esfuerzo normal resultante se ha trazado usando estos valores, figura 6-33*b*. Debido a la aplicación de la superposición, la distribución es lineal como se muestra en la figura.

6

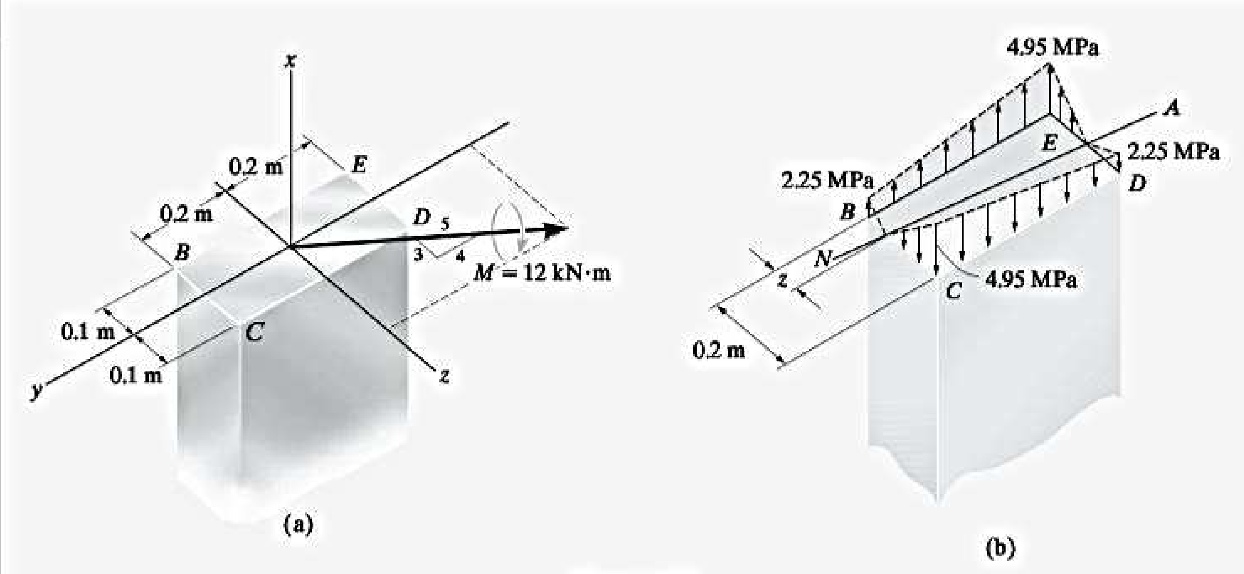


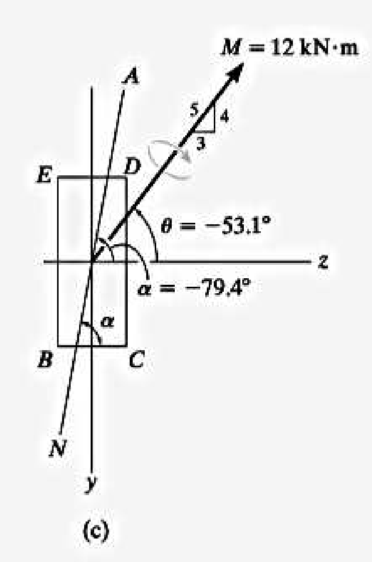
Figura 6-33

Orientación del eje neutro. La ubicación z del eje neutro (NA), figura 6-33b, puede establecerse mediante proporción. A lo largo del borde BC, se requiere

$$\frac{2.25 \text{ MPa}}{z} = \frac{4.95 \text{ MPa}}{(0.2 \text{ m} - z)}$$

$$0.450 - 2.25z = 4.95z$$

$$z = 0.0625 \text{ m}$$



De la misma manera, también es la distancia desde D hasta el eje neutro en la figura 6-33b.

Asimismo, también se puede establecer la orientación del eje neutro mediante la ecuación 6-19, que se utiliza para especificar el ángulo α que forma con el eje z o con el eje principal *máximo*. De acuerdo con la convención de signos adoptada, θ debe medirse desde el eje $+z$ hacia el eje $+y$. Por comparación, en la figura 6-33c, $\theta = -\tan^{-1}\frac{4}{3} = -53.1°$ (o bien $\theta = +306.9°$). Por lo tanto,

$$\tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

$$\tan \alpha = \frac{1.067(10^{-3}) \text{ m}^4}{0.2667(10^{-3}) \text{ m}^4} \tan(-53.1°)$$

$$\alpha = -79.4° \qquad \textit{Resp.}$$

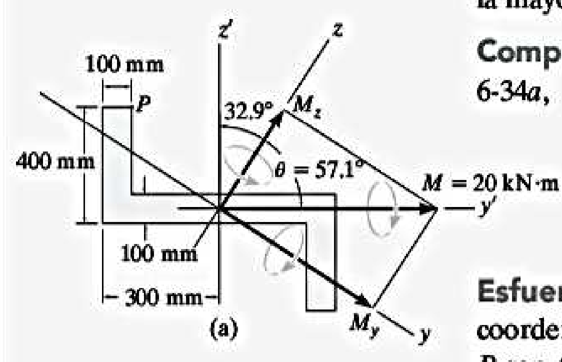
Este resultado se muestra en la figura 6-33c. Usando el valor de z calculado anteriormente, verifique que se obtiene la misma respuesta si se emplea la geometría de la sección transversal.

EJEMPLO 6.16

La sección en Z de la figura 6-34a está sometida al momento flexionante de $M = 20$ kN · m. Con base en los métodos del apéndice A (vea los ejemplos A.4 o A.5), los ejes principales y y z se orientan de la manera mostrada para representar los momentos de inercia principales mínimo y máximo, $I_y = 0.960(10^{-3})$ m^4 e $I_z = 7.54(10^{-3})$ m^4, respectivamente. Determine el esfuerzo normal en el punto P y la orientación del eje neutro.

SOLUCIÓN

Para el uso de la ecuación 6-19, es importante que el eje z represente el eje principal para el momento de inercia *máximo*. (Tenga en cuenta que la mayor parte del área se ubica fuera de este eje.)



Componentes del momento interno. A partir de la figura 6-34a,

$$M_y = 20 \text{ kN}\cdot\text{m sen } 57.1° = 16.79 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_z = 20 \text{ kN}\cdot\text{m cos } 57.1° = 10.86 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Esfuerzo flexionante. En primer lugar deben determinarse las coordenadas y y z del punto P. Observe que las coordenadas y' y z'de P son (–0.2 m, 0.35 m). Si se usan los triángulos de construcción con distintos sombreados de la figura 6-34b, se tiene

$$y_P = -0.35 \text{ sen } 32.9° - 0.2 \cos 32.9° = -0.3580 \text{ m}$$
$$z_P = 0.35 \cos 32.9° - 0.2 \text{ sen } 32.9° = 0.1852 \text{ m}$$

Al aplicar la ecuación 6-17,

$$\sigma_P = -\frac{M_z y_P}{I_z} + \frac{M_y z_P}{I_y}$$
$$= -\frac{(10.86(10^3)\text{ N}\cdot\text{m})(-0.3580 \text{ m})}{7.54(10^{-3})\text{ m}^4} + \frac{(16.79(10^3)\text{ N}\cdot\text{m})(0.1852 \text{ m})}{0.960(10^{-3})\text{ m}^4}$$
$$= 3.76 \text{ MPa}$$ *Resp.*

Orientación del eje neutro. El ángulo $\theta = 57.1°$ se muestra en la figura 6-34a. Así,

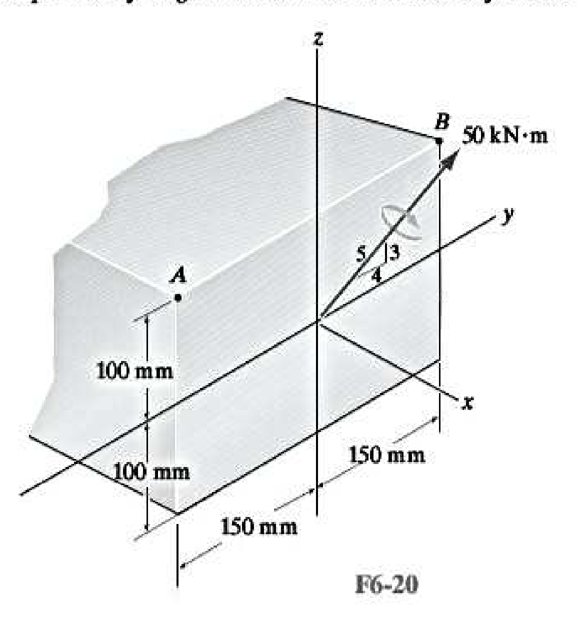
$$\tan\alpha = \left[\frac{7.54(10^{-3})\text{ m}^4}{0.960(10^{-3})\text{ m}^4}\right]\tan 57.1°$$
$$\alpha = 85.3°$$ *Resp.*

El eje neutro está orientado como se muestra en la figura 6-34b.

Figura 6-34

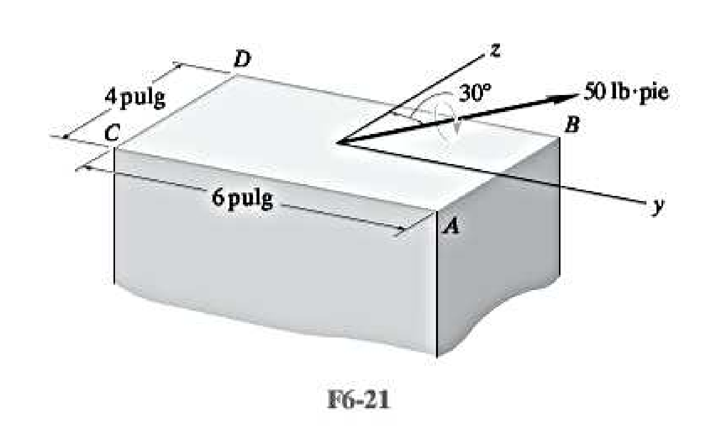
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F6-20. Determine el esfuerzo flexionante desarrollado en las esquinas A y B. ¿Cuál es la orientación del eje neutro?



F6-20

F6-21. Determine el esfuerzo máximo en la sección transversal de la viga.



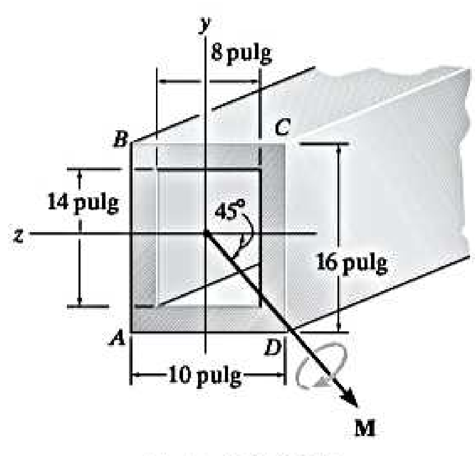
F6-21

PROBLEMAS

6

•**6-109.** La viga está sometida a un momento flexionante de $M = 20$ kip · pie dirigido como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga y la orientación del eje neutro.

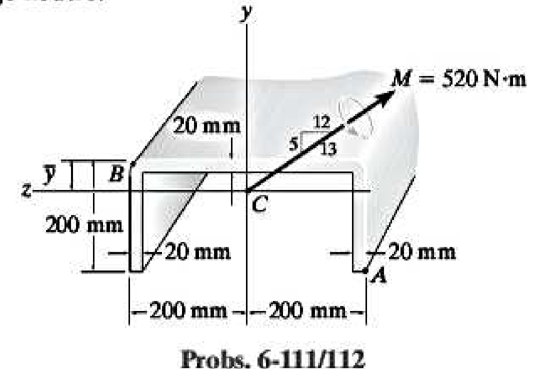
6-110. Determine la magnitud máxima del momento flexionante **M** que puede aplicarse a la viga de modo que el esfuerzo flexionante en el elemento no exceda 12 ksi.



Probs. 6-109/110

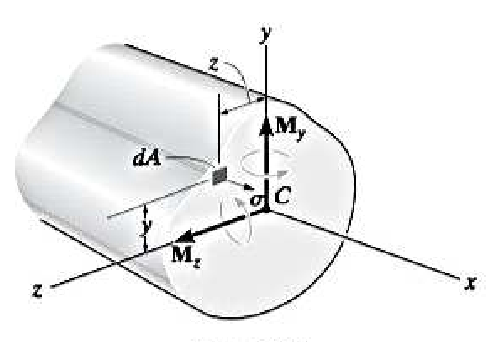
6-111. Si el momento interno resultante que actúa sobre la sección transversal del puntal de aluminio tiene una magnitud de $M = 520$ N · m y está dirigido como se muestra en la figura, determine el esfuerzo flexionante en los puntos A y B. Para ello, también debe determinar la ubicación $\bar{y}$ del centroide C del área de la sección transversal del puntal. Además, especifique la orientación del eje neutro.

***6-112.** El momento interno resultante que actúa sobre la sección transversal del puntal de aluminio tiene una magnitud de $M = 520$ N · m y está dirigido como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo flexionante máximo en el puntal. Para ello, debe terminarse la ubicación $\bar{y}$ del centroide C del área transversal. Además, especifique la orientación del eje neutro.



Probs. 6-111/112

6-113. Considere el caso general de una viga prismática sometida a las componentes del momento flexionante $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, como se muestra en la figura, cuando los ejes x, y, z pasan por el centroide de la sección transversal. Si el material es elástico lineal, el esfuerzo normal en la viga es una función lineal de la posición en la que $\sigma = a + by + cz$. Usando las condiciones de equilibrio $0 = \int_A \sigma\, dA$, $M_y = \int_A z\sigma\, dA$, $M_z = \int_A -y\sigma\, dA$, determine las constantes a, b y c, y demuestre que el esfuerzo normal puede calcularse a partir de la ecuación $\sigma = [-(M_z I_y + M_y I_{yz})y + (M_y I_z + M_z I_{yz})z]/(I_y I_z - Y_{yz}{}^2)$, donde los momentos y productos de inercia están definidos en el apéndice A.

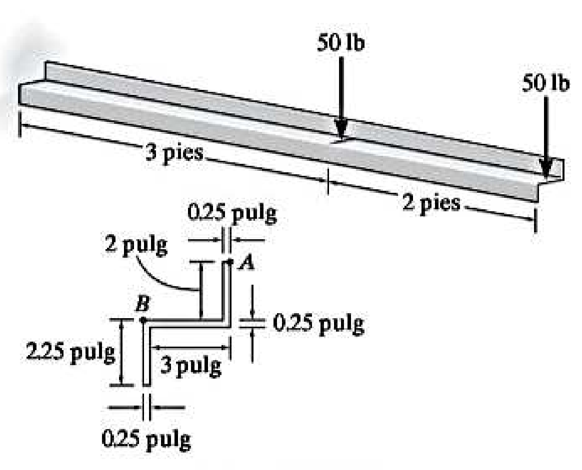


Prob. 6-113

6

6-114. La viga en voladizo está hecha con una sección de Z que tiene el área transversal mostrada en la figura. Si soporta las dos cargas, determine el esfuerzo flexionante en el punto A de la pared de la viga. Use el resultado del problema 6-113.

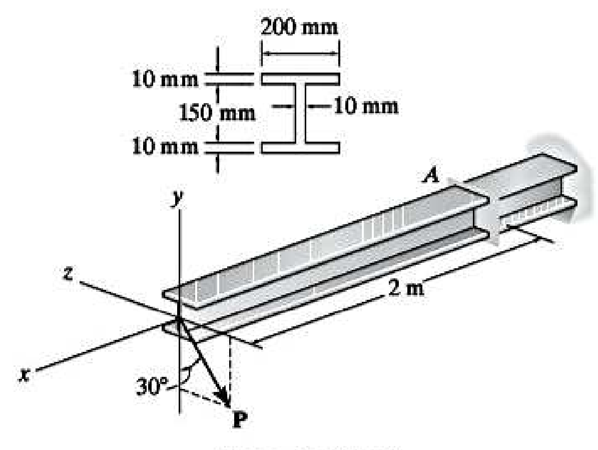
6-115. La viga en voladizo está hecha con una sección de Z que tiene el área transversal mostrada en la figura. Si soporta las dos cargas, determine el esfuerzo flexionante en el punto B de la pared de la viga. Use el resultado del problema 6-113.



Probs. 6-114/115

***6-116.** La viga de acero en voladizo con perfil en I de ala ancha está sometida a la fuerza concentrada **P** en uno de sus extremos. Determine la mayor magnitud de esta fuerza de modo que el esfuerzo flexionante desarrollado en A no supere $\sigma_{perm} = 180$ MPa.

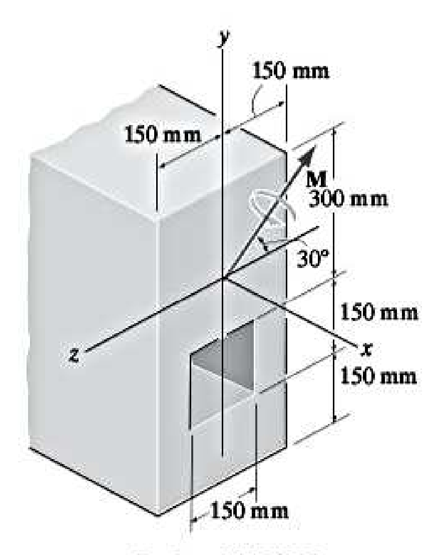
•6-117. La viga de acero en voladizo con perfil en I de ala ancha está sometida a la fuerza concentrada de $P = 600$ N en uno de sus extremos. Determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en la sección A de la viga.



Probs. 6-116/117

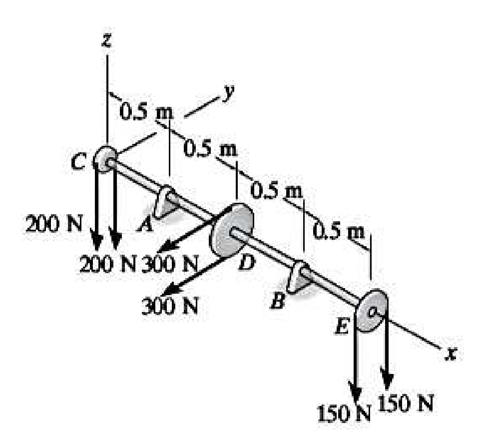
6-118. Si la viga está sometida al momento interno de $M = 1200$ kN · m, determine el esfuerzo flexionante máximo que actúa sobre la viga y la orientación del eje neutro.

6-119. Si la viga está fabricada de un material que tiene un esfuerzo permisible en tensión y en compresión de $(\sigma_{perm})_t = 125$ MPa y $(\sigma_{perm})_c = 150$ MPa, respectivamente, determine el momento interno **M** máximo permisible que puede aplicarse a la viga.



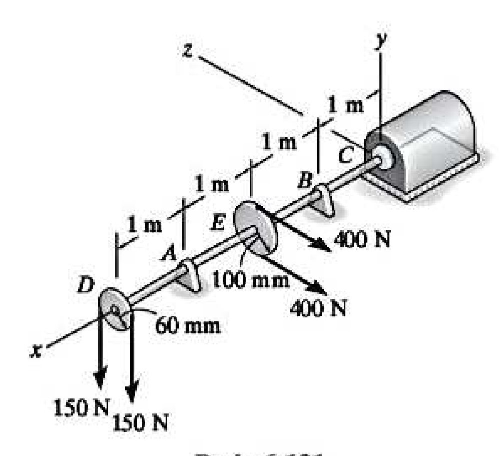
Probs. 6-118/119

•6-120. El eje está apoyado en dos chumaceras *A* y *B* que no ofrecen resistencia a las cargas axiales. Determine el diámetro *d* requerido del eje si el esfuerzo flexionante permisible para el material es $\sigma_{perm} = 150$ MPa.



Prob. 6-120

•6-121. El eje de 30 mm de diámetro está sometido a las cargas vertical y horizontal de las dos poleas mostradas. Se apoya en dos chumaceras *A* y *B* que no ofrecen resistencia a las cargas axiales. Por otra parte, puede considerarse que el acoplamiento al motor en *C* no ofrece ningún tipo de apoyo al eje. Determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en el eje.

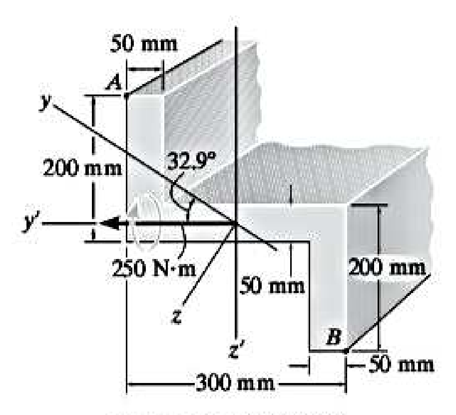


Prob. 6-121

6-122. Utilizando las técnicas descritas en el apéndice A, ejemplo A.5 o A.6, se determinó que la sección en *Z* tiene momentos principales de inercia de $I_y = 0.060(10^{-3})$ m^4 e $I_z = 0.471(10^{-3})$ m^4, calculados sobre los ejes principales de inercia *y* y *z*, respectivamente. Si la sección se somete a un momento interno de $M = 250$ N · m dirigido horizontalmente como se muestra en la figura, determine el esfuerzo producido en el punto *A*. Resuelva el problema empleando la ecuación 6-17.

6-123. Resuelva el problema 6-122, para ello use la ecuación desarrollada en el problema 6-113.

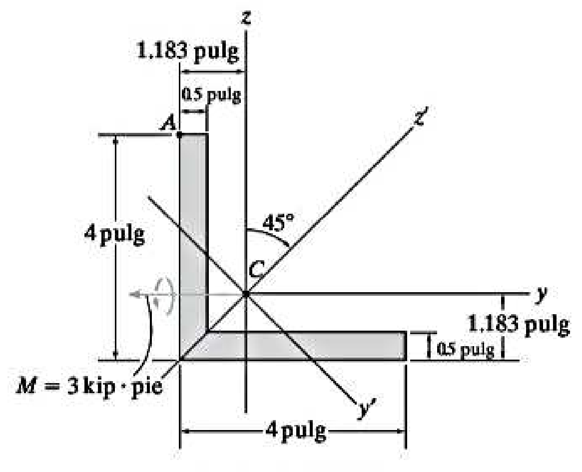
***6-124.** Utilizando las técnicas descritas en el apéndice A, ejemplo A.5 o A.6, se determinó que la sección en *Z* tiene momentos principales de inercia de $I_y = 0.060(10^{-3})$ m^4 e $I_z = 0.471(10^{-3})$ m^4, calculados sobre los ejes principales de inercia *y* y *z*, respectivamente. Si la sección se somete a un momento interno de $M = 250$ N · m dirigido horizontalmente como se muestra en la figura, determine el esfuerzo producido en el punto *B*. Resuelva el problema empleando la ecuación 6-17.



Probs. 6-122/123/124

•6-125. Determine el esfuerzo flexionante en el punto *A* de la viga, y la orientación del eje neutro. Utilizando el método del apéndice A, se determinó que los momentos principales de inercia de la sección transversal son $I'_z = 8.828$ pulg^4 e $I'_y = 2.295$ pulg^4, donde *z'* y *y'* son los ejes principales. Resuelva el problema empleando la ecuación 6-17.

6-126. Determine el esfuerzo flexionante en el punto *A* de la viga usando el resultado obtenido en el problema 6-113. Los momentos de inercia del área de la sección transversal sobre los ejes *z* y *y* son $I_z = I_y = 5.561$ pulg^4 y el producto de inercia del área de la sección transversal respecto a los ejes *z* y *y* es $I_{yz} = -3.267$ pulg^4. (Vea el apéndice A.)



Probs. 6-125/126

6

*6.6 Vigas compuestas

Las vigas fabricadas con dos o más materiales diferentes se conocen como ***vigas compuestas***. Por ejemplo, una viga puede fabricarse de madera con fajas de acero en su parte superior e inferior, figura 6-35. Los ingenieros diseñan vigas de esta forma con el propósito de desarrollar un medio más eficiente para soportar las cargas.

Como la fórmula de la flexión se desarrolló sólo para vigas que tienen un material homogéneo, ésta no puede aplicarse directamente para la determinación del esfuerzo normal en una viga compuesta. Sin embargo, en esta sección se desarrollará un método para modificar o "transformar" la sección transversal de una viga compuesta en una viga fabricada con un solo material. Una vez hecho esto, puede emplearse la fórmula de la flexión para el análisis de esfuerzos.

Para explicar cómo se hace esto, considere una viga compuesta de dos materiales, 1 y 2, que tiene el área de la sección transversal mostrada en la figura 6-36*a*. Si se aplica un momento flexionante sobre esta viga, entonces, al igual que una viga homogénea, el área total de la sección transversal *permanecerá plana* después de flexionarse, y por ende las deformaciones normales variarán linealmente desde cero en el eje neutro hasta un máximo en el material ubicado en el sitio más alejado de este eje, figura 6-36*b*. Siempre que el material sea elástico lineal, el esfuerzo normal en cualquier punto del material 1 se determina a partir de $\sigma = E_1\epsilon$, y para el material 2 se encuentra que la distribución de esfuerzos a partir de $\sigma = E_2\epsilon$. Si el material 1 es más rígido que el material 2, entonces $E_1 > E_2$ por lo que la distribución de esfuerzos es similar a la mostrada en la figura 6-36*c* o 6-36*d*. En particular, observe el aumento en el esfuerzo que se produce en la unión de los dos materiales. Aquí la *deformación* es la *misma*, pero como el módulo de elasticidad de los materiales cambia de manera súbita, por lo que ocurre lo mismo con el esfuerzo. La ubicación del eje neutro y el esfuerzo máximo puede determinarse con base en un procedimiento de prueba y error. Lo anterior requiere que se cumplan las condiciones de que la distribución del esfuerzo produzca una fuerza resultante cero en la

6



Figura 6-35

sección transversal y que el momento de la distribución del esfuerzo alrededor del eje neutro sea igual a **M**.

Una manera más sencilla de cumplir estas dos condiciones es el uso del *método de la sección transformada*, que convierte la viga compuesta en una viga fabricada de un *solo material*. Por ejemplo, si se considera que la viga consiste enteramente del material 2 que es el menos rígido, entonces, la sección transversal será similar a la mostrada en la figura 6-36*e*. Aquí la altura h de la viga sigue siendo la *misma*, puesto que debe conservarse la distribución de la deformación de la figura 6-36*b*. Sin embargo, la parte superior de la viga debe ensancharse a fin de soportar una carga *equivalente* a la realizada por el material 1 más rígido de la figura 6-36*d*. La anchura necesaria puede determinarse considerando la fuerza $d\mathbf{F}$ que actúa sobre un área $dA = dz\,dy$ de la viga en la figura 6-36*a*. Ésta es $dF = \sigma\,dA = (E_1\epsilon)dz\,dy$. Si se supone que la anchura de un *elemento correspondiente* de altura dy en la figura 6-36*e* es $n\,dz$, entonces $dF' = \sigma' dA' = (E_2\epsilon)n\,dz\,dy$. Al igualar estas fuerzas, de modo que produzcan el mismo momento alrededor del eje z (neutro), se tiene

$$E_1\epsilon\,dz\,dy = E_2\epsilon n\,dz\,dy$$

o bien

$$n = \frac{E_1}{E_2} \qquad (6\text{-}20)$$

6

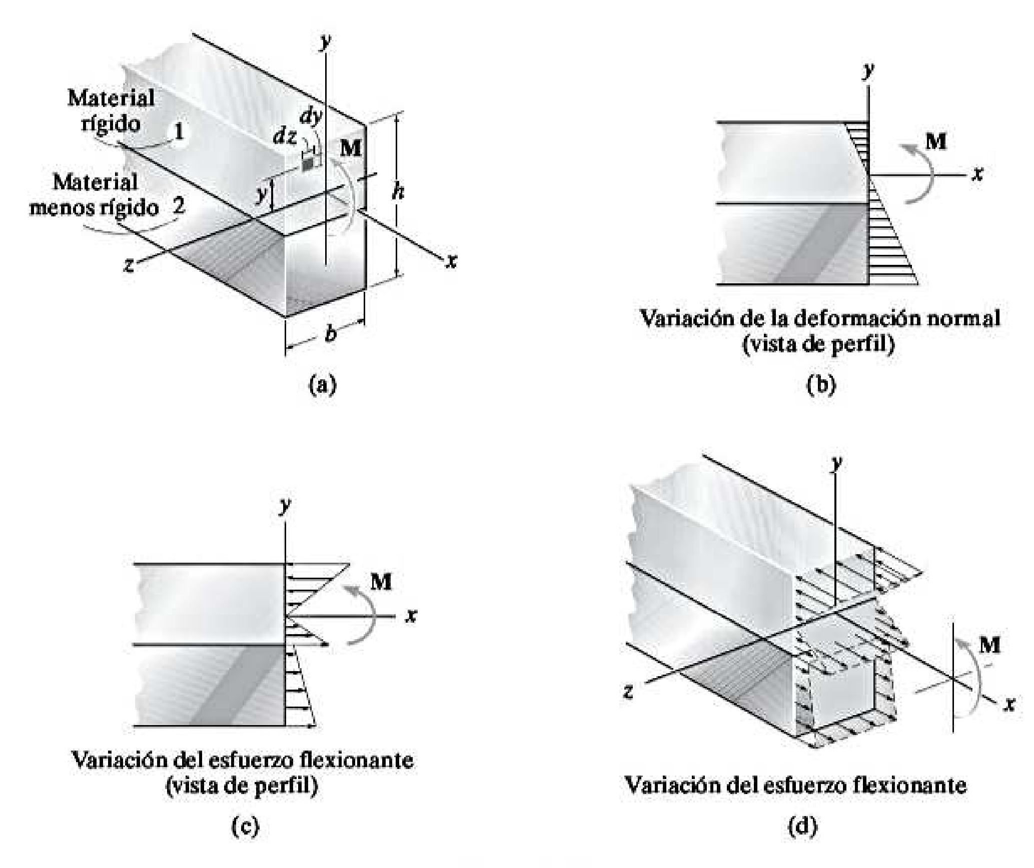
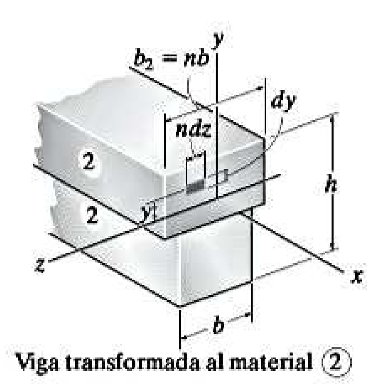


Figura 6-36



Viga transformada al material ②

(e)

b

1

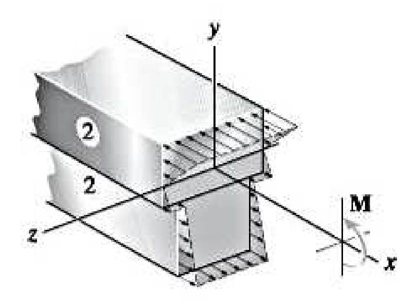
1

h

$b_1 = n'b$

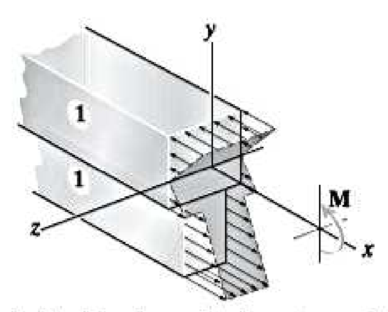
Viga transformada al material ①

(f)



Variación del esfuerzo flexionante para la viga transformada al material ②

(g)



Variación del esfuerzo flexionante para la viga transformada al material ②

(h)

Figura 6-36 (cont.)

Este número n adimensional se denomina ***factor de transformación***. Indica que la sección transversal, con una anchura b en la viga original, figura 6-36*a*, debe aumentarse en anchura hasta $b_2 = nb$ en la región donde el material 1 se transforma en el material 2, figura 6-36*e*.

De manera similar, si el material 2 menos rígido se transforma en el material 1 más rígido, la sección transversal será similar a la mostrada en la figura 6-36*f*. Aquí la anchura del material 2 se ha cambiado a $b_1 = n'b$, donde $n' = E_2/E_1$. En este caso el factor de transformación n' será *menor que uno* ya que $E_1 > E_2$. En otras palabras, se requiere menor cantidad del material más rígido para soportar el momento.

Una vez que la viga compuesta se ha transformado en una viga de un *solo material*, la distribución del esfuerzo normal sobre la sección transversal transformada será lineal, como se muestra en la figura 6-36*g* o 6-36*h*. En consecuencia, es posible determinar el centroide (eje neutro) y el momento de inercia del área transformada para después aplicar la fórmula de la flexión de la manera habitual, a fin de determinar el esfuerzo en cada punto de la viga transformada. El esfuerzo en la viga transformada será equivalente al esfuerzo en el *mismo material* de la viga real; sin embargo, el esfuerzo que se encuentre en el material transformado debe multiplicarse por el factor de transformación n (o n'), como el área del material transformado, $dA' = n\,dz\,dy$, es n veces el área del material real $dA = dz\,dy$. Es decir,

$$dF = \sigma\,dA = \sigma' dA'$$

$$\sigma\,dz\,dy = \sigma' n\,dz\,dy$$

$$\sigma = n\sigma' \qquad (6\text{-}21)$$

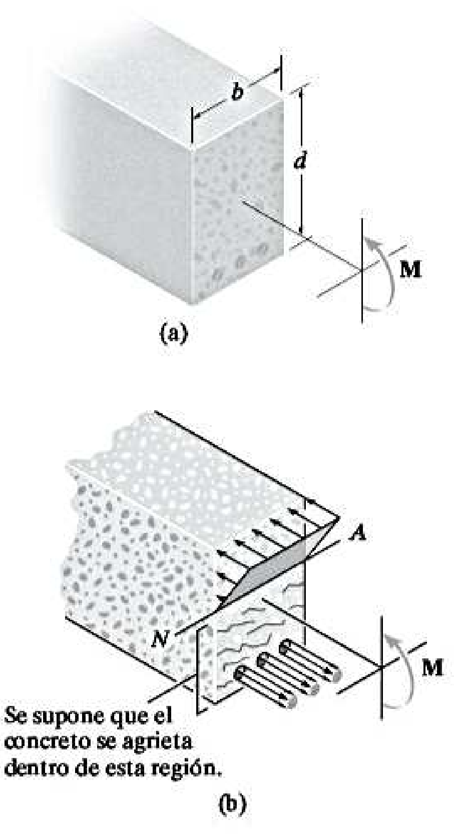
En el ejemplo 6.17 se ilustra numéricamente la aplicación del método de la sección transformada.

Puntos importantes

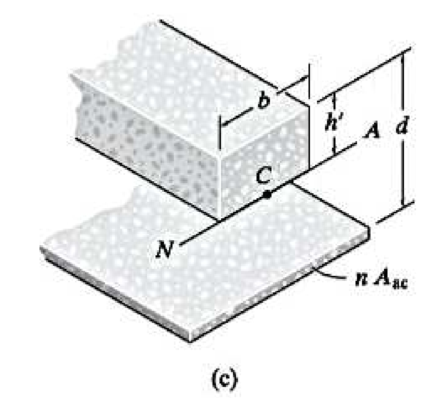
- Las *vigas compuestas* están fabricadas de diferentes materiales para soportar una carga de manera eficiente. La aplicación de la fórmula de la flexión requiere que el material sea homogéneo, por lo que si se desea emplear dicha fórmula para calcular el esfuerzo flexionante, la sección transversal de la viga debe transformarse en un solo material.
- El *factor de transformación n* es una relación entre los módulos de los diferentes materiales que componen la viga. Usado como un multiplicador, este factor convierte la anchura de la sección transversal de la viga compuesta en el de una viga fabricada de un solo material de modo que ésta tenga la misma resistencia que la viga compuesta. Así, el material rígido será remplazado por una mayor cantidad de los materiales más blandos y viceversa.
- Una vez que se determina el esfuerzo en la sección transformada, éste debe multiplicarse por el factor de transformación a fin de obtener el esfuerzo en la viga real.

*6.7 Vigas de concreto reforzado

Todas las vigas sometidas a flexión pura deben resistir tanto esfuerzos de tensión como de compresión. Sin embargo, el concreto es muy susceptible al agrietamiento cuando se encuentra en tensión, y por lo tanto no resulta adecuado por sí mismo para resistir un momento flexionante.* Para evitar este inconveniente, los ingenieros colocan varillas de acero de refuerzo dentro de una viga de concreto en una ubicación donde el concreto se encuentre en tensión, figura 6-37*a*. Para ser más eficaces, estas barras se localizan tan lejos como sea posible del eje neutro de la viga, de modo que el momento creado por las fuerzas desarrolladas en ellas sea mayor respecto al eje neutro. Además, se requiere que las varillas tengan algo de cubierta de concreto para protegerlas de la corrosión o pérdida de resistencia en caso de incendio. Los códigos utilizados para el diseño real de concreto reforzado suponen que la capacidad del concreto no soportará ninguna carga de tensión, ya que su posible agrietamiento es impredecible. Como resultado, se asume que la distribución de esfuerzos normales que actúan sobre el área de la sección transversal de una viga de concreto reforzado es similar a la mostrada en la figura 6-37*b*.



El análisis de esfuerzos requiere la ubicación del eje neutro y la determinación del esfuerzo máximo en el acero y el concreto. Para ello, primero se transforma el área del acero A_{ac} en un área equivalente de concreto empleando el factor de transformación $n = E_{ac}/E_{conc}$. Esta relación, que da $n > 1$, requiere una cantidad "mayor" de concreto para remplazar el acero. El área transformada es nA_{ac} y la sección transformada es similar a la mostrada en la figura 6-37*c*. Aquí d representa la distancia que hay desde la parte superior de la viga hasta la del acero (transformado), b es la anchura de la viga, y h' es la distancia aún desconocida desde la parte superior de la viga hasta el eje neutro. Para obtener h', se requiere que el centroide C del área de la sección transversal transformada se encuentre sobre el eje neutro, figura 6-37*c*. Por lo tanto, el momento de las dos áreas alrededor del eje neutro, $\Sigma\tilde{y}A$, debe ser cero, ya que $\bar{y} = \Sigma\tilde{y}A/\Sigma A = 0$. Por lo tanto,



(c)

Figura 6-37

$$bh'\left(\frac{h'}{2}\right) - nA_{ac}(d - h') = 0$$

$$\frac{b}{2}h'^2 + nA_{ac}h' - nA_{ac}d = 0$$

Una vez que se obtiene h' a partir de esta ecuación cuadrática, se encuentra la solución de la forma habitual para obtener el esfuerzo en la viga. En el ejemplo 6.18 se ilustra numéricamente la aplicación de este método.

*Una inspección del diagrama particular de esfuerzo-deformación en la figura 3-11 revela que el concreto puede ser 12.5 veces más resistente en compresión que en tensión.

6

EJEMPLO 6.17

Una viga compuesta está fabricada de madera y reforzada con una franja de acero situada en su parte inferior. Tiene el área de la sección transversal mostrada en la figura 6-38*a*. Si la viga se somete a un momento flexionante de $M = 2$ kN · m, determine el esfuerzo normal en los puntos B y C. Considere que $E_w = 12$ GPa y $E_{ac} = 200$ GPa.

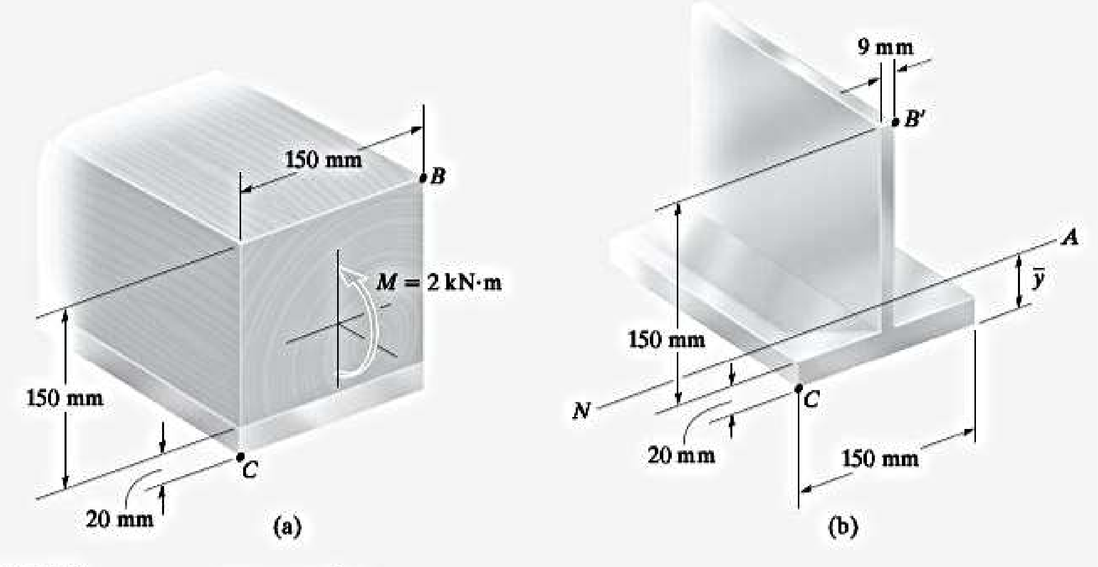


Figura 6-38

SOLUCIÓN

Propiedades de la sección. Aunque la elección es arbitraria, aquí se transformará la sección en una viga fabricada completamente de acero. Como el acero tiene una mayor rigidez que la madera ($E_{ac} > E_w$), la anchura de la madera debe *reducirse* a una anchura equivalente para el acero. Por consiguiente, n debe ser menor que uno. Para que esto sea así, $n = E_w/E_{ac}$, de modo que

$$b_{ac} = nb_w = \frac{12 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa}}(150 \text{ mm}) = 9 \text{ mm}$$

En la figura 6-38*b* se muestra la sección transformada.

La ubicación del centroide (eje neutro), calculada desde un eje de referencia situado en la parte *inferior* de la sección, es

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{[0.01 \text{ m}](0.02 \text{ m})(0.150 \text{ m}) + [0.095 \text{ m}](0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})}{0.02 \text{ m}(0.150 \text{ m}) + 0.009 \text{ m}(0.150 \text{ m})} = 0.03638 \text{ m}$$

Por lo tanto, el momento de inercia respecto al eje neutro es

$$I_{NA} = \left[\frac{1}{12}(0.150 \text{ m})(0.02 \text{ m})^3 + (0.150 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.03638 \text{ m} - 0.01 \text{ m})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})^3 + (0.009 \text{ m})(0.150 \text{ m})(0.095 \text{ m} - 0.03638 \text{ m})^2\right]$$
$$= 9.358(10^{-6}) \text{ m}^4$$

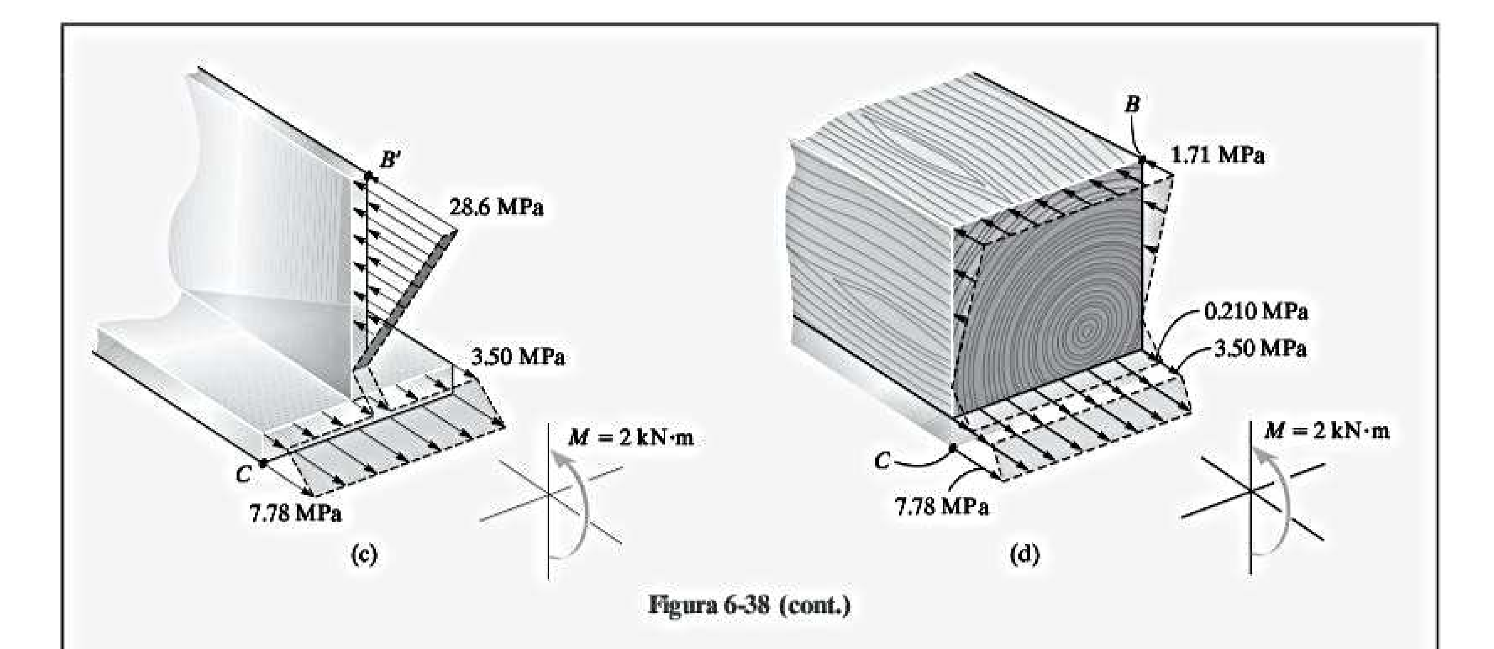


Figura 6-38 (cont.)

Esfuerzo normal. Si se aplica la fórmula de la flexión, el esfuerzo normal en B' y C es

$$\sigma_{B'} = \frac{2(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m}(0.170\ \text{m} - 0.03638\ \text{m})}{9.358(10^{-6})\ \text{m}^4} = 28.6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{2(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m}(0.03638\ \text{m})}{9.358(10^{-6})\ \text{m}^4} = 7.78\ \text{MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

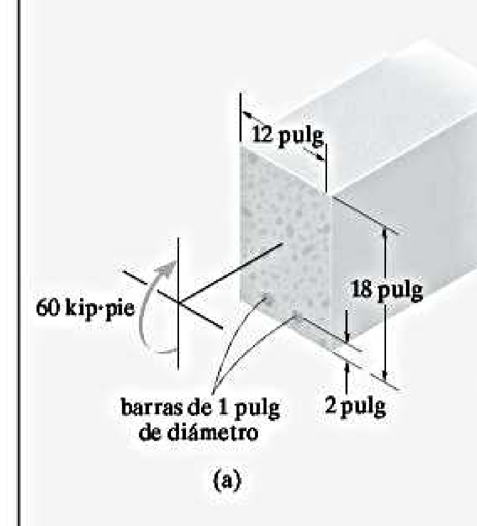
En la figura 6-38*c* se muestra la distribución del esfuerzo normal sobre la sección transformada (toda de acero).

El esfuerzo normal en el punto B de la madera que se muestra en la figura 6-38*a*, puede determinarse a partir de la ecuación 6-21; es decir,

$$\sigma_B = n\sigma_{B'} = \frac{12\ \text{GPa}}{200\ \text{GPa}}(28.56\ \text{MPa}) = 1.71\ \text{MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Con base en estos conceptos, demuestre que el esfuerzo normal en el acero y la madera en el punto donde hacen contacto es $\sigma_{ac} = 3.50$ MPa y $\sigma_w = 0.210$ MPa, respectivamente. En la figura 6-38*d* se muestra la distribución normal del esfuerzo en la viga real.

EJEMPLO 6.18



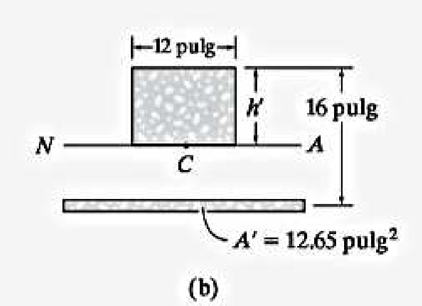
La viga de concreto reforzado tiene el área de la sección transversal mostrada en la figura 6-39*a*. Si se somete a un momento flexionante de $M = 60$ kip · pie, determine el esfuerzo normal en cada una de las varillas de acero de refuerzo y el esfuerzo normal máximo en el concreto. Considere que $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi y $E_{conc} = 3.6(10^3)$ ksi.

SOLUCIÓN

Como la viga está fabricada de concreto, en el siguiente análisis no se tomará en cuenta su resistencia para soportar un esfuerzo de tensión.

Propiedades de la sección. El área total de acero, $A_{ac} = 2[\pi(0.5 \text{ pulg})^2] = 1.571 \text{ pulg}^2$ se transformará en un área equivalente de concreto, figura 6-39*b*. Aquí

$$A' = nA_{ac} = \frac{29(10^3)\text{ ksi}}{3.6(10^3)\text{ ksi}}(1.571 \text{ pulg}^2) = 12.65 \text{ pulg}^2$$



Se requiere que el centroide esté sobre el eje neutro. Así, $\Sigma \tilde{y} A = 0$, o bien

$$12 \text{ pulg}\,(h')\frac{h'}{2} - 12.65 \text{ pulg}^2(16 \text{ pulg} - h') = 0$$

$$h'^2 + 2.11h' - 33.7 = 0$$

Al despejar la raíz positiva,

$$h' = 4.85 \text{ pulg}$$

Utilizando este valor de h', el momento de inercia de la sección transformada respecto al eje neutro es

$$I = \left[\frac{1}{12}(12 \text{ pulg})(4.85 \text{ pulg})^3 + 12 \text{ pulg}\,(4.85 \text{ pulg})\left(\frac{4.85 \text{ pulg}}{2}\right)^2\right]$$

$$+ 12.65 \text{ pulg}^2\,(16 \text{ pulg} - 4.85 \text{ pulg})^2 = 2029 \text{ pulg}^4$$

Esfuerzo normal. Al aplicar la fórmula de la flexión en la sección transformada, el esfuerzo normal máximo en el concreto es

$$(\sigma_{conc})_{máx} = \frac{[60 \text{ kip} \cdot \text{pie}\,(12 \text{ pulg/pie})](4.85 \text{ pulg})}{2029 \text{ pulg}^4} = 1.72 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

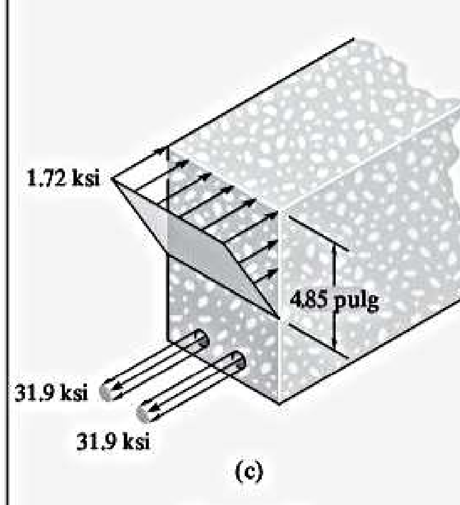


Figura 6-39

El esfuerzo normal resistido por la franja "de concreto" que sustituyó a la de acero, es

$$\sigma'_{conc} = \frac{[60 \text{ kip} \cdot \text{pie}\,(12 \text{ pulg/pie})](16 \text{ pulg} - 4.85 \text{ pulg})}{2029 \text{ pulg}^4} = 3.96 \text{ ksi}$$

Por lo tanto, el esfuerzo normal en cada una de las dos varillas de refuerzo es

$$\sigma_{ac} = n\sigma'_{conc} = \left(\frac{29(10^3)\text{ ksi}}{3.6(10^3)\text{ ksi}}\right)3.96 \text{ ksi} = 31.9 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

La distribución del esfuerzo normal se muestra gráficamente en la figura 6-39*c*.

6

*6.8 Vigas curvas

La fórmula de la flexión es aplicable para un elemento recto, ya que se demostró que la deformación normal dentro de dicho elemento varía linealmente desde el eje neutro. Sin embargo, si el elemento es *curvo*, esta suposición se vuelve inexacta, por lo que debe desarrollarse otro método para describir la distribución de esfuerzos. En esta sección se considerará el análisis de una *viga curva*, es decir, un elemento que tiene un eje curvo y está sometido a flexión. Entre los ejemplos típicos se incluyen ganchos y eslabones de cadena. En todos los casos, los elementos no son delgados, sino que tienen una curva cerrada y sus dimensiones transversales son grandes en comparación con su radio de curvatura.

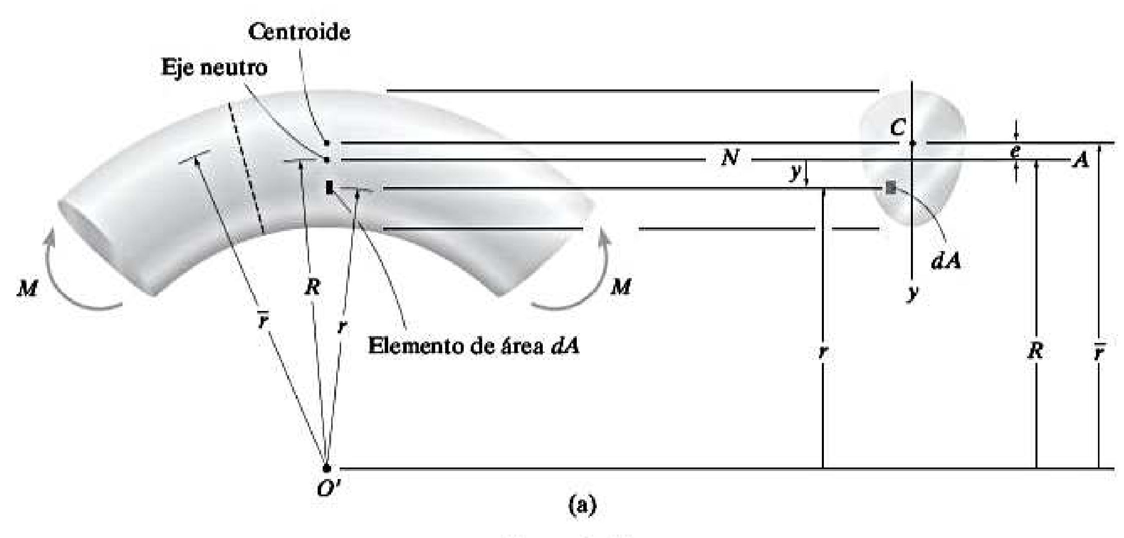
En el análisis siguiente se supone que la sección transversal es constante y que tiene un eje de simetría perpendicular a la dirección del momento **M** aplicado, figura 6-40*a*. Además, el material es homogéneo e isotrópico, y se comporta de manera elástico lineal cuando se le aplica la carga. Como en el caso de una viga recta, también se asumirá que las *secciones transversales* de los elementos *siguen siendo planas* después de aplicar el momento. Además, no se tomará en cuenta cualquier distorsión de la sección transversal dentro de su propio plano.

Para realizar el análisis, en la figura 6-40*a* se identifican tres radios que se extienden desde el centro de curvatura O' del elemento. Aquí $\bar{r}$ hace referencia a la ubicación conocida del *centroide* para el área de la sección transversal, R se refiere a la ubicación no especificada del *eje neutro* y r localiza el *punto arbitrario* o elemento de área dA sobre la sección transversal.



Este gancho de grúa representa un ejemplo típico de una viga curva.

6



(a)

Figura 6-40

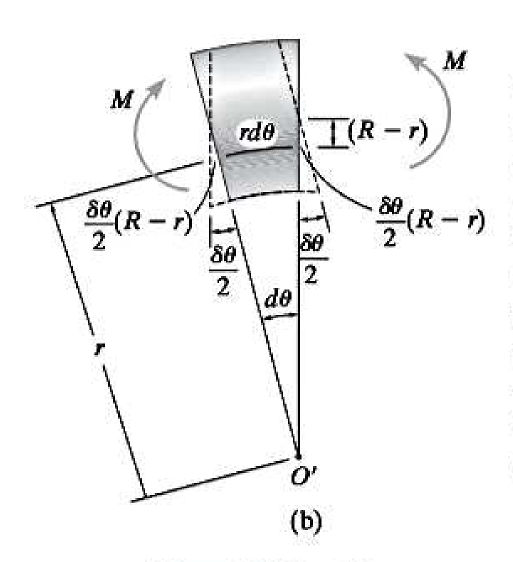


Figura 6-40 (cont.)

Si se aísla un segmento diferencial de la viga, figura 6-40b, el esfuerzo tiende a deformar el material de manera que cada sección girará un ángulo $\delta\theta/2$. Ahora se determinará la deformación normal ϵ en la franja (o línea) de material ubicada en r. Esta franja tiene una longitud original $r\,d\theta$, figura 6-40b. Sin embargo, debido a las rotaciones de $\delta\theta/2$, el cambio total en la longitud de la franja es igual a $\delta\theta(R-r)$. En consecuencia, $\epsilon = \delta\theta(R-r)/r\,d\theta$. Si se hace $k = \delta\theta/d\theta$, que es la misma para cualquier franja en particular, se tiene $\epsilon = k(R-r)/r$. A diferencia del caso de las vigas rectas, aquí se puede ver que la ***deformación normal*** es una función no lineal de r, de hecho, varía en ***forma hiperbólica***. Esto ocurre aun cuando la sección transversal de la viga se mantiene plana después de la deformación. Si el material sigue siendo elástico lineal, entonces $\sigma = E\epsilon$ y por lo tanto

$$\sigma = Ek\left(\frac{R-r}{r}\right) \tag{6-22}$$

Esta variación también es hiperbólica y, como ya se ha establecido, es posible determinar la ubicación del eje neutro y relacionar la distribución del esfuerzo con el momento interno resultante M.

Para obtener la ubicación R del eje neutro, se requiere que la fuerza interna resultante causada por la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal sea igual a cero; es decir,

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad \int_A \sigma\, dA = 0$$

$$\int_A Ek\left(\frac{R-r}{r}\right) dA = 0$$

Como Ek y R son constantes, se tiene

$$R\int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA = 0$$

Al despejar R resulta

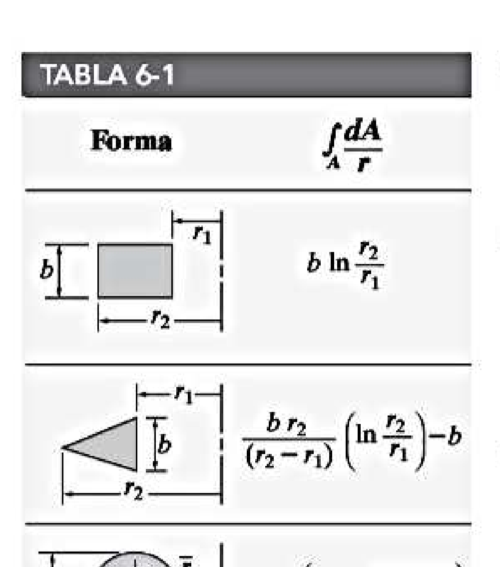
$$R = \frac{A}{\displaystyle\int_A \frac{dA}{r}} \tag{6-23}$$

Aquí

R = la ubicación del eje neutro, especificado desde el centro de curvatura O' del elemento
A = el área de la sección transversal del elemento
r = la posición arbitraria del elemento de área dA sobre la sección transversal, especificada desde el centro de curvatura O' del elemento

La integral de la ecuación 6-23 se ha evaluado para secciones transversales con distintas geometrías y los resultados para algunas de las formas más comunes se presentan en la tabla 6-1.

TABLA 6-1



Forma	$\int_A \frac{dA}{r}$
Rectángulo (b, r_1, r_2)	$b \ln \frac{r_2}{r_1}$
Triángulo (b, r_1, r_2)	$\frac{b\,r_2}{(r_2-r_1)}\left(\ln\frac{r_2}{r_1}\right) - b$
Círculo ($2c$, $\bar{r}$)	$2\pi\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$
Elipse ($2a$, $2b$, $\bar{r}$)	$\frac{2\pi b}{a}\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - a^2}\right)$

Con el fin de relacionar la distribución del esfuerzo con el momento flexionante resultante, se requiere que el momento interno resultante sea igual al momento de la distribución del esfuerzo calculado respecto al eje neutro. A partir de la figura 6-40*a*, el esfuerzo σ, que actúa sobre el elemento de área dA y se ubica a una distancia y desde el eje neutro, crea un momento alrededor del eje neutro de $dM = y(\sigma\, dA)$. Para toda la sección transversal, se requiere que $M = \int y\sigma\, dA$. Como $y = R - r$, y σ está definida por la ecuación 6-22, se tiene

$$M = \int_A (R - r)Ek\left(\frac{R - r}{r}\right) dA$$

Mediante una expansión, se observa que Ek y R son constantes, entonces

$$M = Ek\left(R^2 \int_A \frac{dA}{r} - 2R \int_A dA + \int_A r\, dA\right)$$

La primera integral es equivalente a A/R tal como se determinó a partir de la ecuación 6-23, y la segunda integral es simplemente el área A de la sección transversal. Si se toma en cuenta que la ubicación del centroide de la sección transversal se determina a partir de $\bar{r} = \int r\, dA/A$, la tercera integral puede sustituirse por $\bar{r}$. Por lo tanto,

$$M = EkA(\bar{r} - R)$$

Por último, si se despeja Ek de la ecuación 6-22, se sustituye en la ecuación anterior y se despeja σ, resulta

$$\sigma = \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)} \qquad (6\text{-}24)$$

Aquí

σ = el esfuerzo normal en el elemento

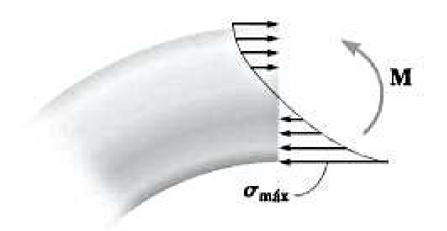
M = el momento interno, determinado con base en el método de las secciones y las ecuaciones de equilibrio; se calcula alrededor del eje neutro de la sección transversal. Este momento es *positivo* si tiende a aumentar el radio de curvatura del elemento, es decir, tiende a enderezar el elemento

A = el área de sección transversal del elemento

R = la distancia medida desde el centro de curvatura hasta el eje neutro; se determina a partir de la ecuación 6-23

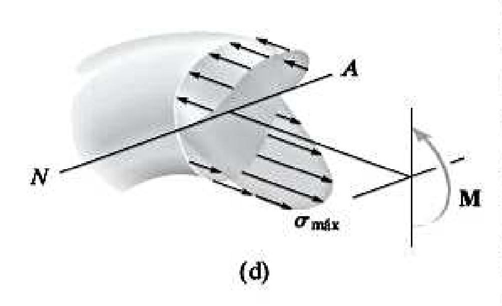
$\bar{r}$ = la distancia medida desde el centro de curvatura hasta el centroide de la sección transversal

r = la distancia medida desde el centro de curvatura hasta el punto donde debe determinarse el esfuerzo σ

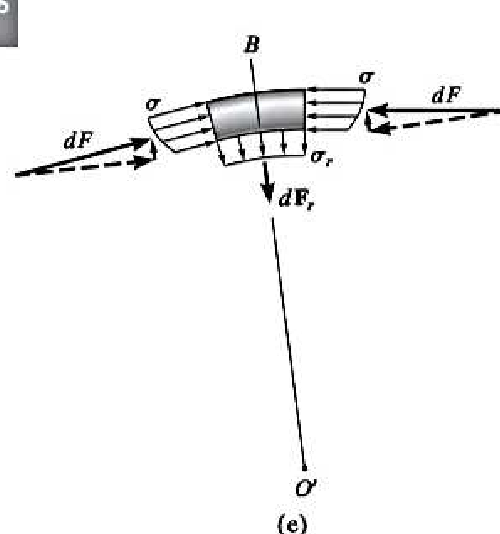


Variación del esfuerzo flexionante
(vista de perfil)

(c)



(d)



(e)

Figura 6-40 (cont.)

A partir de la figura 6-40*a*, $r = R - y$. Además, la distancia constante y usualmente muy pequeña entre el eje neutro y el centroide es $e = \bar{r} - R$. Cuando estos resultados se sustituyen en la ecuación 6-24, también se puede escribir

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R - y)} \tag{6-25}$$

Estas dos ecuaciones representan dos formas distintas de la expresión conocida como *fórmula de la viga curva*, que al igual que la fórmula de la flexión puede usarse para determinar la distribución del esfuerzo normal en un elemento curvo. Como ya se dijo, esta distribución es hiperbólica; en las figuras 6-40*c* y 6-40*d* se muestra un ejemplo. Como el esfuerzo actúa a lo largo de la circunferencia de la viga, en ocasiones se denomina ***esfuerzo circunferencial***. Observe que debido a la curvatura de la viga, el esfuerzo circunferencial creará una componente correspondiente del ***esfuerzo radial***, denominado así porque la componente actúa en la dirección radial. Para mostrar cómo se desarrolla, considere el diagrama de cuerpo libre del segmento mostrado en la figura 6-40*e*. Aquí, el esfuerzo radial σ_r es necesario porque crea la fuerza dF_r, la cual es necesaria para equilibrar las dos componentes de las fuerzas circunferenciales dF que actúan a lo largo de la línea $O'B$.

Algunas veces, los esfuerzos radiales dentro de los elementos curvos pueden ser importantes, en especial si el elemento está hecho de láminas delgadas y dF tiene, por ejemplo, la forma de una sección en I. En este caso, el esfuerzo radial puede llegar a ser tan grande como el esfuerzo circunferencial y, por lo tanto, el elemento debe diseñarse para resistir ambos tipos de esfuerzo. Sin embargo, en la mayoría de los casos estas tensiones no se toman en cuenta, sobre todo si el elemento tiene una *sección sólida*. Aquí, la fórmula de la viga curva da resultados que concuerdan de manera cercana con los encontrados mediante la experimentación o por medio de un análisis matemático basado en la teoría de la elasticidad.

Por lo general, la fórmula de la viga curva se usa cuando la curvatura del elemento es muy pronunciada, como en el caso de los ganchos o anillos. Sin embargo, si el radio de curvatura es mayor que cinco veces la profundidad del elemento, la *fórmula de la flexión* suele utilizarse para determinar el esfuerzo. Por ejemplo, para las secciones rectangulares en las que esta relación es igual a 5, el esfuerzo normal máximo determinado mediante la fórmula de la flexión será aproximadamente 7 por ciento *menor* que su valor cuando se calcula por medio de la fórmula de la viga curva. Este error se reduce aún más cuando la relación del radio de curvatura sobre la profundidad es mayor a 5.*

6

*Vea, por ejemplo, Boresi, A. P. *et al.*, *Advanced Mechanics of Materials*. 3a. ed., p. 333, 1978, John Wiley & Sons, Nueva York.

Puntos importantes

- La *fórmula de la viga curva* debe utilizarse para determinar el esfuerzo circunferencial en una viga cuando el radio de curvatura es menor a cinco veces la profundidad de la viga.
- Debido a la curvatura de la viga, la deformación normal en ésta *no* varía linealmente con la profundidad como en el caso de una viga recta. En consecuencia, el eje neutro no pasa por el centroide de la sección transversal.
- Por lo general, la componente del esfuerzo radial causada por la flexión puede pasarse por alto, en especial si la sección transversal es una sección sólida y no está fabricada de láminas delgadas.

Procedimiento de análisis

Si se desea aplicar la fórmula de la viga curva, se sugiere aplicar el siguiente procedimiento.

Propiedades de la sección.

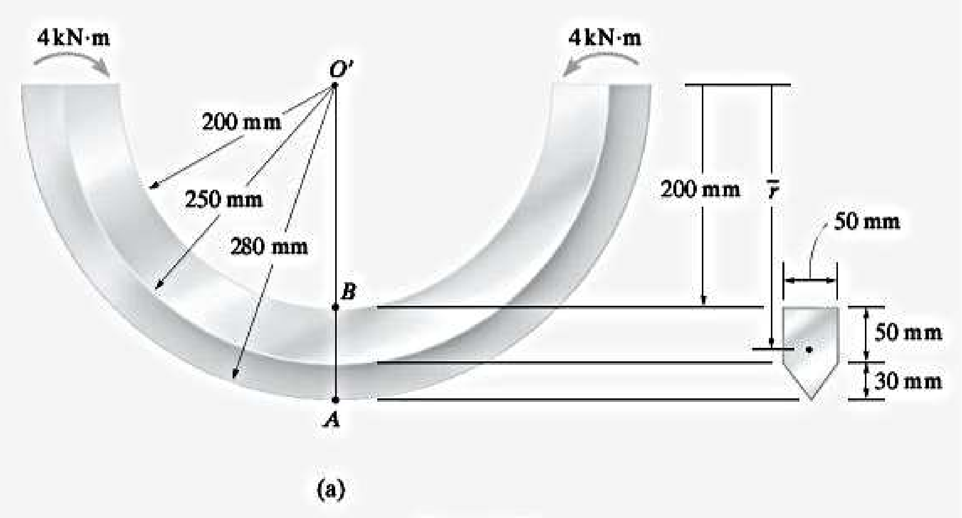
- Determine el área A de la sección transversal y la ubicación $\bar{r}$ del centroide, medida desde el centro de curvatura.
- Encuentre la ubicación R del eje neutro mediante la ecuación 6-23 o la tabla 6-1. Si el área de la sección transversal es "compuesta" y consiste de n partes, determine $\int dA/r$ para *cada parte*. Entonces, a partir de la ecuación 6-23, para toda la sección, $R = \Sigma A/\Sigma(\int dA/r)$. En todos los casos, $R < \bar{r}$.

Esfuerzo normal.

- El esfuerzo normal situado en un punto r alejado del centro de curvatura se determina con base en la ecuación 6-24. Si la distancia y al punto se mide desde el eje neutro, entonces encuentre $e = \bar{r} - R$ y use la ecuación 6-25.
- Como $\bar{r} - R$ suele producir un *número muy pequeño*, lo mejor es calcular $\bar{r}$ y R con la precisión suficiente para que la resta conduzca a un número e que tenga al menos cuatro cifras significativas.
- Si el esfuerzo es positivo será de tensión, y si es negativo será de compresión.
- La distribución del esfuerzo puede graficarse para toda la sección transversal, o bien puede aislarse un elemento de volumen del material y utilizarlo para representar el esfuerzo que actúa en el punto de la sección transversal donde se ha calculado dicho esfuerzo.

EJEMPLO 6.19

La barra curva tiene la sección transversal que se muestra en la figura 6-41*a*. Si se somete a los momentos de flexión de 4 kN · m, determine el esfuerzo máximo normal desarrollado en la barra.



(a)

Figura 6-41

6

SOLUCIÓN

Momento interno. Cada sección de la barra está sometida al mismo momento resultante interno de 4 kN · m. Como este momento tiende a disminuir el radio de curvatura de la barra, es negativo. Así, $M = -4\text{ kN}\cdot\text{m}$.

Propiedades de la sección. Aquí se considerará que la sección transversal está compuesta por un rectángulo y un triángulo. El área total de la sección transversal es

$$\Sigma A = (0.05\text{ m})^2 + \frac{1}{2}(0.05\text{ m})(0.03\text{ m}) = 3.250(10^{-3})\text{ m}^2$$

La ubicación del centroide se determina con referencia al centro de curvatura, es decir el punto O', figura 6-41*a*.

$$\bar{r} = \frac{\Sigma \tilde{r} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{[0.225\text{ m}](0.05\text{ m})(0.05\text{ m}) + [0.260\text{ m}]\frac{1}{2}(0.050\text{ m})(0.030\text{ m})}{3.250(10^{-3})\text{ m}^2}$$

$$= 0.23308\text{ m}$$

Es posible encontrar $\int_A dA/r$ para cada parte con base en la tabla 6-1. Para el rectángulo,

$$\int_A \frac{dA}{r} = 0.05 \text{ m}\left(\ln\frac{0.250 \text{ m}}{0.200 \text{ m}}\right) = 0.011157 \text{ m}$$

Y para el triángulo,

$$\int_A \frac{dA}{r} = \frac{(0.05 \text{ m})(0.280 \text{ m})}{(0.280 \text{ m} - 0.250 \text{ m})}\left(\ln\frac{0.280 \text{ m}}{0.250 \text{ m}}\right) - 0.05 \text{ m} = 0.0028867 \text{ m}$$

Así, la ubicación del eje neutro se determina a partir de

$$R = \frac{\Sigma A}{\Sigma \int_A dA/r} = \frac{3.250(10^{-3}) \text{ m}^2}{0.011157 \text{ m} + 0.0028867 \text{ m}} = 0.23142 \text{ m}$$

Observe que $R < \bar{r}$ tal como se esperaba. Además, los cálculos se realizaron con una precisión suficiente de modo que $(\bar{r} - R) = 0.23308 \text{ m} - 0.23142 \text{ m} = 0.00166 \text{ m}$ es ahora con una precisión de tres cifras significativas.

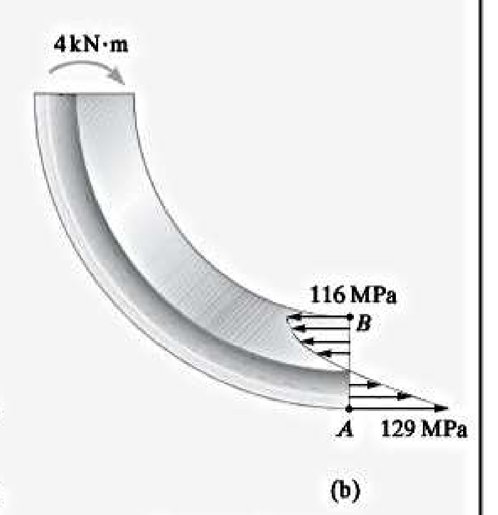
Esfuerzo normal. El esfuerzo normal máximo se produce en A o bien en B. Al aplicar la fórmula de la viga curva para calcular el esfuerzo normal en B, $r_B = 0.200$ m, se tiene

$$\sigma_B = \frac{M(R - r_B)}{Ar_B(\bar{r} - R)} = \frac{(-4 \text{ kN}\cdot\text{m})(0.23142 \text{ m} - 0.200 \text{ m})}{3.250(10^{-3}) \text{ m}^2(0.200 \text{ m})(0.00166 \text{ m})}$$
$$= -116 \text{ MPa}$$

En el punto A, $r_A = 0.280$ m, y el esfuerzo normal es

$$\sigma_A = \frac{M(R - r_A)}{Ar_A(\bar{r} - R)} = \frac{(-4 \text{ kN}\cdot\text{m})(0.23142 \text{ m} - 0.280 \text{ m})}{3.250(10^{-3}) \text{ m}^2(0.280 \text{ m})(0.00166 \text{ m})}$$
$$= 129 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Por comparación, el esfuerzo normal máximo ocurre en A. En la figura 6-41b se muestra una representación bidimensional de la distribución del esfuerzo.



(b)

Figura 6-41 (cont.)

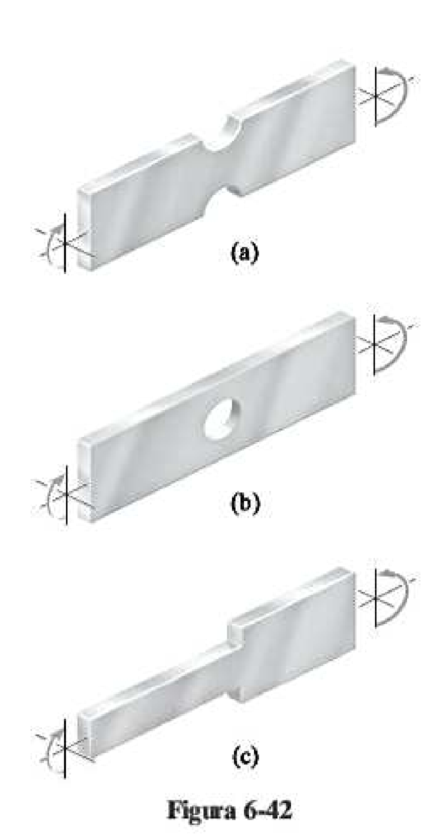


Figura 6-42

6.9 Concentraciones de esfuerzo

La fórmula de la flexión no puede usarse para determinar la distribución de esfuerzos en las regiones de un elemento donde el área de la sección transversal cambia de manera súbita, ya que las distribuciones del esfuerzo normal y de la deformación en la sección se vuelven *no lineales*. Los resultados sólo se pueden obtener mediante la experimentación o, en algunos casos, con la teoría de la elasticidad. Entre las discontinuidades más comunes se incluyen los elementos que tienen muescas en sus superficies, figura 6-42*a*, orificios para el paso de sujetadores u otros dispositivos, figura 6-42*b*, o cambios abruptos en las dimensiones externas de la sección transversal del elemento, figura 6-42*c*. El esfuerzo normal *máximo* en cada una de estas discontinuidades se produce en la sección tomada a través del área transversal *más pequeña*.

Para el diseño, sólo suele ser importante conocer el esfuerzo normal máximo desarrollado en estas secciones, no la distribución del esfuerzo real. Al igual que en los casos anteriores de las barras cargadas axialmente y los ejes cargados en torsión, es posible obtener el esfuerzo normal máximo debido a la flexión empleando un factor de concentración del esfuerzo K. Por ejemplo, en la figura 6-43 se dan los valores de K para una barra plana que tiene un cambio en su sección transversal usando filetes. Para utilizar este gráfico basta con encontrar la relaciones geométricas w/h y r/h, y luego determinar el valor correspondiente de K para una geometría

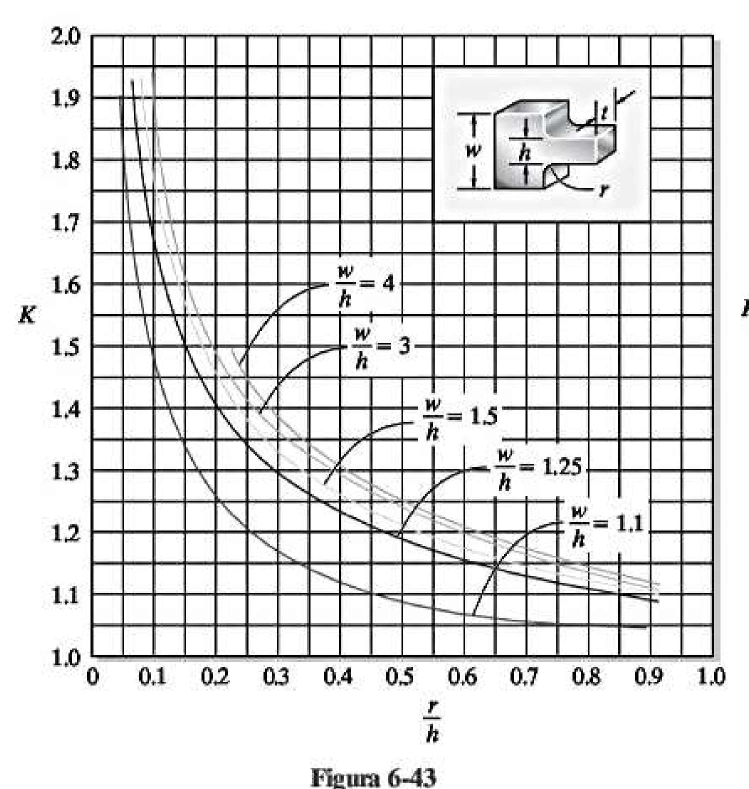


Figura 6-43

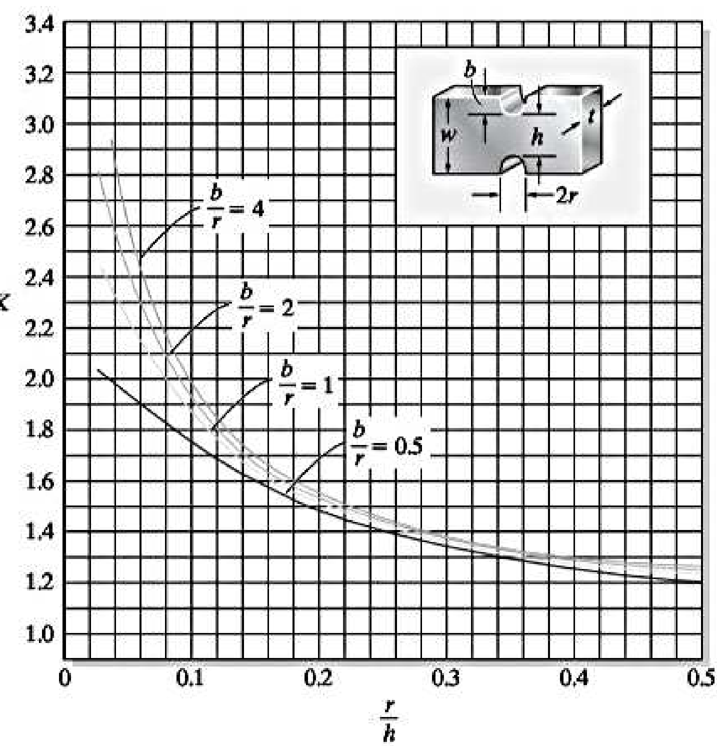


Figura 6-44

particular. Una vez que se obtiene K, el esfuerzo flexionante máximo mostrado en la figura 6-45 se determina a partir de

$$\sigma_{\text{máx}} = K\frac{Mc}{I} \tag{6-26}$$

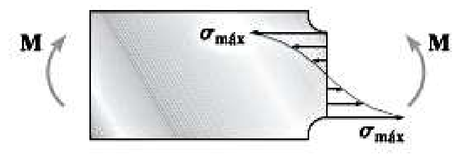


Figura 6-45

Del mismo modo, la figura 6-44 puede usarse si la discontinuidad consiste en ranuras o muescas circulares.

Al igual que en las cargas axial y de torsión, la concentración del esfuerzo por flexión siempre debe tenerse en cuenta al diseñar elementos de materiales frágiles o aquellos que estarán sometidos a fatiga o cargas cíclicas. Además, tenga en cuenta que los factores de concentración del esfuerzo se aplican *sólo* cuando el material está sujeto a un *comportamiento elástico*. Si el momento aplicado causa la cedencia del material, como en el caso de los materiales dúctiles, el esfuerzo se redistribuye en todo el elemento y el esfuerzo máximo que resulte será *menor* que el determinado con factores de concentración del esfuerzo. Este fenómeno se analiza en la siguiente sección.



En las esquinas afiladas del dintel de esta ventana se producen concentraciones de esfuerzo causadas por la flexión, las cuales son responsables de la grieta que se ve en la esquina.

Puntos importantes

- Las concentraciones de esfuerzos ocurren en puntos donde hay un cambio súbito en la sección transversal, causado por muescas y orificios, porque aquí el esfuerzo y la deformación se vuelven no lineales. Cuanto más severo sea el cambio, mayor será la concentración de esfuerzos.
- Para el diseño o análisis, el esfuerzo normal máximo se produce en la sección transversal con el área *más pequeña*. Este esfuerzo puede obtenerse empleando un factor de concentración del esfuerzo, K, que se ha determinado mediante la experimentación y sólo es una función de la geometría del elemento.
- Por lo general, la concentración de esfuerzos en un material dúctil sometido a un momento estático no tendrá que ser considerado en el diseño; sin embargo, si el material es *frágil* o se encuentra sometido a *fatiga*, entonces las concentraciones de esfuerzos se vuelven importantes.

EJEMPLO 6.20

La transición en el área de la sección transversal de la barra de acero se logra mediante filetes, como se muestra en la figura 6-46*a*. Si la barra está sometida a un momento flexionante de 5 kN · m, determine el esfuerzo máximo normal desarrollado en el acero. El límite de elasticidad es $\sigma_Y = 500$ MPa.

SOLUCIÓN

El momento crea el mayor esfuerzo en la barra en la base del filete, donde el área de la sección transversal es más pequeña. El factor de concentración de esfuerzos puede determinarse con base en la figura 6-43. A partir de la geometría de la barra, se tiene $r = 16$ mm, $h = 80$ mm, $w = 120$ mm. Por lo tanto,

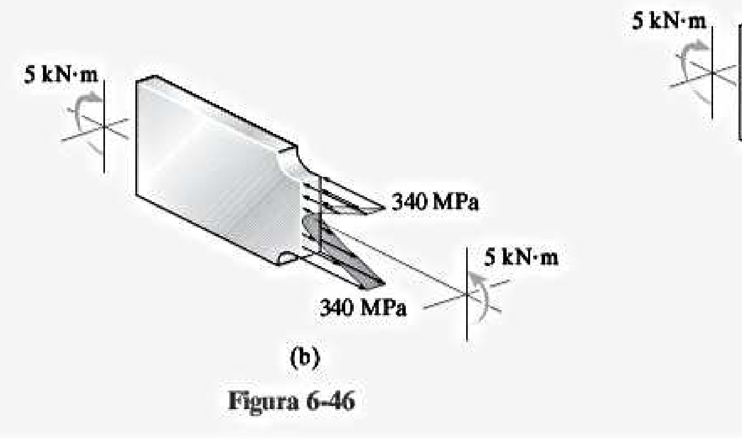
$$\frac{r}{h} = \frac{16 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 0.2 \qquad \frac{w}{h} = \frac{120 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} = 1.5$$

Estos valores dan $K = 1.45$. Al aplicar la ecuación 6-26, se tiene

$$\sigma_{\text{máx}} = K\frac{Mc}{I} = (1.45)\frac{(5(10^3) \text{ N} \cdot \text{m})(0.04 \text{ m})}{\left[\frac{1}{12}(0.020 \text{ m})(0.08 \text{ m})^3\right]} = 340 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Este resultado indica que el acero sigue siendo elástico puesto que el esfuerzo está por debajo del esfuerzo de cedencia (500 MPa).

NOTA: La distribución del esfuerzo normal es no lineal y se muestra en la figura 6-46*b*. Sin embargo, observe que por el principio de Saint-Venant, sección 4.1, estos esfuerzos localizados se suavizan y llegan a ser lineales al desplazarse (aproximadamente) una distancia de 80 mm o más a la derecha de la transición. En este caso, la fórmula de la flexión da $\sigma_{\text{máx}} = 234$ MPa, figura 6-46*c*. Además, tenga en cuenta que la opción de un filete de mayor radio reducirá significativamente $\sigma_{\text{máx}}$, ya que a medida que r aumente en la figura 6-43, K disminuirá.



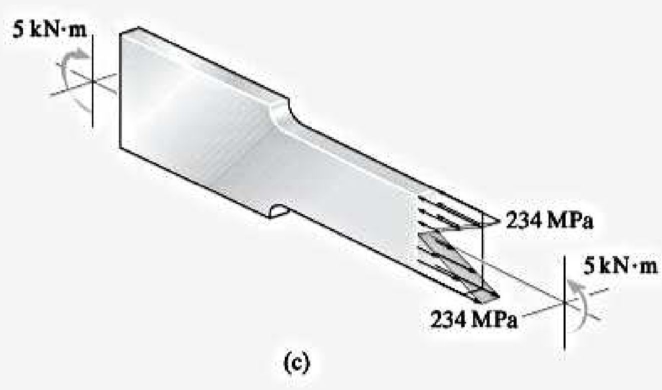
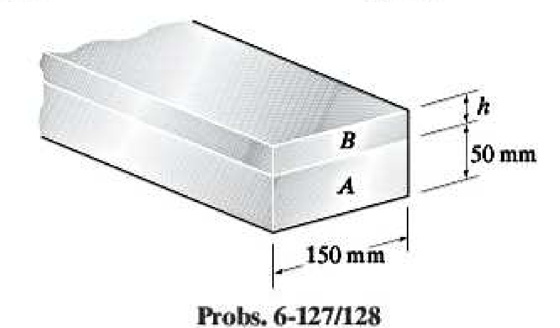


Figura 6-46

PROBLEMAS

6-127. La viga compuesta está fabricada de aluminio 6061-T6 (A) y latón rojo C83400 (B). Determine la dimensión h de la franja de latón de modo que el eje neutro de la viga se ubique en la costura de los dos metales. ¿Qué momento máximo soportará esta viga si el esfuerzo flexionante permisible para el aluminio es $(\sigma_{perm})_{al} = 128$ MPa, y para el latón $(\sigma_{perm})_{br} = 35$ MPa?

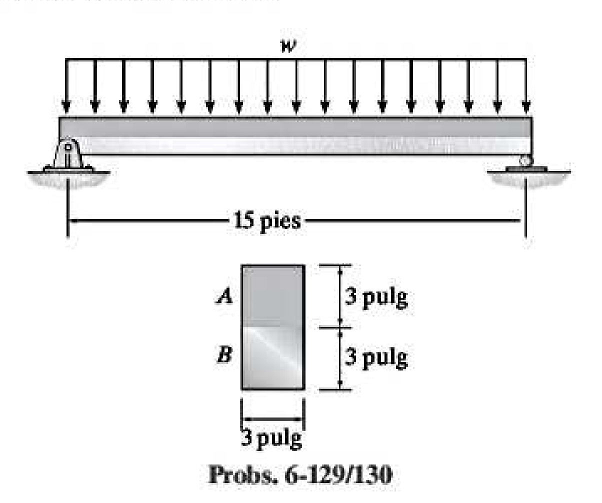
***6-128.** La viga compuesta está fabricada de aluminio 6061-T6 (A) y latón rojo C83400 (B). Si la altura $h = 40$ mm, determine el momento máximo que puede aplicarse a la viga si el esfuerzo flexionante permisible para el aluminio es $(\sigma_{perm})_{al} = 128$ MPa, y para el latón $(\sigma_{perm})_{br} = 35$ MPa.



Probs. 6-127/128

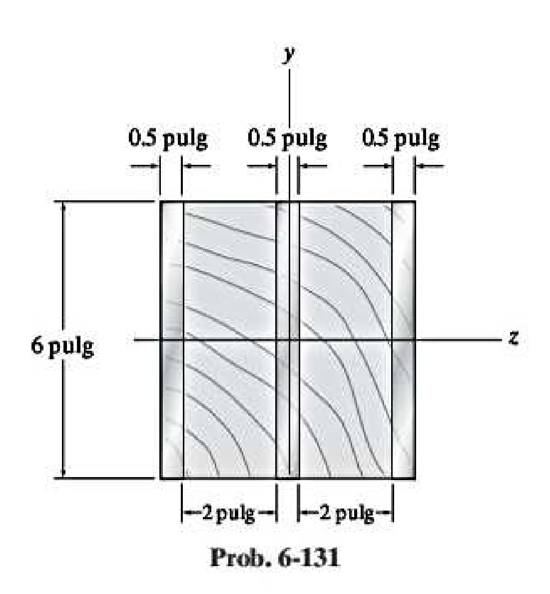
•**6-129.** El segmento A de la viga compuesta está fabricado de una aleación de aluminio 2014-T6 y el segmento B es de acero A-36. Si $w = 0.9$ kip/pie, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto desarrollado en el aluminio y el acero. Dibuje la distribución del esfuerzo en la sección transversal.

6-130. El segmento A de la viga compuesta está fabricado de una aleación de aluminio 2014-T6 y el segmento B es de acero A-36. Si el esfuerzo flexionante permisible para el aluminio y el acero es $(\sigma_{perm})_{al} = 15$ ksi y $(\sigma_{perm})_{ac} = 22$ ksi, determine la intensidad máxima permisible w de la carga uniformemente distribuida.



Probs. 6-129/130

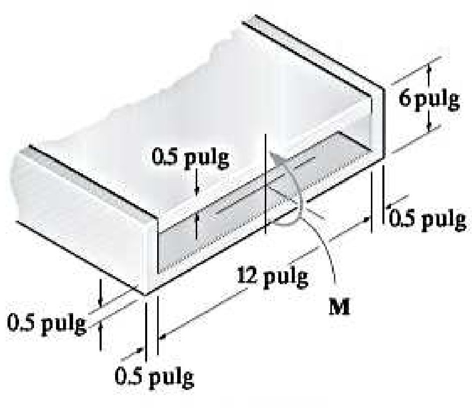
6-131. La viga de abeto Douglas está reforzada con franjas de acero A-36 en su centro y sus lados. Determine el esfuerzo máximo desarrollado en la madera y el acero si la viga está sometida a un momento flexionante de $M_z = 7.50$ kip · pie. Dibuje la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal.



Prob. 6-131

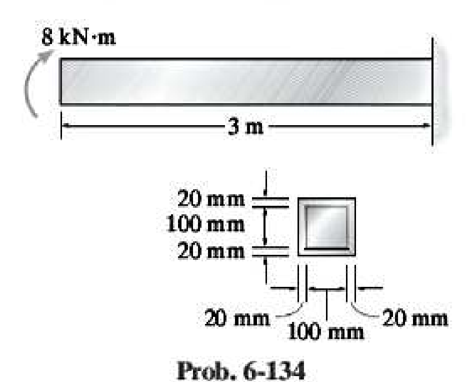
***6-132.** La placa superior está fabricada de aluminio 2014-T6 y se usa para reforzar una viga de plástico Kevlar 49. Determine el esfuerzo máximo en el aluminio y en el Kevlar si la viga está sometida a un momento de $M = 900$ lb · pie.

•**6-133.** La placa superior está fabricada de aluminio 2014-T6 y se usa para reforzar una viga de plástico Kevlar 49. Si el esfuerzo flexionante permisible para el aluminio es $(\sigma_{perm})_{al} = 40$ ksi y para el Kevlar es $(\sigma_{perm})_{k} = 8$ ksi. Determine el momento máximo M que puede aplicarse a la viga.



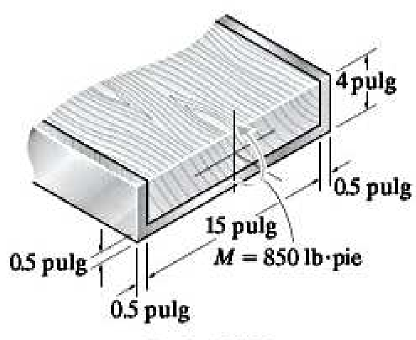
Probs. 6-132/133

6-134. El elemento tiene un núcleo de latón unido a una fundición de acero. Si se aplica un momento de 8 kN · m en su extremo libre, determine el esfuerzo flexionante máximo en el elemento. $E_{br} = 100$ GPa, $E_{ac} = 200$ GPa.



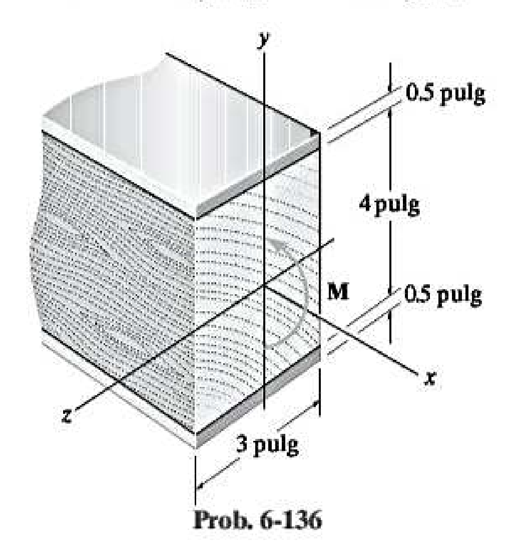
Prob. 6-134

6-135. El canal de acero se usa para reforzar la viga de madera. Determine el esfuerzo máximo en el acero y en la madera si la viga está sometida a un momento de $M = 850$ lb · pie. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $E_w = 1600$ ksi.



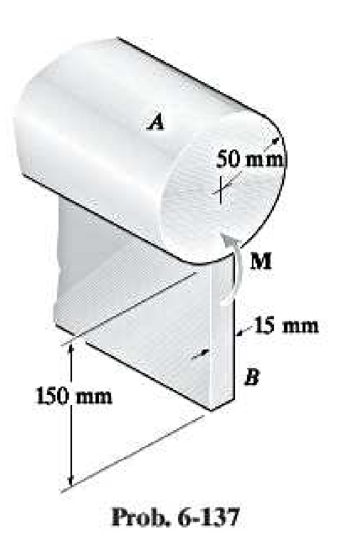
Prob. 6-135

***6-136.** Una viga de abeto blanco se refuerza con franjas de acero A-36 en sus partes superior e inferior, como se muestra en la figura. Determine el momento flexionante M que puede soportar si $(\sigma_{perm})_{ac} = 22$ ksi y $(\sigma_{perm})_w = 2.0$ ksi.



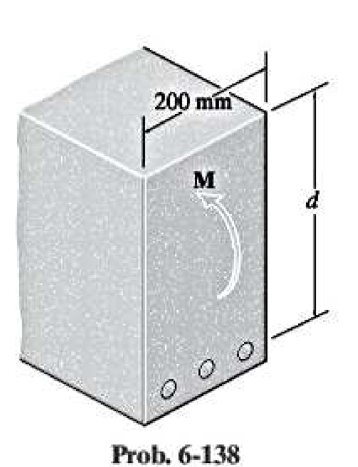
Prob. 6-136

•6-137. Si la viga está sometida a un momento interno de $M = 45$ kN · m, determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en la sección A de acero A 36 y en la sección B de aluminio 2014-T6.



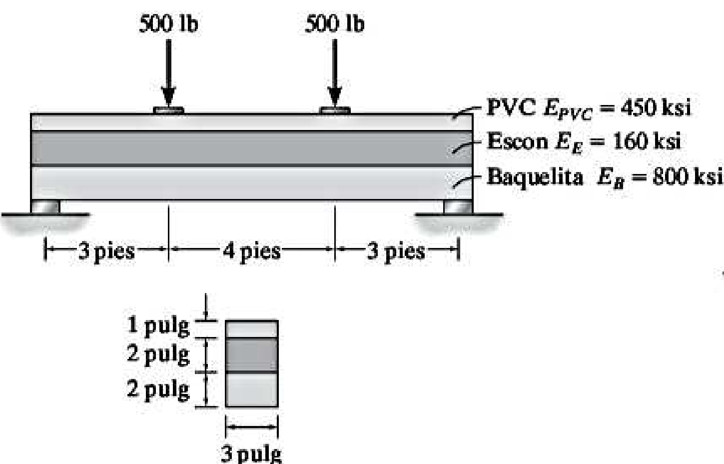
Prob. 6-137

6-138. La viga de concreto está reforzada con tres varillas de acero con un diámetro de 20 mm. Suponga que el concreto no puede soportar cargas de tensión. Si el esfuerzo de compresión permisible para el concreto es $(\sigma_{perm})_{con} = 12.5$ MPa y el esfuerzo permisible de tensión para el acero es $(\sigma_{perm})_{ac} = 220$ MPa, determine la dimensión d requerida para que tanto el concreto como el acero alcancen simultáneamente el esfuerzo permisible. A esta condición se le llama "equilibrada". Además, calcule el correspondiente momento interno máximo permisible **M** que se puede aplicar a la viga. Los módulos de elasticidad para el concreto y el acero son $E_{con} = 25$ GPa y $E_{ac} = 200$ GPa, respectivamente.



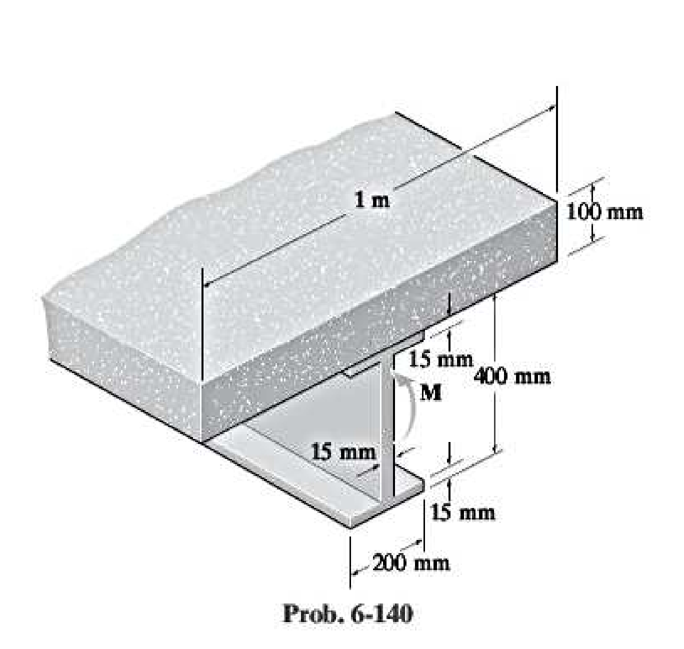
Prob. 6-138

6-139. La viga está fabricada de tres tipos de plástico que se identifican y tienen los módulos de elasticidad mostrados en la figura. Determine el esfuerzo flexionante máximo en el PVC.



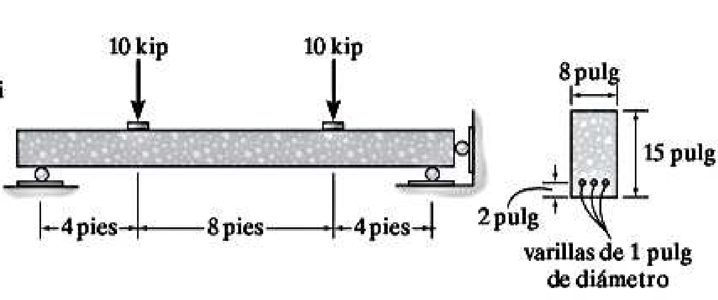
Prob. 6-139

***6-140.** La losa para piso está fabricada de concreto de baja resistencia e incluye una viga I de ala ancha, de acero A-36, unida mediante pernos de corte (no se muestran en la figura) para formar la viga compuesta. Si el esfuerzo flexionante permisible para el concreto es $(\sigma_{perm})_{con} = 10$ MPa, y el esfuerzo flexionante permisible para el acero es $(\sigma_{perm})_{ac} = 165$ MPa, determine el momento interno máximo permisible **M** que puede aplicarse a la viga.



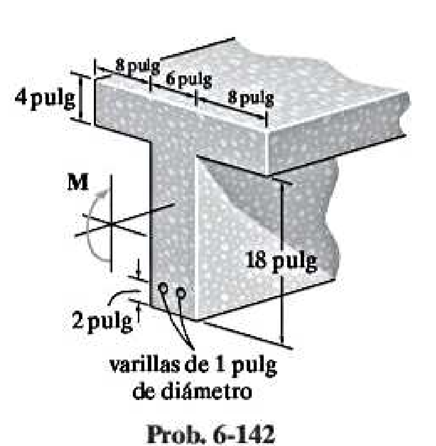
Prob. 6-140

•**6-141.** La viga de concreto reforzado se utiliza para soportar la carga mostrada. Determine el esfuerzo normal máximo absoluto en cada una de las varillas de refuerzo fabricadas con acero A-36 y el esfuerzo de compresión máximo absoluto en el concreto. Suponga que el concreto tiene una alta resistencia a la compresión y no tome en cuenta su resistencia que soporta a tensión.



Prob. 6-141

6-142. La viga de concreto reforzado se fabricó usando dos varillas de acero como refuerzo. Si el esfuerzo de tensión permisible para el acero es $(\sigma_{ac})_{perm} = 40$ ksi y el esfuerzo permisible del concreto a la compresión es $(\sigma_{conc})_{perm} = 3$ ksi, determine el momento M máximo que puede aplicarse a la sección. Suponga que el concreto no puede soportar un esfuerzo de tensión. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $E_{conc} = 3.8(10^3)$ ksi.

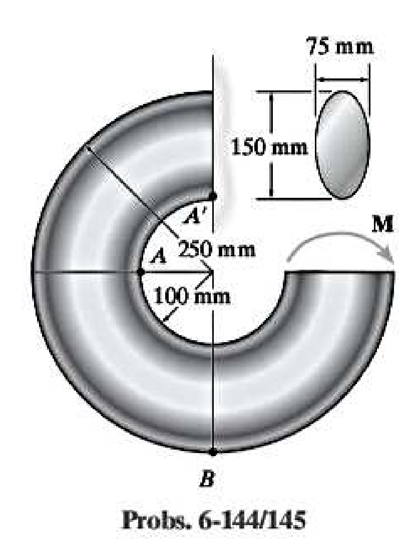


Prob. 6-142

6-143. Para la viga curva de la figura 6-40*a*, demuestre que cuando el radio de curvatura tiende al infinito, la fórmula de la viga curva, ecuación 6-24, se reduce a la fórmula de la flexión, ecuación 6-13.

***6-144.** El elemento tiene una sección transversal elíptica. Si está sometido a un momento de $M = 50$ N · m, determine el esfuerzo en los puntos A y B. ¿El esfuerzo en el punto A', que se encuentra cerca de la pared del elemento, es igual al del punto A? Explique.

•6-145. El elemento tiene una sección transversal elíptica. Si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 125$ MPa, determine el momento máximo M que puede aplicarse al elemento.



Probs. 6-144/145

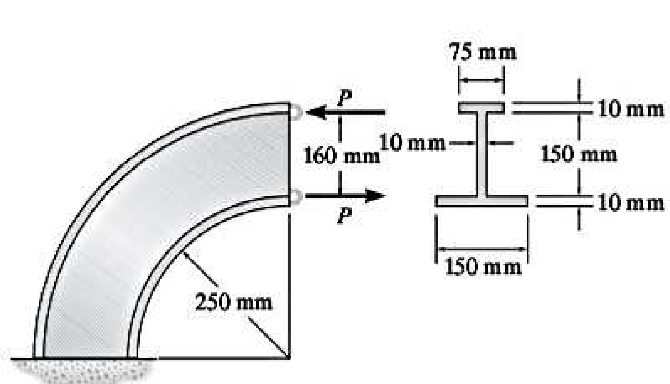
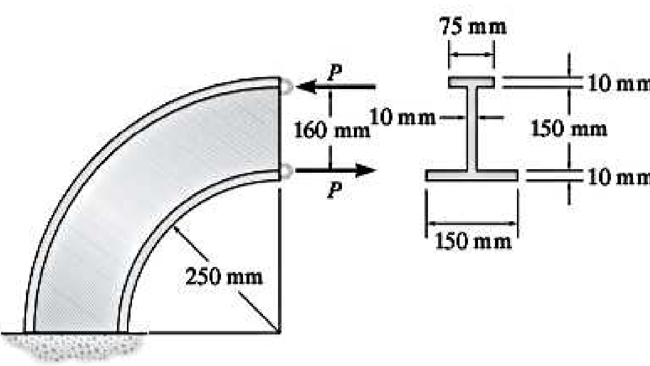
***6-148.** La viga curva está sometida a un momento flexionante de $M = 900$ N · m como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo en los puntos A y B, y muestre el esfuerzo sobre un elemento de volumen situado en cada uno de estos puntos.

•6-149. La viga curva está sometida a un momento flexionante de $M = 900$ N · m. Determine el esfuerzo en el punto C.

Probs. 6-148/149

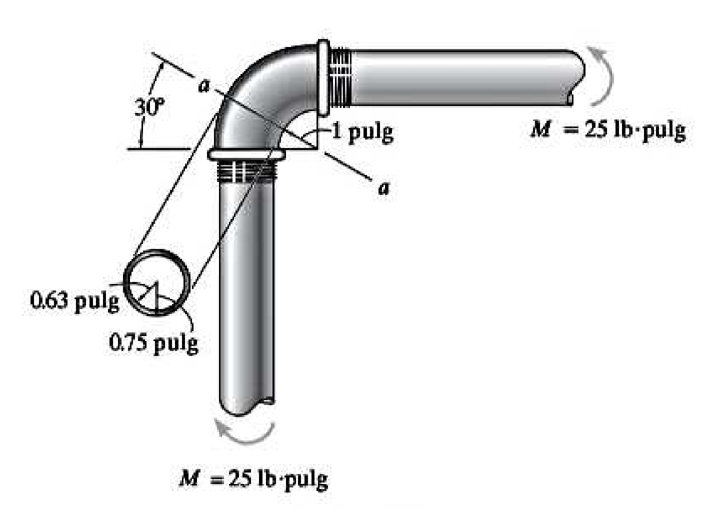
6-146. Determine la mayor magnitud P de las fuerzas aplicadas si el esfuerzo flexionante permisible es $(\sigma_{perm})_c = 50$ MPa en compresión y $(\sigma_{perm})_t = 120$ MPa en tensión.

6-147. Si $P = 6$ kN, determine los esfuerzos flexionantes máximos en tensión y en compresión para la viga.

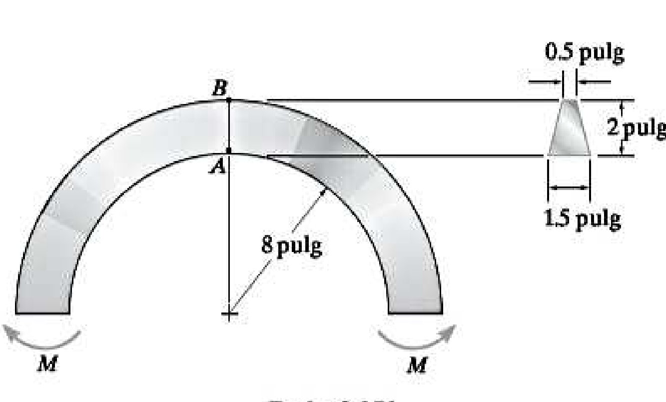
Probs. 6-146/147

6-150. El codo de la tubería tiene un radio exterior de 0.75 pulg y un radio interior de 0.63 pulg. Si el ensamble se somete a los momentos de $M = 25$ lb · pulg, determine el esfuerzo máximo desarrollado en la sección a-a.



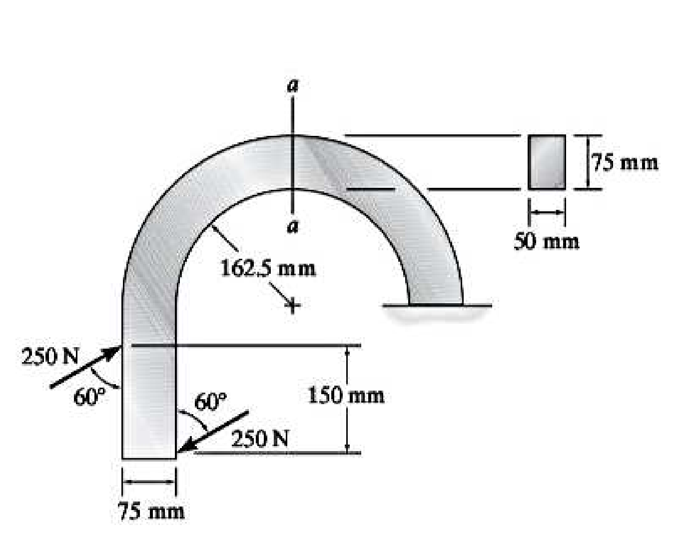
Prob. 6-150

6-151. El elemento curvo es simétrico y se encuentra sometido a un momento de $M = 600$ lb · pie. Determine el esfuerzo flexionante en los puntos A y B del elemento, además muestre el esfuerzo actuando sobre elementos de volumen ubicados en esos puntos.



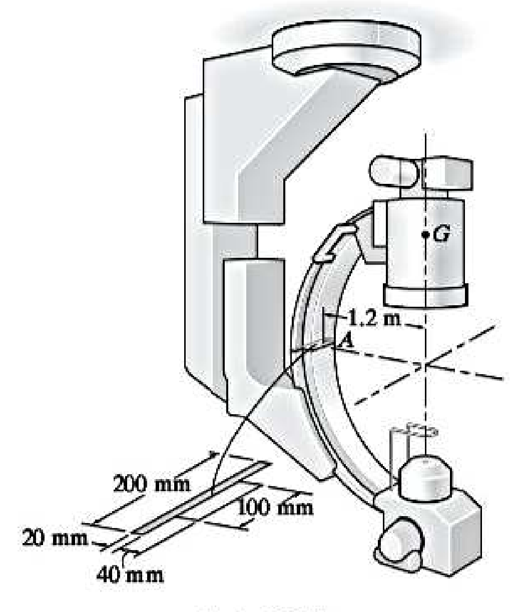
Prob. 6-151

•6-152. La barra curva usada en una máquina tiene una sección transversal rectangular. Si la barra está sometida a un par como el mostrado en la figura, determine los esfuerzos máximos en tensión y en compresión que actúan sobre la sección a-a. Dibuje en tres dimensiones la distribución del esfuerzo sobre la sección.



Prob. 6-152

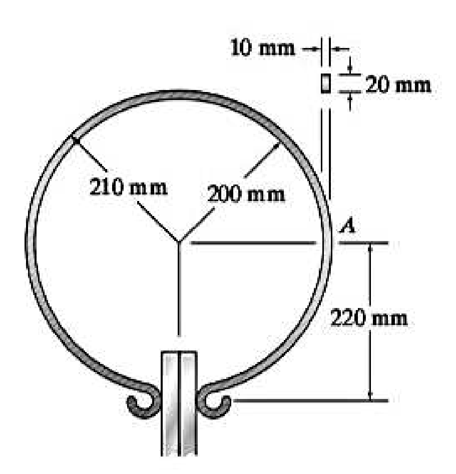
•6-153. El brazo en C suspendido del techo se emplea para sostener una cámara de rayos X usada en diagnósticos médicos. Si la cámara tiene una masa de 150 kg, con su centro de masa en G, determine el esfuerzo flexionante máximo en la sección A.



Prob. 6-153

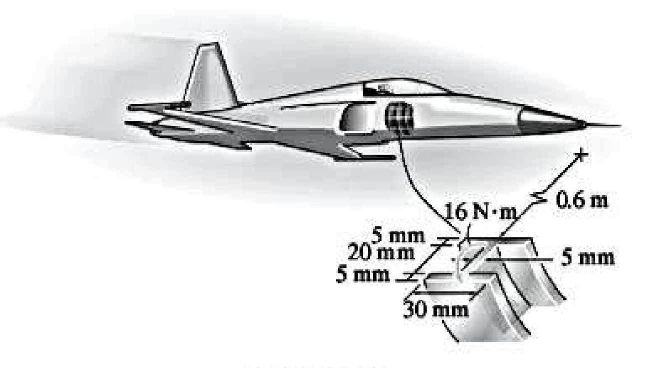
6-154. La pinza circular de resorte produce una fuerza de compresión de 3 N sobre las placas. Determine el esfuerzo flexionante máximo producido en A del resorte. Éste tiene una sección transversal rectangular como se muestra en la figura.

6-155. Determine la fuerza de compresión máxima que la pinza de resorte puede ejercer sobre las placas si el esfuerzo flexionante permisible para la pinza es $\sigma_{perm} = 4$ MPa.



Probs. 6-154/155

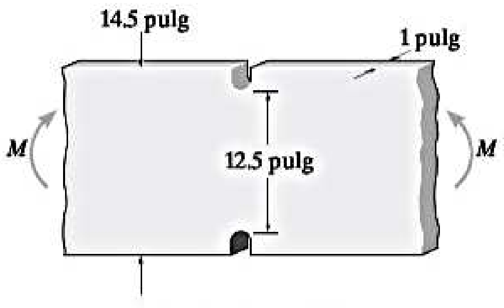
***6-156.** Mientras está en vuelo, la costilla curva del jet se encuentra sometida a un momento esperado de $M = 16$ N · m en la sección. Determine el esfuerzo flexionante máximo en esta sección de la costilla, y dibuje una vista bidimensional de la distribución del esfuerzo.



Prob. 6-156

•6-157. Si el radio de cada muesca en la placa es $r = 0.5$ pulg, determine el mayor momento que puede aplicarse. El esfuerzo flexionante permisible para el material es $\sigma_{perm} = 18$ ksi.

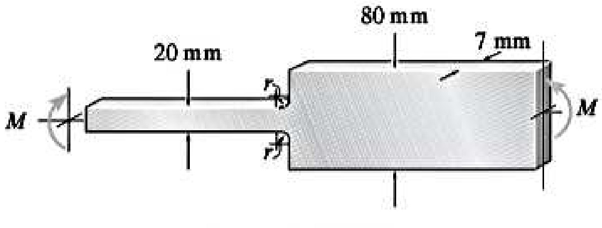
6-158. La placa simétrica con muescas está sometida a flexión. Si el radio de cada muesca es $r = 0.5$ pulg y el momento aplicado es $M = 10$ kip · pie, determine el esfuerzo flexionante máximo en la placa.



Probs. 6-157/158

6-159. La barra está sometida a un momento de $M = 40$ N · m. Determine el menor radio r de los filetes, de tal forma que el esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 124$ MPa no sea superado.

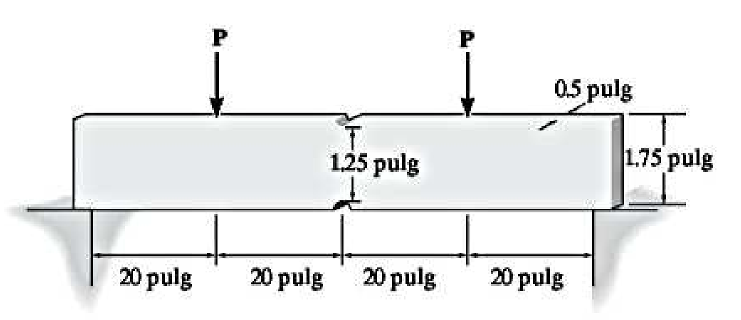
***6-160.** La barra está sometida a un momento de $M = 17.5$ N · m. Si $r = 5$ mm, determine el esfuerzo flexionante máximo en el material.



Probs. 6-159/160

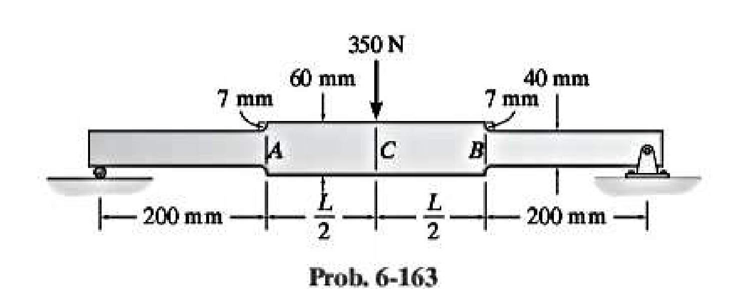
•6-161. La barra con muescas está simplemente apoyada y se somete a dos fuerzas **P**. Determine la mayor magnitud de **P** que puede aplicarse sin ocasionar la cedencia del material. La barra está fabricada de acero A-36 y cada muesca tiene un radio de $r = 0.125$ pulg.

6-162. La barra con muescas está simplemente apoyada y se somete a las dos cargas, cada una con una magnitud de $P = 100$ lb. Determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en la barra y dibuje la distribución del esfuerzo flexionante que actúa sobre la sección transversal en el centro de la barra. Cada muesca tiene un radio de $r = 0.125$ pulg.



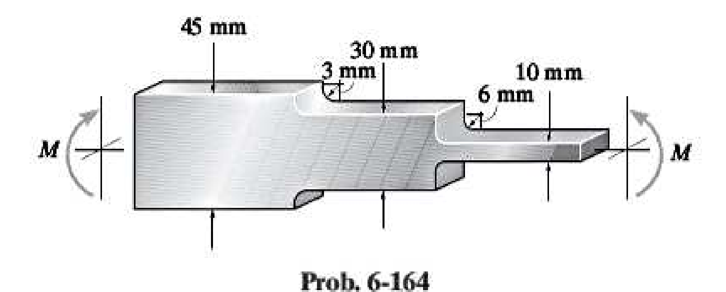
Probs. 6-161/162

6-163. Determine la longitud L de la porción central de la barra de tal forma que los esfuerzos flexionantes máximos en A, B y C sean iguales. La barra tiene un grosor de 10 mm.



Prob. 6-163

***6-164.** La barra escalonada tiene un grosor de 15 mm. Determine el momento máximo que puede aplicarse en sus extremos, si está hecha de un material con un esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 200$ MPa.



Prob. 6-164

6

*6.10 Flexión inelástica

Las ecuaciones para determinar el esfuerzo normal debido a la flexión que se han desarrollado hasta ahora sólo son válidas si el material se comporta de manera elástica lineal. Si el momento aplicado hace que el material *ceda*, entonces debe emplearse un análisis plástico a fin de determinar la distribución del esfuerzo. Para la flexión de elementos rectos deben cumplirse tres condiciones.

Distribución lineal de la deformación normal. Con base sólo en consideraciones geométricas, en la sección 6.3 se demostró que las deformaciones normales siempre varían *linealmente* desde cero en el eje neutro de la sección transversal hasta un valor máximo en el punto más alejado del eje neutro.

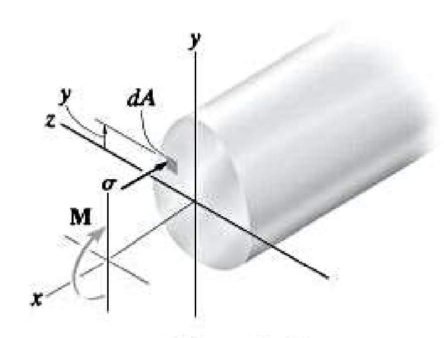


Figura 6-47

Fuerza resultante igual a cero. Como sólo existe un momento interno resultante que actúa sobre la sección transversal, la fuerza resultante causada por la distribución del esfuerzo debe ser igual a cero. Debido a que σ crea una fuerza de $dF = \sigma dA$ sobre el área dA, figura 6-47, entonces para toda el área A de la sección transversal, se tiene

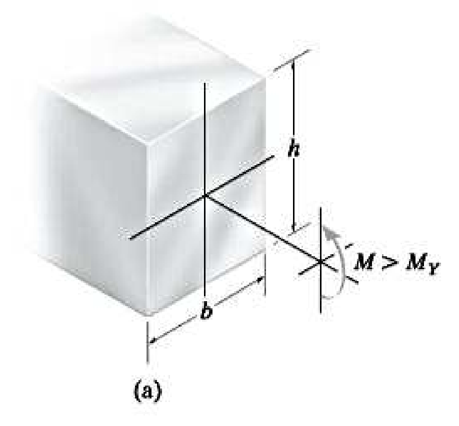
$$F_R = \Sigma F_x; \qquad \int_A \sigma\, dA = 0 \qquad (6\text{-}27)$$

Esta ecuación proporciona un medio para obtener la *ubicación del eje neutro*.

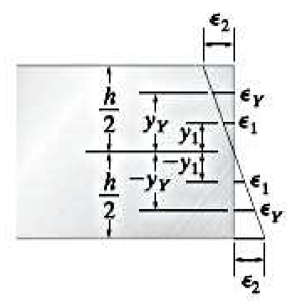
Momento resultante. El momento resultante en la sección debe ser equivalente al momento causado por la distribución del esfuerzo respecto al eje neutro. Como el momento de la fuerza $dF = \sigma\, dA$ alrededor del eje neutro es $dM = y(\sigma\, dA)$, figura 6-47, entonces al sumar los resultados en toda la sección transversal, se obtiene

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \qquad M = \int_A y(\sigma\, dA) \qquad (6\text{-}28)$$

Estas condiciones de geometría y carga se usarán ahora para mostrar la forma de determinar la distribución del esfuerzo en una viga, cuando ésta se encuentra sometida a un momento interno resultante que causa la cedencia del material. A lo largo del análisis se supondrá que el material tiene *el mismo* diagrama de esfuerzo-deformación tanto en tensión como en compresión. Por simplicidad, se considerará primero que la viga tiene un área transversal con dos ejes de simetría; en este caso, un rectángulo con altura h y anchura b, como se muestra en la figura 6-48*a*. Se considerarán dos casos de carga que son de especial interés.



(a)



Distribución de la deformación
(vista de perfil)

(b)

Momento plástico. Algunos materiales, como el acero, tienden a exhibir un comportamiento elástico-perfectamente plástico cuando el esfuerzo en el material llega a σ_Y. Si el momento aplicado $M = M_Y$ es apenas suficiente para producir la cedencia en las fibras superiores e inferiores de la viga como se muestra en la figura 6-48*b*, entonces es posible determinar M_Y usando la fórmula de la flexión $\sigma_Y = M_Y(h/2)/[bh^3/12]$ o bien

$$M_Y = \frac{1}{6}bh^2\sigma_Y \qquad (6\text{-}29)$$

Si el momento interno $M > M_Y$, el material en las partes superior e inferior de la viga comenzará a ceder, lo que ocasiona una redistribución del esfuerzo en la sección transversal hasta que se desarrolla el momento interno M requerido. Si esto causa una distribución del esfuerzo normal como la mostrada en la figura 6-48*b*, entonces la correspondiente distribución normal del esfuerzo se determina a partir del diagrama esfuerzo-deformación de la figura 6-48*c*. Aquí, las deformaciones ϵ_1, ϵ_Y, ϵ_2 corresponden a situaciones de esfuerzo σ_1, σ_Y, σ_2, respectivamente. Cuando éstos y otros esfuerzos como ellos se trazan en la sección transversal, se obtiene la distribución del esfuerzo mostrada en las figuras 6-48*d* o 6-48*e*. Aquí los "bloques" de esfuerzo en tensión y en compresión se componen cada uno de bloques rectangulares y triangulares. Las fuerzas resultantes que producen son equivalentes a sus volúmenes.

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2}y_Y\sigma_Y b$$

$$T_2 = C_2 = \left(\frac{h}{2} - y_Y\right)\sigma_Y b$$

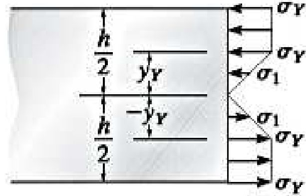
Debido a la simetría, se satisface la ecuación 6-27 y el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal como se muestra en la figura. El momento M aplicado puede relacionarse con el esfuerzo de cedencia σ_Y mediante la ecuación 6-28. A partir de la figura 6-48*e*, se requiere

$$\begin{aligned}
M &= T_1\left(\frac{2}{3}y_Y\right) + C_1\left(\frac{2}{3}y_Y\right) + T_2\left[y_Y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_Y\right)\right] \\
&\quad + C_2\left[y_Y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_Y\right)\right] \\
&= 2\left(\frac{1}{2}y_Y\sigma_Y b\right)\left(\frac{2}{3}y_Y\right) + 2\left[\left(\frac{h}{2} - y_Y\right)\sigma_Y b\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y_Y\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}bh^2\sigma_Y\left(1 - \frac{4}{3}\frac{y_Y^2}{h^2}\right)
\end{aligned}$$

σ
σ_Y
σ_1
ε_1 ε_Y ε_2 ε

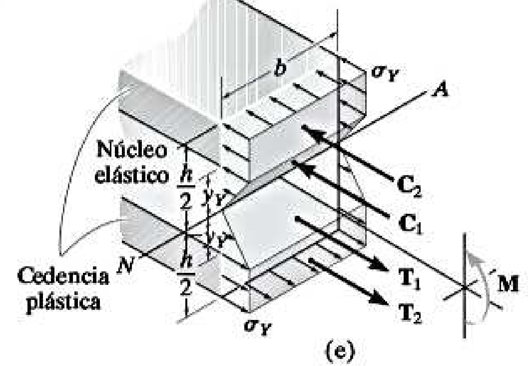
Diagrama esfuerzo-deformación
(región elastoplástica)

(c)



Distribución del esfuerzo
(vista de perfil)

(d)



(e)

Figura 6-48

O si se usa la ecuación 6-29

$$M = \frac{3}{2}M_Y\left(1 - \frac{4}{3}\frac{y_Y^2}{h^2}\right) \quad (6\text{-}30)$$

Como se observa en la figura 6-48*e*, **M** produce dos zonas de cedencia plástica y un núcleo elástico en el elemento. La frontera entre ellos se encuentra a una distancia $\pm y_Y$ del eje neutro. A medida que aumenta la magnitud de **M**, y_Y se aproxima a cero. Esto haría que el material fuese completamente plástico y entonces la distribución del esfuerzo sería similar a la mostrada en la figura 6-48*f*. A partir de la ecuación 6-30 con $y_Y = 0$, o si se encuentran los momentos de los "bloques" de esfuerzo alrededor del eje neutro, es posible escribir este valor límite como

$$M_p = \frac{1}{4}bh^2\sigma_Y \quad (6\text{-}31)$$

Mediante el uso de las ecuaciones 6-29 o 6-30 con $y = 0$, se tiene

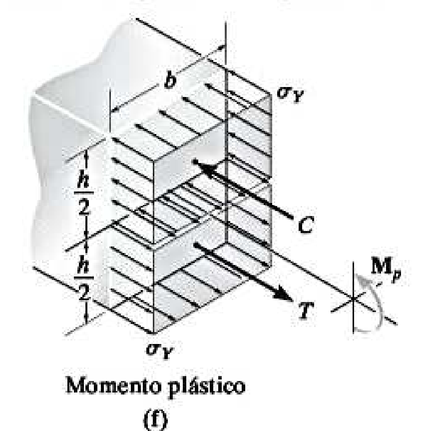
$$M_p = \frac{3}{2}M_Y \quad (6\text{-}32)$$

Este momento se conoce como el ***momento plástico***. Su valor se aplica sólo para una sección rectangular, dado que el análisis depende de la geometría de la sección transversal.

Las vigas usadas en construcciones de acero se diseñan en ocasiones para resistir un momento plástico. Cuando éste es el caso, los códigos suelen listar una característica de diseño para una viga llamada el factor de forma. El ***factor de forma*** se define como la relación

$$\boxed{k = \frac{M_p}{M_Y}} \quad (6\text{-}33)$$

Este valor especifica la capacidad de momento adicional que una viga puede soportar más allá de su momento elástico máximo. Por ejemplo, a partir de la ecuación 6-32, una viga con sección transversal rectangular tiene un factor de forma de $k = 1.5$. Por lo tanto, esta sección soportará un momento flexionante 50 por ciento más grande que su momento elástico máximo cuando se vuelva completamente plástica.



Momento plástico

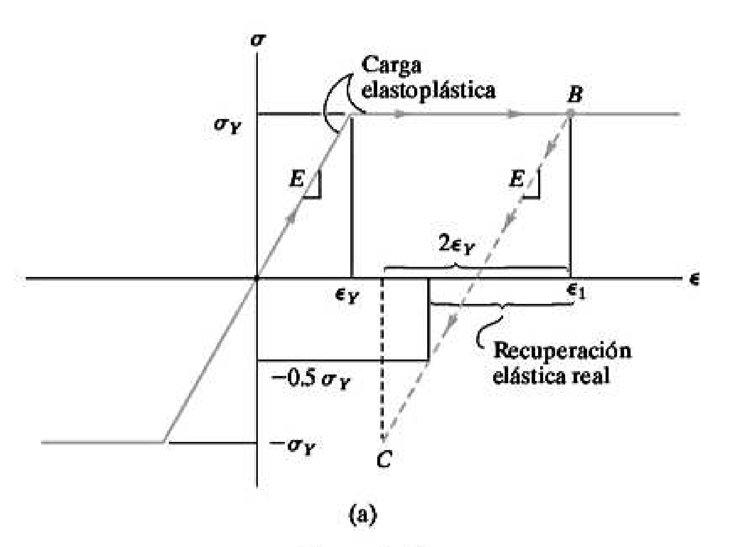
(f)

Figura 6-48 (cont.)

Esfuerzo residual. Cuando el momento plástico se retira de la viga, en ésta se desarrollará un ***esfuerzo residual***. Con frecuencia, este esfuerzo es importante al considerar la fatiga y otros tipos de comportamiento mecánico, por lo cual será necesario analizar un método para calcularlo. Con el fin de explicar cómo se hace esto, se supondrá que M_p ocasiona que el material en las partes superior e inferior de la viga se deforme hasta ϵ_1 ($\gg \epsilon_Y$), como lo demuestra el punto B sobre la curva σ-ϵ en la figura 6-49*a*. Al retirar este momento, el material recuperará parte de la deformación en forma elástica siguiendo la trayectoria discontinua BC. Como esta recuperación es elástica, se puede superponer sobre la distribución del esfuerzo en la figura 6-49*b* una distribución de esfuerzo lineal causada por la aplicación del momento plástico en la dirección opuesta, figura 6-49*c*. Aquí, el esfuerzo máximo denominado ***módulo de ruptura*** para la flexión, σ_r, puede determinarse a partir de la fórmula de la flexión cuando la viga está cargada con el momento plástico. Se tiene

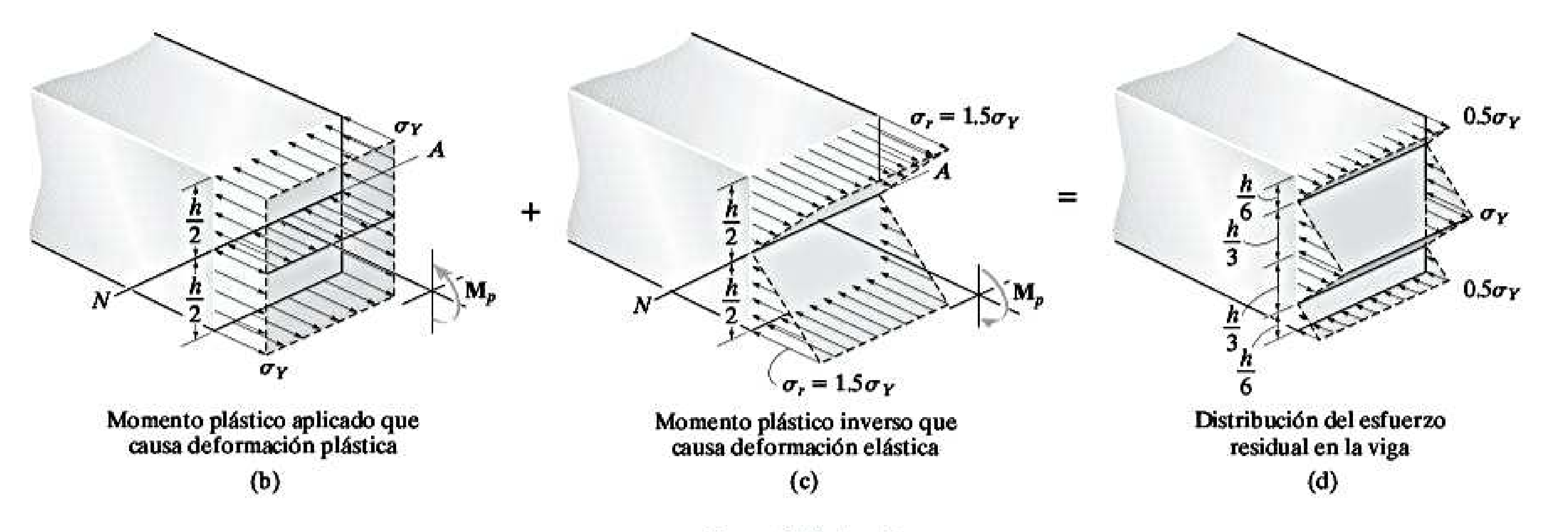
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{M_p\left(\frac{1}{2}h\right)}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}bh^2\sigma_Y\right)\left(\frac{1}{2}h\right)}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)} = 1.5\sigma_Y$$

6



(a)

Figura 6-49



Momento plástico aplicado que causa deformación plástica

(b)

Momento plástico inverso que causa deformación elástica

(c)

Distribución del esfuerzo residual en la viga

(d)

Figura 6-49 (cont)

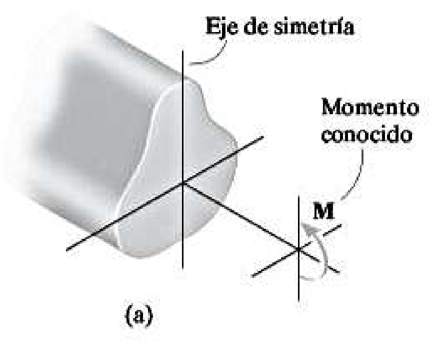
Esta aplicación inversa del momento plástico es posible aquí, puesto que la recuperación elástica máxima de la deformación en las partes superior e inferior de la viga es $2\epsilon_Y$, como se muestra en la figura 6-49*a*. Esto corresponde a un esfuerzo máximo de $2\sigma_Y$ que es mayor al esfuerzo *requerido* de $1.5\sigma_Y$, como se calculó anteriormente, figura 6-49*c*.

La superposición del momento plástico, figura 6-49*b*, y su eliminación, figura 6-49*c*, proporcionan la distribución del esfuerzo residual que se muestra en la figura 6-49*d*. Como ejercicio, utilice el componente "en bloque" triangular que representa esta distribución del esfuerzo y demuestre que se obtiene una fuerza cero y un momento cero sobre el elemento, tal como se requiere.

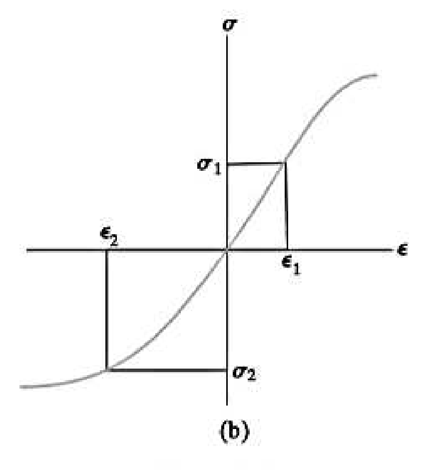
Momento último. Considere ahora el caso más general de una viga con una sección transversal simétrica sólo con respecto al eje vertical, mientras que el momento se aplica alrededor del eje horizontal, figura 6-50*a*. Se supondrá que el material presenta endurecimiento por deformación y que sus diagramas de esfuerzo-deformación en tensión y en compresión son diferentes, figura 6-50*b*.

Si el momento **M** produce la cedencia de la viga, surge una dificultad para encontrar *tanto* la ubicación del eje neutro *como* el esfuerzo máximo que se produce en la viga. Esto se debe a que la sección transversal es asimétrica respecto al eje horizontal y el comportamiento del esfuerzo-deformación del material no es el mismo en tensión que en compresión. Para resolver este problema, un procedimiento de prueba y error requiere los siguientes pasos:

1. Para un momento **M** dado, *suponga* la ubicación del eje neutro y la pendiente de la distribución de la deformación "lineal", figura 6-50*c*.
2. Establezca en forma gráfica la distribución del esfuerzo sobre la sección transversal del elemento usando la curva σ-ϵ para graficar los valores de esfuerzo correspondientes a los valores de la deformación. La distribución del esfuerzo resultante, figura 6-50*d*, tendrá entonces la misma forma que la curva σ-ϵ.

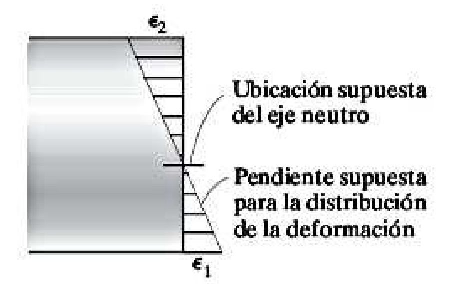


(a)



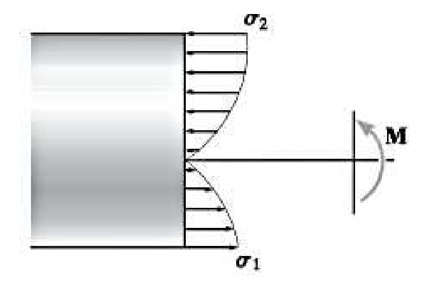
(b)

Figura 6-50



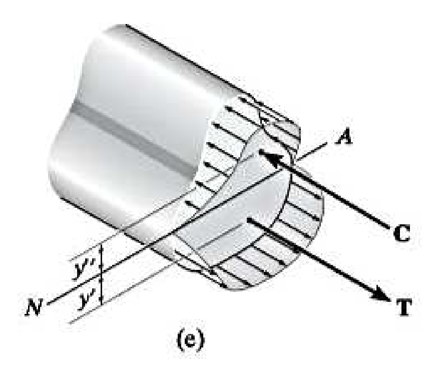
Distribución de la deformación (vista de perfil)

(c)



Distribución del esfuerzo (vista de perfil)

(d)



(e)

Figura 6-50 (cont.)

3. Determine los volúmenes encerrados por los "bloques" de esfuerzo en tensión y en compresión. (Como una aproximación, esto puede requerir la división de cada bloque en sus regiones componentes.) La ecuación 6.27 requiere que los volúmenes de estos bloques sean *iguales*, ya que representan la fuerza de tensión resultante **T** y la fuerza resultante de compresión **C** en la sección de la figura 6-50*e*. Si estas fuerzas son diferentes, debe hacerse un ajuste en cuanto a la *ubicación* del eje neutro (punto de *deformación cero*) y el proceso se debe repetir hasta que se satisfaga la ecuación 6.27 ($T = C$).
4. Una vez que $T = C$, los momentos producidos por **T** y **C** pueden calcularse alrededor del eje neutro. Aquí los brazos de momento para **T** y **C** se miden desde el eje neutro hasta los *centroides de los volúmenes* definidos por las distribuciones de esfuerzo, figura 6-50*e*. La ecuación 6-28 requiere que $M = Ty' + Cy''$. Si esta ecuación no se cumple, la *pendiente* de la *distribución de la deformación* debe ajustarse y los cálculos para T, C y el momento deben repetirse hasta que se logre un resultado satisfactorio.

Como puede observarse, este procedimiento de prueba y error es muy tedioso y, por fortuna, no se realiza con mucha frecuencia en la práctica de la ingeniería. La mayoría de las vigas son simétricas respecto a dos ejes y están construidas con materiales en los que pueden suponerse diagramas de esfuerzo-deformación similares en tensión y en compresión. Cuando esto ocurre, el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal y, por consiguiente, se simplifica el proceso de relacionar la distribución del esfuerzo con el momento resultante.

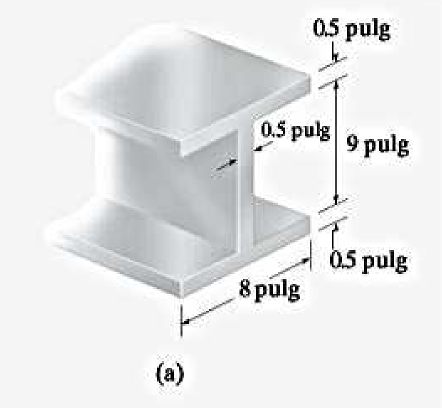
6

Puntos importantes

- La *distribución de la deformación normal* a lo largo de la sección transversal de una viga se basa sólo en consideraciones geométricas y se ha encontrado que siempre permanece *lineal*, sin importar la carga aplicada. Por otra parte, la distribución del esfuerzo normal debe determinarse a partir del comportamiento del material, o del diagrama de esfuerzo-deformación una vez que se ha establecido la distribución de la deformación.
- La *ubicación del eje neutro* se determina a partir de la condición de que la *fuerza resultante* en la sección transversal debe ser *cero*.
- El momento interno resultante en la sección transversal debe ser igual al momento de la distribución del esfuerzo respecto al eje neutro.
- El comportamiento perfectamente plástico supone que la distribución del esfuerzo normal es *constante* a lo largo de la sección transversal, y que la viga continuará doblándose sin un incremento en el momento. Éste se denomina *momento plástico*.

EJEMPLO 6.21

La viga de acero en I de ala ancha tiene las dimensiones mostradas en la figura 6-51*a*. Si está fabricada de un material elástico perfectamente plástico con un límite de elasticidad a la tensión y a la compresión de $\sigma_Y = 36$ ksi, determine el factor de forma para la viga.



SOLUCIÓN

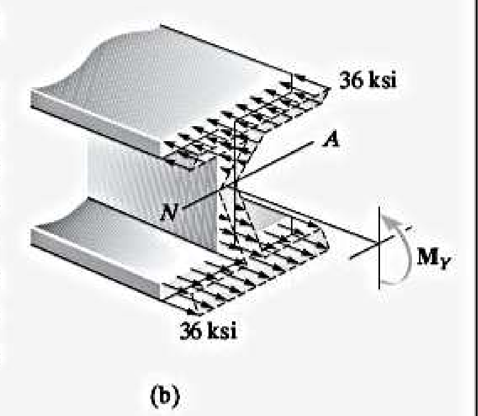
Para determinar el factor de forma, primero es necesario calcular los momentos elástico máximo M_Y y plástico máximo M_p.

Momento elástico máximo. En la figura 6-51*b* se muestra la distribución del esfuerzo normal para el momento elástico máximo. El momento de inercia respecto al eje neutro es

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.5 \text{ pulg})(9 \text{ pulg})^3\right] + 2\left[\frac{1}{12}(8 \text{ pulg})(0.5 \text{ pulg})^3 + 8 \text{ pulg}(0.5 \text{ pulg})(4.75 \text{ pulg})^2\right] = 211.0 \text{ pulg}^4$$

Al aplicar la fórmula de la flexión, se tiene

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \quad 36 \text{ kip/pulg}^2 = \frac{M_Y(5 \text{ pulg})}{211.0 \text{ pulg}^4} \quad M_Y = 1519.5 \text{ kip} \cdot \text{pulg}$$



Momento plástico. El momento plástico hace que el acero ceda en toda la sección transversal de la viga, de modo que la distribución del esfuerzo normal es como el mostrado en la figura 6-51*c*. Debido a la simetría del área de la sección transversal y como los diagramas de esfuerzo-deformación son iguales tanto en tensión como en compresión, el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal. Con el fin de determinar el momento plástico, la distribución del esfuerzo se divide en cuatro "bloques" rectangulares y la fuerza producida por cada "bloque" es igual al volumen de éste. Por lo tanto, se tiene

$$C_1 = T_1 = 36 \text{ kip/pulg}^2\,(0.5 \text{ pulg})(4.5 \text{ pulg}) = 81 \text{ kip}$$
$$C_2 = T_2 = 36 \text{ kip/pulg}^2\,(0.5 \text{ pulg})(8 \text{ pulg}) = 144 \text{ kip}$$

Estas fuerzas actúan a través del *centroide* del volumen para cada bloque. Al calcular los momentos de estas fuerzas respecto al eje neutro, se obtiene el momento plástico:

$$M_p = 2[(2.25 \text{ pulg})(81 \text{ kip})] + 2[(4.75 \text{ pulg})(144 \text{ kip})] = 1732.5 \text{ kip} \cdot \text{pulg}$$

Factor de forma. Si se aplica la ecuación 6-33 resulta

$$k = \frac{M_p}{M_Y} = \frac{1732.5 \text{ kip} \cdot \text{pulg}}{1519.5 \text{ kip} \cdot \text{pulg}} = 1.14 \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Este valor indica que una viga en I de ala ancha ofrece una sección muy eficiente para resistir un *momento elástico*. La mayor parte del momento se desarrolla en las alas, es decir, en los segmentos superior e inferior, mientras que el alma o segmento vertical tiene una contribución muy pequeña. En este caso particular, la viga puede soportar un momento que sólo es 14 por ciento mayor al que puede resistir de manera elástica.

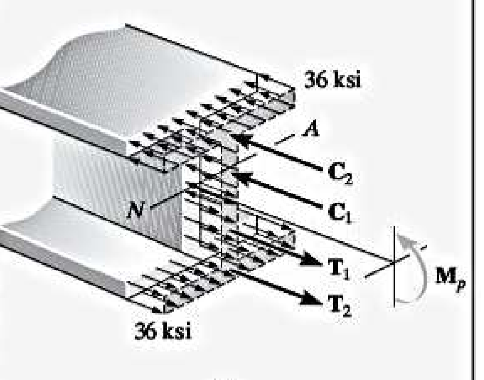
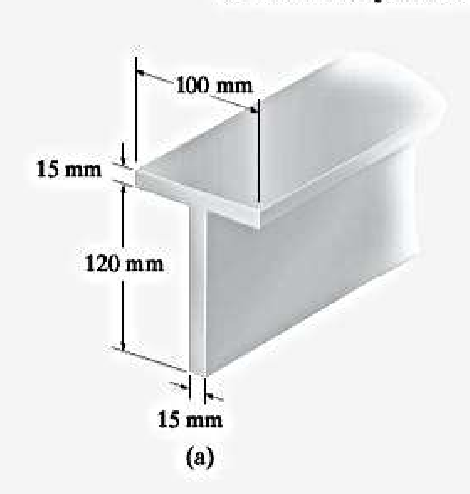


Figura 6-51

6

EJEMPLO 6.22

Una viga T tiene las dimensiones mostradas en la figura 6-52*a*. Si está fabricada de un material elástico perfectamente plástico con un esfuerzo de cedencia en tensión y en compresión de $\sigma_Y = 250$ MPa, determine el momento plástico que puede resistir la viga.



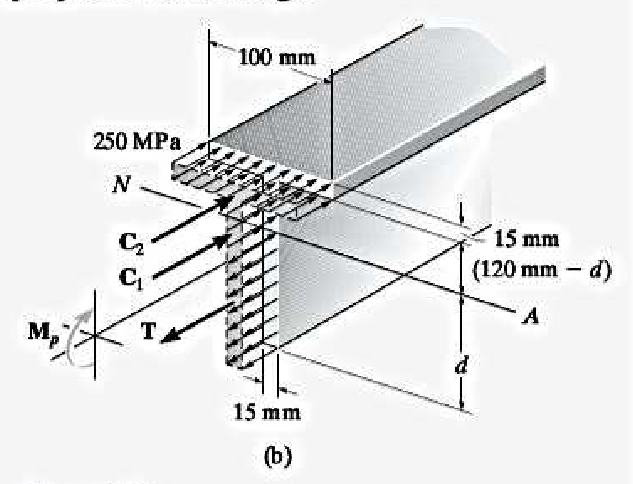


Figura 6-52

SOLUCIÓN

En la figura 6-52*b* se muestra la distribución del esfuerzo "plástico" que actúa sobre la sección transversal de la viga. En este caso, la sección transversal no es simétrica con respecto a un eje horizontal y, en consecuencia, el eje neutro *no* pasará por el centroide de la sección transversal. Para determinar la *ubicación* del eje neutro, d, se requiere una distribución del esfuerzo que produzca una fuerza resultante cero en la sección transversal. Si se supone que $d \leq 120$ mm, se tiene

$$\int_A \sigma\, dA = 0; \qquad T - C_1 - C_2 = 0$$

$$250 \text{ MPa } (0.015 \text{ m})(d) - 250 \text{ MPa } (0.015 \text{ m})(0.120 \text{ m} - d)$$
$$- 250 \text{ MPa } (0.015 \text{ m})(0.100 \text{ m}) = 0$$
$$d = 0.110 \text{ m} < 0.120 \text{ m} \qquad \text{OK}$$

A partir de este resultado, las fuerzas que actúan en cada segmento son

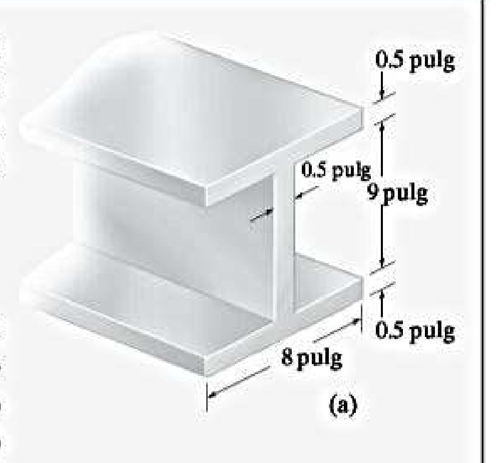
$$T = 250 \text{ MN/m}^2 (0.015 \text{ m})(0.110 \text{ m}) = 412.5 \text{ kN}$$
$$C_1 = 250 \text{ MN/m}^2 (0.015 \text{ m})(0.010 \text{ m}) = 37.5 \text{ kN}$$
$$C_2 = 250 \text{ MN/m}^2 (0.015 \text{ m})(0.100 \text{ m}) = 375 \text{ kN}$$

Por lo tanto, el momento plástico resultante alrededor del eje neutro es

$$M_p = 412.5 \text{ kN}\left(\frac{0.110 \text{ m}}{2}\right) + 37.5 \text{ kN}\left(\frac{0.01 \text{ m}}{2}\right) + 375 \text{ kN}\left(0.01 \text{ m} + \frac{0.015 \text{ m}}{2}\right)$$
$$M_p = 29.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$ *Resp.*

EJEMPLO 6.23

La viga de acero en I de ala ancha que se muestra en la figura 6-53*a* está sometida a un momento completamente plástico $\mathbf{M}_p$. Si se elimina este momento, determine la distribución del esfuerzo residual en la viga. El material es elástico perfectamente plástico y tiene un esfuerzo de cedencia de $\sigma_Y = 36$ ksi.



(a)

SOLUCIÓN

En la figura 6-53*b* se muestra la distribución del esfuerzo normal en la viga causado por $\mathbf{M}_p$. Cuando se retira $\mathbf{M}_p$, el material responde elásticamente. La eliminación de $\mathbf{M}_p$ requiere su aplicación en sentido inverso y, por lo tanto, conduce a la suposición de una distribución del esfuerzo elástico como se muestra en la figura 6-53*c*. El módulo de ruptura σ_r se calcula a partir de la fórmula de la flexión. Si se usa $M_p = 1732.5$ kip · pulg e $I = 211.0$ pulg^4 del ejemplo 6.21, se tiene

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I};$$

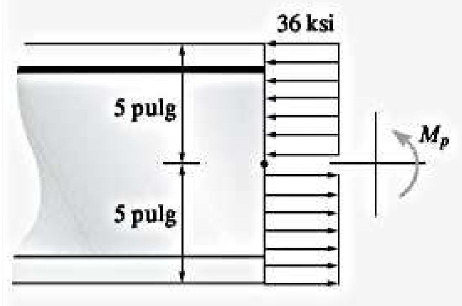
$$\sigma_r = \frac{1732.5 \text{ kip} \cdot \text{pulg } (5 \text{ pulg})}{211.0 \text{ pulg}^4} = 41.1 \text{ ksi}$$

Como era de esperar, $\sigma_r < 2\sigma_Y$.

La superposición de esfuerzos proporciona la distribución del esfuerzo residual mostrada en la figura 6-53*d*. Observe que el punto de esfuerzo normal cero se determinó por proporción, es decir, de acuerdo con las figuras 6-53*b* y 6-53*c*, es necesario que

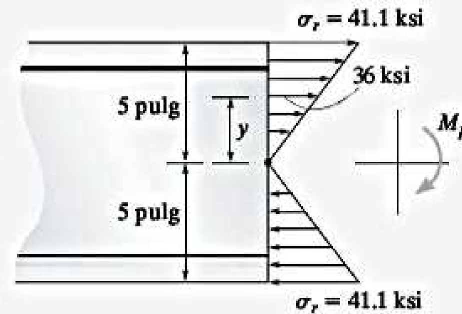
$$\frac{41.1 \text{ ksi}}{5 \text{ pulg}} = \frac{36 \text{ ksi}}{y}$$

$$y = 4.38 \text{ pulg}$$



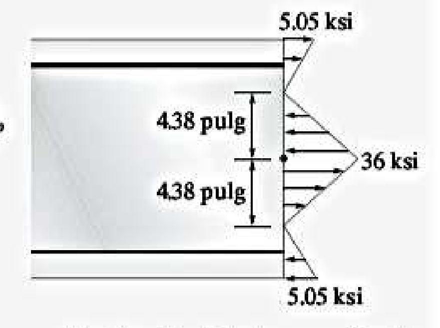
Momento plástico aplicado (vista de perfil)

(b)



Momento plástico invertido (vista de perfil)

(c)



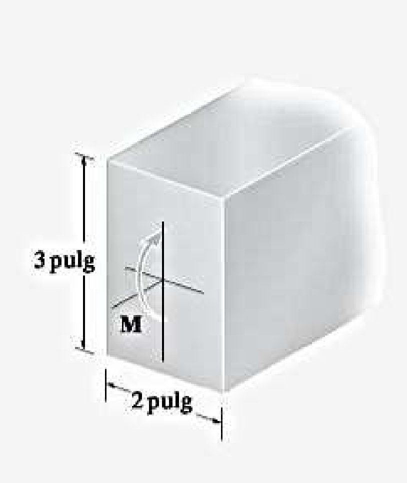
Distribución del esfuerzo residual

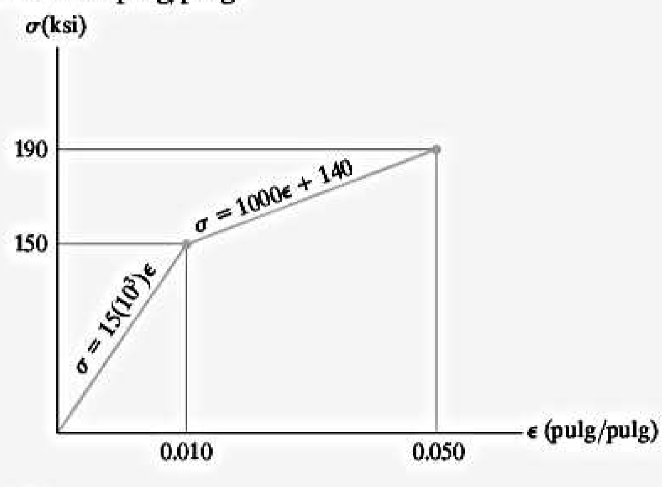
(d)

Figura 6-53

EJEMPLO 6.24

La viga de la figura 6-54*a* está fabricada de una aleación de titanio con un diagrama de esfuerzo-deformación que puede aproximarse parcialmente por medio de dos líneas rectas. Si el comportamiento del material es el *mismo* tanto en tensión como en compresión, determine el momento flexionante que puede aplicarse a la viga y que causará que el material en las partes superior e inferior de la viga esté sometido a una deformación de 0.050 pulg/pulg.





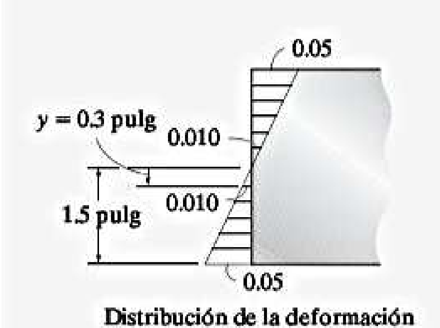
(a)

6

SOLUCIÓN I

Por inspección del diagrama de esfuerzo-deformación, se dice que el material presenta un "comportamiento elastoplástico con endurecimiento por deformación". Como la sección transversal es simétrica y los diagramas σ-ϵ en tensión y en compresión son iguales, el eje neutro debe pasar por el centroide de la sección transversal. La distribución de la deformación, que siempre es lineal, se muestra en la figura 6-54*b*. En particular, el punto donde ocurre la deformación elástica máxima (0.010 pulg/pulg) se determina por proporción, de modo que 0.05/1.5 pulg = $0.010/y$ o $y = 0.3$ pulg.

En la figura 6-54*c*, se muestra la distribución del esfuerzo normal correspondiente que actúa sobre la sección transversal. El momento producido por esta distribución puede calcularse al determinar el "volumen" de los bloques de esfuerzo. Para ello se subdividirá esta distribución en dos bloques triangulares y un bloque rectangular, tanto en las regiones de tensión como en las de compresión, figura 6-54*d*. Como la viga tiene 2 pulg de anchura, las resultantes y su ubicación se determinan de la manera siguiente:



Distribución de la deformación

(b)

Figura 6-54

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2}(1.2\text{ pulg})(40\text{ kip/pulg}^2)(2\text{ pulg}) = 48\text{ kip}$$

$$y_1 = 0.3\text{ pulg} + \frac{2}{3}(1.2\text{ pulg}) = 1.10\text{ pulg}$$

$$T_2 = C_2 = (1.2 \text{ pulg})(150 \text{ kip/pulg}^2)(2 \text{ pulg}) = 360 \text{ kip}$$

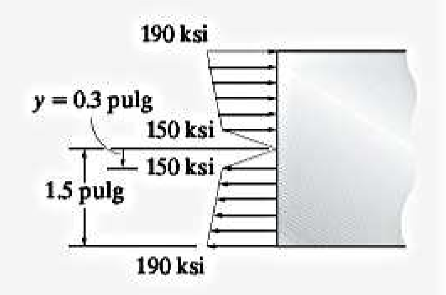
$$y_2 = 0.3 \text{ pulg} + \frac{1}{2}(1.2 \text{ pulg}) = 0.90 \text{ pulg}$$

$$T_3 = C_3 = \frac{1}{2}(0.3 \text{ pulg})(150 \text{ kip/pulg}^2)(2 \text{ pulg}) = 45 \text{ kip}$$

$$y_3 = \frac{2}{3}(0.3 \text{ pulg}) = 0.2 \text{ pulg}$$

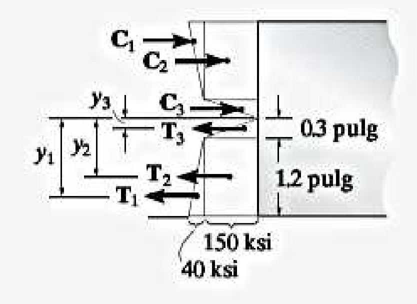
Por lo tanto, el momento producido por esta distribución del esfuerzo normal respecto al eje neutro es

$$M = 2[48 \text{ kip}(1.10 \text{ pulg}) + 360 \text{ kip}(0.90 \text{ pulg}) + 45 \text{ kip}(0.2 \text{ pulg})]$$
$$= 772 \text{ kip}\cdot\text{pulg} \qquad \textit{Resp.}$$



Distribución del esfuerzo

(c)



(d)

SOLUCIÓN II

En vez de utilizar la técnica semigráfica anterior, también es posible encontrar el momento de manera analítica. Para ello es necesario expresar la distribución del esfuerzo de la figura 6-54*c*, en función de la posición y a lo largo de la viga. Observe que $\sigma = f(\epsilon)$ está dada en la figura 6-54*a*. Además, de acuerdo con la figura 6-54*b*, la deformación normal puede determinarse en función de la posición y mediante triángulos semejantes; es decir,

$$\epsilon = \frac{0.05}{1.5}y \qquad 0 \le y \le 1.5 \text{ pulg}$$

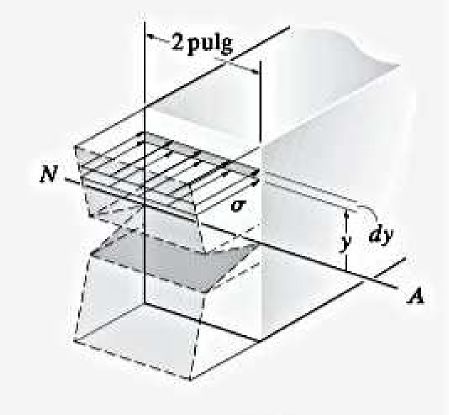
Al sustituir esto en las funciones σ-ϵ mostradas en la figura 6-54a, resulta

$$\sigma = 500y \qquad 0 \le y \le 0.3 \text{ pulg} \qquad (1)$$

$$\sigma = 33.33y + 140 \qquad 0.3 \text{ pulg} \le y \le 1.5 \text{ pulg} \qquad (2)$$

A partir de la figura 6-54*e*, el momento causado por σ que actúa en la franja de área $dA = 2\,dy$ es

$$dM = y(\sigma\, dA) = y\sigma(2\,dy)$$



(e)

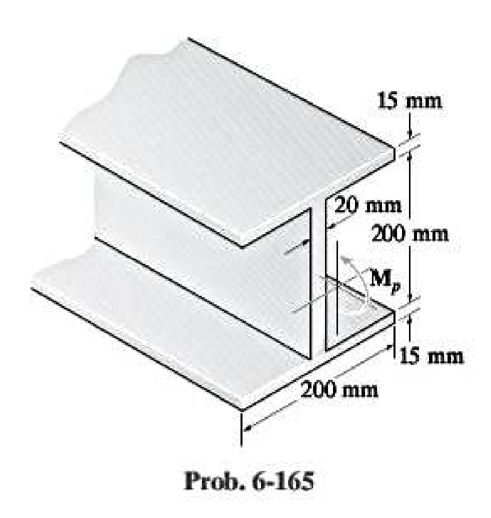
Figura 6-54 (cont.)

Por consiguiente, si se usan las ecuaciones 1 y 2, el momento para toda la sección transversal es

$$M = 2\left[2\int_0^{0.3 \text{ pulg}} 500y^2\, dy + 2\int_{0.3 \text{ pulg}}^{1.5 \text{ pulg}} (33.3y^2 + 140y)\, dy\right]$$
$$= 772 \text{ kip}\cdot\text{pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

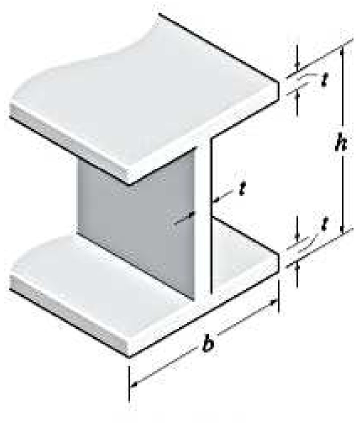
PROBLEMAS

•6-165. La viga está fabricada de un material elastoplástico para el cual $\sigma_Y = 250$ MPa. Determine el esfuerzo residual en las partes superior e inferior de la viga luego de aplicar y retirar el momento plástico $\mathbf{M}_p$.

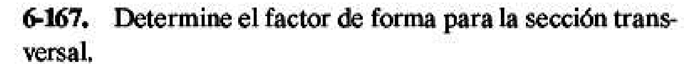


Prob. 6-165

6-166. El elemento I de ala ancha está fabricado con un material elastoplástico. Determine el factor de forma.



Prob. 6-166

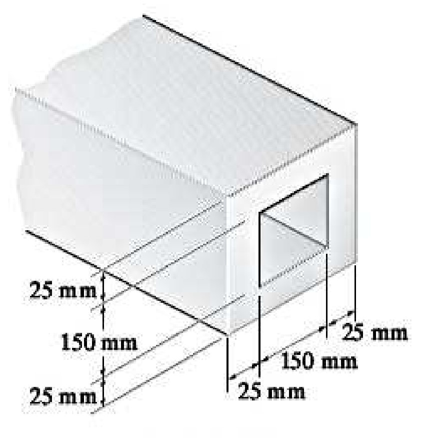


6-167. Determine el factor de forma para la sección transversal.

*6-168. La viga está fabricada de material elástico perfectamente plástico. Determine los momentos elástico máximo y plástico máximo que pueden aplicarse a la sección transversal. Considere $a = 2$ pulg y $\sigma_Y = 36$ ksi.

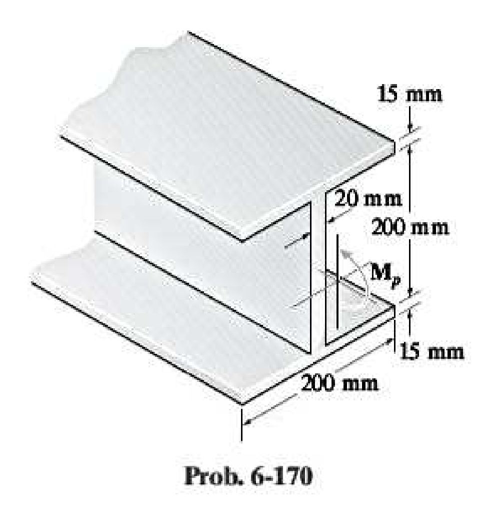
Probs. 6-167/168

•6-169. La viga de caja está fabricada de un material elástico perfectamente plástico para el cual $\sigma_Y = 250$ MPa. Determine el esfuerzo residual en las partes superior e inferior de la viga, luego de aplicar y retirar el momento plástico $\mathbf{M}_p$.



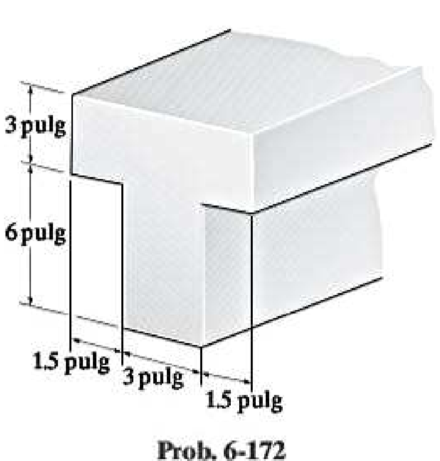
Prob. 6-169

6-170. Determine el factor de forma para la viga I de ala ancha.



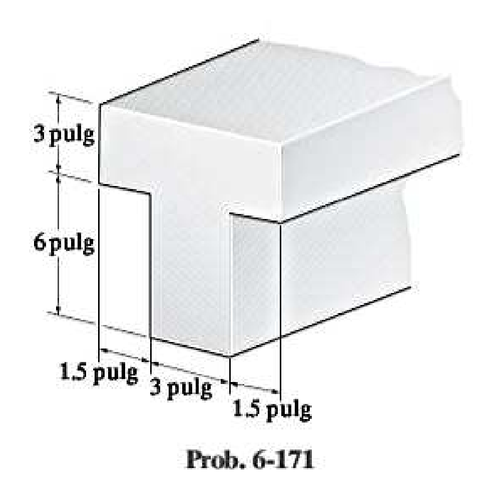
Prob. 6-170

***6-172.** La viga está fabricada de un material elástico perfectamente plástico. Determine los momentos elástico máximo y plástico máximo que pueden aplicarse a la sección transversal. Considere $\sigma_Y = 36$ ksi.



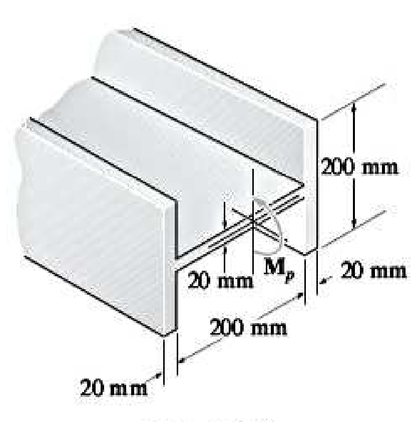
Prob. 6-172

6-171. Determine el factor de forma para la sección transversal de la viga.



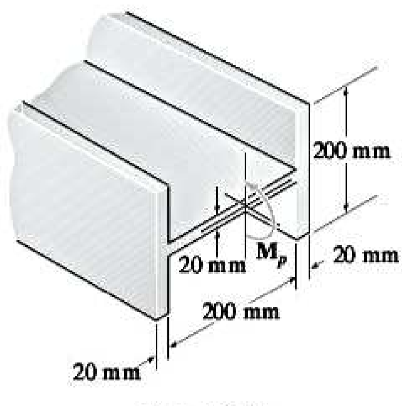
Prob. 6-171

•6-173. Determine el factor de forma para la sección transversal de la viga H.



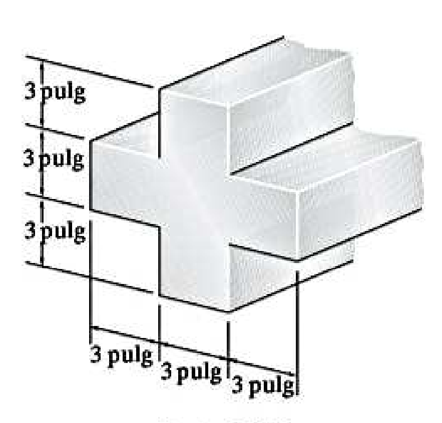
Prob. 6-173

6-174. La viga H está fabricada de un material elastoplástico para el cual $\sigma_Y = 250$ MPa. Determine el esfuerzo residual en las partes superior e inferior de la viga luego de aplicar y retirar el momento plástico $\mathbf{M}_p$.



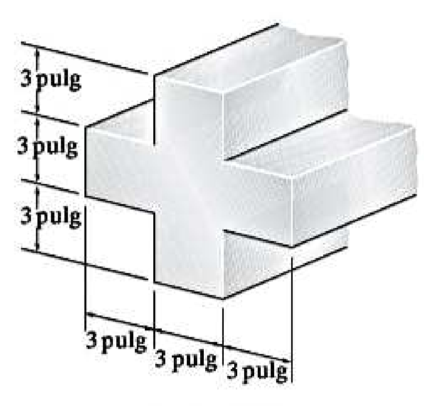
Prob. 6-174

•6-176. La viga está fabricada de un material elástico perfectamente plástico. Determine los momentos elástico máximo y plástico máximo que pueden aplicarse a la sección transversal. Considere $\sigma_Y = 36$ ksi.



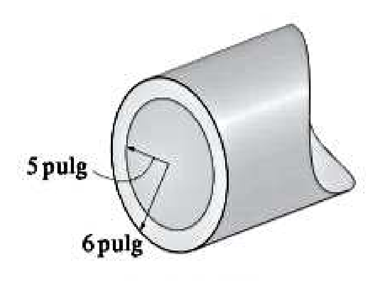
Prob. 6-176

6-175. Determine el factor de forma de la sección transversal.



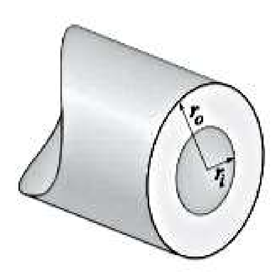
Prob. 6-175

•6-177. Determine el factor de forma para la sección transversal del tubo.



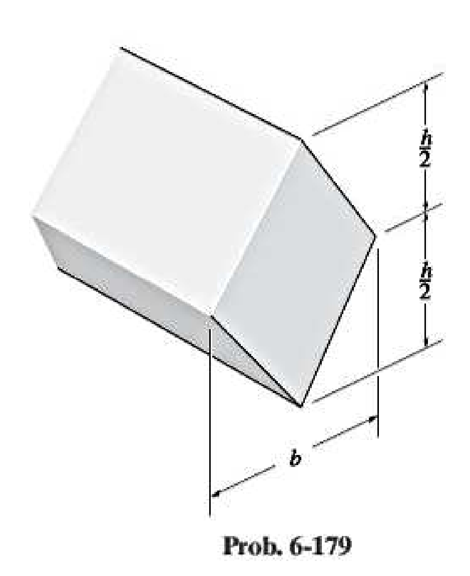
Prob. 6-177

6-178. La viga está fabricada de un material elástico perfectamente plástico. Determine el factor de forma para el tubo con paredes gruesas.



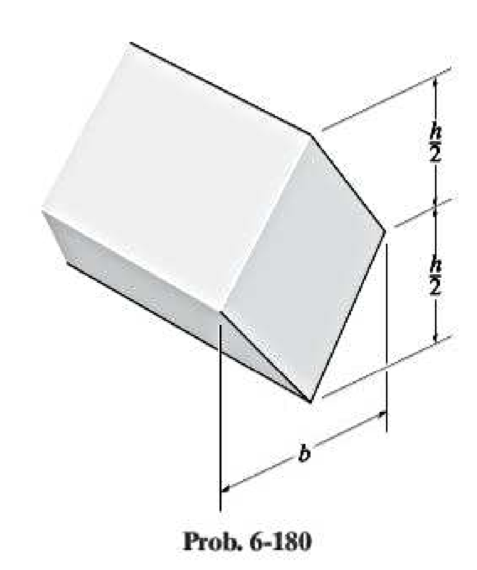
Prob. 6-178

6-179. Determine el factor de forma para el elemento.



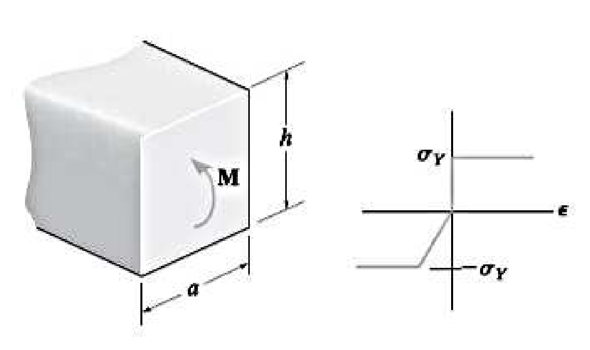
Prob. 6-179

***6-180.** El elemento está fabricado de un material elastoplástico. Determine los momentos elástico máximo y plástico máximo que pueden aplicarse a la sección transversal. Considere $b = 4$ pulg, $h = 6$ pulg, $\sigma_Y = 36$ ksi.



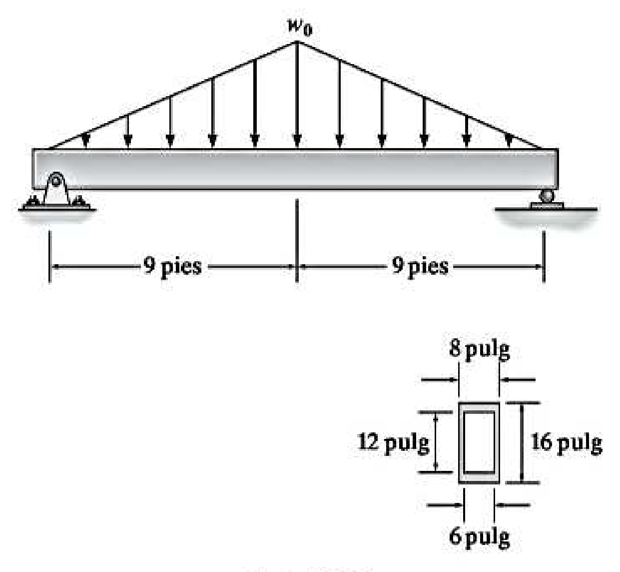
Prob. 6-180

•6-181. La viga está fabricada de un material que puede suponerse perfectamente plástico en tensión y elástico perfectamente plástico en compresión. Determine el momento flexionante máximo M que puede soportar la viga de modo que el material compresivo en el borde exterior comience a ceder.



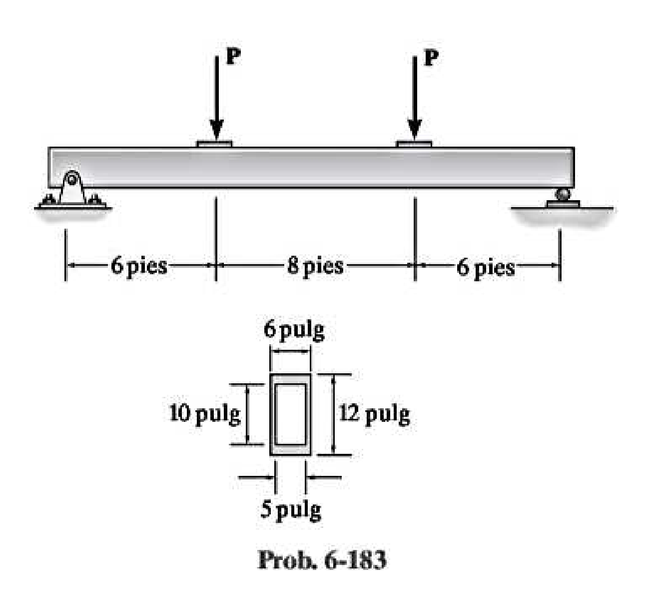
Prob. 6-181

6-182. La viga de caja está fabricada de un material elastoplástico para el cual $\sigma_Y = 25$ ksi. Determine la intensidad de la carga distribuida w_0 que producirá (a) el mayor momento elástico y (b) el mayor momento plástico.



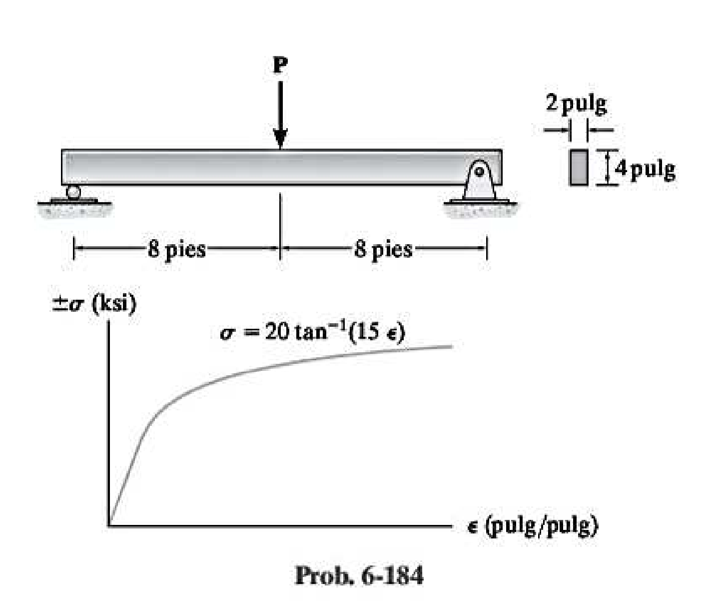
Prob. 6-182

6-183. La viga de caja está fabricada de un material elastoplástico para el cual $\sigma_Y = 36$ ksi. Determine la magnitud de cada fuerza concentrada **P** que producirá (a) el mayor momento elástico y (b) el mayor momento plástico.



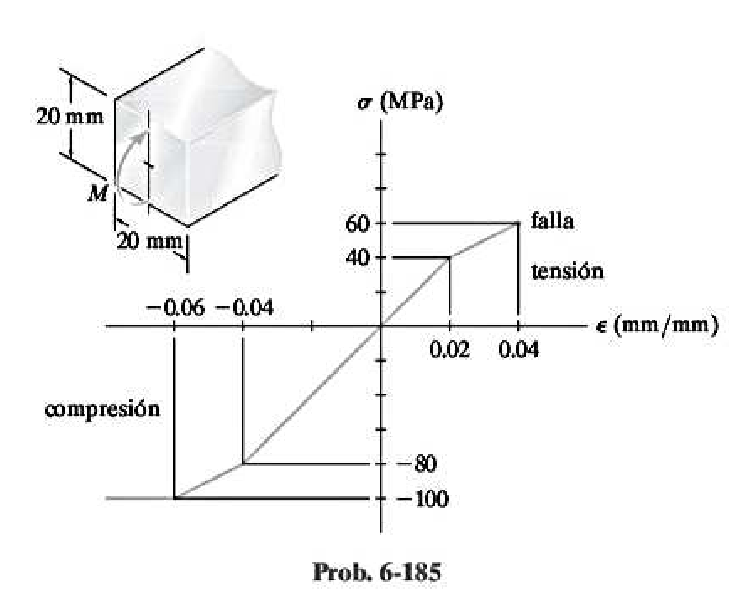
Prob. 6-183

***6-184.** La viga está fabricada de un poliéster que tiene la curva de esfuerzo-deformación mostrada. Si la curva puede representarse mediante la ecuación $\sigma = [20 \tan^{-1}(15\epsilon)]$ ksi, donde $\tan^{-1}(15\epsilon)$ está en radianes, determine la magnitud de la fuerza **P** que puede aplicarse a la viga sin causar que la deformación máxima en sus fibras de la sección crítica exceda $\epsilon_{máx} = 0.003$ pulg/pulg.



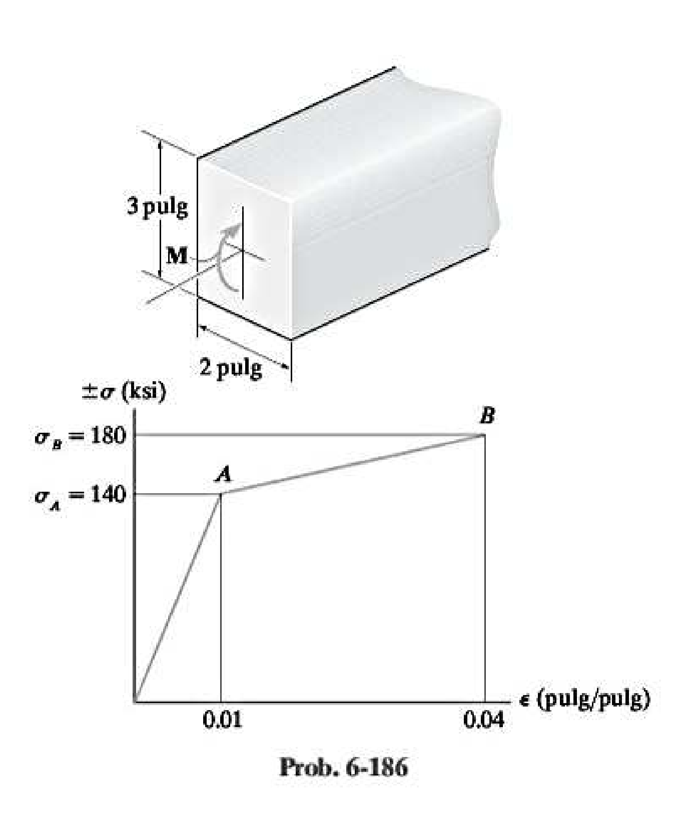
Prob. 6-184

•6-185. La barra de plexiglás tiene una curva de esfuerzo-deformación que puede aproximarse mediante los segmentos de recta mostrados en la figura. Determine el mayor momento M que puede aplicarse a la barra antes de que falle.



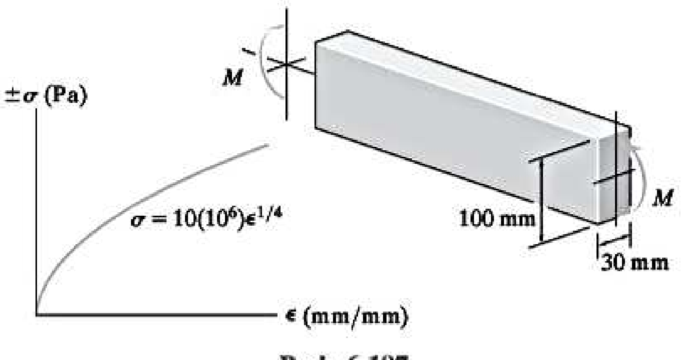
Prob. 6-185

6-186. El diagrama de esfuerzo-deformación para una aleación de titanio puede aproximarse mediante las dos líneas rectas. Si un puntal fabricado con este material se encuentra sometido a flexión, determine el momento resistido por el puntal si el esfuerzo máximo alcanza un valor de (a) σ_A y (b) σ_B.



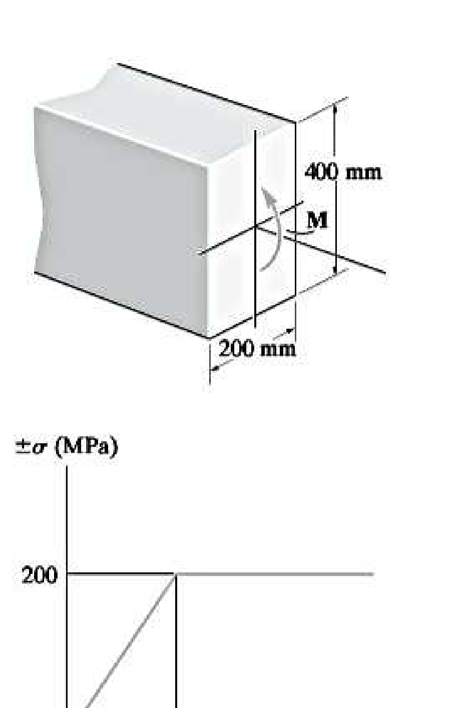
Prob. 6-186

6-187. Una viga está fabricada de plástico polipropileno y tiene un diagrama de esfuerzo-deformación que puede aproximarse mediante la curva que se muestra en la figura. Si la viga se somete a una deformación máxima en tensión y en compresión de $\epsilon = 0.02$ mm/mm, determine el momento máximo M.



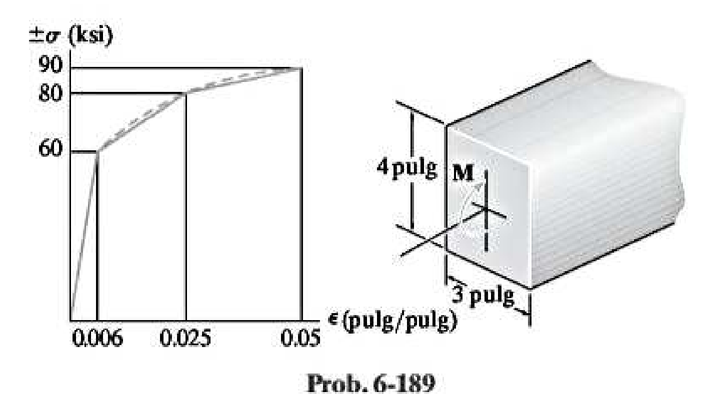
Prob. 6-187

***6-188.** La viga tiene una sección transversal rectangular y está fabricada de un material elastoplástico con un diagrama de esfuerzo-deformación como el mostrado en la figura. Determine la magnitud del momento **M** que debe aplicarse a la viga, con el fin de crear una deformación máxima en sus fibras exteriores de $\epsilon_{\text{máx}} = 0.008$.



Prob. 6-188

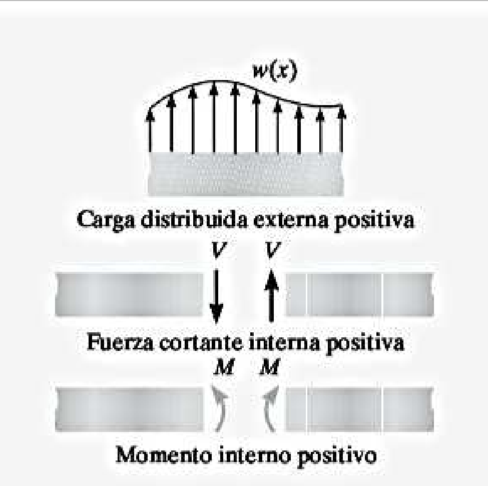
•**6-189.** La barra está fabricada de una aleación de aluminio con un diagrama de esfuerzo-deformación que puede aproximarse mediante los segmentos de recta mostrados. Si se supone que este esquema es el mismo tanto en tensión como en compresión, determine el momento que soportará la barra si la deformación máxima en las fibras superiores e inferiores de la viga es $\epsilon_{\text{máx}} = 0.03$.



Prob. 6-189

REPASO DE CAPÍTULO

Los diagramas de fuerza cortante y de momento son representaciones gráficas de la fuerza cortante y el momento internos dentro de una viga. Pueden construirse al seccionar la viga a una distancia arbitraria x desde el extremo izquierdo, usar las ecuaciones de equilibrio para encontrar V y M como funciones de x y, por último, graficar los resultados. Es necesario seguir una convención de signos para los valores positivos de la carga distribuida, la fuerza cortante y el momento.



También es posible trazar los diagramas de fuerza cortante y de momento al observar que, en cada punto, la pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a la intensidad de la carga distribuida en el punto.

$$w = \frac{dV}{dx}$$

Del mismo modo, la pendiente del diagrama de momento es igual a la fuerza cortante en el punto.

$$V = \frac{dM}{dx}$$

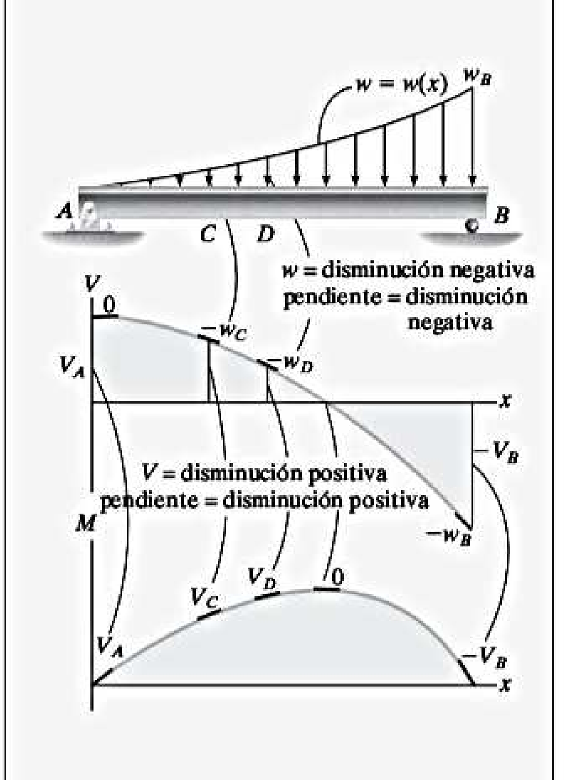
El área bajo el diagrama de carga distribuida entre los puntos representa el cambio en la fuerza cortante.

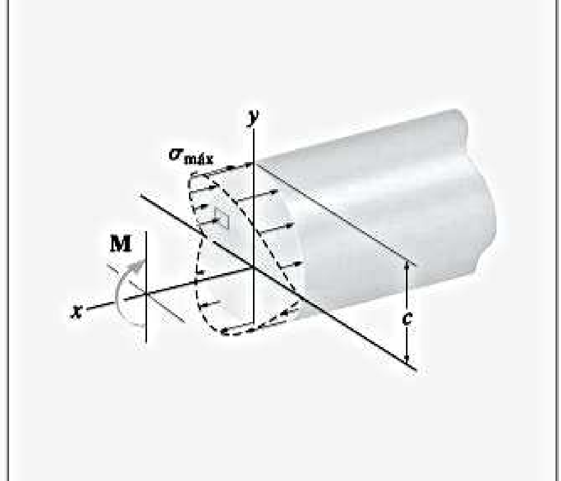
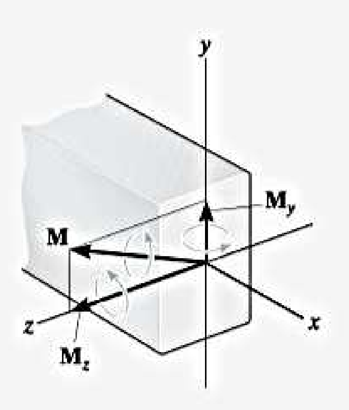
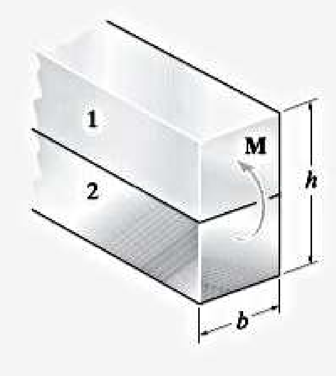
$$\Delta V = \int w\, dx$$

El área bajo el diagrama de fuerza cortante representa el cambio en el momento.

$$\Delta M = \int V\, dx$$

La fuerza cortante y el momento en cualquier punto pueden obtenerse mediante el método de las secciones. El momento máximo (o mínimo) ocurre donde la fuerza cortante es cero.

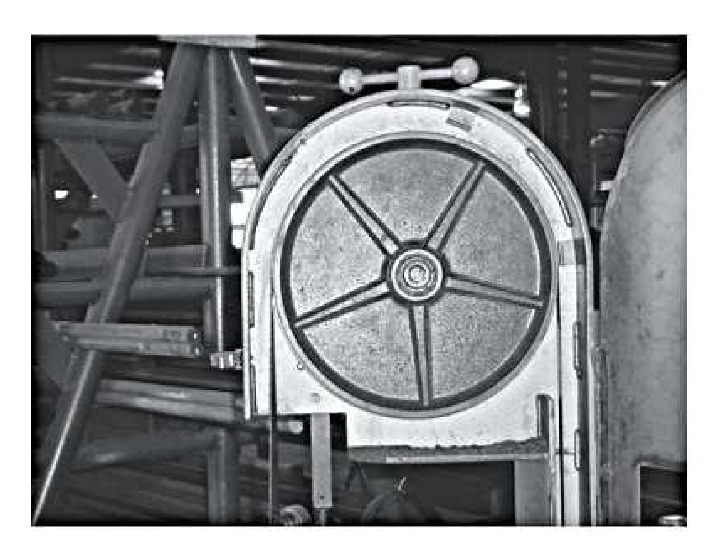


Un momento flexionante tiende a producir una variación lineal de la deformación normal dentro de una viga recta. Siempre que el material sea homogéneo y elástico lineal, el equilibrio puede utilizarse para relacionar el momento interno en la viga con la distribución del esfuerzo. El resultado es la fórmula de la flexión, $$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}$$ donde I y c se determinan desde el eje neutro que pasa por el centroide de la sección transversal.		
Si el área de la sección transversal de la viga no es simétrica respecto a un eje que es perpendicular al eje neutro, entonces se producirá una flexión asimétrica. El esfuerzo máximo puede determinarse con base en fórmulas, o el problema se puede resolver considerando la superposición de la flexión provocada por las componentes del momento $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ respecto a los ejes principales de inercia para el área.	$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$	
Las vigas fabricadas de materiales compuestos pueden "transformarse" para que su sección transversal se considere como si estuviera fabricada con un solo material. Para ello, el factor de transformación n, que es una relación de los módulos de elasticidad de los materiales, se utiliza para cambiar la anchura b de la viga. Una vez que la sección transversal se transforma, la tensión en la viga puede determinarse de la forma habitual mediante la fórmula de la flexión.	$$n = \frac{E_1}{E_2}$$	

6

Las vigas curvas se deforman de tal modo que el esfuerzo normal no varía linealmente desde el eje neutro. Siempre que el material sea homogéneo, elástico lineal y que tenga una sección transversal con un eje de simetría, puede usarse la fórmula de la viga curva para determinar el esfuerzo flexionante.	$\sigma = \dfrac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)}$ o $\sigma = \dfrac{My}{Ae(R - y)}$	
En los elementos que tienen un cambio abrupto en su sección transversal se producen concentraciones de esfuerzo, por ejemplo, causadas por orificios o muescas. El esfuerzo flexionante máximo en estos sitios se determina mediante un factor de concentración del esfuerzo K, que se encuentra a partir de las gráficas surgidas de la experimentación.	$\sigma_{\text{máx}} = K\dfrac{Mc}{I}$	
Si el momento flexionante ocasiona que el esfuerzo en el material exceda su límite elástico, entonces la deformación normal seguirá siendo lineal; sin embargo, la distribución del esfuerzo variará de acuerdo con el diagrama de esfuerzo-deformación. Los momentos plástico y último que soporta la viga pueden determinarse mediante las condiciones de que la fuerza resultante debe ser cero y el momento resultante debe ser equivalente al momento de la distribución del esfuerzo.		
Si un momento plástico o último aplicado sobre un elemento se retira, el material responderá elásticamente y se inducirán esfuerzos residuales en la viga.		

PROBLEMAS CONCEPTUALES



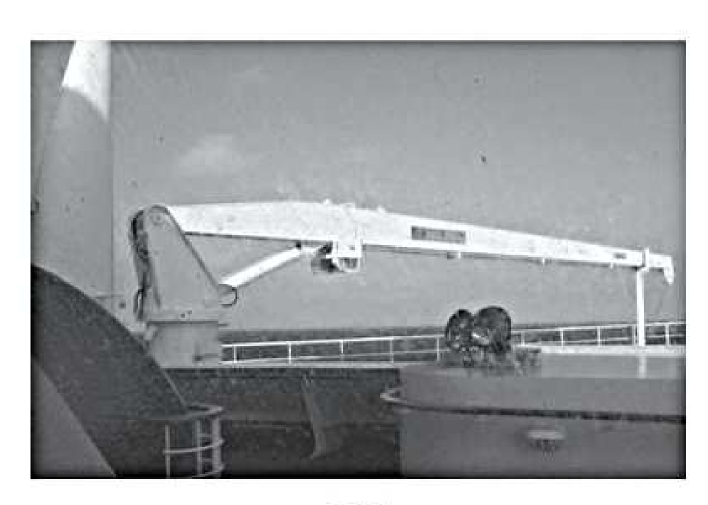
P6-1

P6-1. La sierra de acero pasa sobre la rueda motriz de la sierra de banda. Usando las mediciones y los datos apropiados, explique cómo se determina el esfuerzo flexionante en la hoja de la sierra.



P6-3

P6-3. Vientos huracanados ocasionaron la falla de esta señal de carretera al doblar los tubos de apoyo en sus conexiones con la columna. Si se supone que los tubos están fabricados de acero A-36, utilice dimensiones razonables para la señal y los tubos, y trate de estimar la menor presión uniforme del viento que actúa sobre la cara de la señal y que causó la cedencia de los tubos.



P6-2

P6-2. Este brazo de grúa en un barco tiene un momento de inercia que varía en toda su longitud. Dibuje el diagrama de momento para el brazo a fin de explicar por qué tiene el ahusamiento mostrado.



(a)



(b)

P6-4

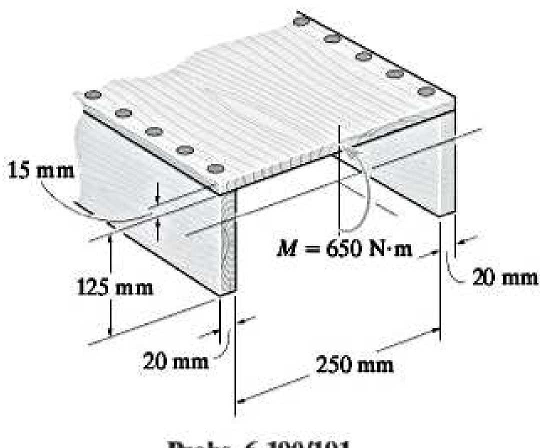
P6-4. Estas tijeras de jardín fueron fabricadas con un material inferior. Utilice una carga de 50 lb aplicada en forma normal a las hojas y dimensiones apropiadas para las tijeras, a fin de determinar el esfuerzo flexionante máximo absoluto del material y demostrar por qué se produjo la falla en el punto crítico del mango.

6

PROBLEMAS DE REPASO

6-190. La viga está fabricada de tres tablones clavados entre sí, como se muestra en la figura. Si el momento que actúa sobre la sección transversal es $M = 650$ N · m, determine la fuerza resultante que produce el esfuerzo flexionante en el tablón superior.

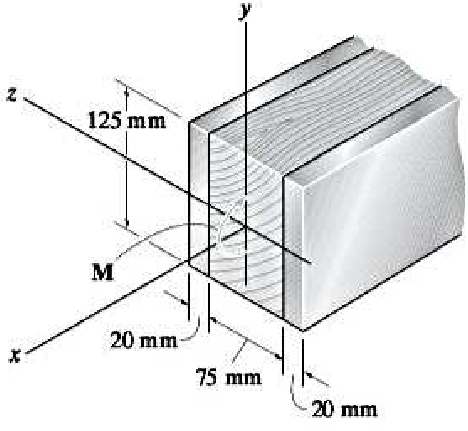
6-191. La viga está fabricada de tres tablones clavados entre sí, como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo máximo en tensión y en compresión para la viga.



Probs. 6-190/191

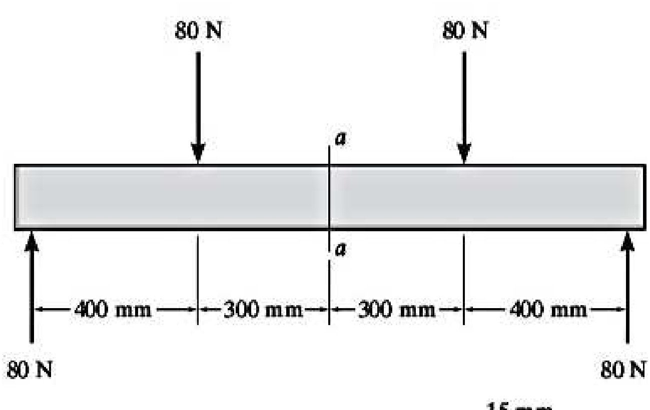
•6-193. La viga compuesta consta de un núcleo de madera y dos placas de acero. Si el esfuerzo flexionante permisible para la madera es $(\sigma_{perm})_w = 20$ MPa y para el acero es $(\sigma_{perm})_{ac} = 130$ MPa, determine el momento máximo que puede aplicarse a la viga. $E_w = 11$ GPa, $E_{ac} = 200$ GPa.

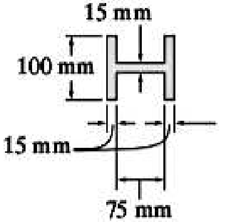
6-194. Resuelva el problema 6-193 si el momento se aplica alrededor del eje y en vez del eje z, como se muestra en la figura.



Probs. 6-193/194

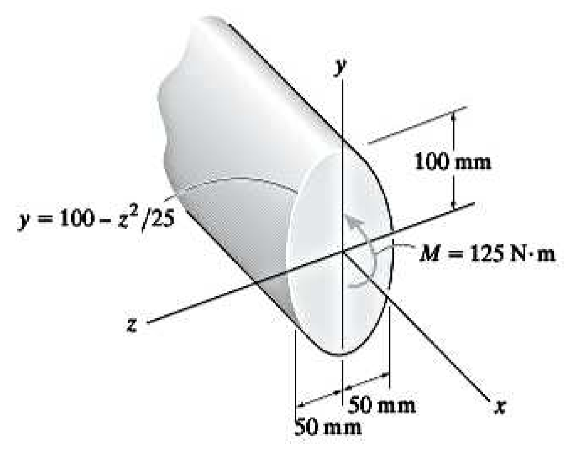
***6-192.** Determine la distribución del esfuerzo flexionante en la sección *a-a* de la viga. Dibuje en tres dimensiones la distribución que actúa sobre la sección transversal.





Prob. 6-192

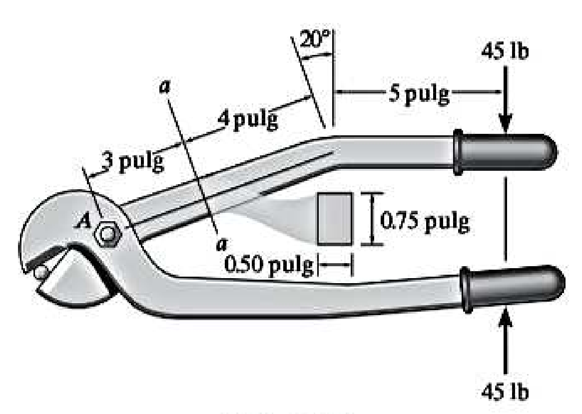
6-195. Un eje está hecho de un polímero y tiene una sección transversal parabólica. Si resiste un momento interno de $M = 125$ N · m, determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en el material (a) usando la fórmula de la flexión y (b) mediante integración. Dibuje una vista tridimensional de la distribución del esfuerzo que actúa sobre el área de la sección transversal. *Sugerencia:* El momento de inercia se determina a partir de la ecuación A-3 del apéndice A.



Prob. 6-195

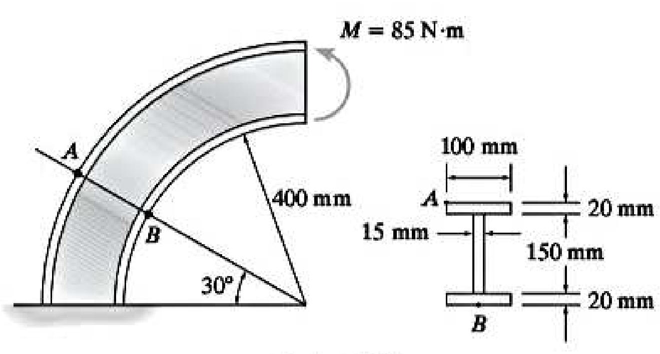
6

•6-196. Determine el esfuerzo flexionante máximo en la sección *a-a* de la manija de la cortadora de cable. Se aplica una fuerza de 45 lb a las manijas. El área de la sección transversal se muestra en la figura.



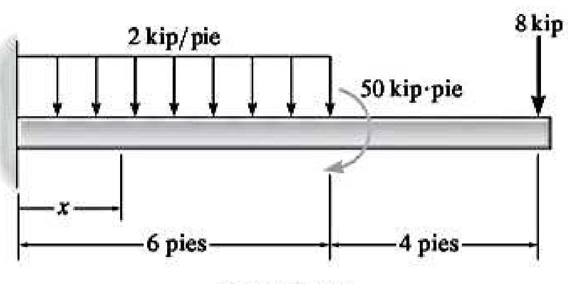
Prob. 6-196

•6-197. La viga curva está sometida a un momento flexionante de $M = 85$ N · m, como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo en los puntos *A* y *B* y muestre el esfuerzo sobre un elemento de volumen situado en estos puntos.



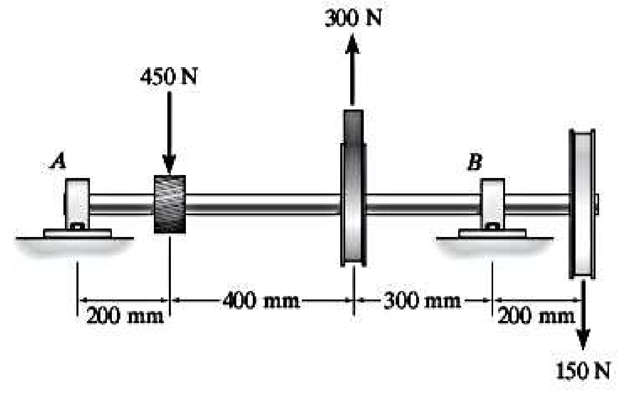
Prob. 6-197

6-198. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Asimismo, determine la fuerza cortante y el momento en la viga como funciones de *x*, donde $0 \leq x \leq 6$ pies.



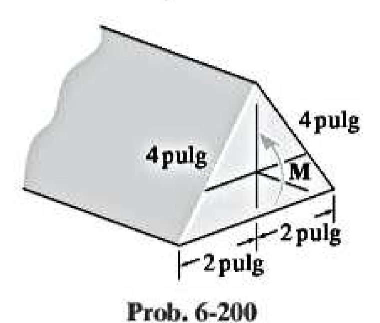
Prob. 6-198

6-199. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el eje si éste se encuentra sometido a las cargas verticales de la banda, el engrane y el volante. Los cojinetes en *A* y *B* ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje.



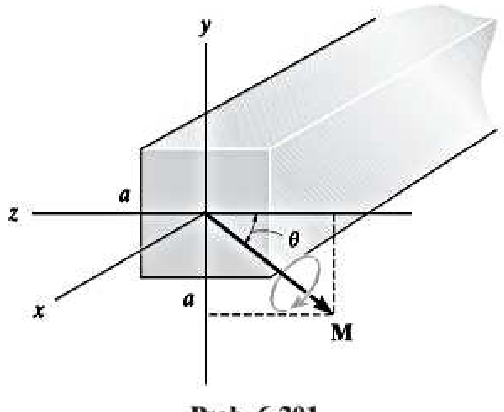
Prob. 6-199

*6-200. Un elemento tiene la sección transversal triangular que se muestra en la figura. Determine el mayor momento interno *M* que se puede aplicar a la sección transversal, sin exceder los esfuerzos permisibles en tensión y en compresión de $(\sigma_{perm})_t = 22$ ksi y $(\sigma_{perm})_c = 15$ ksi, respectivamente.



Prob. 6-200

•6-201. El puntal tiene una sección transversal cuadrada de *a* por *a* y está sometido al momento flexionante **M** aplicado en un ángulo θ como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo flexionante máximo en términos de *a*, *M* y θ. ¿Qué ángulo θ resultará en el esfuerzo flexionante más grande en el puntal? Especifique la orientación del eje neutro para este caso.



Prob. 6-201

6



Los durmientes de esta vía actúan como vigas que soportan cargas cortantes transversales muy grandes. En consecuencia, si están fabricados de madera tenderán a partirse en sus extremos, donde las cargas cortantes son mayores.

Esfuerzo cortante transversal

7

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo, se desarrollará un método para determinar el esfuerzo cortante en una viga que tiene una sección transversal prismática y que está fabricada de un material homogéneo que se comporta de forma elástica lineal. El método de análisis empleado se limitará a casos especiales de la geometría de la sección transversal. A pesar de esto, el método tiene muchas aplicaciones en una amplia gama dentro del análisis y el diseño en ingeniería. Se analizarán los conceptos de flujo cortante y esfuerzo cortante para vigas y elementos de pared delgada. El capítulo termina con un estudio sobre el centro cortante.

7.1 Fuerza cortante en elementos rectos

En general, una viga soportará tanto una fuerza cortante como un momento. La fuerza cortante **V** es el resultado de una distribución del esfuerzo cortante transversal que actúa sobre la sección transversal de la viga. Sin embargo, debido a la propiedad complementaria de la fuerza cortante, este esfuerzo creará los esfuerzos cortantes longitudinales correspondientes que actuarán a lo largo de los planos longitudinales de la viga, como se muestra en la figura 7-1.

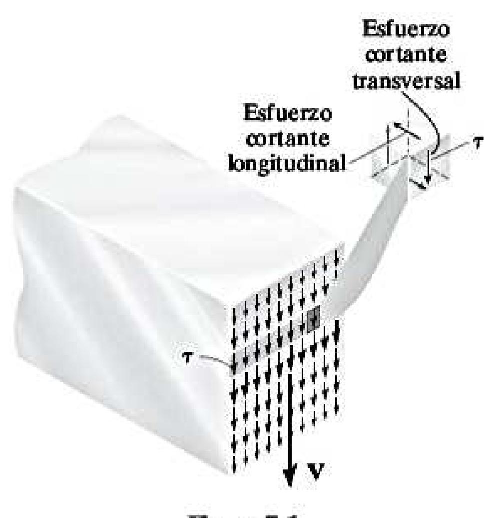


Figura 7-1



Tablas que no están unidas entre sí
(a)

Tablas unidas entre sí
(b)

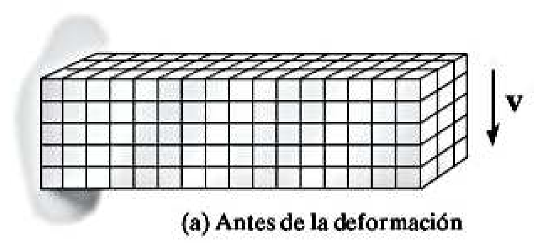
Figura 7-2



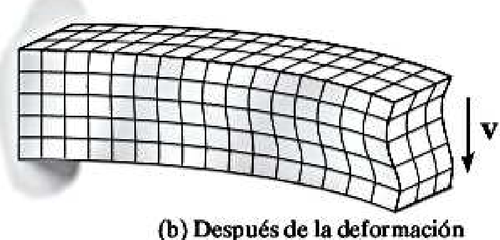
Los conectores cortantes están soldados "por puntos" a este piso metálico corrugado de modo que cuando se vierta concreto sobre ellos, los conectores evitarán que la losa de concreto se deslice sobre la superficie metálica. De esta forma, los dos materiales actúan como una losa compuesta.

Para ilustrar este efecto, considere una viga que está hecha con tres tablas, figura 7-2*a*. Si las superficies superior e inferior de cada tabla son lisas, y las tablas *no* están unidas entre sí, entonces la aplicación de la carga **P** hará que cada tabla se *deslice* con respecto a las otras cuando la viga se somete a flexión. Sin embargo, si las tablas están unidas entre sí, entonces los esfuerzos cortantes longitudinales que actúan entre las tablas impedirán su deslizamiento relativo, y por lo tanto la viga actuará como una sola unidad, figura 7-2*b*.

Como resultado del esfuerzo cortante, se desarrollarán deformaciones angulares y éstas tenderán a distorsionar la sección transversal de una manera bastante compleja. Por ejemplo, considere la barra corta de la figura 7-3*a* fabricada con un material altamente deformable y marcada con líneas horizontales y verticales que forman una cuadrícula. Cuando se aplica una fuerza cortante **V**, ésta tiende a deformar las líneas de la cuadrícula siguiendo el patrón que se muestra en la figura 7-3*b*. Esta distribución no uniforme de la deformación cortante hará que la sección transversal se *alabe*.



(a) Antes de la deformación



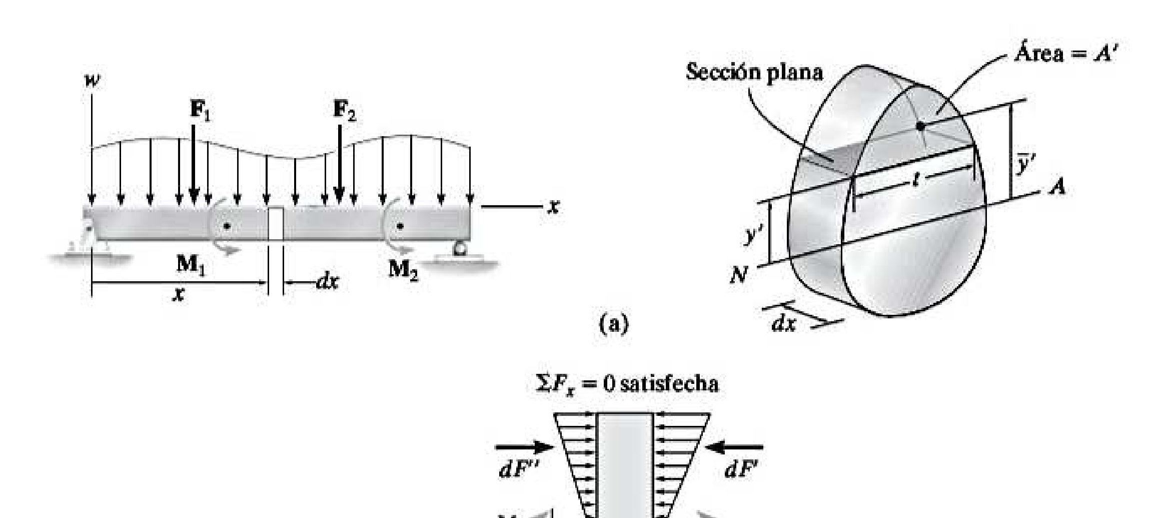
(b) Después de la deformación

Figura 7-3

Como resultado, cuando una viga está sometida *tanto* a flexión *como* a cortante, la sección transversal no permanecerá plana como se supuso en el desarrollo de la fórmula de la flexión. Aunque esto sea así, por lo general puede suponerse que el alabeo de la sección transversal debido a la fuerza cortante es lo suficientemente pequeño para poderlo *pasar por alto*. Este supuesto es particularmente cierto para el caso más común de una *viga delgada*; es decir, una viga que tiene un peralte pequeño en comparación con su longitud.

7.2 Fórmula del esfuerzo cortante

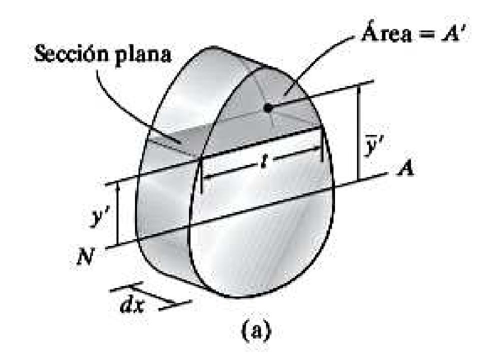
Debido a que la distribución de la deformación cortante no es fácil de definir, como en el caso de la carga axial, la torsión y la flexión, se desarrollará la fórmula del esfuerzo cortante de manera indirecta. Para ello se considerará el *equilibrio de fuerzas horizontales* de una porción del elemento tomado de la viga mostrada en la figura 7-4*a*. En la figura 7-4*b* se presenta un diagrama de cuerpo libre del *elemento*. Esta distribución se debe a los momentos flexionantes M y $M + dM$. Se han excluido los efectos de V, $V + dV$ y $w(x)$ en el diagrama de cuerpo libre porque estas cargas son verticales y, por lo tanto, no participan en una suma de fuerzas horizontales. De hecho, el elemento de la figura 7-4*b* satisface a $\Sigma F_x = 0$ ya que la distribución del esfuerzo en cada lado del elemento forma sólo un momento de par y por lo tanto una fuerza resultante cero.



(a)

(b)

Figura 7-4



(a)

Ahora considere la *porción* superior sombreada del elemento que se ha seccionado en y' desde el eje neutro, figura 7-4*a*. Este segmento tiene una anchura t en la sección y los dos lados de la sección transversal tienen un área A' cada uno. Debido a que los momentos resultantes en cada lado del elemento difieren en dM, puede observarse en la figura 7-4*c* que $\Sigma F_x = 0$ no se cumplirá *a menos* que un esfuerzo cortante longitudinal τ actúe sobre la cara inferior del segmento. Se supondrá que este esfuerzo cortante es *constante* en toda la anchura t de la cara inferior. Actúa sobre el área $t\,dx$. Al aplicar la ecuación del equilibrio de fuerzas horizontales y al usar la fórmula de la flexión, ecuación 6-13, se tiene

$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad \int_{A'} \sigma'\, dA' - \int_{A'} \sigma\, dA' - \tau(t\, dx) = 0$$

$$\int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I}\right) y\, dA' - \int_{A'} \left(\frac{M}{I}\right) y\, dA' - \tau(t\, dx) = 0$$

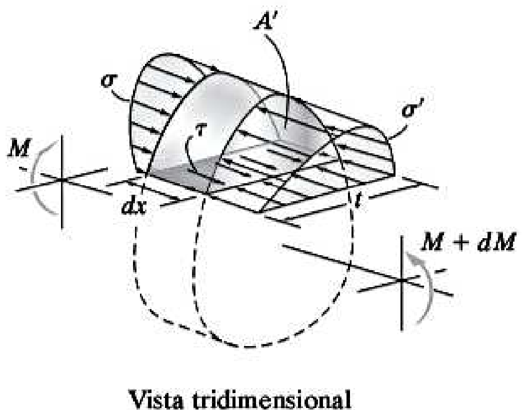
$$\left(\frac{dM}{I}\right) \int_{A'} y\, dA' = \tau(t\, dx) \tag{7-1}$$

Si se despeja τ, resulta

$$\tau = \frac{1}{It}\left(\frac{dM}{dx}\right) \int_{A'} y\, dA'$$

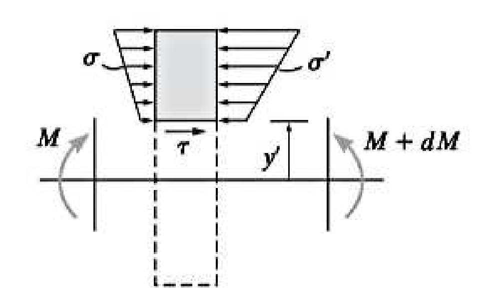
Esta ecuación puede simplificarse si se observa que $V = dM/dx$ (ecuación 6-2). Además, la integral representa el momento del área A' respecto al eje neutro. Esto se indicará mediante el símbolo Q. Como la ubicación del centroide del área A' se determina a partir de $\bar{y}' = \int_{A'} y\, dA'/A'$, también se puede escribir

$$Q = \int_{A'} y\, dA' = \bar{y}' A' \tag{7-2}$$



Vista tridimensional

(c)



Vista de perfil

Figura 7-4 (cont.)

Por lo tanto, el resultado final es

$$\tau = \frac{VQ}{It} \tag{7-3}$$

Aquí, como se muestra en la figura 7-5,

τ = el esfuerzo cortante en el elemento, en el punto situado a una distancia y' desde el eje neutro. Se supone que este esfuerzo es constante y, por lo tanto, se *promedia* en toda la anchura t del elemento.
V = la fuerza cortante resultante interna, determinada con base en el método de las secciones y las ecuaciones de equilibrio
I = el momento de inercia de *toda* la sección transversal calculada respecto al eje neutro
t = la anchura del área de la sección transversal del elemento, medida en el punto donde se determinará τ
$Q = \bar{y}'A'$, donde A' es la parte superior (o inferior) del área de la sección transversal del elemento, por encima (o debajo) del plano de sección donde se mide t, y $\bar{y}'$, es la distancia desde el eje neutro hasta el centroide de A'

La ecuación anterior se conoce como la *fórmula del esfuerzo cortante*. Aunque en la obtención de esta fórmula se consideraron sólo los esfuerzos cortantes que actúan sobre el plano longitudinal de la viga, la fórmula se aplica también para encontrar el esfuerzo cortante transversal en la sección transversal de la viga. Es necesario recordar que estos esfuerzos son complementarios y numéricamente iguales.

Por otra parte, como en la derivación anterior se usó la fórmula de la flexión, se requiere que el material tenga un comportamiento elástico lineal y el *mismo* módulo de elasticidad tanto en tensión como en compresión.

7

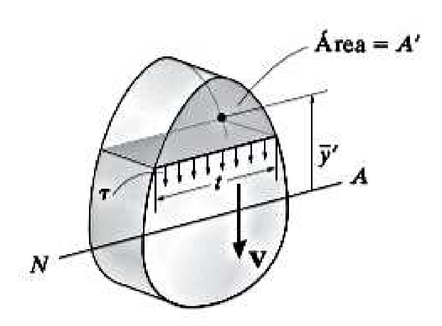


Figura 7-5

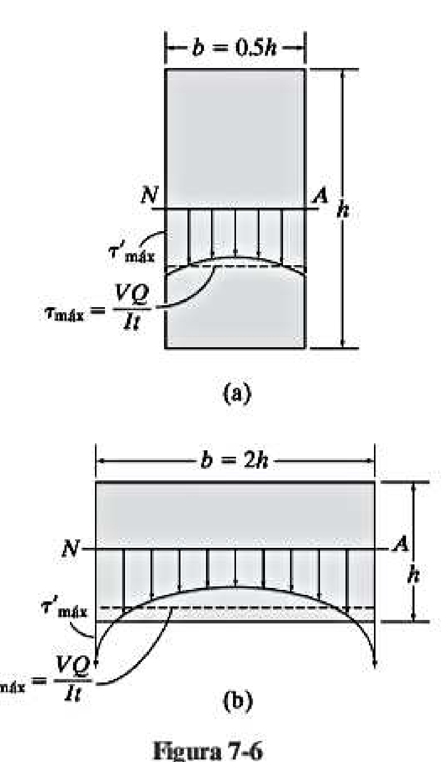


Figura 7-6

Limitaciones en el uso de la fórmula del esfuerzo cortante. Uno de los supuestos principales que se utilizaron en el desarrollo de la fórmula del esfuerzo cortante es que el esfuerzo cortante se distribuye *uniformemente* en toda la *anchura t* de la sección. En otras palabras, el *esfuerzo cortante promedio* se calcula a lo ancho. Es posible comprobar la veracidad de esta hipótesis mediante su comparación con un análisis matemático más preciso basado en la teoría de la elasticidad. Por ejemplo, si la sección transversal de la viga es rectangular, la distribución del esfuerzo cortante a través del eje neutro calculada a partir de la teoría de la elasticidad varía como se muestra en la figura 7-6. El valor máximo, $\tau'_{máx}$, se produce a los *lados* de la sección transversal, y su magnitud depende de la relación b/h (anchura/peralte). Para las secciones que tienen $b/h = 0.5$, $\tau'_{máx}$ es sólo alrededor de 3 por ciento mayor que el esfuerzo cortante calculado a partir de la fórmula del esfuerzo cortante, figura 7-6*a*. Sin embargo, para las *secciones planas*, digamos $b/h = 2$, $\tau'_{máx}$ es aproximadamente 40 por ciento mayor que $\tau_{máx}$, figura 7-6*b*. El error es aún mayor cuando la sección se vuelve más plana, o a medida que la relación b/h se incrementa. Ciertamente, los errores de esta magnitud son intolerables si se utiliza la fórmula del esfuerzo cortante para determinar el esfuerzo cortante en el *ala* de la viga I de ala ancha mostrada en la figura 7-7.

También debe señalarse que la fórmula del esfuerzo cortante no da resultados exactos cuando se utiliza para determinar el esfuerzo cortante en la unión alma-ala de una viga I de ala ancha, ya que éste es un punto de cambio súbito en la sección transversal y aquí se produce una *concentración de esfuerzos*. Afortunadamente, estas limitaciones para aplicar la fórmula del esfuerzo cortante a las alas de una viga I de ala ancha no son importantes en la práctica de la ingeniería. Con mucha frecuencia, los ingenieros sólo deben calcular el *esfuerzo cortante promedio máximo* en la viga, el cual se produce en el eje neutro, donde la relación b/h (anchura/peralte) para el alma es *muy pequeña* y, por ende, el resultado calculado es muy cercano al esfuerzo cortante máximo *real* como se explicó anteriormente.

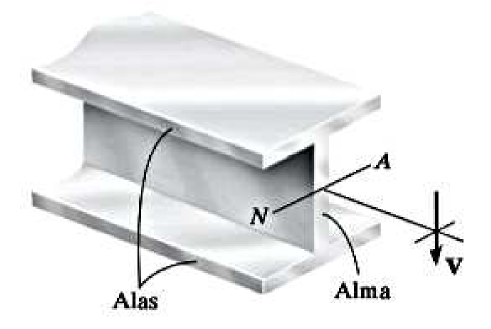


Figura 7-7

7

Otra limitación importante en el uso de la fórmula del esfuerzo cortante puede ilustrarse al hacer referencia a la figura 7-8*a*, la cual muestra un elemento con una sección transversal que tiene una frontera irregular o no rectangular. Si se aplica la fórmula del esfuerzo cortante para determinar el esfuerzo cortante (promedio) τ a lo largo de la línea AB, éste tendrá una dirección vertical hacia abajo como se muestra en la figura 7-8*b*. Sin embargo, considere un elemento de material tomado en el punto límite B, figura 7-8*c*. Aquí, τ en la parte frontal del elemento se descompone en las componentes τ' y τ'' que actúan de manera perpendicular y paralela a la frontera. Por inspección, τ' debe ser igual a cero, ya que su correspondiente componente longitudinal τ', en la superficie de frontera libre de esfuerzo, debe ser igual a cero. Por lo tanto, para cumplir esta condición de frontera, el esfuerzo cortante que actúa sobre este elemento *en realidad debe estar dirigido en forma tangencial a la frontera*. En consecuencia, la distribución del esfuerzo cortante a través de la línea AB está dirigida como se muestra en la figura 7-8*d*. Aquí, los valores específicos para el esfuerzo cortante deben obtenerse usando la teoría de la elasticidad. Sin embargo, observe que es posible aplicar la fórmula del esfuerzo cortante para obtener el esfuerzo cortante que actúa a través de cada una de las líneas en gris de la figura 7-8*a*. Estas líneas intersecan las tangentes a la frontera en *ángulos rectos* y, como se muestra en la figura 7-8*e*, el esfuerzo cortante transversal es vertical y constante a lo largo de cada línea.

Para resumir los puntos anteriores, la fórmula del esfuerzo cortante no da resultados exactos cuando se aplica en elementos con secciones transversales *cortas* o *planas*, o en los puntos donde la sección transversal cambia de manera súbita. Tampoco debe aplicarse a través de una sección que interseca la frontera del elemento en un ángulo diferente de 90°. En cambio, para estos casos el esfuerzo cortante debe determinarse con métodos más avanzados basados en la teoría de la elasticidad.

7

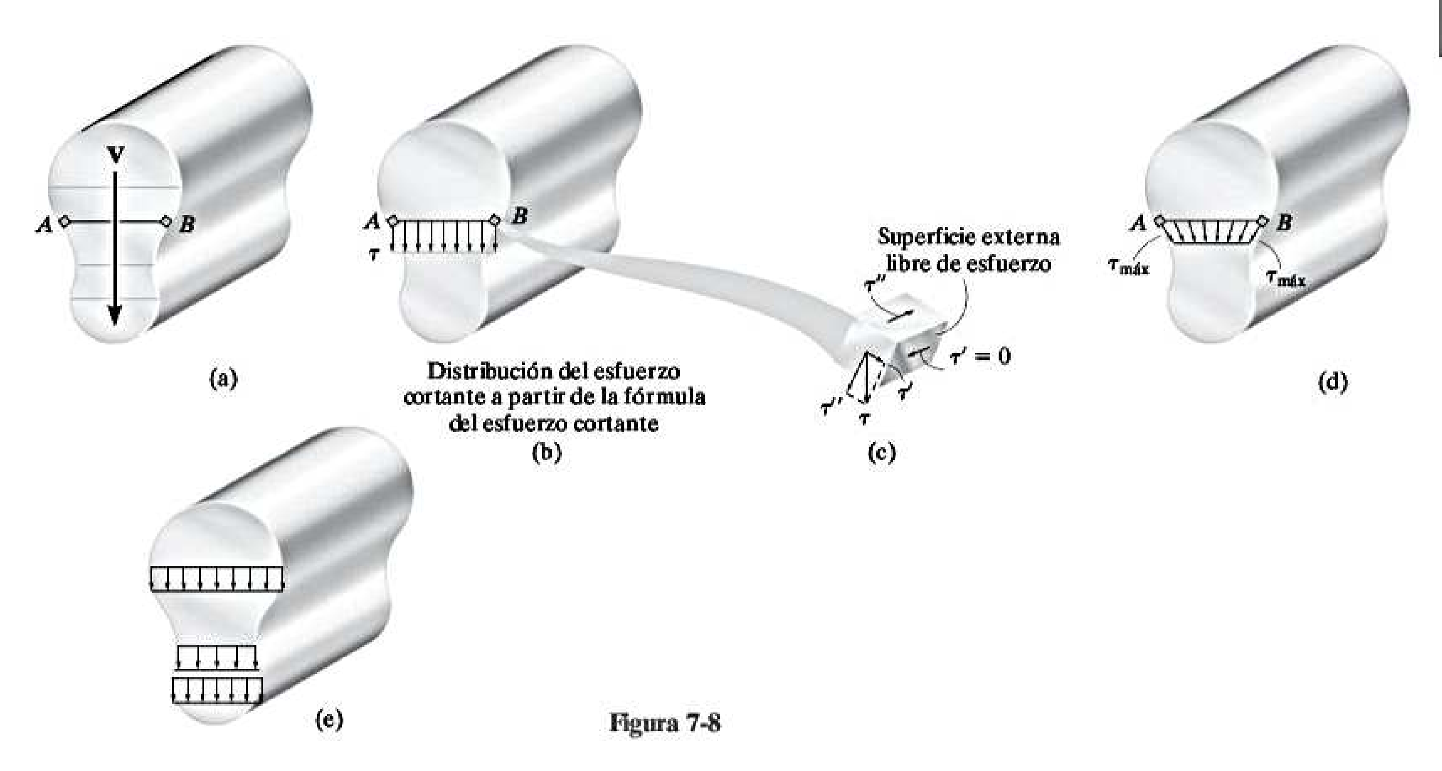


Figura 7-8

Puntos importantes

- Las fuerzas cortantes en las vigas producen distribuciones *de esfuerzo-deformación no lineales* sobre la sección transversal, lo que ocasiona que ésta se *alabe*.
- Debido a la propiedad complementaria del esfuerzo cortante, el esfuerzo cortante desarrollado en una viga actúa sobre la sección transversal de la viga y a lo largo de sus planos longitudinales.
- La *fórmula del esfuerzo cortante* se obtuvo al considerar el equilibrio de fuerzas horizontales de las distribuciones longitudinales del esfuerzo cortante y del esfuerzo flexionante que actúan sobre una porción de un segmento diferencial de la viga.
- La fórmula del esfuerzo cortante debe utilizarse en elementos rectos prismáticos fabricados de un material homogéneo que tiene un comportamiento elástico lineal. Además, la fuerza cortante resultante interna debe estar dirigida a lo largo de un eje de simetría para el área de la sección transversal.
- La fórmula del esfuerzo cortante no debe emplearse para determinar el esfuerzo cortante en secciones transversales cortas o planas, en puntos donde existen cambios súbitos de la sección transversal o en puntos que están sobre una frontera inclinada.

Procedimiento de análisis

Para aplicar la fórmula del esfuerzo cortante, se sugiere el siguiente procedimiento:

Fuerza cortante interna.

- Seccione el elemento perpendicularmente a su eje en el punto donde debe determinarse el esfuerzo cortante y obtenga la fuerza cortante interna **V** en la sección.

7

Propiedades de la sección.

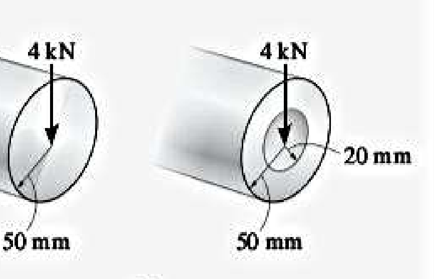
- Determine la ubicación del eje neutro y encuentre el momento de inercia I de *toda el área de la sección transversal* respecto al eje neutro.
- Pase una sección horizontal imaginaria a través del punto en que debe determinarse el esfuerzo cortante. Mida la anchura t del área transversal en esta sección.
- La porción del área situada por encima o por debajo de esta anchura es A'. Determine Q usando $Q = \bar{y}'A'$. Aquí $\bar{y}'$, es la distancia al centroide de A', medida desde el eje neutro. Lo anterior puede ser útil si se observa que A' es la parte del área de la sección transversal del elemento que "se mantiene sobre éste" debido a los esfuerzos cortantes longitudinales. Vea la figura 7-4c.

Esfuerzo cortante.

- Utilizando un conjunto consistente de unidades, sustituya los datos en la fórmula del esfuerzo cortante y calcule el esfuerzo cortante τ.
- Se sugiere que la dirección del esfuerzo cortante transversal τ se establezca sobre un elemento de volumen del material ubicado en el punto donde se calcula. Esto puede hacerse al observar que τ actúa sobre la sección transversal en la misma dirección que **V**. A partir de esto, pueden establecerse los esfuerzos cortantes correspondientes que actúan sobre los otros tres planos del elemento.

EJEMPLO 7.1

El eje sólido y el tubo que se muestran en la figura 7-9*a* están sometidos a la fuerza cortante de 4 kN. Determine el esfuerzo cortante que actúa sobre el diámetro de cada sección transversal.



(a)

SOLUCIÓN

Propiedades de la sección. Con base en la tabla que aparece en la página final de este libro (al reverso de la contraportada), el momento de inercia de cada sección, calculada respecto a su diámetro (o eje neutro), es

$$I_{\text{sólido}} = \frac{1}{4}\pi c^4 = \frac{1}{4}\pi(0.05\text{ m})^4 = 4.909(10^{-6})\text{ m}^4$$

$$I_{\text{tubo}} = \frac{1}{4}\pi(c_o^4 - c_i^4) = \frac{1}{4}\pi[(0.05\text{ m})^4 - (0.02\text{ m})^4] = 4.783(10^{-6})\text{ m}^4$$

El semicírculo superior (en gris más oscuro) que se muestra en la figura 7-9*b*, por encima (o por debajo) de cada diámetro representa Q, porque esta área se "mantiene sobre el elemento" mediante el esfuerzo cortante longitudinal a lo largo del diámetro.

$$Q_{\text{sólido}} = \bar{y}'A' = \frac{4c}{3\pi}\left(\frac{\pi c^2}{2}\right) = \frac{4(0.05\text{ m})}{3\pi}\left(\frac{\pi(0.05\text{ m})^2}{2}\right) = 83.33\,(10^{-6})\text{ m}^3$$

$$Q_{\text{tubo}} = \Sigma\bar{y}'A' = \frac{4c_o}{3\pi}\left(\frac{\pi c_o^2}{2}\right) - \frac{4c_i}{3\pi}\left(\frac{\pi c_i^2}{2}\right)$$

$$= \frac{4(0.05\text{ m})}{3\pi}\left(\frac{\pi(0.05\text{ m})^2}{2}\right) - \frac{4(0.02\text{ m})}{3\pi}\left(\frac{\pi(0.02\text{ m})^2}{2}\right)$$

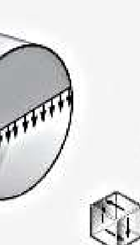
$$= 78.0(10^{-6})\text{ m}^3$$

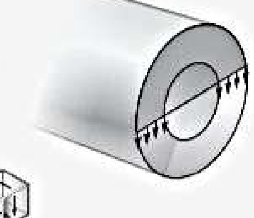
Esfuerzo cortante. Al aplicar la fórmula del esfuerzo cortante, donde $t = 0.1$ m para la sección sólida y $t = 2(0.03\text{ m}) = 0.06$ m para el tubo, se tiene

$$\tau_{\text{sólido}} = \frac{VQ}{It} = \frac{4(10^3)\text{ N}(83.33(10^{-6})\text{ m}^3)}{4.909(10^{-6})\text{ m}^4(0.1\text{ m})} = 679\text{ kPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\tau_{\text{tubo}} = \frac{VQ}{It} = \frac{4(10^3)\text{ N}(78.0(10^{-6})\text{ m}^3)}{4.783(10^{-6})\text{ m}^4(0.06\text{ m})} = 1.09\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Como se analizó en las limitaciones de la fórmula del esfuerzo cortante, los cálculos realizados aquí son válidos porque el esfuerzo cortante a lo largo del diámetro es vertical y, por lo tanto, tangente a la frontera de la sección transversal. Un elemento de material sobre el diámetro está sometido a "cortante puro" como se muestra en la figura 7-9*b*.





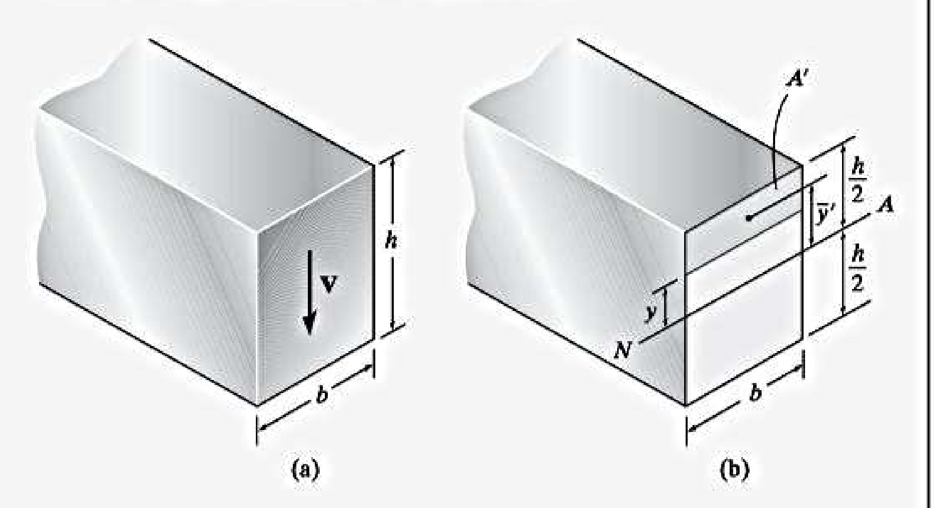
(b)

Figura 7-9

7

EJEMPLO 7.2

Determine la distribución del esfuerzo cortante sobre la sección transversal de la viga mostrada en la figura 7-10*a*.



SOLUCIÓN

La distribución puede determinarse al encontrar el esfuerzo cortante en una *altura arbitraria y* desde el eje neutro, figura 7-10*b*, para después graficar esta función. Aquí, el área en gris más oscura A' se utilizará para Q.* Por lo tanto,

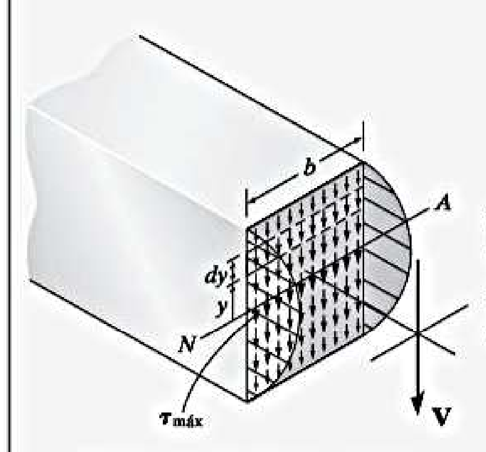
$$Q = \bar{y}'A' = \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]\left(\frac{h}{2} - y\right)b = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)b$$

Al aplicar la fórmula del esfuerzo cortante, se tiene

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{1}{2}\right)[(h^2/4) - y^2]b}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)b} = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad (1)$$

Este resultado indica que la distribución del esfuerzo cortante sobre la sección transversal es ***parabólica***. Como se muestra en la figura 7-10*c*, la intensidad varía desde cero en la parte superior e inferior, $y = \pm h/2$, hasta un valor máximo en el eje neutro, $y = 0$. En específico, como el área de la sección transversal es $A = bh$, entonces, en $y = 0$ se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = 1.5\frac{V}{A} \qquad (2)$$

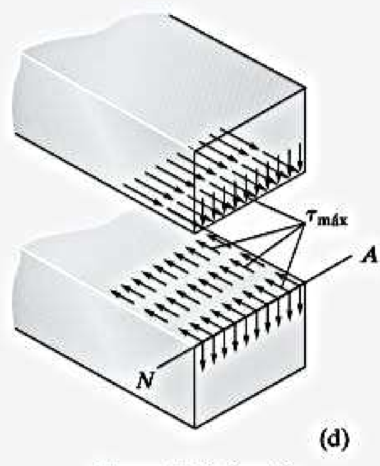


Distribución del esfuerzo cortante

(c)

Figura 7-10

*También se puede utilizar el área debajo de y $[A' = b(h/2 + y)]$, pero para hacerlo se requiere un poco más de manipulación algebraica.



(d)

Figura 7-10 (cont.)



La falla cortante típica en esta viga de madera se produjo en el soporte y aproximadamente a través del centro de su sección transversal.

Este mismo valor para $\tau_{máx}$ puede obtenerse directamente de la fórmula del esfuerzo cortante, $\tau = VQ/It$, teniendo en cuenta que $\tau_{máx}$ ocurre donde Q es *mayor*, dado que V, I y t son *constantes*. Por inspección, Q será un máximo cuando se considere toda el área por encima (o por debajo) del eje neutro; es decir, $A' = bh/2$ y $\bar{y}' = h/4$. Por lo tanto,

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(h/4)(bh/2)}{\left[\frac{1}{12}bh^3\right]b} = 1.5\,\frac{V}{A}$$

Por comparación, $\tau_{máx}$ es 50 por ciento mayor que el esfuerzo cortante *promedio*, determinado a partir de la ecuación 1-7; es decir, $\tau_{prom} = V/A$.

Es importante observar que $\tau_{máx}$ también actúa en la dirección longitudinal de la viga, figura 7-10*d*. Éste es el esfuerzo que puede provocar la falla en una viga de madera, como se muestra en la figura 7-10*e*. Aquí, la partición horizontal de la madera comienza a ocurrir a través del eje neutro en los extremos de la viga, porque ahí las reacciones verticales someten a la viga a un gran esfuerzo cortante y la madera tiene una baja resistencia al esfuerzo cortante a lo largo de sus fibras, las cuales están orientadas en la dirección longitudinal.

Resulta instructivo mostrar que cuando la distribución del esfuerzo cortante, ecuación 1, se integra sobre la sección transversal se obtiene la fuerza cortante resultante V. Para hacer esto, se elige una tira diferencial de área $dA = b\,dy$, figura 7-10*c*, y como τ actúa de manera uniforme sobre esta tira, se tiene

$$\int_A \tau\, dA = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) b\, dy$$

$$= \frac{6V}{h^3}\left[\frac{h^2}{4}y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \frac{6V}{h^3}\left[\frac{h^2}{4}\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right)\right] = V$$

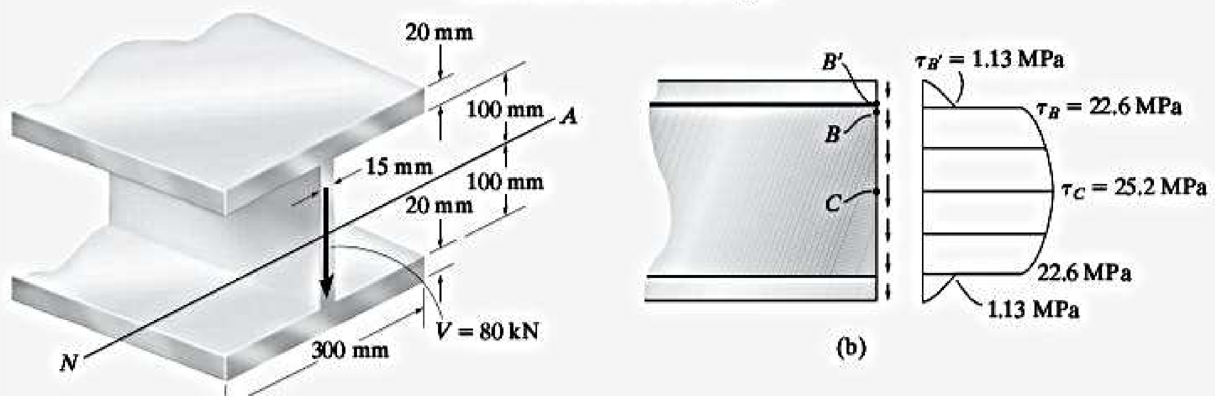
P

(e)

7

EJEMPLO 7.3

Una viga de acero I de ala ancha tiene las dimensiones mostradas en la figura 7-11*a*. Si está sometida a una fuerza cortante $V = 80$ kN, trace la distribución del esfuerzo cortante que actúa sobre el área de la sección transversal de la viga.



SOLUCIÓN

Como el alma y el ala son elementos rectangulares, entonces al igual que en el ejemplo anterior, la distribución del esfuerzo cortante es parabólica y en este caso varía de la forma mostrada en la figura 7-11*b*. Debido a la simetría, sólo deben determinarse los esfuerzos cortantes en los puntos B', B y C. Para mostrar cómo se obtienen estos valores, primero es necesario encontrar el momento de inercia del área de la sección transversal respecto al eje neutro. Si se trabaja en metros, resulta

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.015\text{ m})(0.200\text{ m})^3\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0.300\text{ m})(0.02\text{ m})^3 + (0.300\text{ m})(0.02\text{ m})(0.110\text{ m})^2\right] = 155.6(10^{-6})\text{ m}^4$$

Para el punto B', $t_B' = 0.300$ m y A' es el área en gris oscuro de la figura 7-11*c*. Así,

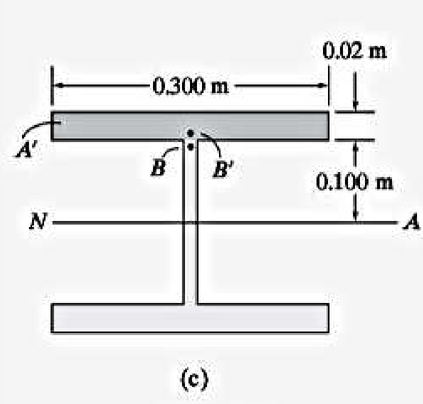


Figura 7-11

$$Q_{B'} = \bar{y}'A' = [0.110\text{ m}](0.300\text{ m})(0.02\text{ m}) = 0.660(10^{-3})\text{ m}^3$$

de modo que

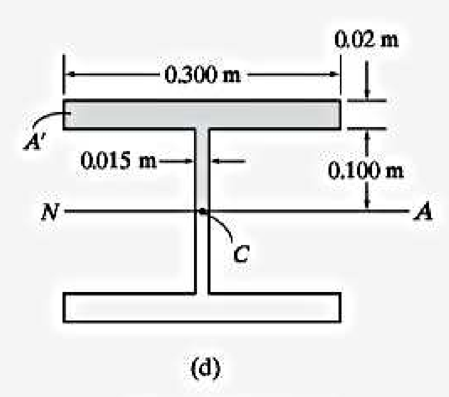
$$\tau_{B'} = \frac{VQ_{B'}}{It_{B'}} = \frac{80(10^3)\text{ N}(0.660(10^{-3})\text{ m}^3)}{155.6(10^{-6})\text{ m}^4(0.300\text{ m})} = 1.13\text{ MPa}$$

Para el punto B, $t_B = 0.015$ m y $Q_B = Q_{B'}$, figura 7-11*c*. Por consiguiente

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It_B} = \frac{80(10^3)\text{ N}(0.660(10^{-3})\text{ m}^3)}{155.6(10^{-6})\text{ m}^4(0.015\text{ m})} = 22.6\text{ MPa}$$

7

Observe, con base en el análisis realizado en “Limitaciones en el uso de la fórmula del esfuerzo cortante”, que los valores calculados para $\tau_{B'}$ y τ_B en realidad son engañosos. ¿Por qué?



(d)

Figura 7-11 (cont.)

Para el punto C, $t_C = 0.015$ m, y A' es el área en gris oscuro que se muestra en la figura 7-11*d*. Si se considera que esta área está compuesta por dos rectángulos, se tiene

$$Q_C = \Sigma \bar{y}'A' = [0.110 \text{ m}](0.300 \text{ m})(0.02 \text{ m}) + [0.05 \text{ m}](0.015 \text{ m})(0.100 \text{ m}) = 0.735(10^{-3}) \text{ m}^3$$

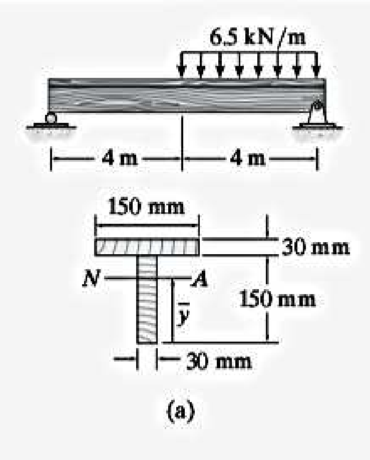
Así,

$$\tau_C = \tau_{\text{máx}} = \frac{VQ_C}{It_C} = \frac{80(10^3)\text{ N}[0.735(10^{-3})\text{ m}^3]}{155.6(10^{-6})\text{ m}^4(0.015\text{ m})} = 25.2 \text{ MPa}$$

NOTA: Con base en la figura 7-11*b*, observe que la mayor parte del esfuerzo cortante se produce en el alma y es casi uniforme en todo su peralte, variando desde 22.6 hasta 25.2 MPa. Es por esta razón que, para el diseño, algunos códigos permiten el cálculo del esfuerzo cortante promedio en la sección transversal del alma en vez de emplear la fórmula del esfuerzo cortante. Esto se analizará más adelante en el capítulo 11.

7

EJEMPLO 7.4



(a)

La viga mostrada en la figura 7-12*a* está construida con dos tablas. Determine el esfuerzo cortante máximo en el pegamento necesario para mantener las tablas juntas, a lo largo del borde en el que están unidas.

SOLUCIÓN

Fuerza cortante interna. En la figura 7-12*b* se muestran las reacciones en los apoyos y el diagrama de fuerza cortante para la viga. Se observa que el esfuerzo cortante máximo en la viga es de 19.5 kN.

Propiedades de la sección. El centroide y, por lo tanto, el eje neutro se determinarán a partir del eje de referencia situado en la parte inferior del área de la sección transversal, figura 7-12*a*. Si se trabaja en unidades de metros, resulta

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{[0.075 \text{ m}](0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m}) + [0.165 \text{ m}](0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})}{(0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m}) + (0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})} = 0.120 \text{ m}$$

(b)

Por lo tanto, el momento de inercia respecto al eje neutro, figura 7-12*a*, es

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})^3 + (0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m})(0.120 \text{ m} - 0.075 \text{ m})^2\right]$$

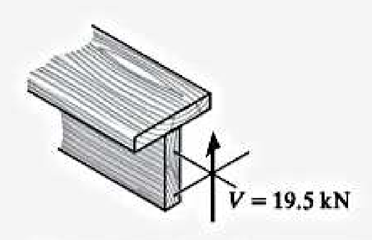
$$+ \left[\frac{1}{12}(0.150 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 + (0.030 \text{ m})(0.150 \text{ m})(0.165 \text{ m} - 0.120 \text{ m})^2\right]$$

$$= 27.0(10^{-6}) \text{ m}^4$$

La tabla superior (ala) se mantiene sobre la tabla inferior (alma) por medio del pegamento, el cual está aplicado sobre el grosor $t = 0.03$ m. En consecuencia, A' se define como el área de la tabla superior, figura 7-12*a*. Se tiene

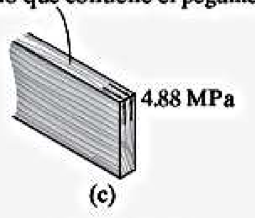
$$Q = \bar{y}'A' = [0.180 \text{ m} - 0.015 \text{ m} - 0.120 \text{ m}](0.03 \text{ m})(0.150 \text{ m})$$

$$= 0.2025(10^{-3}) \text{ m}^3$$



Esfuerzo cortante. Con los datos anteriores y aplicando la fórmula del esfuerzo cortante se obtiene

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{19.5(10^3) \text{ N}(0.2025(10^{-3}) \text{ m}^3)}{27.0(10^{-6}) \text{ m}^4(0.030 \text{ m})} = 4.88 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

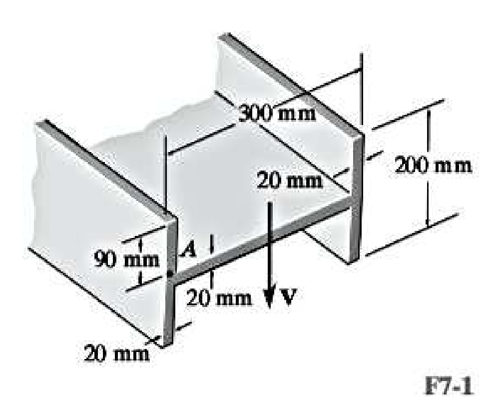
Figura 7-12

En la figura 7-12*c* se muestra el esfuerzo cortante que actúa en la parte superior de la tabla inferior.

NOTA: La resistencia del pegamento a este esfuerzo *cortante* longitudinal es lo que evita que las tablas se deslicen en el soporte derecho.

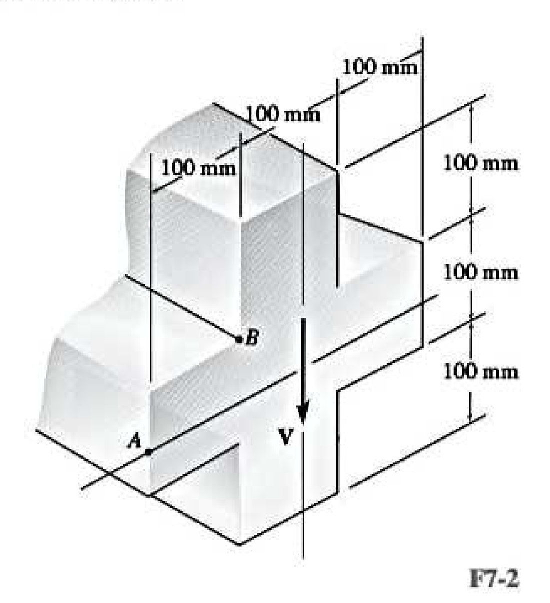
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F7-1. Si la viga está sometida a una fuerza cortante de $V = 100$ kN, determine el esfuerzo cortante desarrollado en el punto A. Represente el estado de esfuerzo en A sobre un elemento de volumen.



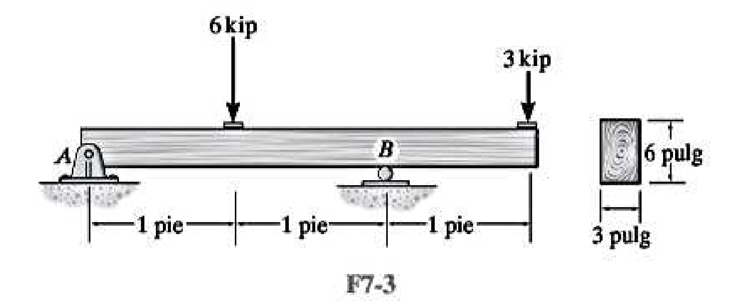
F7-1

F7-2. Determine el esfuerzo cortante sobre los puntos A y B de la viga si ésta se encuentra sometida a una fuerza cortante de $V = 600$ kN.



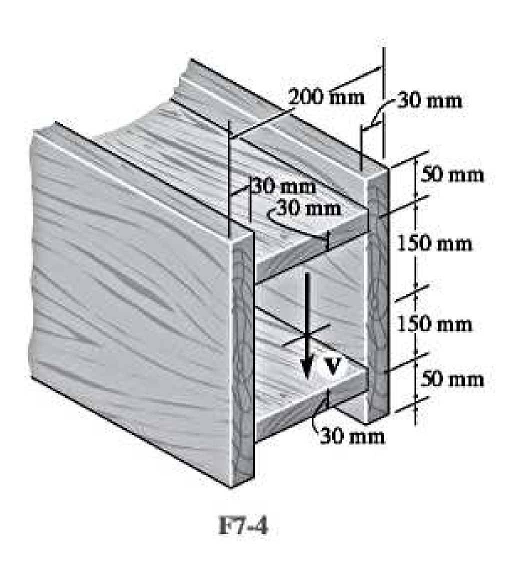
F7-2

F7-3. Determine el esfuerzo cortante máximo absoluto desarrollado en la viga.



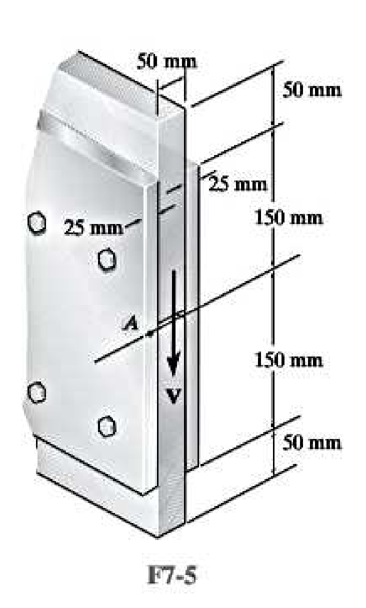
F7-3

F7-4. Si la viga está sometida a una fuerza cortante de $V = 20$ kN, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en la viga.



F7-4

F7-5. Si la viga está fabricada de cuatro placas y se encuentra sometida a una fuerza cortante de $V = 20$ kN, determine el esfuerzo cortante máximo desarrollado en la viga.



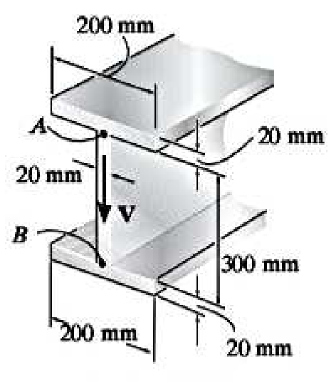
F7-5

PROBLEMAS

•7-1. Si la viga I de ala ancha se somete a una fuerza cortante de $V = 20$ kN, determine el esfuerzo cortante sobre el alma en A. Indique las componentes del esfuerzo cortante sobre un elemento de volumen ubicado en este punto.

7-2. Si la viga I de ala ancha se somete a una fuerza cortante de $V = 20$ kN, determine el esfuerzo cortante máximo en la viga.

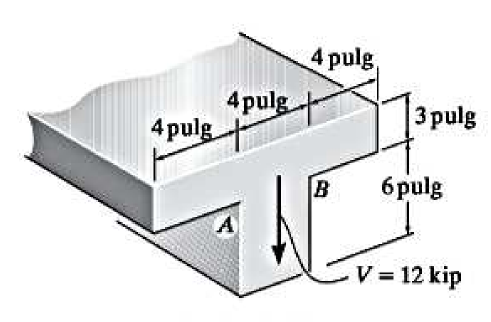
7-3. Si la viga I de ala ancha se somete a una fuerza cortante de $V = 20$ kN, determine la fuerza cortante resistida por el alma de la viga.



Probs. 7-1/2/3

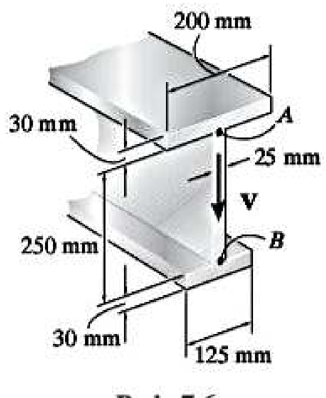
*7-4. Si la viga en T se somete a una fuerza cortante vertical de $V = 12$ kip, determine el esfuerzo cortante máximo en la viga. Además, calcule el salto del esfuerzo cortante en la unión AB del ala con el alma. Trace la variación de la intensidad del esfuerzo cortante sobre toda la sección transversal.

•7-5. Si la viga en T se somete a una fuerza cortante vertical de $V = 12$ kip, determine la fuerza cortante vertical resistida por el ala.



Probs. 7-4/5

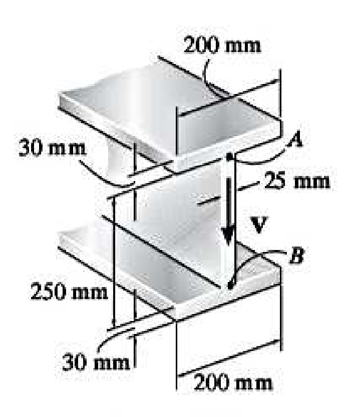
7-6. Si la viga se somete a una fuerza cortante de $V = 15$ kN, determine el esfuerzo cortante del alma en A y B. Indique las componentes del esfuerzo cortante sobre un elemento de volumen ubicado en estos puntos. Demuestre que el eje neutro se ubica en $\bar{y} = 0.1747$ desde la parte inferior e $I_{EN} = 0.2182\ (10^{-3})\ \text{m}^4$.



Prob. 7-6

7-7. Si la viga I de ala ancha se somete a una fuerza cortante de $V = 30$ kN, determine el esfuerzo cortante máximo en la viga.

*7-8. Si la viga I de ala ancha se somete a una fuerza cortante de $V = 30$ kN, determine la fuerza cortante resistida por el alma de la viga.

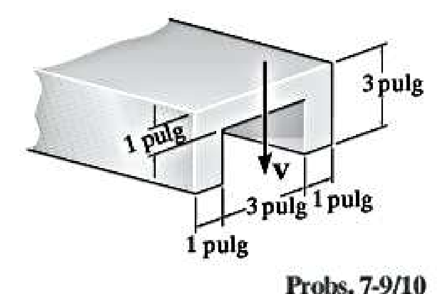


Probs. 7-7/8

7

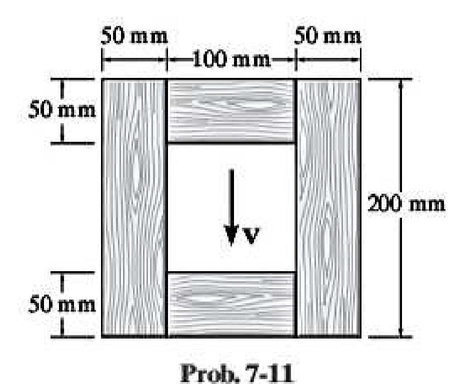
•7-9. Determine la mayor fuerza cortante V que puede sostener el elemento si el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 8$ ksi.

7-10. Si la fuerza cortante aplicada $V = 18$ kip, determine el esfuerzo cortante máximo en el elemento.



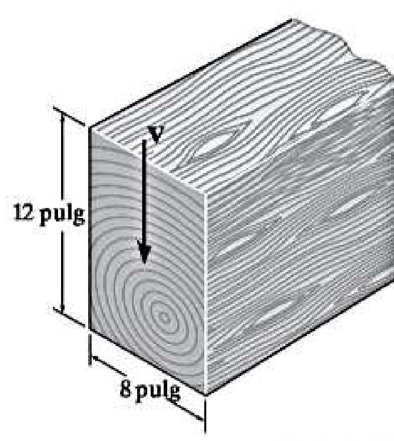
Probs. 7-9/10

7-11. La viga de madera tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 7$ MPa. Determine la fuerza cortante máxima V que puede aplicarse a la sección transversal.



Prob. 7-11

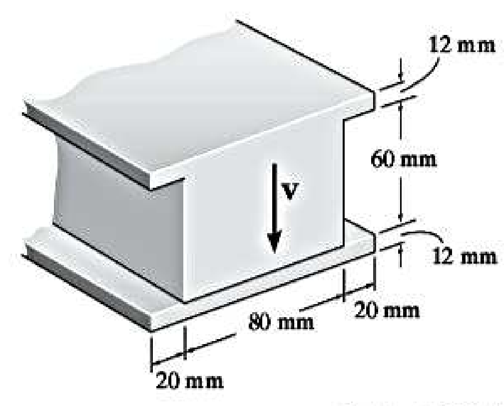
*7-12. La viga tiene una sección transversal rectangular y está hecha de madera con un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 200$ psi. Determine la fuerza cortante máxima V que puede desarrollarse en la sección transversal de la viga. Además, grafique la variación del esfuerzo cortante sobre la sección transversal.



Prob. 7-12

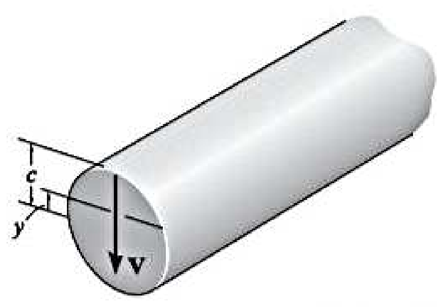
7-13. Determine el esfuerzo cortante máximo en el puntal si éste se encuentra sometido a una fuerza cortante $V = 20$ kN.

7-14. Determine la fuerza cortante máxima V que puede soportar el puntal si el esfuerzo cortante permisible para el material es $\tau_{perm} = 40$ MPa.



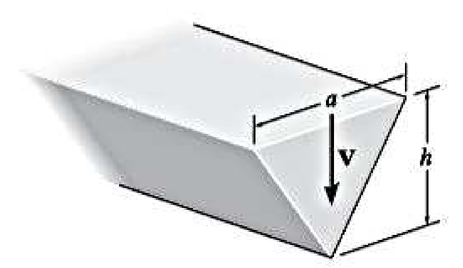
Probs. 7-13/14

7-15. Trace la distribución del esfuerzo cortante sobre la sección transversal de una barra que tiene un radio c. ¿En qué factor es mayor el esfuerzo cortante máximo que el esfuerzo cortante promedio que actúa sobre la sección transversal?



Prob. 7-15

*7-16. Un elemento tiene una sección transversal en forma de triángulo equilátero. Si está sometido a una fuerza cortante **V**, determine el esfuerzo cortante máximo promedio en el elemento empleando la fórmula del esfuerzo cortante. ¿En realidad debería usarse la fórmula del esfuerzo cortante para predecir este valor? Explique.



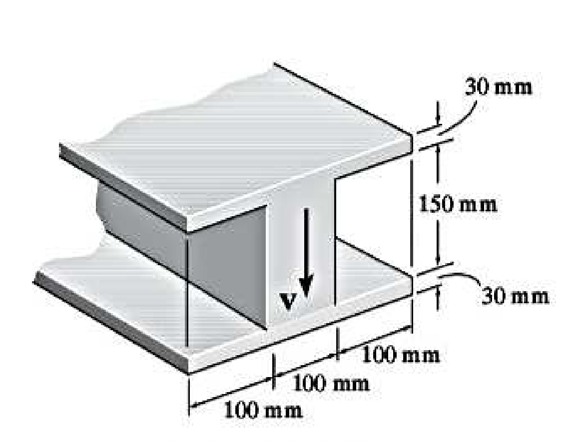
Prob. 7-16

7

•7-17. Determine el esfuerzo cortante máximo en el puntal si está sometido a una fuerza cortante de $V = 600$ kN.

7-18. Determine la fuerza cortante máxima V que puede soportar el puntal si el esfuerzo cortante permisible para el material es $\tau_{perm} = 45$ MPa.

7-19. Grafique la intensidad del esfuerzo cortante distribuido sobre la sección transversal del puntal si éste se encuentra sometido a una fuerza cortante de $V = 600$ kN.

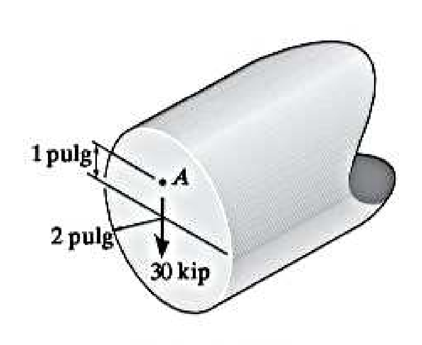


Probs. 7-17/18/19

7

*7-20. La barra de acero está sometida a una fuerza cortante de 30 kip. Determine el esfuerzo cortante máximo en la barra.

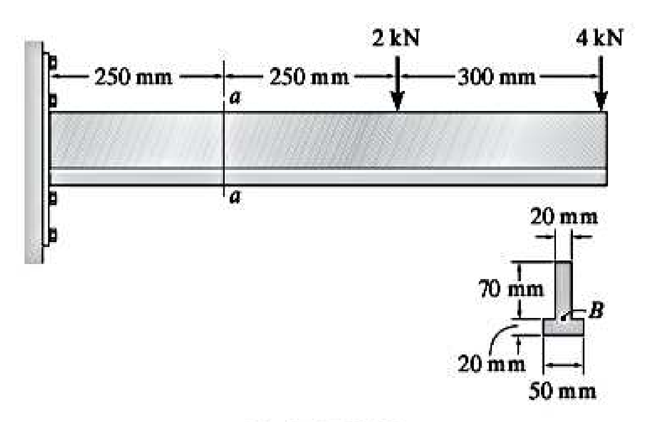
•7-21. La barra de acero está sometida a una fuerza cortante de 30 kip. Determine el esfuerzo cortante en el punto A. Muestre el resultado sobre un elemento de volumen en este punto.



Probs. 7-20/21

7-22. Determine el esfuerzo cortante en el punto B, ubicado sobre el alma de un puntal en voladizo, en la sección a-a.

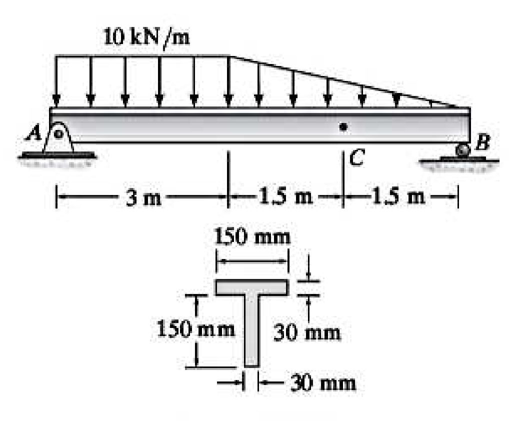
7-23. Determine el esfuerzo cortante máximo que actúa sobre la sección a-a del puntal en voladizo.



Probs. 7-22/23

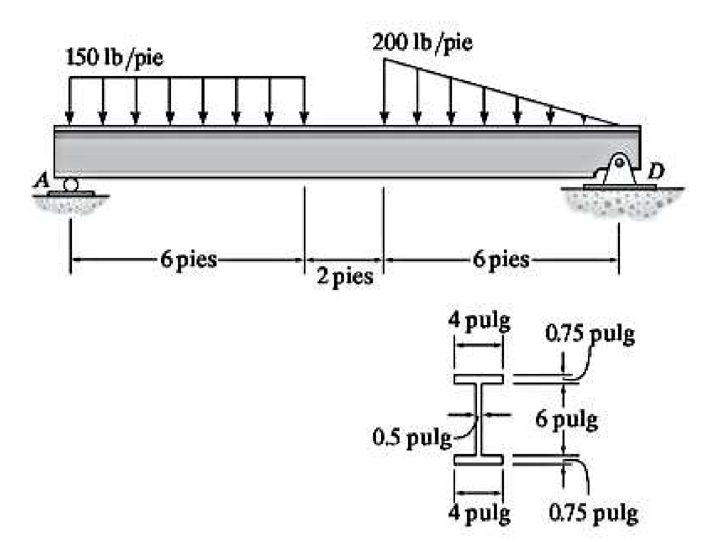
*7-24. Determine el esfuerzo cortante máximo que actúa sobre la viga T, en la sección crítica donde la fuerza cortante interna es máxima.

•7-25. Determine el esfuerzo cortante máximo que actúa sobre la viga T, en el punto C. Muestre el resultado sobre un elemento de volumen en ese punto.



Probs. 7-24/25

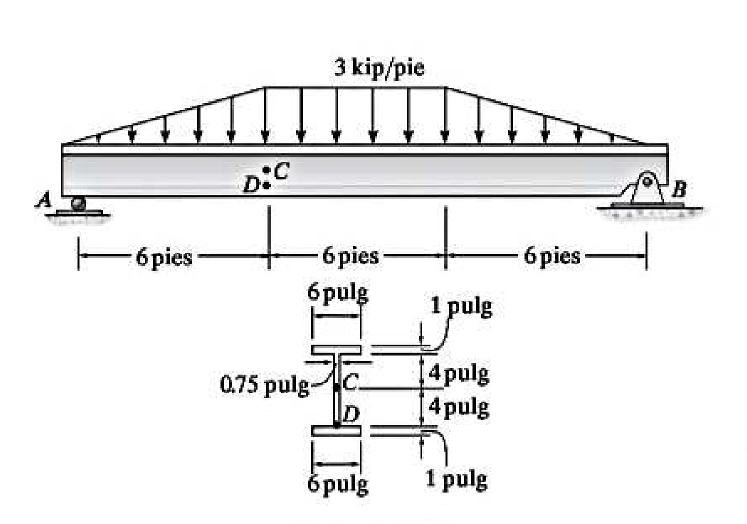
7-26. Determine el esfuerzo cortante máximo que actúa sobre la viga de fibra de vidrio, en la sección donde la fuerza cortante interna es máxima.



Prob. 7-26

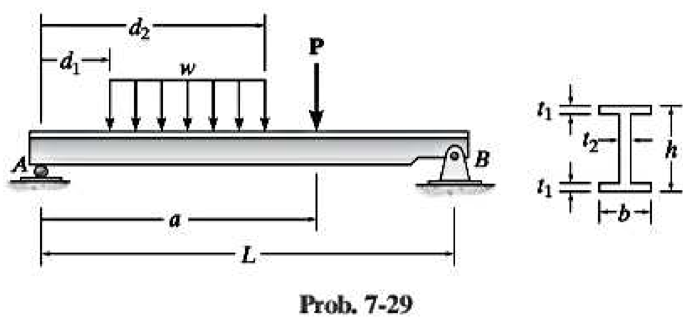
7-27. Determine el esfuerzo cortante en los puntos C y D ubicados sobre el alma de la viga.

***7-28.** Determine el esfuerzo cortante máximo que actúa sobre la viga en la sección crítica donde la fuerza cortante interna es máxima.



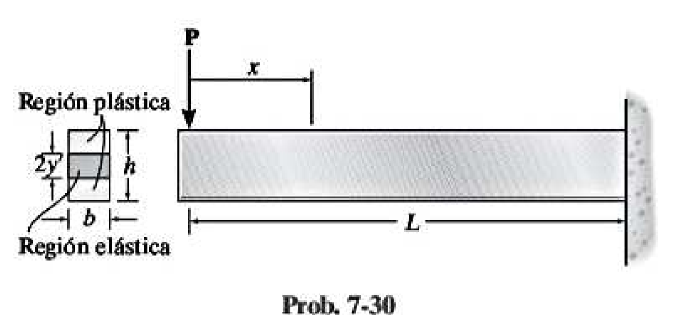
Probs. 7-27/28

7-29. Escriba un programa de computadora que pueda usarse para determinar el esfuerzo cortante máximo en una viga, la cual tiene la sección transversal mostrada en la figura y está sometida a una carga distribuida constante específica w y a una fuerza concentrada P. Muestre una aplicación del programa usando los valores $L = 4$ m, $a = 2$ m, $P = 1.5$ kN, $d_1 = 0$, $d_2 = 2$ m, $w = 400$ N/m, $t_1 = 15$ mm, $t_2 = 20$ mm, $b = 50$ mm y $h = 150$ mm.



Prob. 7-29

7-30. La viga tiene una sección transversal rectangular y está sometida a una carga P que es lo suficientemente grande como para desarrollar un momento completamente plástico $M_p = PL$ en el soporte fijo. Si el material es elastoplástico, entonces el momento $M = Px$ crea una región de cedencia plástica, a una distancia $x < L$, con un núcleo elástico asociado a una altura $2y'$. Esta situación se ha descrito mediante la ecuación 6-30 y el momento **M** se distribuye sobre la sección transversal, como se muestra en la figura 6-48*e*. Demuestre que el esfuerzo cortante máximo desarrollado en la viga está dado por $\tau_{máx} = \frac{3}{2}(P/A')$, donde $A' = 2y'b$, el área de la sección transversal del núcleo elástico.



Prob. 7-30

7-31. La viga de la figura 6-48*f* está sometida a un momento completamente plástico $\mathbf{M}_p$. Demuestre que los esfuerzos cortantes longitudinales y transversales en la viga son iguales a cero. *Sugerencia:* Considere un elemento de la viga como se muestra en la figura 7-4*c*.

7.3 Flujo cortante en elementos compuestos



Figura 7-13

A veces en la práctica de la ingeniería, los elementos se "construyen" a partir de varias partes componentes a fin de lograr una mayor resistencia a las cargas. En la figura 7-13 se muestran algunos ejemplos. Si las cargas causan flexión en los elementos, es necesario utilizar sujetadores tales como clavos, tornillos, material de soldadura o pegamento para evitar que los componentes se deslicen entre sí, figura 7-2. Para diseñar estos sujetadores o determinar su espaciamiento, es necesario conocer la fuerza cortante que debe ser resistida por el sujetador. Esta carga, cuando se mide como una fuerza por unidad de longitud de la viga, se conoce como ***flujo cortante q***.*

La magnitud del flujo cortante puede obtenerse mediante un desarrollo similar al que se hizo para encontrar el esfuerzo cortante en la viga. Para mostrar esto, se considerará la determinación del flujo cortante a lo largo de la unión donde el segmento de la figura 7-14*a* está conectado al ala de la viga. Como se muestra en la figura 7-14*b*, en este segmento deben actuar tres fuerzas horizontales. Dos de esas fuerzas, F y $F + dF$, se desarrollan mediante esfuerzos normales causados por los momentos M y $M + dM$, respectivamente. La tercera fuerza, que para el equilibrio debe ser igual a dF, actúa en la unión y debe estar soportada por el sujetador. Si se observa que dF es el resultado de dM, entonces, al igual que en la ecuación 7-1, se tiene

$$dF = \frac{dM}{I}\int_{A'} y\, dA'$$

La integral representa a Q, es decir, el momento del área A' del segmento en la figura 7-14*b* respecto al eje neutro de toda la sección transversal. Como el segmento tiene una longitud dx, el flujo cortante, o la fuerza por unidad de longitud a lo largo de la viga, es $q = dF/dx$. Por lo tanto, al dividir ambos lados de la ecuación entre dx y teniendo en cuenta que $V = dM/dx$, ecuación 6-2, es posible escribir

$$\boxed{q = \frac{VQ}{I}} \qquad (7\text{-}4)$$

Aquí

q = el flujo cortante, medido como una fuerza por unidad de longitud a lo largo de la viga

V = la fuerza cortante interna resultante, determinada mediante el método de las secciones y las ecuaciones de equilibrio

I = el momento de inercia de *toda* la sección transversal calculada respecto al eje neutro

$Q = \bar{y}'A'$ donde A' es el área de la sección transversal del segmento que se conecta a la viga en la unión donde debe calcularse el flujo cortante, y $\bar{y}'$ es la distancia desde el eje neutro hasta el centroide de A'

*El uso de la palabra "flujo" en esta terminología será significativo en lo que respecta al análisis de la sección 7.5.

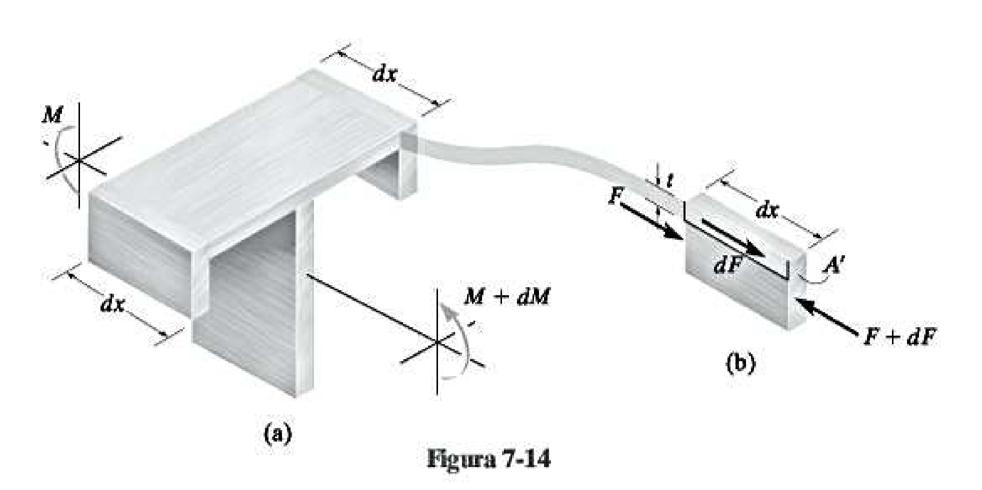


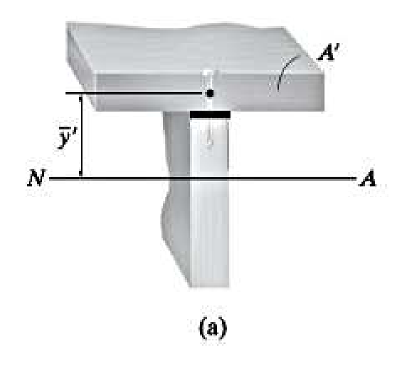
Figura 7-14

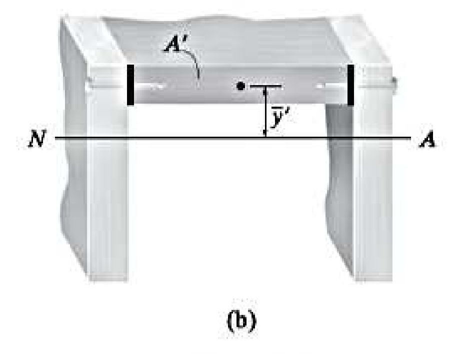


La aplicación de esta ecuación sigue el mismo "procedimiento de análisis" que el indicado en la sección 7.2 para la fórmula del esfuerzo cortante. Es muy importante identificar correctamente a Q para determinar el flujo cortante en una junta particular en la sección transversal. Algunos ejemplos servirán para ilustrar cómo se debe hacer esto. Considere las secciones transversales de viga que se muestran en la figura 7-15. Los segmentos en gris oscuro están conectados a la viga por medio de sujetadores y en los planos de conexión (identificados por las líneas negras gruesas), el flujo cortante q se determina utilizando un valor de Q calculado a partir de A' y $\bar{y}'$. indicados en cada figura. Este valor de q será resistido por un sujetador *único* en la figura 7-15*a*, por medio de *dos* sujetadores en la figura 7-15*b* y mediante *tres* dispositivos de sujeción en la figura 7-15*c*. En otras palabras, el sujetador de la figura 7-15*a* soporta el valor calculado de q, y en las figuras 7-15*b* y 7-15*c* cada sujetador soporta $q/2$ y $q/3$, respectivamente.

Puntos importantes

- El *flujo cortante* es una medida de la fuerza por unidad de longitud a lo largo del eje de una viga. Este valor se obtiene de la fórmula del esfuerzo cortante y se usa para determinar la fuerza cortante desarrollada en los sujetadores y el pegamento que mantienen unidos los distintos segmentos de una viga compuesta.







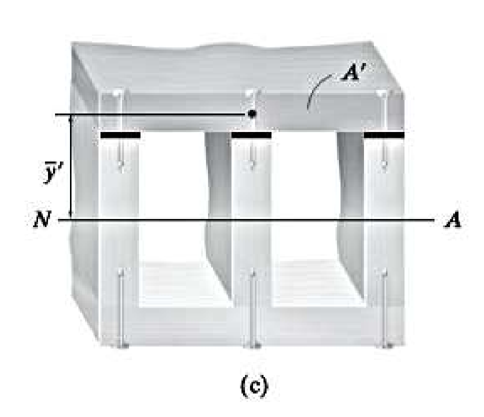


Figura 7-15

EJEMPLO 7.5

La viga está construida a partir de cuatro tablas pegadas como se muestra en la figura 7-16*a*. Si está sometida a una fuerza cortante de $V = 850$ kN, determine el flujo cortante en *B* y *C* que debe resistir el pegamento.

SOLUCIÓN

Propiedades de la sección. El eje neutro (centroide) se medirá desde la parte baja de la viga, figura 7-16*a*. Al trabajar con unidades métricas se obtiene

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{2[0.15\text{ m}](0.3\text{ m})(0.01\text{ m}) + [0.205\text{ m}](0.125\text{ m})(0.01\text{ m}) + [0.305\text{ m}](0.250\text{ m})(0.01\text{ m})}{2(0.3\text{ m})(0.01\text{ m}) + 0.125\text{ m}(0.01\text{ m}) + 0.250\text{ m}(0.01\text{ m})}$$
$$= 0.1968\text{ m}$$

Así, el momento de inercia respecto al eje neutro es

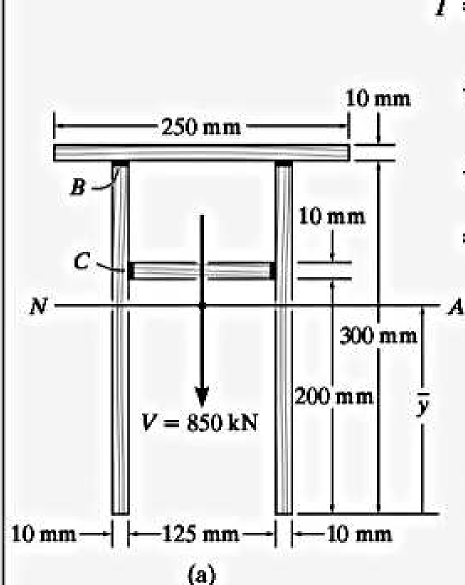
$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.01\text{ m})(0.3\text{ m})^3 + (0.01\text{ m})(0.3\text{ m})(0.1968\text{ m} - 0.150\text{ m})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(0.125\text{ m})(0.01\text{ m})^3 + (0.125\text{ m})(0.01\text{ m})(0.205\text{ m} - 0.1968\text{ m})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(0.250\text{ m})(0.01\text{ m})^3 + (0.250\text{ m})(0.01\text{ m})(0.305\text{ m} - 0.1968\text{ m})^2\right]$$
$$= 87.52(10^{-6})\text{ m}^4$$

Como el pegamento en *B* y *B'* de la figura 7-16*b* "mantiene" la tabla superior en la viga, se tiene

$$Q_B = \bar{y}'_B A'_B = [0.305\text{ m} - 0.1968\text{ m}](0.250\text{ m})(0.01\text{ m})$$
$$= 0.271(10^{-3})\text{ m}^3$$

De la misma manera, el pegamento en *C* y *C'* "mantiene" la tabla interior en la viga, figura 7-16*b* y, por consiguiente

$$Q_C = \bar{y}'_C A'_C = [0.205\text{ m} - 0.1968\text{ m}](0.125\text{ m})(0.01\text{ m})$$
$$= 0.01026(10^{-3})\text{ m}^3$$



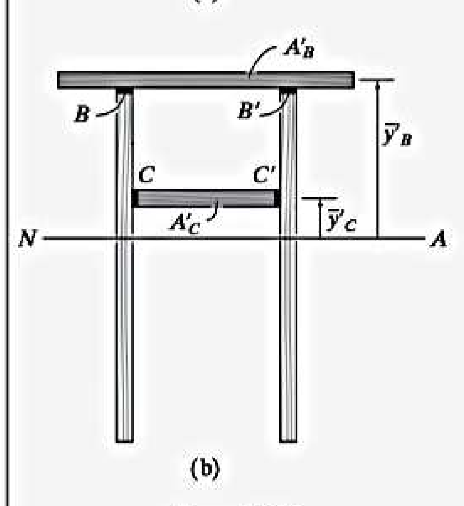


Figura 7-16

Flujo cortante. Para *B* y *B'* se tiene

$$q'_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{850(10^3)\text{ N}(0.271(10^{-3})\text{ m}^3)}{87.52(10^{-6})\text{ m}^4} = 2.63\text{ MN/m}$$

Y para *C* y *C'*,

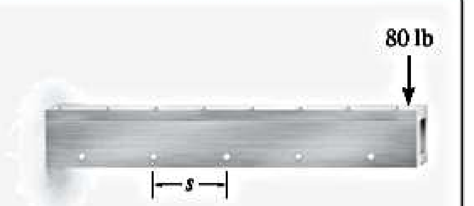
$$q'_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{850(10^3)\text{ N}(0.01026(10^{-3})\text{ m}^3)}{87.52(10^{-6})\text{ m}^4} = 0.0996\text{ MN/m}$$

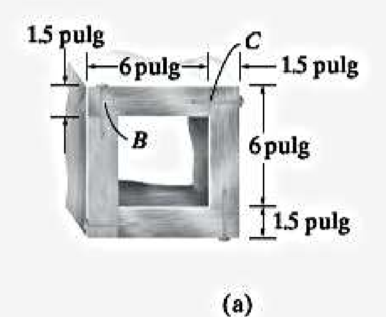
Como se usan *dos juntas* para asegurar cada tabla, el pegamento por metro de longitud de la viga en cada junta debe ser suficientemente fuerte para resistir *la mitad* de cada valor calculado para q'. Así,

$$q_B = 1.31\text{ MN/m} \qquad \text{y} \qquad q_C = 0.0498\text{ MN/m} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 7.6

Una viga de caja se construye con cuatro tablones clavados entre sí, como se muestra en la figura 7-17*a*. Si cada clavo puede soportar una fuerza cortante de 30 lb, determine la separación máxima *s* de los clavos en *B* y *C* para que la viga soporte la fuerza de 80 lb.





(a)

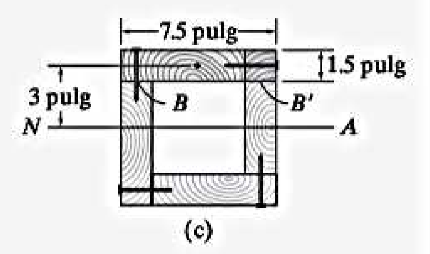
SOLUCIÓN

Fuerza cortante interna. Si la viga se secciona en un *punto arbitrario* sobre su longitud, la fuerza cortante interna necesaria para el equilibrio siempre será $V = 80$ lb, por lo que el diagrama de fuerza cortante es como se muestra en la figura 7-17*b*.

Propiedades de la sección. El momento de inercia del área de la sección transversal respecto al eje neutro puede determinarse al considerar un cuadrado de 7.5 × 7.5 pulg menos un cuadrado de 4.5 × 4.5 pulg.

$$I = \frac{1}{12}(7.5 \text{ pulg})(7.5 \text{ pulg})^3 - \frac{1}{12}(4.5 \text{ pulg})(4.5 \text{ pulg})^3 = 229.5 \text{ pulg}^4$$

El flujo cortante en *B* se determina usando la Q_B encontrada en el área gris más oscura que se muestra en la figura 7-17*c*. Es esta porción "simétrica" de la viga la que debe "mantenerse" con el resto de la viga mediante clavos en el lado izquierdo y por medio de las fibras del tablón del lado derecho.



(b)

Así,

$$Q_B = \bar{y}'A' = [3 \text{ pulg}](7.5 \text{ pulg})(1.5 \text{ pulg}) = 33.75 \text{ pulg}^3$$

Del mismo modo, el flujo cortante en *C* puede determinarse mediante el área "simétrica" sombreada en gris oscuro que se muestra en la figura 7-17*d*. Se tiene

$$Q_C = \bar{y}'A' = [3 \text{ pulg}](4.5 \text{ pulg})(1.5 \text{ pulg}) = 20.25 \text{ pulg}^3$$

Flujo cortante.

$$q_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{80 \text{ lb}(33.75 \text{ pulg}^3)}{229.5 \text{ pulg}^4} = 11.76 \text{ lb/pulg}$$

$$q_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{80 \text{ lb}(20.25 \text{ pulg}^3)}{229.5 \text{ pulg}^4} = 7.059 \text{ lb/pulg}$$

7.5 pulg, 1.5 pulg, 3 pulg, B, B′, N, A

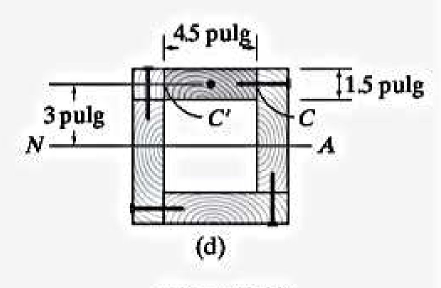
(c)

Estos valores representan la fuerza cortante por unidad de longitud de la viga que debe ser resistida por los clavos en *B* y las fibras en *B*′, figura 7-17*c*, y los clavos en *C* y las fibras en *C*′, figura 7-17*d*, respectivamente. Como en cada caso, el flujo cortante es resistido en *dos* superficies y cada clavo puede resistir 30 lb, para *B* la separación es

$$s_B = \frac{30 \text{ lb}}{(11.76/2) \text{ lb/pulg}} = 5.10 \text{ pulg} \quad \text{Use } s_B = 5 \text{ pulg} \quad \textit{Resp.}$$

Y para *C*,

$$s_C = \frac{30 \text{ lb}}{(7.059/2) \text{ lb/pulg}} = 8.50 \text{ pulg} \quad \text{Use } s_C = 8.5 \text{ pulg} \quad \textit{Resp.}$$



(d)

Figura 7-17

EJEMPLO 7.7

En una viga que puede construirse como se muestra en el Caso I o bien como en el Caso II, figura 7-18, se usan clavos con una resistencia cortante total de 40 lb. Si los clavos están separados a 9 pulg, determine la mayor fuerza cortante vertical que se puede soportar en cada caso de modo que los sujetadores no fallen.

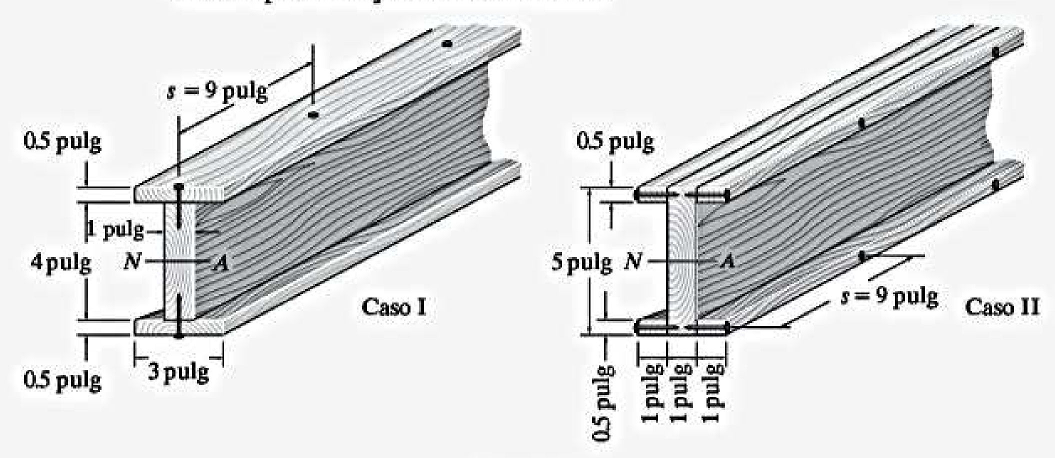


Figura 7-18

SOLUCIÓN

Como la sección transversal es la misma en ambos casos, el momento de inercia respecto al eje neutro es

$$I = \frac{1}{12}(3 \text{ pulg})(5 \text{ pulg})^3 - 2\left[\frac{1}{12}(1 \text{ pulg})(4 \text{ pulg})^3\right] = 20.58 \text{ pulg}^4$$

Caso I. En este diseño, una sola fila de clavos mantiene el ala superior o inferior sobre el alma. Para una de estas alas,

$$Q = \bar{y}'A' = [2.25 \text{ pulg}](3 \text{ pulg}(0.5 \text{ pulg})) = 3.375 \text{ pulg}^3$$

de modo que

$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$\frac{40 \text{ lb}}{9 \text{ pulg}} = \frac{V(3.375 \text{ pulg}^3)}{20.58 \text{ pulg}^4}$$

$$V = 27.1 \text{ lb}$$ *Resp.*

Caso II. Aquí, una hilera de clavos mantiene una de las tablas laterales sobre el alma. Por lo tanto,

$$Q = \bar{y}'A' = [2.25 \text{ pulg}](1 \text{ pulg}(0.5 \text{ pulg})) = 1.125 \text{ pulg}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$\frac{40 \text{ lb}}{9 \text{ pulg}} = \frac{V(1.125 \text{ pulg}^3)}{20.58 \text{ pulg}^4}$$

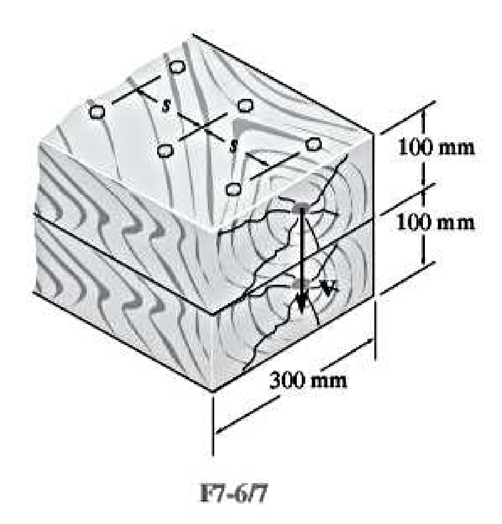
$$V = 81.3 \text{ lb}$$ *Resp.*

7

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

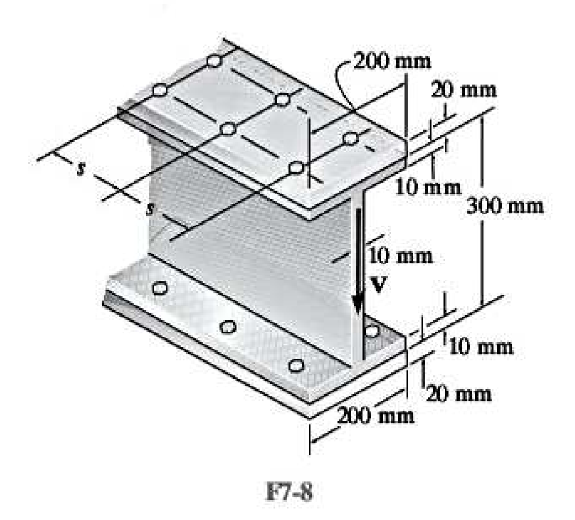
F7-6. Dos tablas idénticas están empernadas entre sí para formar una viga. Determine, con una precisión de 1 mm, la máxima separación permisible s entre los pernos si cada uno tiene una resistencia cortante de 15 kN. La viga está sometida a una fuerza cortante de $V = 50$ kN.

F7-7. Dos tablas idénticas están empernadas entre sí para formar una viga. Si la separación entre los pernos es $s = 100$ mm y cada uno tiene una resistencia cortante de 15 kN, determine la fuerza cortante máxima **V** que la viga puede resistir.



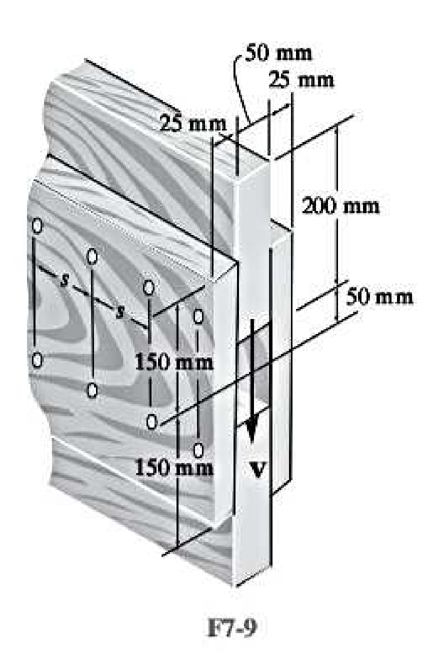
F7-6/7

F7-8. Dos placas gruesas idénticas con 20 mm de grosor se empernan a las alas superior e inferior para formar una viga compuesta. Si la viga se somete a una fuerza cortante de $V = 300$ kN, determine la separación máxima permisible s de los pernos, con una precisión de 1 mm. Cada perno tiene una resistencia cortante de 30 kN.



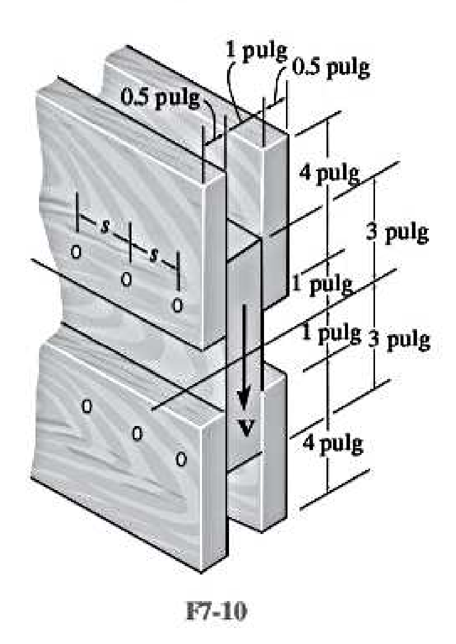
F7-8

F7-9. Las tablas están unidas entre sí para formar una viga compuesta. Si la viga se somete a una fuerza cortante de $V = 20$ kN, determine la separación máxima permisible de los pernos con una precisión de 1 mm. Cada perno tiene una resistencia cortante de 8 kN.



F7-9

F7-10. Las tablas están unidas entre sí para formar la viga compuesta. Si la viga se somete a una fuerza cortante de $V = 15$ kip, determine la separación máxima permisible de los pernos con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg. Cada perno tiene una resistencia cortante de 6 kip.



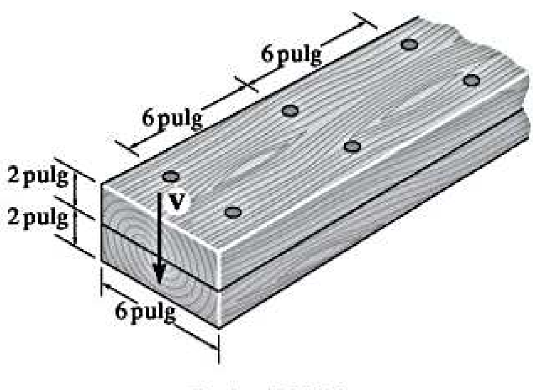
F7-10

7

PROBLEMAS

*7-32. La viga está construida con dos tablas unidas en las partes superior e inferior, mediante dos hileras de clavos espaciados cada 6 pulg. Si cada clavo puede soportar una fuerza cortante de 500 lb, determine la máxima fuerza cortante V que puede aplicarse a la viga.

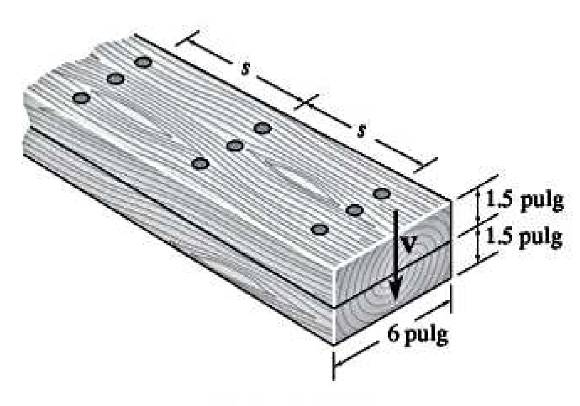
•7-33. La viga está construida con dos tablas unidas en las partes superior e inferior, mediante dos hileras de clavos espaciados cada 6 pulg. Si se aplica una fuerza cortante interna de $V = 600$ lb sobre las tablas, determine la fuerza cortante resistida por cada clavo.



Probs. 7-32/33

7-34. La viga está construida con dos tablas unidas mediante tres hileras de clavos espaciados a $s = 2$ pulg de distancia. Si cada clavo puede soportar una fuerza cortante de 450 lb, determine la fuerza cortante máxima V que puede aplicarse a la viga. El esfuerzo cortante permisible para la madera es $\tau_{perm} = 300$ psi.

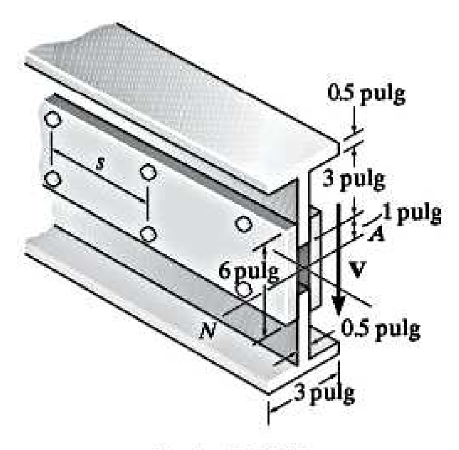
7-35. La viga está construida con dos tablas unidas mediante tres hileras de clavos. Si el esfuerzo cortante permisible para la madera es $\tau_{perm} = 150$ psi, determine la fuerza cortante máxima V que puede aplicarse a la viga. Además, encuentre la separación máxima s de los clavos si cada uno puede resistir 650 lb en corte.



Probs. 7-34/35

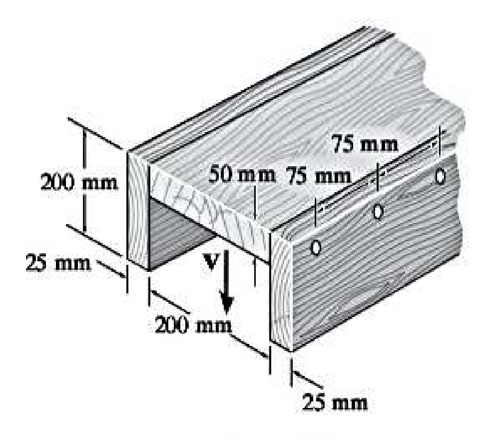
*7-36. La viga está fabricada a partir de dos elementos estructurales equivalentes en T y dos placas. Cada placa tiene una altura de 6 pulg y un grosor de 0.5 pulg. Si se aplica una fuerza cortante de $V = 50$ kip a la sección transversal, determine la separación máxima de los pernos. Cada perno puede resistir una fuerza cortante de 15 kip.

•7-37. La viga está fabricada a partir de dos elementos estructurales equivalentes en T y dos placas. Cada placa tiene una altura de 6 pulg y un grosor de 0.5 pulg. Si los pernos están espaciados a $s = 8$ pulg, determine la fuerza cortante máxima V que puede aplicarse a la sección transversal. Cada perno puede resistir una fuerza cortante de 15 kip.



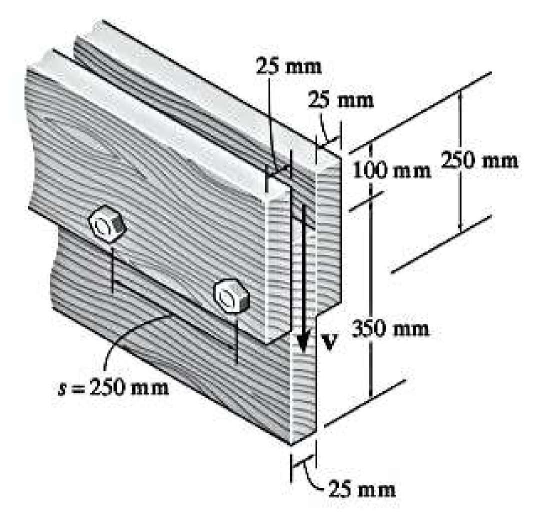
Probs. 7-36/37

7-38. La viga está sometida a una fuerza cortante de $V = 2$ kN. Determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en cada clavo si éstos se encuentran separados a 75 mm sobre los lados de la viga. Cada clavo tiene un diámetro de 4 mm.



Prob. 7-38

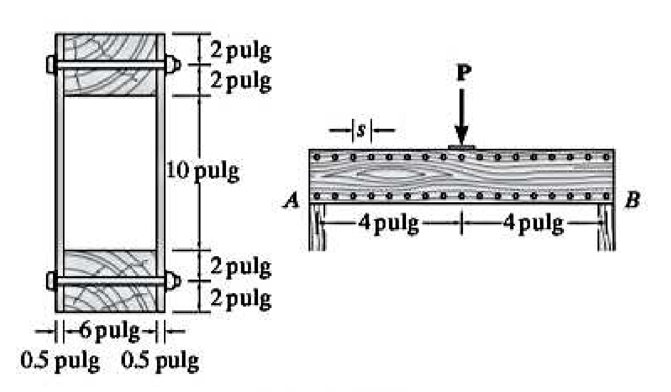
7-39. Una viga está construida con tres tablas unidas entre sí, como se muestra en la figura. Determine la fuerza cortante desarrollada en cada perno si éstos se encuentran separados a $s = 250$ mm y la fuerza cortante aplicada es de $V = 35$ kN.



Prob. 7-39

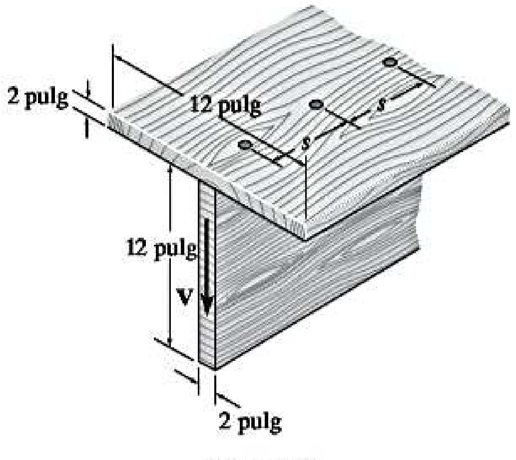
•7-40. La viga de doble alma se construye a partir de dos hojas de madera contrachapada que se fijan a piezas de madera en sus partes superior e inferior. Si cada elemento de sujeción puede soportar 600 lb en corte simple, determine la separación s requerida entre los sujetadores para soportar la carga $P = 3000$ lb. Suponga que A está articulada y que B es un rodillo.

•7-41. La viga de doble alma se construye a partir de dos hojas de madera contrachapada que se fijan a piezas de madera en sus partes superior e inferior. El esfuerzo flexionante permisible de la madera es $\sigma_{perm} = 8$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 3$ ksi. Si los sujetadores están separados a $s = 6$ pulg y cada uno puede soportar 600 lb en corte simple, determine la carga máxima P que puede aplicarse a la viga.



Probs. 7-40/41

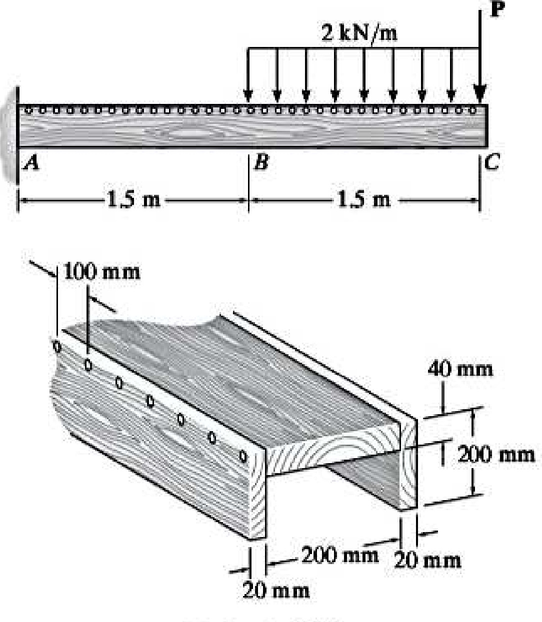
7-42. La viga en T se clava de la manera mostrada en la figura. Si cada clavo puede soportar una fuerza cortante de 950 lb, determine la máxima fuerza cortante V que puede soportar la viga y la máxima separación s correspondiente entre los clavos con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg. El esfuerzo cortante permisible para la madera es $\tau_{perm} = 450$ psi.



Prob. 7-42

7-43. Determine el esfuerzo cortante promedio desarrollado en los clavos dentro de la región AB de la viga. Los clavos se ubican a los lados de la viga y están separados a 100 mm entre sí. Cada clavo tiene un diámetro de 4 mm. Considere $P = 2$ kN.

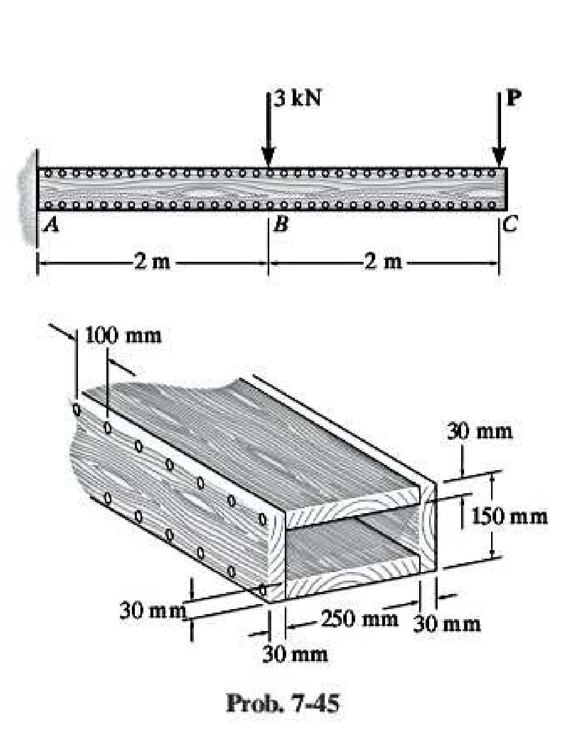
•7-44. Los clavos están a ambos lados de la viga y cada uno puede resistir una fuerza cortante 2 kN. Además de la carga distribuida, determine la carga máxima P que puede aplicarse al extremo de la viga. Los clavos están separados por 100 mm y el esfuerzo cortante permisible para la madera es $\tau_{perm} = 3$ MPa.



Probs. 7-43/44

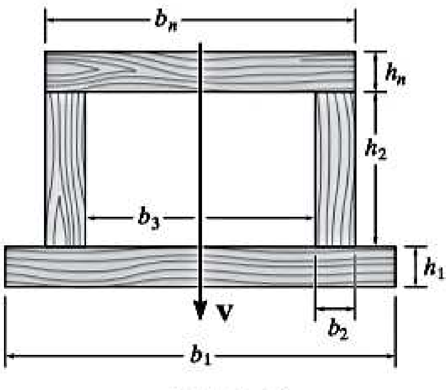
7

•7-45. La viga se construye con cuatro tablones clavados entre sí. Los clavos están a ambos lados de la viga y cada uno puede resistir una fuerza cortante 3 kN. Determine la carga máxima P que puede aplicarse al extremo de la viga.



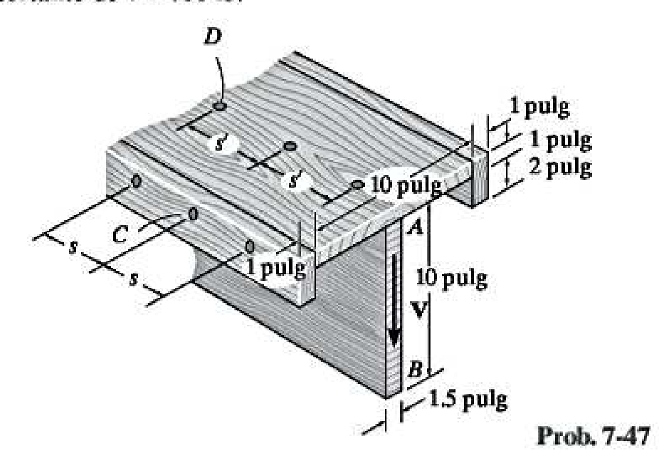
Prob. 7-45

7-46. Una viga compuesta de madera está hecha con cuatro tablas, cada una con una sección transversal rectangular. Escriba un programa de computadora que pueda usarse para determinar el esfuerzo cortante máximo en la viga cuando está sometida a la fuerza cortante V. Muestre una aplicación del programa para un conjunto específico de dimensiones.



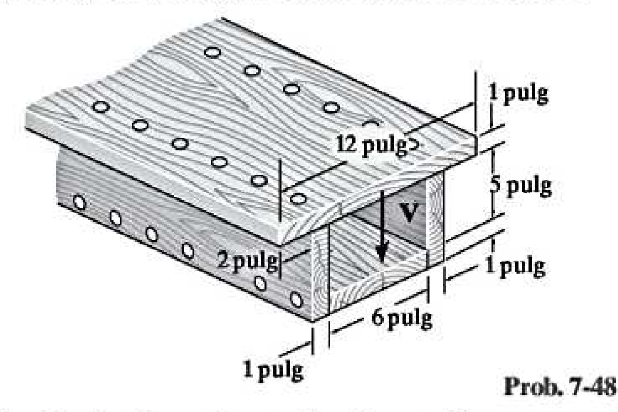
Prob. 7-46

7-47. La viga está construida con cuatro tablas clavadas entre sí, como se muestra en la figura. Si cada clavo puede soportar una fuerza cortante de 100 lb, determine las separaciones requeridas s y s' si la viga está sometida a una fuerza cortante de $V = 700$ lb.



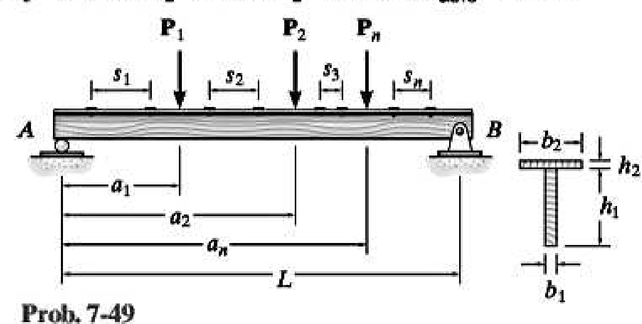
Prob. 7-47

*7-48. La viga de caja está construida con cuatro tablones que se sujetan mediante clavos espaciados a lo largo de la viga a cada 2 pulg. Si cada clavo puede resistir una fuerza cortante de 50 lb, determine la mayor fuerza cortante V que se puede aplicar a la viga sin causar la falla de los clavos.



Prob. 7-48

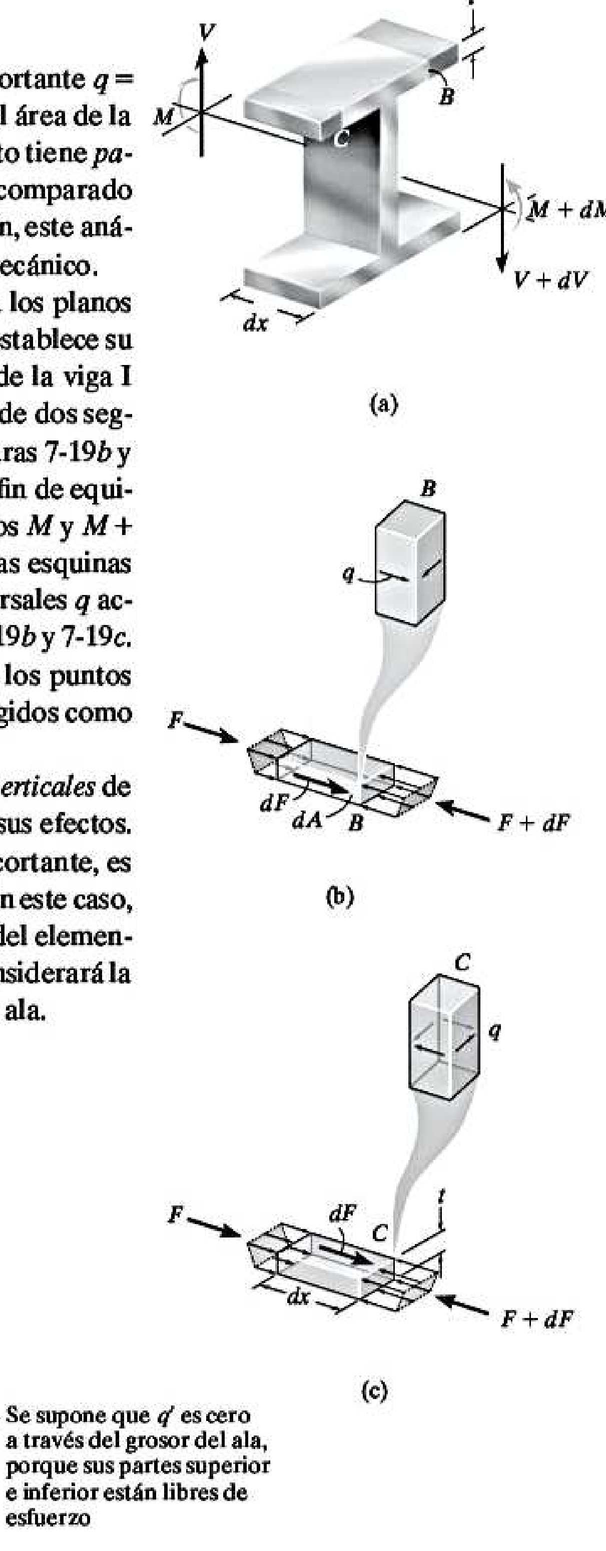
7-49. La viga de madera en T está sometida a una carga que consiste en n fuerzas concentradas, P_n. Si se conoce la fuerza cortante permisible V_{clavo} para cada uno de los clavos, escriba un programa de computadora que especifique el espaciamiento de los clavos entre cada carga. Muestre una aplicación del programa usando los valores $L = 15$ pies, $a_1 = 4$ pies, $P_1 = 600$ lb, $a_2 = 8$ pies, $P_2 = 1500$ lb, $b_1 = 1.5$ pulg, $h_1 = 10$ pulg, $b_2 = 8$ pulg, $h_2 = 1$ pulg y $V_{clavo} = 200$ lb.



Prob. 7-49

7

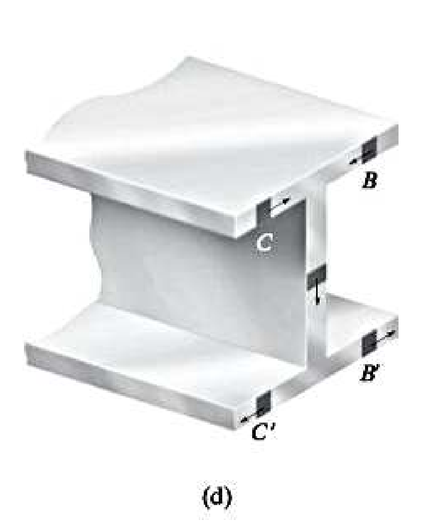
7.4 Flujo cortante en elementos de pared delgada



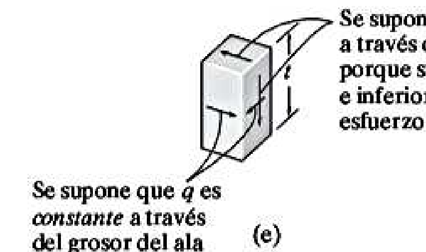
En esta sección se mostrará cómo aplicar la ecuación de flujo cortante $q = VQ/I$ para encontrar la *distribución* del flujo cortante en toda el área de la sección transversal de un elemento. Se supondrá que el elemento tiene *paredes delgadas*, es decir, que el grosor de la pared es pequeño comparado con su altura o anchura. Como se muestra en la siguiente sección, este análisis tiene aplicaciones importantes en el diseño estructural y mecánico.

Al igual que el esfuerzo cortante, el flujo cortante actúa en los planos longitudinal *y* transversal del elemento. Para mostrar cómo se establece su dirección en la sección transversal, considere el segmento dx de la viga I de ala ancha en la figura 7-19*a*. Los diagramas de cuerpo libre de dos segmentos, B y C, tomados del ala superior se muestran en las figuras 7-19*b* y 7-19*c*. La fuerza dF debe actuar sobre la sección longitudinal a fin de equilibrar las fuerzas normales F y $F + dF$ creadas por los momentos M y $M + dM$, respectivamente. Ahora bien, si los elementos B y C en las esquinas de cada segmento se retiran, entonces las componentes transversales q actúan en la sección transversal, como se muestra en las figuras 7-19*b* y 7-19*c*. Mediante este método, demuestre que los flujos cortantes en los puntos correspondientes B' y C' del ala inferior, figura 7-19*d*, están dirigidos como se muestra en la figura.

Aunque también es cierto que $V + dV$ creará componentes *verticales* de flujo cortante en este elemento, aquí no se tomarán en cuenta sus efectos. Esto se debe a que esta componente, al igual que el esfuerzo cortante, es aproximadamente igual a cero en todo el grosor del elemento. En este caso, el ala es delgada y la parte superior e inferior de las superficies del elemento están libres de esfuerzo, figura 7-19*e*. En resumen, sólo se considerará la componente de flujo cortante que actúa *paralela* a los lados del ala.

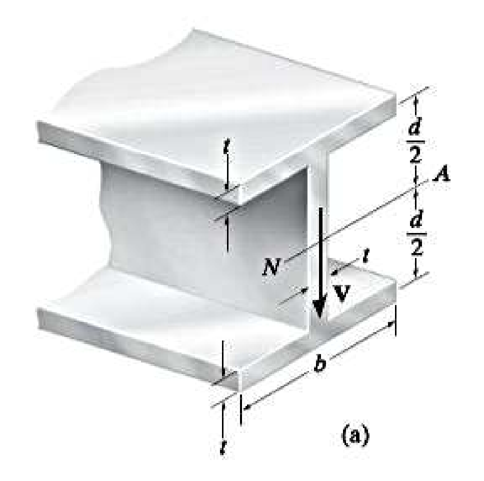


(d)



(e)

Figura 7-19



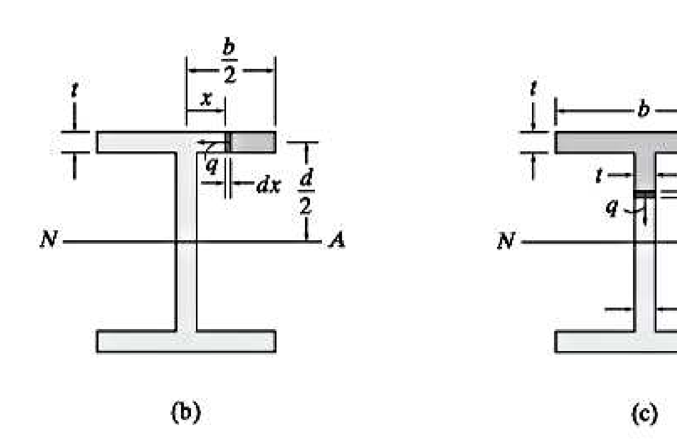


Figura 7-20

Después de haber determinado la dirección del flujo cortante en cada ala, ahora es posible encontrar su distribución a lo largo del ala superior derecha de la viga mostrada en la figura 7-20*a*. Para ello, considere el flujo cortante q, que actúa sobre el elemento dx gris oscuro, el cual se encuentra a una distancia arbitraria x de la línea central de la sección transversal de la figura 7-20*b*. Aquí, $Q = \bar{y}'A' = [d/2](b/2 - x)t$, de modo que

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V[d/2](b/2 - x)t}{I} = \frac{Vtd}{2I}\left(\frac{b}{2} - x\right) \qquad (7\text{-}5)$$

Por inspección, esta distribución varía de forma *lineal* a partir de $q = 0$ en $x = b/2$ hasta $(q_{\text{máx}})_f = Vtdb/4I$ en $x = 0$. (La limitación de $x = 0$ es posible aquí porque se supone que el elemento tiene "pared delgada", por lo que el grosor del alma no se toma en cuenta). Debido a la simetría, un análisis similar genera la misma distribución de flujo cortante en los otros segmentos del ala, de modo que los resultados son los mostrados en la figura 7-20*d*.

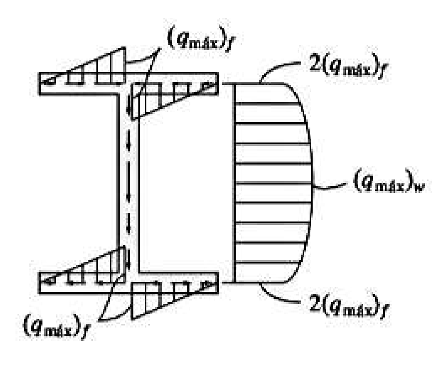
La fuerza total desarrollada en cada segmento del ala puede determinarse por integración. Como la fuerza sobre el elemento dx de la figura 7-20*b* es $dF = q\,dx$, entonces

$$F_f = \int q\,dx = \int_0^{b/2} \frac{Vtd}{2I}\left(\frac{b}{2} - x\right)dx = \frac{Vtdb^2}{16I}$$

Este resultado también puede encontrarse al determinar el área bajo el triángulo de la figura 7-20*d*. Por consiguiente,

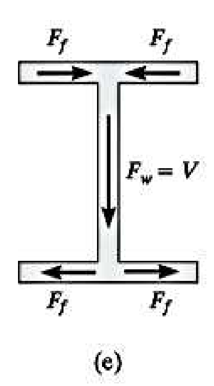
$$F_f = \frac{1}{2}(q_{\text{máx}})_f\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{Vtdb^2}{16I}$$

Estas cuatro fuerzas se muestran en la figura 7-20*e*, donde puede observarse a partir de su dirección que se mantiene el equilibrio de fuerzas horizontales de la sección transversal.



Distribución del flujo cortante

(d)



(e)

Figura 7-20 (cont.)

Es posible realizar un análisis similar para el alma, figura 7-20*c*. Aquí q debe actuar hacia abajo y en el elemento dy se tiene $Q = \Sigma \bar{y}' A' = [d/2](bt) + [y + (1/2)(d/2 - y)]t(d/2 - y) = bt\, d/2 + (t/2)(d^2/4 - y^2)$, de modo que

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right] \qquad (7\text{-}6)$$

Para el alma, el flujo cortante varía de una *forma parabólica* desde $q = 2(q_{máx})_f = Vt\,db/2I$ en $y = d/2$ hasta $(q_{máx})_w = (Vt\,d/I)(b/2 + d/8)$ en $y = 0$, figura 7-20*d*.

Al integrar para determinar la fuerza en el alma, F_w, se tiene,

$$F_w = \int q\, dy = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right] dy$$

$$= \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2}y + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4}y - \frac{1}{3}y^3\right)\right]\Bigg|_{-d/2}^{d/2}$$

$$= \frac{Vtd^2}{4I}\left(2b + \frac{1}{3}d\right)$$

Eso posible la simplificación si se observa que el momento de inercia para el área de la sección transversal es

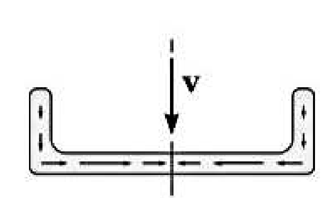
$$I = 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{d}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{12}td^3$$

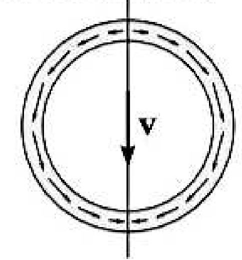
Si no se toma en cuenta el primer término, dado que el grosor de cada ala es pequeño, entonces

$$I = \frac{td^2}{4}\left(2b + \frac{1}{3}d\right)$$

Al sustituir esto en la ecuación anterior, se observa que $F_w = V$, tal como se esperaba, figura 7-20*e*.

A partir del análisis anterior, deben observarse tres puntos importantes. En primer lugar, el valor de q cambia a través de la sección transversal, ya que Q será diferente para cada segmento de área A' en el cual se determina. En particular, q variará *linealmente* a lo largo de los segmentos (alas) que son *perpendiculares* a la dirección de **V**, y de manera *parabólica* a lo largo de los segmentos (alma) que están *inclinados* respecto a **V** o que son *paralelos* a ésta. En segundo lugar, *q siempre actuará de manera paralela a las paredes* del elemento, puesto que la sección en la que se calcula q se toma perpendicular a las paredes. Y en tercer lugar, el *sentido direccional* de q es tal que la fuerza cortante parece "*fluir*" a través de la sección transversal, *hacia adentro* en el ala superior de la viga, "combinándose" y luego "fluyendo" *hacia abajo* a través del alma, puesto que debe contribuir a la fuerza cortante **V**, y luego "separándose" y "fluyendo" *hacia fuera* en el ala inferior. Si es posible al "visualizar" este "flujo" se obtendrá una forma sencilla de establecer no sólo la dirección de q, sino *también* la dirección correspondiente de τ. En la figura 7-21 se muestran otros ejemplos de cómo se dirige q a lo largo de los segmentos de los elementos con pared delgada. En todos los casos, prevalece la simetría respecto a un eje que está alineado con **V**. Como resultado, q "fluye" en una dirección tal que proporcionará la fuerza vertical **V** y, sin embargo, también cumplirá el equilibrio de fuerzas horizontales para la sección transversal.





Flujo cortante q

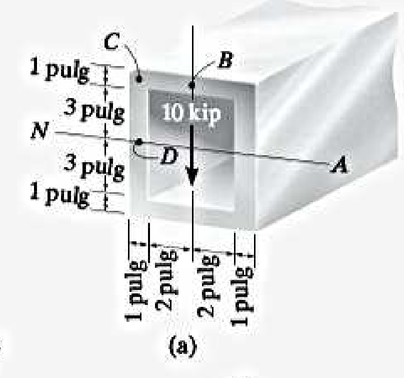
Figura 7-21

Puntos importantes

- La fórmula del flujo cortante $q = VQ/I$ puede utilizarse para determinar la distribución del flujo cortante a lo largo de un elemento con pared delgada, siempre que la fuerza cortante **V** actúe a lo largo de un eje de simetría o eje principal de inercia centroidal para la sección transversal.
- Si un elemento está hecho con segmentos de pared delgada, sólo es importante el flujo cortante *paralelo* a las paredes del elemento.
- El flujo cortante varía *linealmente* a lo largo de los segmentos que son *perpendiculares* a la dirección de la fuerza cortante **V**.
- El flujo cortante varía en forma *parabólica* a lo largo de los segmentos que están *inclinados* o que son *paralelos* respecto a la dirección de la fuerza cortante **V**.
- En la sección transversal la fuerza cortante "fluye" a lo largo de los segmentos, de modo que resulte en la fuerza cortante vertical **V** y, aún así, cumpla el equilibrio de las fuerzas horizontales.

EJEMPLO 7.8

La viga de caja de pared delgada que se muestra en la figura 7-22*a* está sometida a una fuerza cortante de 10 kip. Determine la variación del flujo cortante en toda la sección transversal.

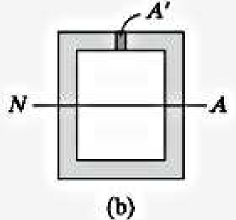


(a)

SOLUCIÓN

Por simetría, el eje neutro pasa por el centro de la sección transversal. Para los elementos de pared delgada se usan las dimensiones de la línea central para el cálculo del momento de inercia.

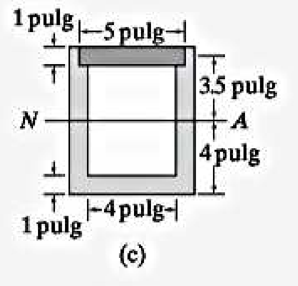
$$I = \frac{1}{12}(2\,\text{pulg})(7\,\text{pulg})^3 + 2\left[(5\,\text{pulg})(1\,\text{pulg})(3.5\,\text{pulg})^2\right] = 179.7\,\text{pulg}^4$$



(b)

Sólo se debe determinar el flujo cortante en los puntos B, C y D. Para el punto B, el área $A' \approx 0$, figura 7-22*b*, ya que es posible pensar que se encuentra ubicada completamente en el punto B. Por otra parte, A' también puede representar *toda* el área de la sección transversal, en cuyo caso $Q_B = \bar{y}'A' = 0$ puesto que $\bar{y}' = 0$. Como $Q_B = 0$, entonces

$$q_B = 0$$



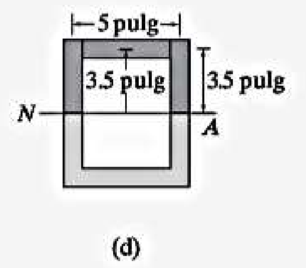
(c)

Para el punto C, el área A' se muestra en gris más oscuro en la figura 7-22*c*. En este caso, se han usado las dimensiones medias porque el punto C está sobre la línea central de cada segmento. Se tiene

$$Q_C = \bar{y}'A' = (3.5\,\text{pulg})(5\,\text{pulg})(1\,\text{pulg}) = 17.5\,\text{pulg}^3$$

Como hay dos puntos de unión,

$$q_C = \frac{1}{2}\left(\frac{VQ_C}{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10\,\text{kip}(17.5\,\text{pulg}^3)}{179.7\,\text{pulg}^4}\right) = 0.487\,\text{kip/pulg}$$



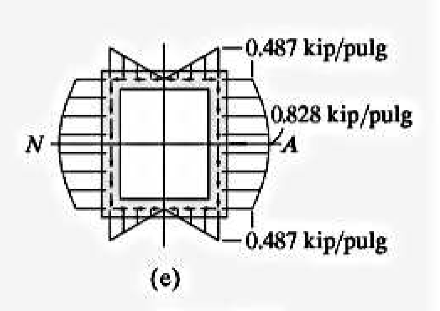
(d)

El flujo cortante en D se determina empleando los tres rectángulos en gris oscuro que se muestran en la figura 7-22*d*. Una vez más, si se usan las dimensiones de la línea central

$$Q_D = \Sigma\bar{y}'A' = 2\left[\frac{3.5\,\text{pulg}}{2}\right](1\,\text{pulg})(3.5\,\text{pulg}) + [3.5\,\text{pulg}](5\,\text{pulg})(1\,\text{pulg}) = 29.75\,\text{pulg}^3$$

Como hay dos puntos de unión,

$$q_D = \frac{1}{2}\left(\frac{VQ_D}{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10\,\text{kip}(29.75\,\text{pulg}^3)}{179.7\,\text{pulg}^4}\right) = 0.828\,\text{kip/pulg}$$



(e)

Figura 7-22

Con estos resultados y con la simetría de la sección transversal, es posible graficar la distribución del flujo cortante en la figura 7-22*e*. La distribución es lineal a lo largo de los segmentos horizontales (perpendiculares a **V**) y parabólica a lo largo de los segmentos verticales (paralelos a **V**).

7

*7.5 Centro cortante para elementos abiertos de pared delgada

En la sección anterior, se supuso que la fuerza cortante interna **V** se aplicaba a lo largo de un eje principal de inercia centroidal que *también* representaba un *eje de simetría* de la sección transversal. En esta sección se considerará el efecto de la aplicación de la fuerza cortante a lo largo de un eje centroidal principal que *no* es un eje de simetría. Al igual que antes, sólo se analizarán los elementos abiertos de pared delgada, por lo que se usarán las dimensiones de la línea central en las paredes de tales elementos. Un ejemplo típico de este caso es la sección de canal mostrada en la figura 7-23*a*. La sección se encuentra en voladizo con un soporte fijo y está sometida a la fuerza **P**. Si la fuerza se aplica una vez a lo largo del eje vertical asimétrico que pasa por el *centroide C* de la sección transversal, el canal no sólo se doblará hacia abajo, *sino que también se torcerá* en sentido horario como se muestra en la figura.

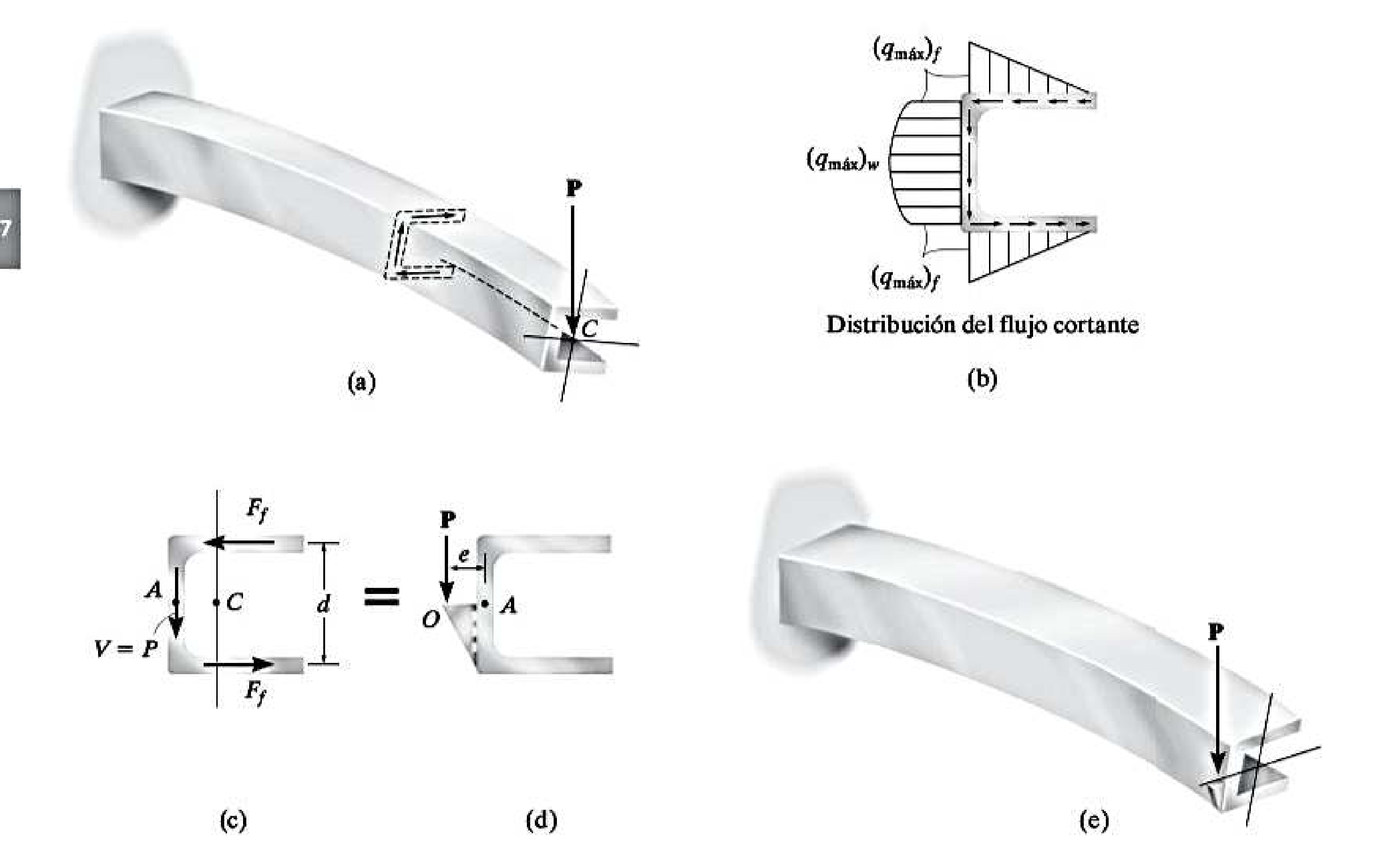


Figura 7-23

Para entender por qué se tuercen los elementos, es necesario mostrar la distribución del flujo cortante a lo largo de las alas y el alma del canal, figura 7-23*b*. Cuando esta distribución se integra sobre las áreas de las alas y el alma, se obtienen fuerzas resultantes de F_f en cada ala y una fuerza de $V = P$ en el alma, figura 7-23*c*. Si los momentos de estas fuerzas se suman respecto al punto A, puede observarse que el momento de torsión o torca creado por las fuerzas del ala es el responsable por la torsión del elemento. El giro real es en sentido horario cuando se observa desde el frente de la viga, como en la figura 7-23*a*, ya que las fuerzas "de equilibrio" internas *reactivas* F_f causan la torsión. Por lo tanto, para *evitar* esta torsión es necesario aplicar **P** en un punto O situado a una distancia excéntrica e del alma del canal, figura 7-23*d*. Se requiere $\Sigma M_A = F_f d = Pe$, o bien

$$e = \frac{F_f d}{P}$$

Mediante el método descrito en la sección anterior, F_f puede evaluarse en términos de P ($= V$) y las dimensiones de las alas y el alma. Una vez hecho esto, P se cancelará al sustituirse en la ecuación anterior, y será posible expresar e simplemente como una función de la geometría de la sección transversal (vea el ejemplo 7.9). El punto O ubicado de esta forma se denomina ***centro cortante*** o ***centro de flexión***. Cuando **P** se aplica en el centro cortante, ***la viga se dobla sin torcerse***, como se muestra en la figura 7-23*e*. Con frecuencia, los manuales de diseño presentan la ubicación de este punto para una serie de vigas con secciones transversales de pared delgada que se usan de manera normal en la práctica de la ingeniería.

A partir de este análisis, debe señalarse que ***el centro cortante siempre se encuentra sobre un eje de simetría*** del área de la sección transversal de un elemento. Por ejemplo, si el canal se gira 90° y **P** se aplica en A, figura 7-24*a*, no se presentará una torsión porque el flujo cortante en el alma y las alas para este caso es *simétrico* y, por consiguiente, las fuerzas resultantes en los elementos no crearán ningún momento alrededor de A, figura 7-24*b*. Por supuesto, si un elemento tiene una sección transversal con *dos* ejes de simetría, como en el caso de una viga I de ala ancha, entonces el centro cortante coincide con la intersección de estos ejes (el centroide).





Demostración de la forma en que una viga en voladizo se dobla cuando es cargada a través del centroide (arriba) y a través del centro cortante (abajo).

7

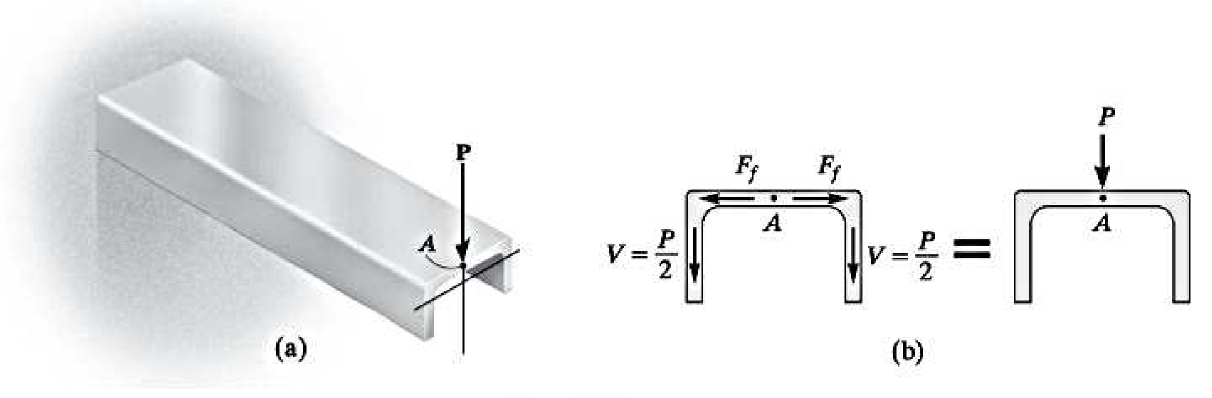


Figura 7-24

Puntos importantes

- El *centro cortante* es el punto de una viga a través del cual puede aplicarse una fuerza que causará que la viga se doble pero no se tuerza.
- El centro cortante siempre se encontrará sobre un eje de simetría de la sección transversal.
- La ubicación del centro cortante sólo es una función de la geometría de la sección transversal y no depende de la carga aplicada.

Procedimiento de análisis

La ubicación del centro cortante de un elemento abierto con pared delgada, para el cual la fuerza cortante está en la *misma dirección* que un eje principal centroidal de la sección transversal puede determinarse mediante el siguiente procedimiento.

Resultantes de flujo cortante.

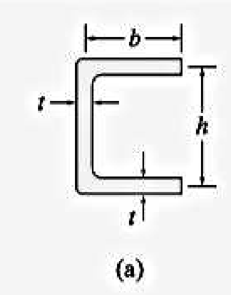
- Por observación, determine la dirección del flujo cortante a través de los diferentes segmentos de la sección transversal y dibuje las resultantes de fuerza sobre cada segmento de dicha sección. (Por ejemplo, vea la figura 7-23*c*.) Como el centro cortante se determina al tomar los momentos de estas resultantes de fuerza respecto a un punto (A), elija ese punto en una ubicación que elimine los momentos de tantas resultantes de fuerza como sea posible.
- Se deben calcular las magnitudes de las resultantes de fuerza que crean un momento alrededor de A. Para cualquier segmento esto se hace mediante la determinación del flujo cortante q en un punto arbitrario del segmento, para después integrar q sobre la longitud de dicho segmento. Observe que **V** creará una variación *lineal* del flujo cortante en los segmentos que son *perpendiculares* a **V**, y una variación *parabólica* del flujo cortante en los segmentos que son *paralelos o inclinados* respecto a **V**.

Centro cortante.

- Sume los momentos de las resultantes del flujo cortante respecto al punto A e iguale este momento con el de **V** alrededor de A. Resuelva esta ecuación para determinar el brazo de momento o la distancia excéntrica e, que ubica la línea de acción de **V** desde A.
- Si existe un *eje de simetría* para la sección transversal, el centro cortante se encuentra en el punto donde este eje interseca la línea de acción de **V**.

EJEMPLO 7.9

Determine la ubicación del centro cortante para la sección de canal con pared delgada que tiene las dimensiones mostradas en la figura 7-25*a*.



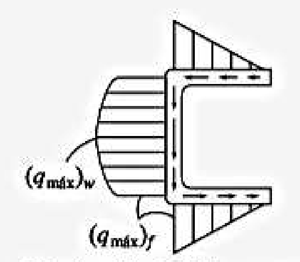
(a)

SOLUCIÓN

Resultantes del flujo cortante. Una fuerza cortante vertical descendente **V** aplicada a la sección ocasiona que la fuerza cortante fluya a través de las alas y el alma como se muestra en la figura 7-25*b*. Esto produce las resultantes de fuerza F_f y V, en las alas y el alma, que se muestran en la figura 7-25*c*. Se tomarán momentos respecto al punto A de modo que sólo debe determinarse la fuerza F_f en el ala inferior.

El área de la sección transversal se puede dividir en tres componentes rectangulares (un alma y dos alas). Como se supone que cada componente es delgado, el momento de inercia del área respecto al eje neutro es

$$I = \frac{1}{12}th^3 + 2\left[bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{th^2}{2}\left(\frac{h}{6} + b\right)$$



Distribución del flujo cortante

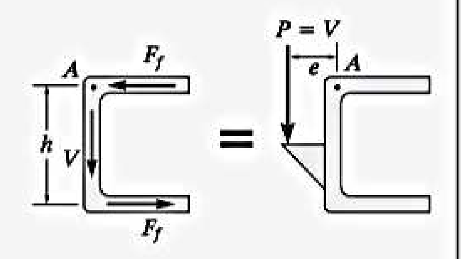
(b)

A partir de la figura 7-25*d*, q en la posición arbitraria x es

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(h/2)[b - x]t}{(th^2/2)[(h/6) + b]} = \frac{V(b - x)}{h[(h/6) + b]}$$

Por lo tanto, la fuerza F_f es

$$F_f = \int_0^b q\,dx = \frac{V}{h[(h/6) + b]}\int_0^b (b - x)\,dx = \frac{Vb^2}{2h[(h/6) + b]}$$



(c)

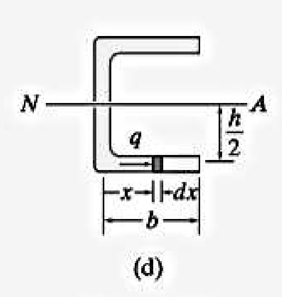
Este mismo resultado también se puede obtener si primero se encuentra $(q_{máx})_f$, figura 7-25*b*, y después se determina el área triangular $\frac{1}{2}b(q_{máx})_f = F_f$.

Centro cortante. Al sumar los momentos respecto al punto A, figura 7-25*c*, se requiere

$$Ve = F_f h = \frac{Vb^2h}{2h[(h/6) + b]}$$

Por lo tanto,

$$e = \frac{b^2}{[(h/3) + 2b]}$$ *Resp.*



(d)

Figura 7-25

Como se dijo anteriormente, e depende sólo de la geometría de la sección transversal.

EJEMPLO 7.10

Determine la ubicación del centro cortante para el ángulo con lados iguales que se muestra en la figura 7-26*a*. Además, encuentre la fuerza cortante interna resultante en cada lado.

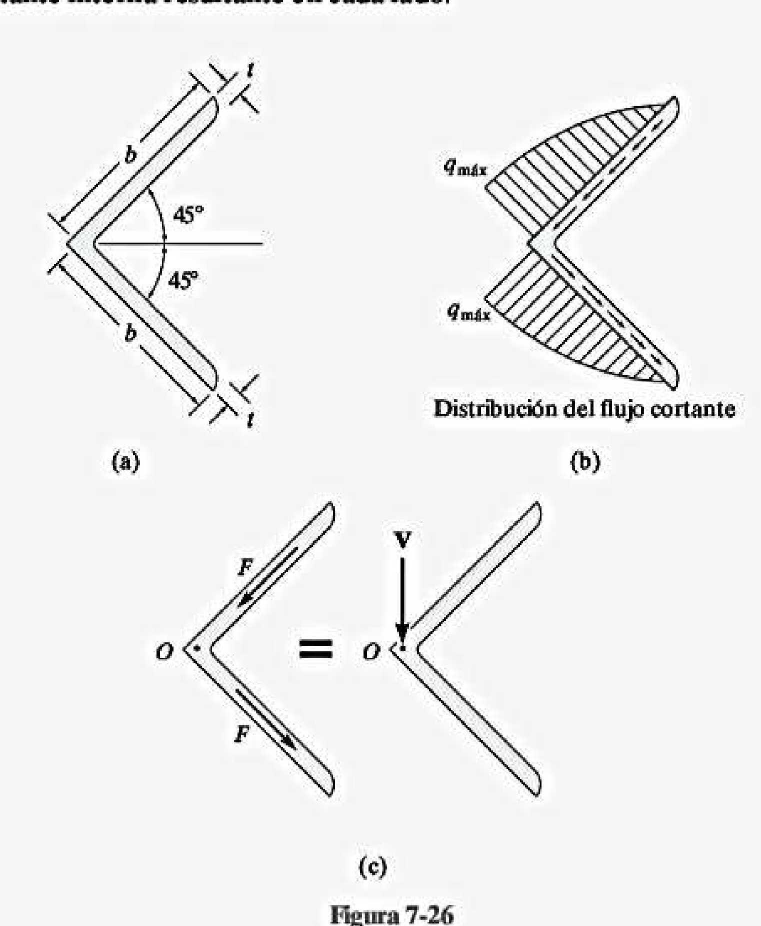


Figura 7-26

7

SOLUCIÓN

Cuando se aplica en la sección una fuerza cortante vertical hacia abajo **V**, el flujo cortante y las resultantes de éste se dirigen de la manera mostrada en las figuras 7-26*b* y 7-26*c*, respectivamente. Tenga en cuenta que la fuerza F en cada lado debe ser igual, ya que para lograr el equilibrio, la suma de sus componentes horizontales debe ser igual a cero. Además, las líneas de acción de ambas fuerzas se cruzan en el punto O; por lo tanto, este punto *debe ser el centro cortante* ya que la suma de los momentos de estas fuerzas y **V** respecto a O es cero, figura 7-26*c*.

La magnitud de **F** puede determinarse al encontrar primero el flujo cortante en la ubicación arbitraria s a lo largo del lado superior, figura 7-26*d*. Aquí

$$Q = \bar{y}'A' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((b - s) + \frac{s}{2}\right)ts = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right)st$$

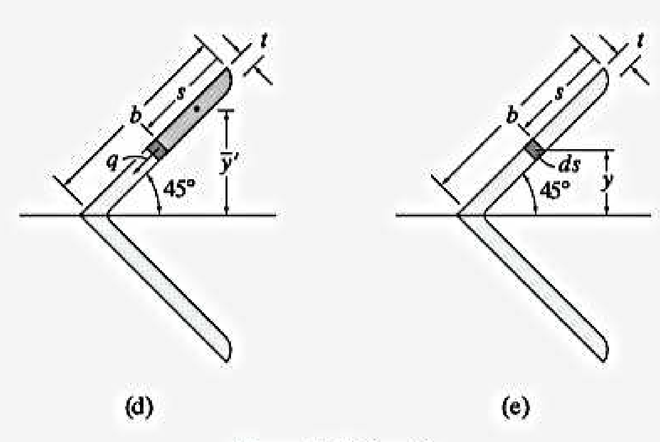


Figura 7-26 (cont.)

El momento de inercia del ángulo respecto al eje neutro debe determinarse a partir de "los principios básicos", ya que los lados están inclinados con respecto al eje neutro. Para el elemento de área $dA = t\,ds$, figura 7-26*e*, se tiene

$$I = \int_A y^2\,dA = 2\int_0^b \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(b - s)\right]^2 t\,ds = t\left(b^2 s - bs^2 + \frac{1}{3}s^3\right)\Big|_0^b = \frac{tb^3}{3}$$

Por lo tanto, el flujo cortante es

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V}{(tb^3/3)}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right)st\right]$$
$$= \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}s\left(b - \frac{s}{2}\right)$$

La variación de q es parabólica, y alcanza un valor máximo cuando $s = b$ como se muestra en la figura 7-26*b*. Por lo tanto, la fuerza F es

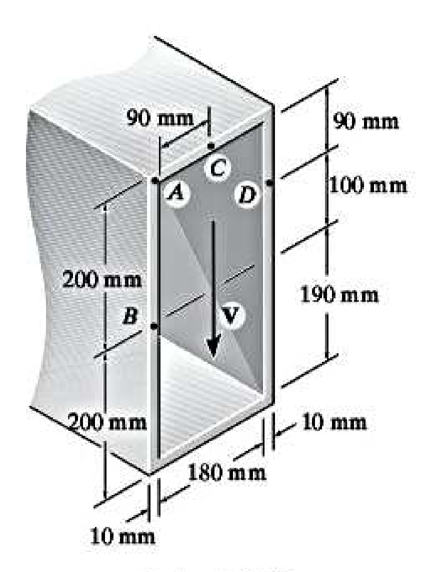
$$F = \int_0^b q\,ds = \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}\int_0^b s\left(b - \frac{s}{2}\right)ds$$
$$= \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}\left(b\frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}s^3\right)\Big|_0^b$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}V \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Este resultado puede verificarse fácilmente porque la suma de las componentes verticales del la fuerza F en cada lado debe ser igual a V y, como se dijo anteriormente, la suma de las componentes horizontales debe ser igual a cero.

PROBLEMAS

7-50. Una fuerza cortante de $V = 300$ kN se aplica a la trabe de caja. Determine el flujo cortante en los puntos A y B.

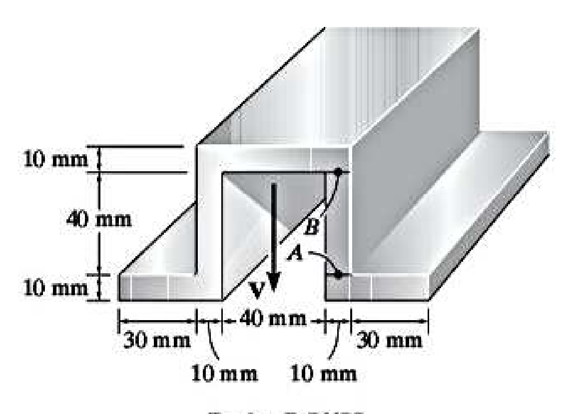
7-51. Una fuerza cortante de $V = 450$ kN se aplica a la trabe de caja. Determine el flujo cortante en los puntos C y D.



Probs. 7-50/51

7-54. El puntal de aluminio tiene 10 mm de grosor y la sección transversal mostrada en la figura. Si se somete a una fuerza cortante de $V = 150$ N, determine el flujo cortante en los puntos A y B.

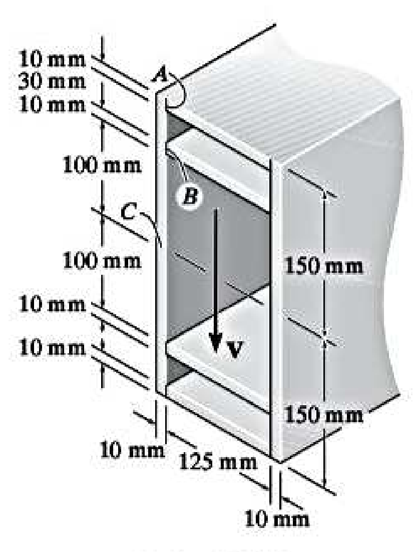
7-55. El puntal de aluminio tiene 10 mm de grosor y la sección transversal mostrada en la figura. Si se somete a una fuerza cortante de $V = 150$ N, determine el flujo cortante máximo en el puntal.



Probs. 7-54/55

*7-52. Una fuerza cortante de $V = 18$ kN se aplica a la trabe de caja simétrica. Determine el flujo cortante en A y B.

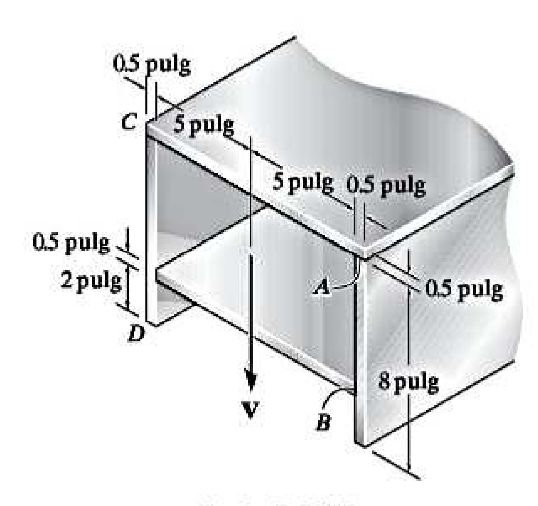
•7-53. Una fuerza cortante de $V = 18$ kN se aplica a la trabe de caja. Determine el flujo cortante en C.



Probs. 7-52/53

*7-56. La viga está sometida a una fuerza cortante de $V = 5$ kip. Determine el flujo cortante en los puntos A y B.

•7-57. La viga se construyó a partir de cuatro placas y está sometida a una fuerza cortante de $V = 5$ kip. Determine el flujo cortante máximo en la sección transversal.

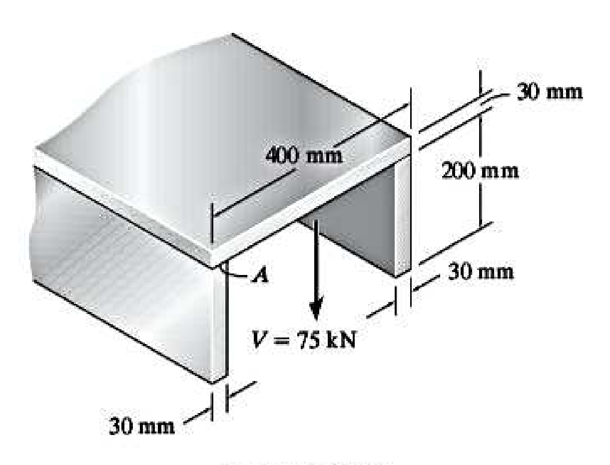


Probs. 7-56/57

7

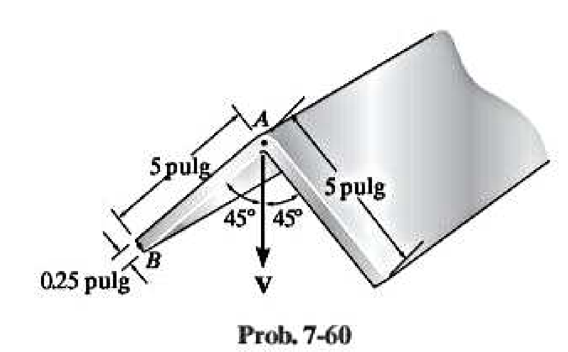
7-58. El canal está sometido a una fuerza cortante de V = 75 kN. Determine el flujo cortante desarrollado en el punto A.

7-59. El canal está sometido a una fuerza cortante de V = 75 kN. Determine el flujo cortante máximo en el canal.



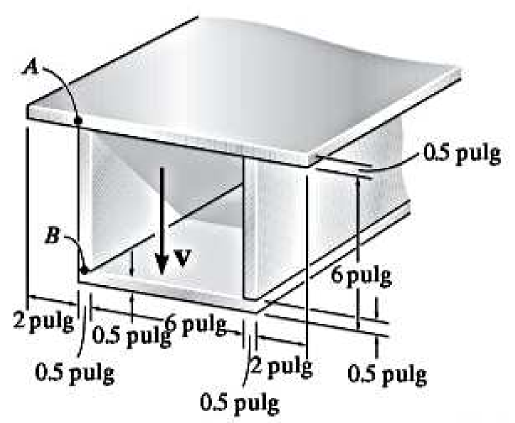
Probs. 7-58/59

***7-60.** El ángulo está sometido a una fuerza cortante de V = 2 kip. Dibuje la distribución del flujo cortante a lo largo de la pata AB. Indique los valores numéricos en todos los picos.



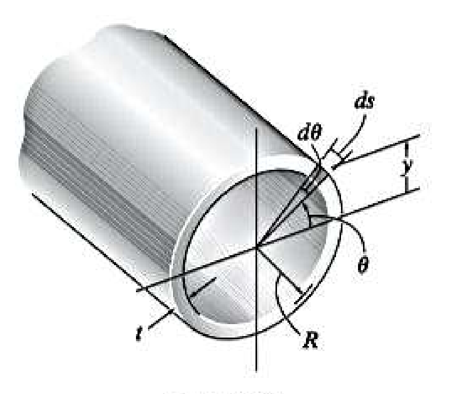
Prob. 7-60

•**7-61.** El ensamble está sometido a una fuerza cortante vertical de V = 7 kip. Determine el flujo cortante en los puntos A y B y el flujo cortante máximo en la sección transversal.



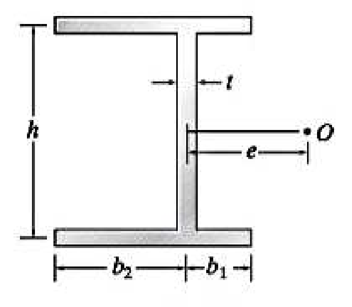
Prob. 7-61

7-62. Determine la variación del esfuerzo cortante sobre la sección transversal del tubo con pared delgada como una función de la elevación y y demuestre que $\tau_{máx} = 2V/A$, donde $A = 2\pi rt$. *Sugerencia:* Elija un elemento diferencial de área $dA = Rt\ d\theta$. Usando $dQ = ydA$, formule Q para una sección circular desde θ hasta $(\pi - \theta)$ y demuestre que $Q = 2R^2t \cos\theta$, donde $\cos\theta = \sqrt{R^2 - y^2}/R$.



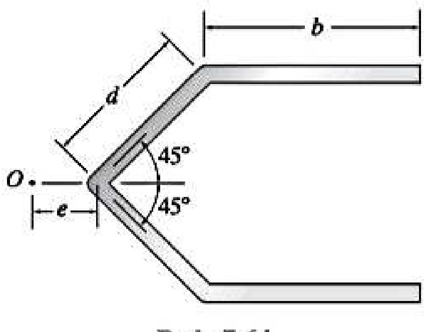
Prob. 7-62

7-63. Determine la ubicación e del centro cortante, punto O, para el elemento de pared delgada que tiene la sección transversal mostrada en la figura, donde $b_2 > b_1$. Los segmentos del elemento tienen el mismo grosor t.



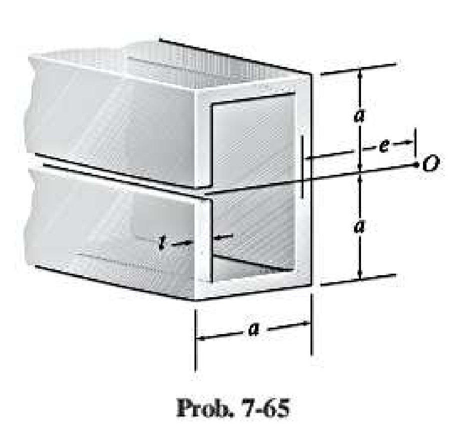
Prob. 7-63

***7-64.** Determine la ubicación e del centro cortante, punto O, para el elemento de pared delgada que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Los segmentos del elemento tienen el mismo grosor t.



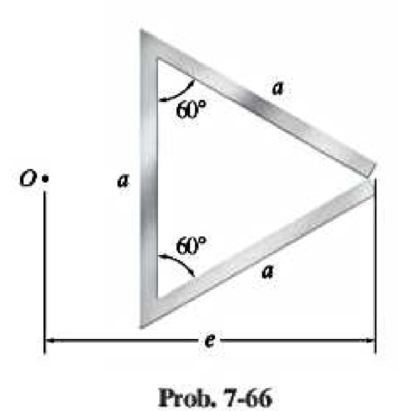
Prob. 7-64

•7-65. Determine la ubicación e del centro cortante, punto O, para el miembro de pared delgada que tiene un corte a lo largo de uno de sus lados. Cada elemento tiene un grosor constante t.



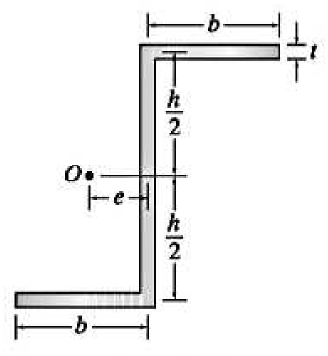
Prob. 7-65

7-66. Determine la ubicación e del centro cortante, punto O, para el elemento de pared delgada que tiene la sección transversal mostrada en la figura.



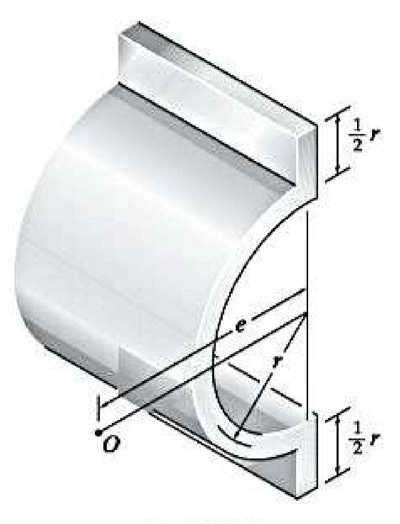
Prob. 7-66

7-67. Determine la ubicación e del centro cortante, punto O, para el elemento de pared delgada que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Los segmentos del elemento tienen el mismo grosor t.



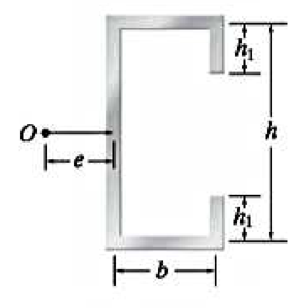
Prob. 7-67

*7-68. Determine la ubicación e del centro cortante, punto O, para la viga que tiene la sección transversal mostrada en la figura. El grosor es t.



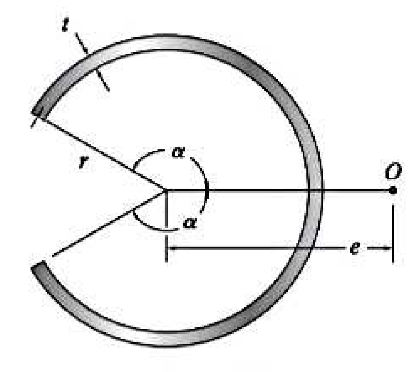
Prob. 7-68

•7-69. Determine la ubicación e del centro cortante, punto O, para el elemento de pared delgada que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Los segmentos del elemento tienen el mismo grosor t.



Prob. 7-69

7-70. Determine la ubicación e del centro cortante, punto O, para el elemento de pared delgada que tiene la sección transversal mostrada en la figura.



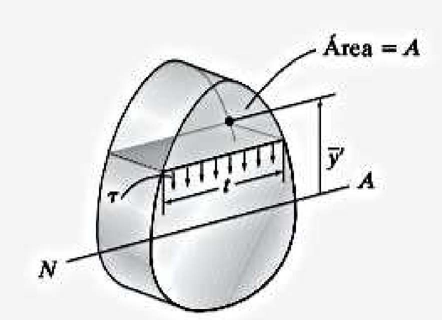
Prob. 7-70

REPASO DE CAPÍTULO

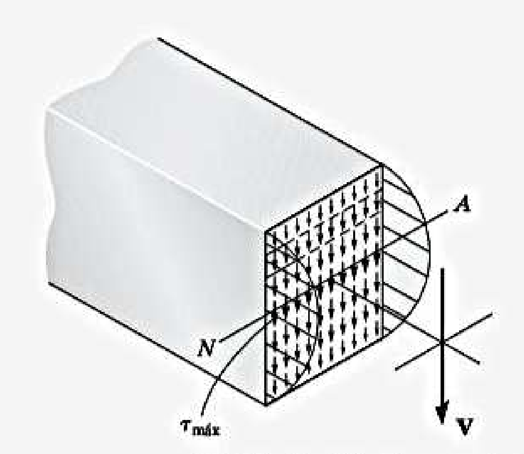
El esfuerzo cortante transversal en vigas se determina de manera indirecta mediante la fórmula de la flexión y la relación entre el momento y la fuerza cortante ($V = dM/dx$). El resultado es la fórmula del esfuerzo cortante

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

En particular, el valor de Q es el momento del área A' respecto del eje neutro, $Q = \bar{y}'A'$. Esta área es la parte de la sección transversal que se "mantiene" en la viga, por encima (o por debajo) del grosor t donde debe determinarse τ.



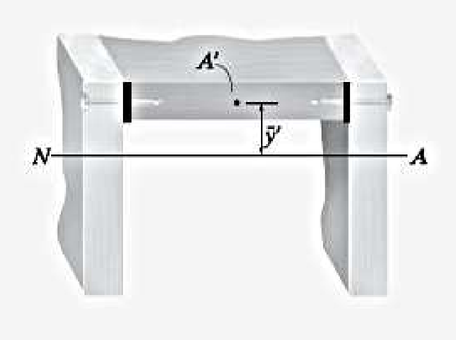
Si la viga tiene una sección transversal *rectangular*, entonces la distribución del esfuerzo cortante es parabólica, con un valor máximo en el eje neutro. El esfuerzo cortante máximo puede determinarse mediante $\tau = 1.5\,\frac{V}{A}$.



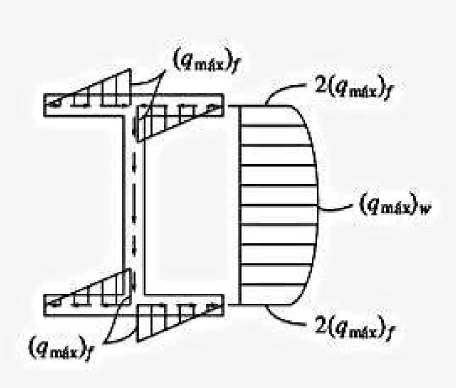
Distribución del esfuerzo cortante

Los elementos de sujeción, tales como clavos, tornillos, pegamento o soldaduras, se usan para conectar las partes de una sección "compuesta". La fuerza cortante resistida por estos sujetadores se determina a partir del flujo cortante, q, o fuerza por unidad de longitud, que debe ser soportado por la viga. El flujo cortante es

$$q = \frac{VQ}{I}$$

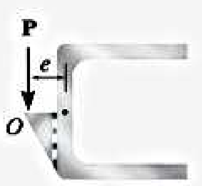


Si la viga está fabricada con segmentos de pared delgada, entonces se puede determinar la distribución del flujo cortante a lo largo de cada segmento. Esta distribución varía linealmente a lo largo de los segmentos horizontales y en forma parabólica a lo largo de los segmentos inclinados o verticales.



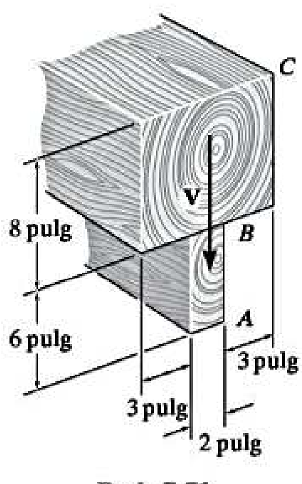
Distribución del flujo cortante

Siempre que se conozca la distribución del flujo cortante en cada elemento de una sección abierta con pared delgada, es posible determinar la ubicación O del centro cortante de la sección transversal empleando un equilibrio de momentos. Cuando se aplica una carga a través del punto O sobre el elemento, éste se doblará pero no se torcerá.

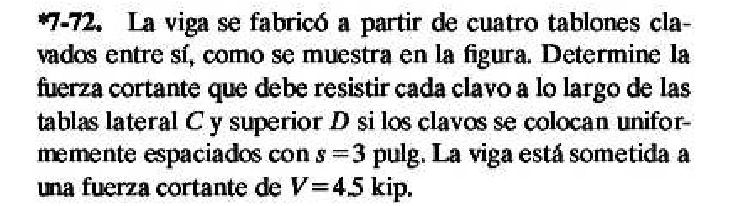


PROBLEMAS DE REPASO

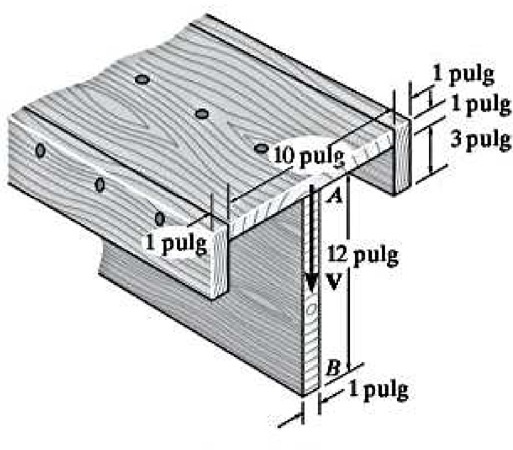
7-71. Dibuje la intensidad de la distribución del esfuerzo cortante que actúa sobre el área de la sección transversal de la viga y determine la fuerza cortante resultante que actúa sobre el segmento AB. La fuerza cortante que actúa en la sección es $V = 35$ kip. Demuestre que $I_{EN} = 872.49$ pulg^4.



Prob. 7-71

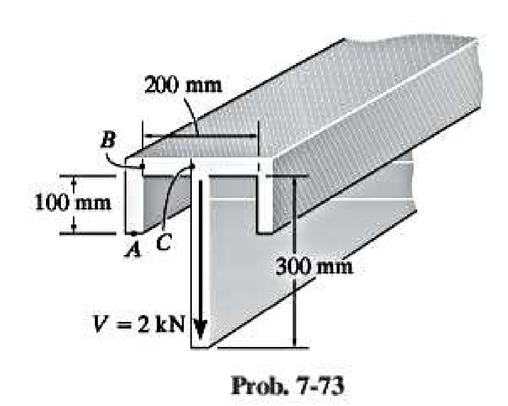


•7-72. La viga se fabricó a partir de cuatro tablones clavados entre sí, como se muestra en la figura. Determine la fuerza cortante que debe resistir cada clavo a lo largo de las tablas lateral C y superior D si los clavos se colocan uniformemente espaciados con $s = 3$ pulg. La viga está sometida a una fuerza cortante de $V = 4.5$ kip.



Prob. 7-72

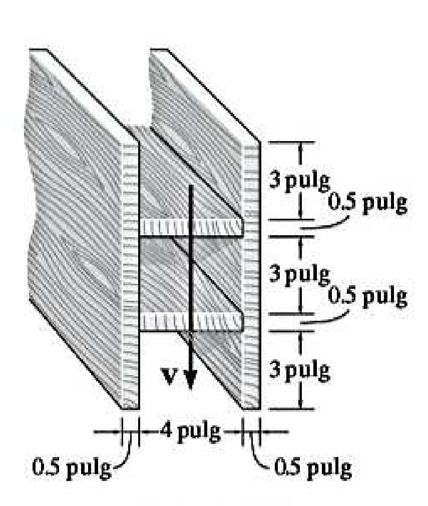
•7-73. El elemento se somete a una fuerza cortante de $V = 2$ kN. Determine el flujo cortante en los puntos A, B y C. Cada segmento de pared delgada tiene un grosor de 15 mm.



Prob. 7-73

7-74. La viga se construyó pegando cuatro tablones sobre las uniones que se muestran en la figura. Si el pegamento puede soportar 75 lb/pulg, ¿cuál es la máxima fuerza cortante vertical V que puede soportar la viga?

7-75. Resuelva el problema 7-74 si la viga se gira 90° desde la posición mostrada.



Probs. 7-74/75

7



El gancho acodado que sostiene a esta góndola (cabina) para esquiadores está sometido a las cargas combinadas de la fuerza axial y el momento flexionante.

Cargas combinadas

8

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Este capítulo sirve como un repaso de los análisis del esfuerzo que se han desarrollado en los capítulos anteriores sobre carga axial, torsión, flexión y fuerza cortante. Se analizará la solución de problemas en los que varias de estas cargas internas ocurren simultáneamente sobre la sección transversal de un elemento. Sin embargo, antes de hacer esto el capítulo comienza con un estudio del esfuerzo desarrollado en recipientes a presión de pared delgada.

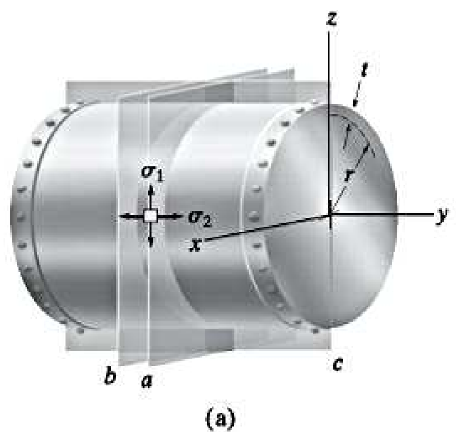
8.1 Recipientes a presión de pared delgada

Con frecuencia, en la industria se usan recipientes cilíndricos o esféricos para servir como calderas o tanques. Cuando está bajo presión, el material del que están hechos se somete a una carga en todas direcciones. Aunque éste sea el caso, el recipiente puede analizarse de manera sencilla siempre y cuando tenga una pared delgada. En general, "***pared delgada***" se refiere a un recipiente que tiene una relación del radio interior sobre el grosor de la pared con un valor de 10 o más ($r/t \geq 10$). En específico, cuando $r/t = 10$ los resultados de un análisis de pared delgada predicen un esfuerzo que es aproximadamente 4 por ciento *menor* que el esfuerzo máximo real en el recipiente. Para relaciones r/t mayores, este error será aún menor.

Siempre que la pared del recipiente sea "delgada", la distribución de esfuerzos en todo su grosor no variará significativamente, por lo que se supone que es *uniforme* o *constante*. Considerando este supuesto, ahora se analizará el estado de esfuerzo en recipientes a presión cilíndricos y esféricos de pared delgada. En ambos casos, la presión en el recipiente se entiende como la *presión manométrica*, es decir, mide la presión *por encima* de la presión atmosférica, ya que se supone que la presión atmosférica existe tanto dentro como fuera de la pared del recipiente antes de presurizarlo.



Los recipientes cilíndricos a presión, como este tanque de gas, tienen tapas semiesféricas en vez de planas a fin de reducir el esfuerzo en el tanque.

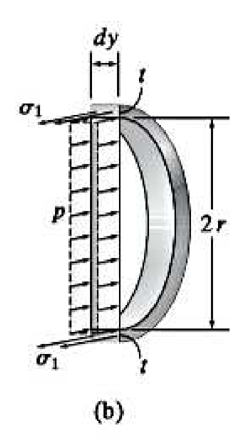


(a)

Recipientes cilíndricos. Considere que el recipiente cilíndrico de la figura 8-1*a* tiene un grosor de pared *t*, un radio interior *r* y está sometido a una presión manométrica *p* que se genera en el recipiente por el gas que contiene. Debido a esta carga, un pequeño elemento del recipiente que está suficientemente alejado de los extremos y orientado como se muestra en la figura 8-1*a*, se encuentra sometido a esfuerzos normales σ_1 en la ***dirección circunferencial o anular,*** y σ_2 en la ***dirección longitudinal o axial.***

El esfuerzo anular puede determinarse considerando que el recipiente está seccionado por los planos *a*, *b* y *c*. En la figura 8-1*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento posterior junto con el gas contenido. Aquí sólo se muestran las cargas en la dirección *x*. Estas cargas se desarrollan por el esfuerzo anular uniforme σ_1, que actúa sobre la pared del recipiente y la presión que actúa sobre la cara vertical del gas. Para el equilibrio en la dirección *x*, se requiere

$$\Sigma F_x = 0; \qquad 2[\sigma_1(t\,dy)] - p(2r\,dy) = 0$$



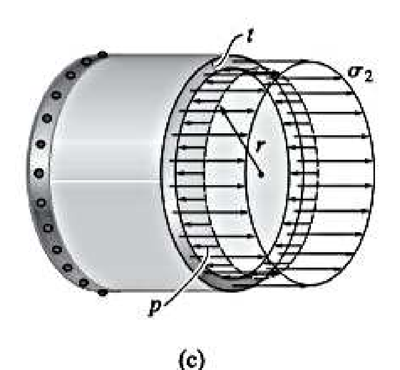
(b)

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{pr}{t}} \tag{8-1}$$

El esfuerzo longitudinal puede determinarse considerando la porción izquierda de la sección *b* del cilindro, figura 8-1*a*. Como se muestra en la figura 8-1*c*, σ_2 actúa de manera uniforme en toda la pared y *p* actúa en la sección del gas contenido. Como el radio medio es aproximadamente igual al del radio interior del recipiente, el equilibrio en la dirección *y* requiere

$$\Sigma F_y = 0; \qquad \sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{pr}{2t}} \tag{8-2}$$



(c)

Figura 8-1

En las ecuaciones anteriores,

$\sigma_1, \sigma_2 =$ el esfuerzo normal en las direcciones anular y longitudinal, respectivamente. Se supone que cada uno es *constante* en toda la pared del cilindro, y cada uno somete al material a tensión

$p =$ la presión manométrica interna generada por el gas contenido

$r =$ el radio interior del cilindro

$t =$ el grosor de la pared ($r/t \geq 10$)

8

En comparación, tenga en cuenta que el esfuerzo anular o circunferencial es dos veces mayor que el esfuerzo longitudinal o axial. En consecuencia, cuando se fabrican recipientes cilíndricos a presión a partir de placas laminadas, las juntas longitudinales deben estar diseñadas para soportar el doble del esfuerzo que las juntas circunferenciales.



Esta foto muestra el cañón de una escopeta que se tapó con residuos justo antes de disparar. La presión del gas debida a la carga incrementó de tal forma el esfuerzo circunferencial dentro del barril, que se produjo la ruptura.

Recipientes esféricos.

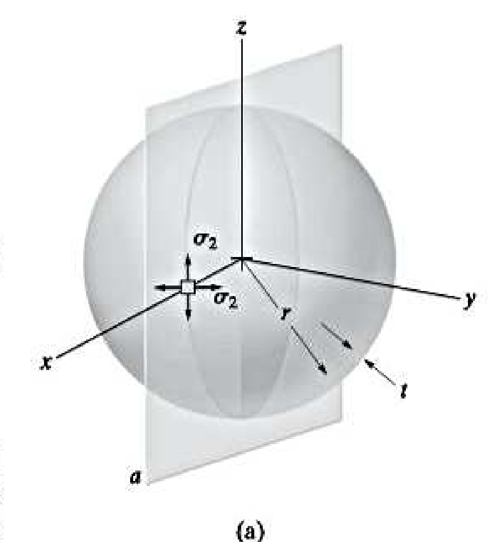
Un recipiente esférico a presión puede analizarse de una manera similar. Para hacer esto, considere que el recipiente tiene un grosor de pared t, radio interior r y se encuentra sometido a una presión manométrica interior p, figura 8-2a. Si el recipiente se secciona por la mitad, el diagrama de cuerpo libre resultante es el mostrado en la figura 8-2b. Al igual que un cilindro, el equilibrio en la dirección y requiere

$$\Sigma F_y = 0; \qquad \sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{pr}{2t}} \qquad (8\text{-}3)$$

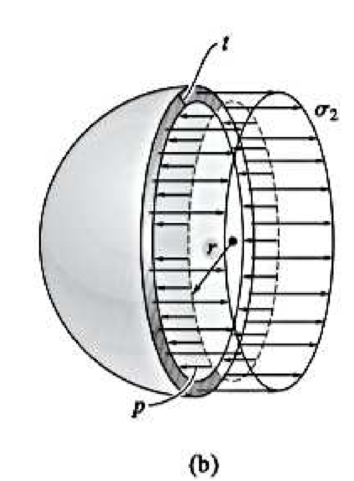
Este es el *mismo resultado* que el obtenido para el esfuerzo longitudinal en el recipiente cilíndrico a presión. Además, con base en el análisis, este esfuerzo será el mismo *sin importar* la orientación del diagrama de cuerpo libre hemisférico. En consecuencia, un pequeño elemento del material está sometido al estado de esfuerzo mostrado en la figura 8-2a.

El análisis anterior indica que un elemento de material tomado de un recipiente a presión con forma cilíndrica o esférica está sometido a ***esfuerzo biaxial***, es decir, al esfuerzo normal existente en sólo dos direcciones. En realidad, la presión también somete al material a un ***esfuerzo radial***, σ_3, que actúa a lo largo de una línea radial. Este esfuerzo tiene un valor máximo igual a la presión p en el interior de la pared y disminuye a través de ésta hasta un valor de cero en la superficie exterior del recipiente, debido a que ahí la presión manométrica es nula. Sin embargo, para los recipientes de pared delgada *no se tomará en cuenta* este componente radial del esfuerzo, debido a que el supuesto limitante de $r/t = 10$ resulta en que σ_2 y σ_1 deben ser, respectivamente, 5 y 10 veces *mayores* que el esfuerzo radial máximo $(\sigma_3)_{máx} = p$. Por último, si el recipiente está sometido a una *presión externa*, el esfuerzo de compresión desarrollado dentro de la pared delgada puede hacer que el recipiente se vuelva inestable, y es posible que se produzca un colapso por pandeo en vez de una fractura del material.



(a)

8



(b)

Figura 8-2

EJEMPLO 8.1

Un recipiente cilíndrico a presión tiene un diámetro interior de 4 pies y un grosor de $\frac{1}{2}$ pulg. Determine la presión interna máxima que puede soportar de modo que sus componentes de esfuerzo circunferencial y longitudinal no excedan las 20 ksi. En las mismas condiciones, ¿cuál es la presión interna máxima que un recipiente esférico de tamaño similar puede soportar?

SOLUCIÓN

Recipiente cilíndrico a presión. El esfuerzo máximo se produce en la dirección circunferencial. De la ecuación 8-1, se tiene



$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}; \qquad 20 \text{ kip/pulg}^2 = \frac{p(24 \text{ pulg})}{\frac{1}{2} \text{ pulg}}$$

$$p = 417 \text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$

Observe que cuando se alcanza esta presión, con base en la ecuación 8-2, el esfuerzo en la dirección longitudinal será $\sigma_2 = \frac{1}{2}(20 \text{ ksi}) = 10$ ksi. Por otra parte, el *esfuerzo máximo* en la *dirección radial* se produce en el material sobre la pared interior del recipiente y es $(\sigma_3)_{\text{máx}} = p = 417$ psi. Este valor es 48 veces menor que el esfuerzo circunferencial (20 ksi) y, como se dijo antes, sus efectos no se tomarán en cuenta.



Recipiente esférico. Aquí, el esfuerzo máximo ocurre en cualquiera de las dos direcciones perpendiculares sobre un elemento del recipiente, figura 8-2*a*. A partir de la ecuación 8-3, se tiene

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}; \qquad 20 \text{ kip/pulg}^2 = \frac{p(24 \text{ pulg})}{2\left(\frac{1}{2} \text{ pulg}\right)}$$

$$p = 833 \text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Aunque es más difícil de fabricar, el recipiente esférico a presión soportará el doble de la presión interna que un recipiente cilíndrico.

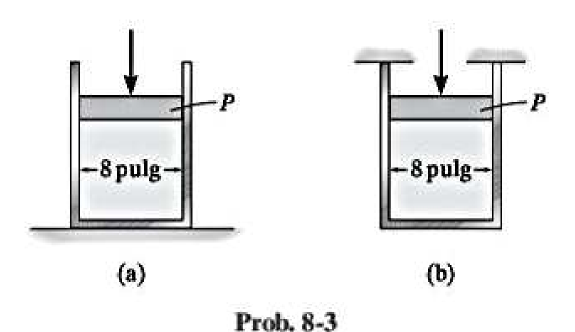
8

PROBLEMAS

8-1. Un tanque esférico de gas tiene un radio interior de $r = 1.5$ m. Si se somete a una presión interna de $p = 300$ kPa, determine el grosor requerido si el esfuerzo normal máximo no debe superar 12 MPa.

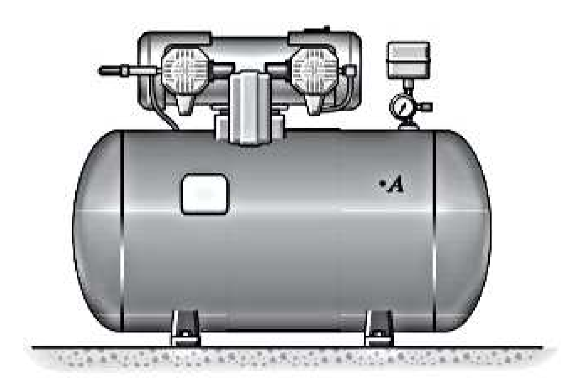
8-2. Un tanque esférico a presión se fabricará con acero de 0.5 pulg de grosor. Si se somete a una presión interna de $p = 200$ psi, determine su radio exterior si el esfuerzo normal máximo no debe exceder 15 ksi.

8-3. El cilindro de pared delgada puede apoyarse en alguna de las dos formas mostradas en la figura. Determine el estado de esfuerzo en la pared del cilindro para ambos casos si el pistón P genera una presión interna de 65 psi. La pared tiene un grosor de 0.25 pulg y el diámetro interior del cilindro es de 8 pulg.



Prob. 8-3

*__8-4.__ El tanque del compresor de aire está sometido a una presión interna de 90 psi. Si el diámetro interior del tanque es de 22 pulg y el grosor de su pared es de 0.25 pulg, determine las componentes del esfuerzo que actúan en el punto A. Dibuje un elemento de volumen del material en este punto y muestre los resultados sobre dicho elemento.



Prob. 8-4

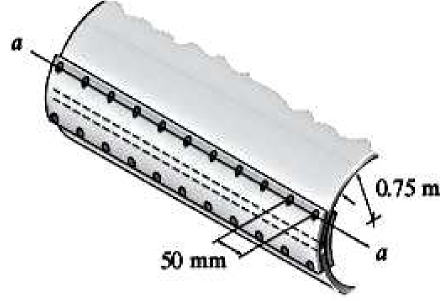
•__8-5.__ El tanque esférico para gas se fabrica empernando dos corazas semiesféricas delgadas con grosor de 30 mm. Si el gas contenido en el depósito está bajo una presión manométrica de 2 MPa, determine el esfuerzo normal desarrollado en la pared del tanque y en cada uno de los pernos. El tanque tiene un diámetro interior de 8 m y está sellado con 900 pernos de 25 mm de diámetro cada uno.

8-6. El tanque esférico para gas se fabrica empernando dos corazas semiesféricas delgadas. Si el tanque con diámetro interior de 8 m se diseñará para soportar una presión manométrica de 2 MPa, determine el grosor mínimo de la pared del tanque y el número mínimo de pernos con 25 mm de diámetro que deben utilizarse para sellarlo. El tanque y los pernos están hechos de materiales que tienen esfuerzos normales permisibles de 150 y 250 MPa, respectivamente.



Probs. 8-5/6

8-7. Una caldera está construida a partir de placas de acero con 8 mm de grosor, las cuales se sujetan en sus extremos usando una junta a tope reforzada con dos placas de 8 mm y remaches que tienen un diámetro de 10 mm, y que están espaciados cada 50 mm, como se muestra en la figura. Si la presión del vapor en la caldera es de 1.35 MPa, determine (a) el esfuerzo circunferencial en la placa de la caldera, lejos de la costura, (b) el esfuerzo circunferencial en la placa de refuerzo exterior a lo largo de la línea de remaches *a-a* y (c) el esfuerzo cortante en los remaches.

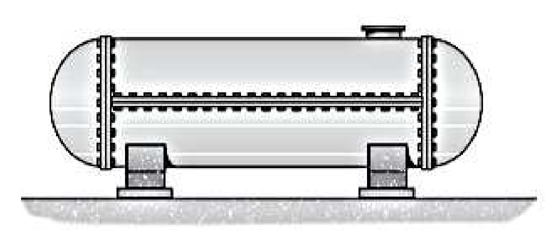


Prob. 8-7

8

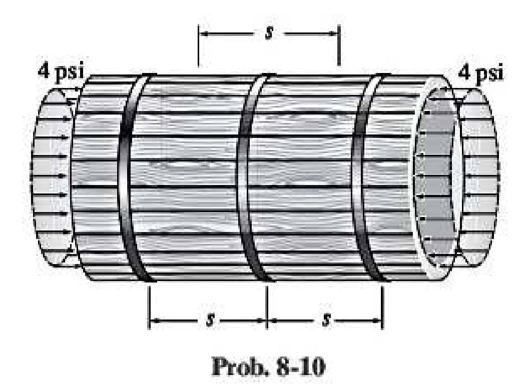
*8-8. El tanque para almacenamiento de gas se fabrica empernando dos corazas semicilíndricas de pared delgada y dos corazas hemisféricas como se muestra en la figura. Si el tanque está diseñado para soportar una presión de 3 MPa, determine el grosor mínimo requerido de las corazas semicilíndricas y hemisféricas, y el número mínimo requerido de pernos longitudinales por metro de longitud en cada lado de la coraza cilíndrica. El tanque y los pernos de 25 mm de diámetro están hechos de un material que tiene un esfuerzo normal permisible de 150 y 250 MPa, respectivamente. El tanque tiene un diámetro interior de 4 m.

•8-9. El tanque para almacenamiento de gas se fabrica empernando dos corazas semicilíndricas de pared delgada y dos corazas hemisféricas como se muestra en la figura. Si el tanque está diseñado para soportar una presión de 3 MPa, determine el grosor mínimo requerido de las corazas semicilíndricas y hemisféricas, y el número mínimo requerido de pernos para cada tapa semiesférica. El tanque y los pernos de 25 mm de diámetro están hechos de un material que tiene un esfuerzo normal permisible de 150 y 250 MPa, respectivamente. El tanque tiene un diámetro interior de 4 m.



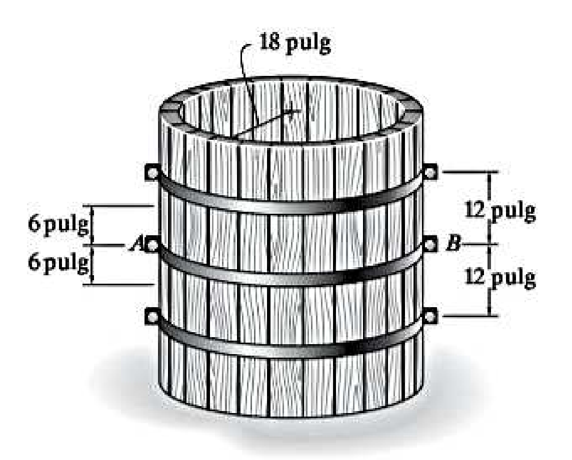
Probs. 8-8/9

8-10. Un tubo de madera con un diámetro interior de 3 pies se mantiene unido mediante aros de acero, cada uno con un área transversal de 0.2 pulg^2. Si el esfuerzo permisible para los aros es $\sigma_{perm} = 12$ ksi, determine su separación máxima s a lo largo de la sección del tubo, de modo que éste pueda resistir una presión interna de 4 psi. Suponga que cada aro soporta la carga de presión que actúa a lo largo de la longitud s del tubo.



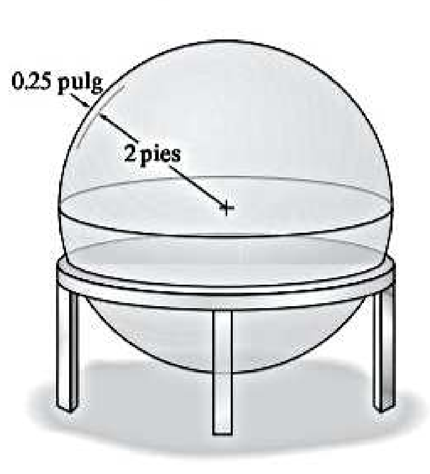
Prob. 8-10

8-11. Las duelas o elementos verticales del tanque de madera se mantienen unidos mediante aros semicirculares que tienen un grosor de 0.5 pulg y una anchura de 2 pulg. Determine el esfuerzo normal en el aro AB si el tanque se somete a una presión manométrica interna de 2 psi y esta carga se transmite directamente a los aros. Además, si se usan pernos de 0.25 pulg de diámetro para mantener unido cada aro, determine el esfuerzo de tensión sobre cada perno ubicado en A y B. Suponga que el aro AB soporta la carga de presión en una longitud de 12 pulg del tanque, como se muestra en la figura.



Prob. 8-11

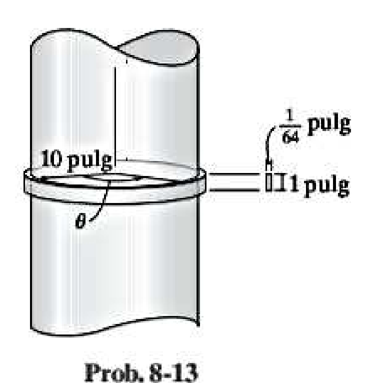
*8-12. Dos hemisferios que tienen un radio interior de 2 pies y un grosor de pared de 0.25 pulg se ajustan entre sí, y la presión manométrica en el interior se reduce a −10 psi. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$ entre los hemisferios, determine (a) el par de torsión T necesario para iniciar la rotación del hemisferio superior con respecto al inferior, (b) la fuerza vertical necesaria para separar el hemisferio superior del inferior y (c) la fuerza horizontal necesaria para deslizar el hemisferio superior sobre el inferior.



Prob. 8-12

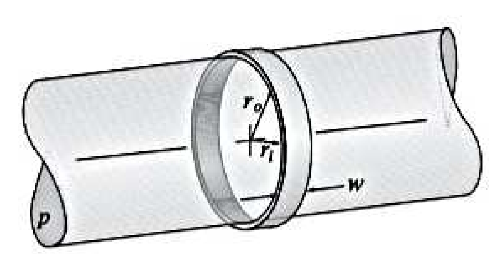
8

•8-13. En un inicio, la banda de acero inoxidable 304 se ajusta perfectamente alrededor del cilindro rígido y liso. Si la banda se somete después a un descenso de temperatura no lineal de $\Delta T = 20 \text{ sen}^2 \theta$ °F, donde θ está en radianes, determine el esfuerzo circunferencial en la banda.



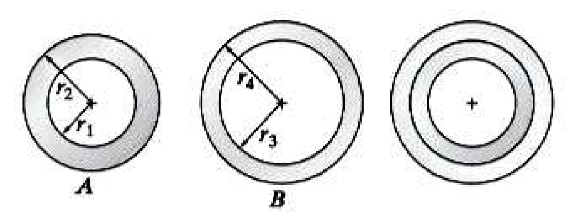
Prob. 8-13

8-14. El anillo, que tiene las dimensiones mostradas en la figura, está colocado sobre una membrana flexible que se bombea con una presión p. Determine el cambio en el radio interno del anillo después de que se aplica esta presión. El módulo de elasticidad para el anillo es E.



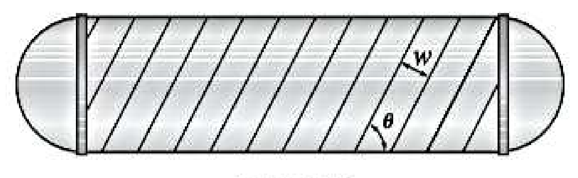
Prob. 8-14

8-15. El anillo interno A tiene un radio interior r_1 y un radio exterior r_2. Antes de ser calentado, el anillo externo B tiene un radio interior r_3 y un radio exterior r_4, y $r_2 > r_3$. Si el anillo externo se calienta y luego se coloca sobre el anillo interno, determine la presión entre los dos anillos cuando el anillo B alcanza la temperatura del anillo interno. El material tiene un módulo de elasticidad de E y un coeficiente de expansión térmica de α.



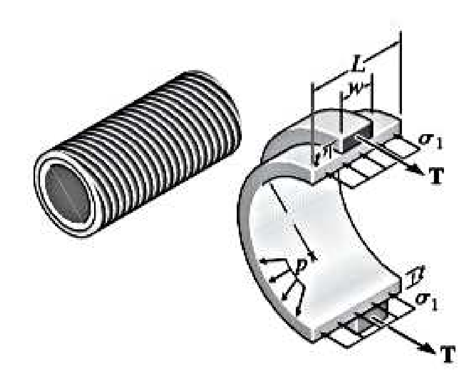
Prob. 8-15

*8-16. El tanque cilíndrico se fabrica soldando una tira de placa delgada en forma helicoidal, la cual forma un ángulo θ con el eje longitudinal del tanque. Si la tira tiene una anchura w y un grosor t, y el gas dentro del tanque de diámetro d está presurizado hasta p, demuestre que el esfuerzo normal desarrollado a lo largo de la tira está dado por $\sigma_\theta = (pd/8t)(3 - \cos 2\theta)$.



Prob. 8-16

8-17. Con el fin de aumentar la resistencia del recipiente a presión, se enrolla un devanado de filamentos del mismo material alrededor de la circunferencia del recipiente, como se muestra en la figura. Si la tensión previa en el filamento es T y el recipiente se encuentra sometido a una presión interna p, determine los esfuerzos anulares en el filamento y en la pared del recipiente. Use el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura, y suponga que el devanado de filamentos tiene un grosor t' y una anchura w para una longitud correspondiente a la del recipiente.



Prob. 8-17

8



Esta chimenea está sometida a la carga combinada del viento y de su peso. Es importante investigar el esfuerzo de tensión en la chimenea puesto que las construcciones de ladrillo son débiles en tensión.

8.2 Estado de esfuerzo causado por cargas combinadas

En los capítulos anteriores se desarrollaron métodos para la determinación de las distribuciones de esfuerzo en un elemento sometido a una fuerza axial interna, una fuerza cortante, un momento flexionante o un momento de torsión. Sin embargo, con frecuencia la sección transversal de un elemento está sometida a *varias* de esas cargas *de manera simultánea.* Cuando esto ocurre, se puede usar el método de superposición para determinar la distribución del esfuerzo *resultante.* De la sección 4.3, es posible recordar que el principio de superposición puede emplearse con este propósito siempre que exista una *relación lineal* entre el *esfuerzo* y las *cargas.* Además, la geometría de los elementos *no* debe haber sufrido un *cambio significativo* al aplicarles la carga. Estas condiciones son necesarias para garantizar que el esfuerzo producido por una carga no esté relacionado con el esfuerzo producido por alguna otra carga.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un medio general para establecer las componentes del esfuerzo normal y cortante en un punto sobre un elemento cuando éste se encuentra sometido a diferentes tipos de cargas de manera simultánea. Se supone que el material es homogéneo y se comporta en forma elástica lineal. Además, el principio de Saint-Venant requiere que el punto donde se determinará el esfuerzo esté muy alejado de las discontinuidades en la sección transversal o de los puntos donde se aplica la carga.

Cargas internas.

- Seccione el elemento en forma perpendicular a su eje en el punto donde se determinará el esfuerzo y obtenga las componentes resultantes de la fuerza normal interna y la fuerza cortante, así como las componentes de los momentos flexionante y de torsión.
- Las componentes de fuerza deben actuar a través del *centroide* de la sección transversal y las componentes de momento se deben calcular respecto a los *ejes centroidales*, que representan los ejes principales de inercia para la sección transversal.

Componentes de esfuerzo.

- Determine la componente de esfuerzo asociada con *cada* carga interna. Para cada caso, represente el efecto ya sea como una distribución del esfuerzo que actúa sobre toda la superficie de la sección, o muestre el esfuerzo sobre un elemento del material ubicado en un punto específico sobre la sección transversal.

Fuerza normal.

- La fuerza normal interna se desarrolla mediante una distribución uniforme del esfuerzo normal, determinada a partir de $\sigma = P/A$.

8

Fuerza cortante.

- La fuerza cortante interna en un elemento se desarrolla mediante una distribución del esfuerzo cortante, determinada a partir de la fórmula del esfuerzo cortante, $\tau = VQ/It$. Sin embargo, debe tenerse un cuidado especial al aplicar esta ecuación, como se señaló en la sección 7.2.

Momento flexionante.

- Para los *elementos rectos* el momento flexionante interno se desarrolla mediante una distribución del esfuerzo normal que varía linealmente desde cero en el eje neutro hasta un máximo en el límite exterior del elemento. Esta distribución del esfuerzo se determina a partir de la fórmula de la flexión, $\sigma = My/I$. Si el elemento es *curvo*, la distribución del esfuerzo es no lineal y se determina a partir de $\sigma = My/[Ae(R-y)]$.

Momento de torsión.

- Para los ejes circulares y tubos el momento de torsión interno se desarrolla mediante una distribución del esfuerzo cortante que varía linealmente desde el eje central del eje hasta un máximo en el límite exterior del eje. Esta distribución del esfuerzo se determina a partir de la fórmula de la torsión, $\tau = T\rho/J$.

Recipientes a presión de pared delgada.

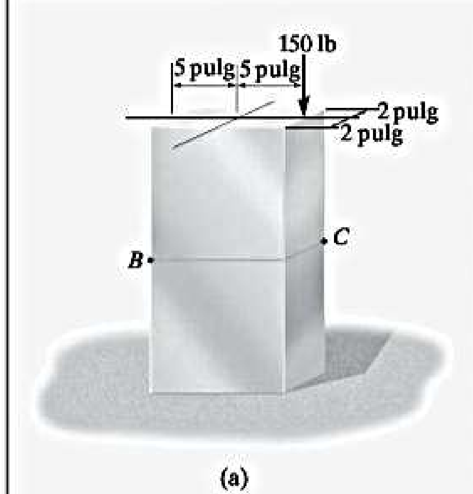
- Si el recipiente es un cilindro de pared delgada, la presión interna p causará un estado biaxial de esfuerzo en el material, de modo que la componente de esfuerzo circunferencial o anular sea $\sigma_1 = pr/t$ y la componente del esfuerzo longitudinal sea $\sigma_2 = pr/2t$. Si el recipiente es una esfera de pared delgada, entonces el estado de esfuerzo biaxial se representa por dos componentes equivalentes, cada una con una magnitud de $\sigma_2 = pr/2t$.

Superposición.

- Una vez que se han calculado las componentes de esfuerzo normal y cortante para cada carga, utilice el principio de superposición y determine las componentes resultantes del esfuerzo normal y cortante.
- Represente los resultados sobre un elemento de material que se encuentre en el punto, o muestre los resultados como una distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal del elemento.

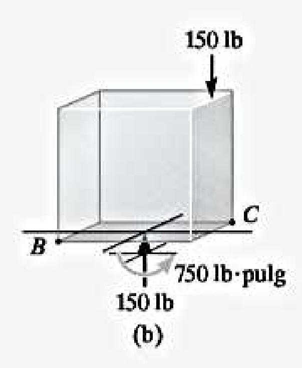
Los problemas en esta sección, que implican cargas combinadas, sirven como una *revisión* básica de la aplicación de las ecuaciones de esfuerzo mencionadas anteriormente. Es necesario tener una comprensión profunda de cómo se aplican estas ecuaciones, como se indica en los capítulos anteriores, a fin de resolver con éxito los problemas al final de esta sección. Los siguientes ejemplos deben estudiarse cuidadosamente antes de resolver los problemas.

EJEMPLO 8.2



(a)

Figura 8-3



(b)

Una fuerza de 150 lb se aplica al borde del elemento mostrado en la figura 8-3*a*. No tome en cuenta el peso del elemento y determine el estado de esfuerzo en los puntos *B* y *C*.

SOLUCIÓN

Cargas internas. El elemento se secciona a través de *B* y *C*. Para el equilibrio en la sección debe haber una fuerza axial de 150 lb que actúe a través del *centroide* y un momento flexionante de 750 lb · pulg respecto al eje centroidal o principal, figura 8-3*b*.

Componentes de esfuerzo.

Fuerza normal. En la figura 8-3*c* se muestra la distribución uniforme del esfuerzo normal debida a la fuerza normal. Aquí

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{150 \text{ lb}}{(10 \text{ pulg})(4 \text{ pulg})} = 3.75 \text{ psi}$$

Momento flexionante. En la figura 8-3*d* se muestra la distribución del esfuerzo normal debida al momento flexionante. El esfuerzo máximo es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{750 \text{ lb} \cdot \text{pulg}(5 \text{ pulg})}{\frac{1}{12}(4 \text{ pulg})(10 \text{ pulg})^3} = 11.25 \text{ psi}$$

Superposición. Si las distribuciones de esfuerzo normal anteriores se suman algebraicamente, la distribución del esfuerzo resultante será como se muestra en la figura 8-3*e*. Aunque no se requiere aquí, la ubicación de la línea de cero esfuerzo puede determinarse mediante triángulos semejantes; es decir,

$$\frac{7.5 \text{ psi}}{x} = \frac{15 \text{ psi}}{(10 \text{ pulg} - x)}$$

$$x = 3.33 \text{ pulg}$$

8

Los elementos de material en *B* y *C* están sometidos sólo a *esfuerzo uniaxial* o normal, como se muestra en las figuras 8-3*f* y 8-3*g*. Por lo tanto,

$$\sigma_B = 7.5 \text{ psi} \quad \text{(tensión)} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_C = 15 \text{ psi} \quad \text{(compresión)} \qquad \textit{Resp.}$$

B C 3.75 psi 3.75 psi

Fuerza normal

(c)

\+

B C 11.25 psi 11.25 psi

Momento flexionante

(d)

=

B C 7.5 psi 15 psi x (10 pulg − x)

Carga combinada

(e)

B 7.5 psi

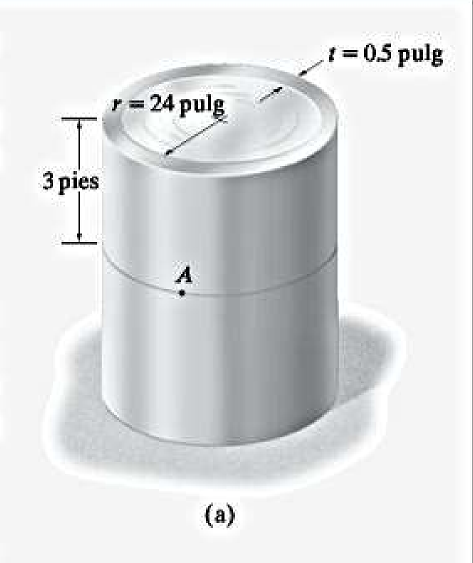
(f)

C 15 psi

(g)

EJEMPLO 8.3

El tanque de la figura 8-4*a* tiene un radio interior de 24 pulg y un grosor de 0.5 pulg. Está lleno hasta el tope con agua, la cual tiene un peso específico de $\gamma_w = 62.4\ \text{lb/pie}^3$. Si el tanque está fabricado de acero con un peso específico de $\gamma_{ac} = 490\ \text{lb/pie}^3$, determine el estado de esfuerzo en el punto A. El tanque está abierto en la parte superior.



(a)

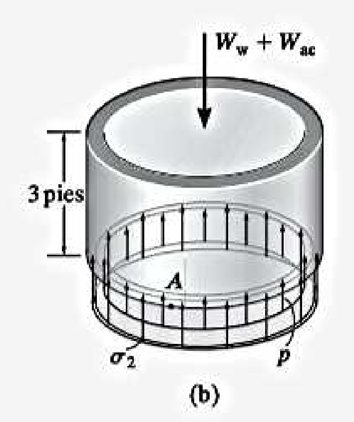
SOLUCIÓN

Cargas internas. En la figura 8-4*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de la sección del tanque y el agua por encima del punto A. Observe que el peso del agua está sostenido por la superficie del agua justo *debajo* de la sección, *no* por las paredes del tanque. En la dirección vertical, las paredes sólo sostienen el peso del tanque. Este peso es

$$W_{ac} = \gamma_{ac}V_{ac} = (490\ \text{lb/pie}^3)\left[\pi\left(\frac{24.5}{12}\text{pies}\right)^2 - \pi\left(\frac{24}{12}\text{pies}\right)^2\right](3\ \text{pies})$$
$$= 777.7\ \text{lb}$$

El esfuerzo en la dirección circunferencial se desarrolla mediante la presión del agua al nivel A. Para obtener esta presión debe utilizarse la *ley de Pascal*, que establece que la presión en un punto situado a una profundidad z en el agua es $p = \gamma_w z$. En consecuencia, la presión sobre el tanque en el nivel A es

$$p = \gamma_w z = (62.4\ \text{lb/pie}^3)(3\ \text{pies}) = 187.2\ \text{lb/pie}^2 = 1.30\ \text{psi}$$



(b)

Componentes de esfuerzo.

Esfuerzo circunferencial. Como $r/t = 24\ \text{pulg}/0.5\ \text{pulg} = 48 > 10$, el tanque es un recipiente de pared delgada. Al aplicar la ecuación 8-1, y utilizando el radio interior $r = 24$ pulg, se tiene

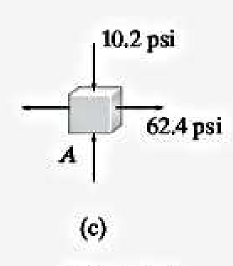
$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{1.30\ \text{lb/pulg}^2\ (24\ \text{pulg})}{0.5\ \text{pulg}} = 62.4\ \text{psi} \qquad \textit{Resp.}$$

Esfuerzo longitudinal. Como el peso del tanque está sostenido uniformemente por las paredes, se tiene

$$\sigma_2 = \frac{W_{ac}}{A_{ac}} = \frac{777.7\ \text{lb}}{\pi[(24.5\ \text{pulg})^2 - (24\ \text{pulg})^2]} = 10.2\ \text{psi} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: La ecuación 8-2, $\sigma_2 = pr/2t$, *no se aplica* aquí porque el tanque está abierto en la parte superior y, por lo tanto, como se dijo anteriormente, el agua no puede desarrollar una carga sobre las paredes en la dirección longitudinal.

Por consiguiente, el punto A está sometido al esfuerzo biaxial mostrado en la figura 8-4*c*.



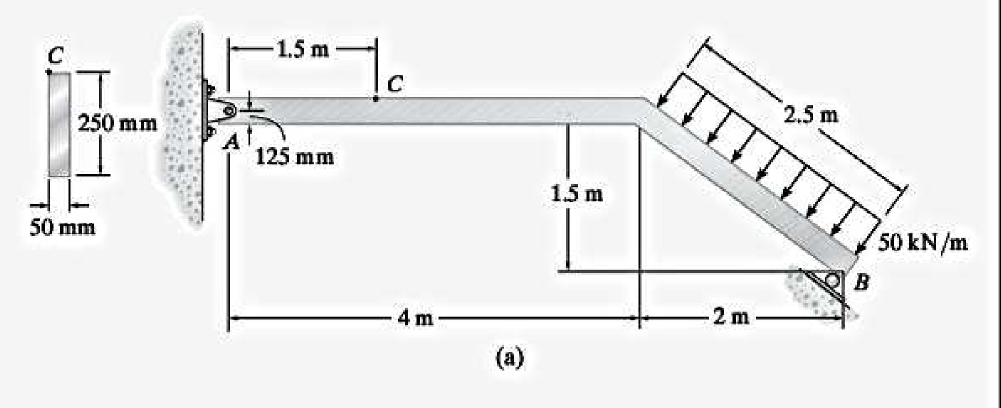
(c)

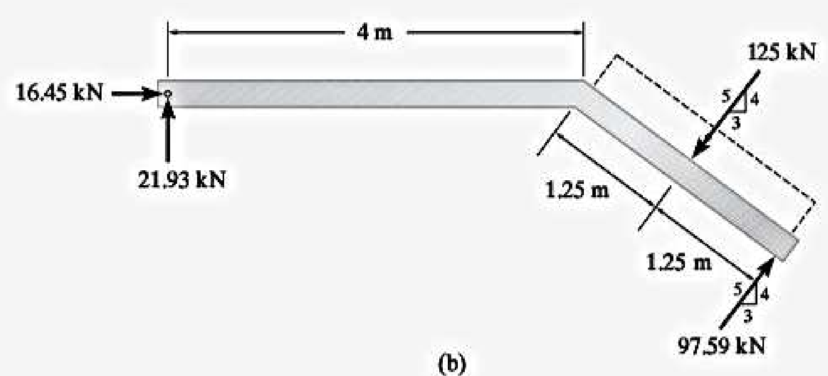
Figura 8-4

8

EJEMPLO 8.4

El elemento mostrado en la figura 8-5*a* tiene una sección transversal rectangular. Determine el estado de esfuerzo que produce la carga en el punto *C*.





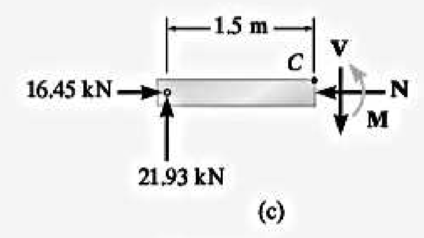


Figura 8-5

SOLUCIÓN

Cargas internas. Se han determinado las reacciones en los apoyos del elemento, las cuales se muestran en la figura 8-5*b*. Si se considera el segmento izquierdo *AC* del elemento, figura 8-5*c*, las cargas internas resultantes en la sección consisten en una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento flexionante. Si se resuelve,

$$N = 16.45 \text{ kN} \qquad V = 21.93 \text{ kN} \qquad M = 32.89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

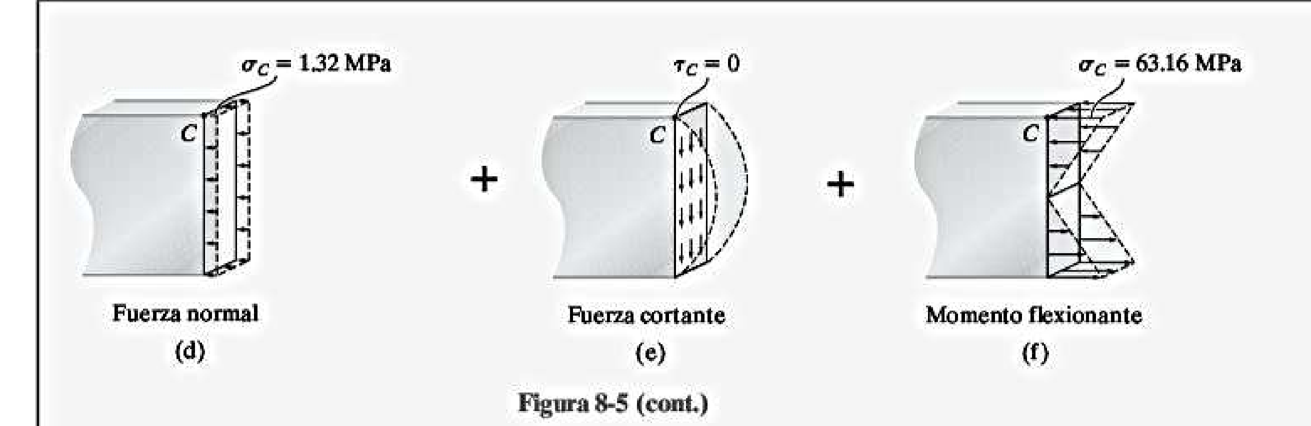


Figura 8-5 (cont.)

Componentes de esfuerzo.

Fuerza normal. La distribución uniforme del esfuerzo normal que actúa sobre la sección transversal se produce mediante la fuerza normal, figura 8-5*d*. En el punto *C*,

$$\sigma_C = \frac{P}{A} = \frac{16.45(10^3)\text{ N}}{(0.050\text{ m})(0.250\text{ m})} = 1.32\text{ MPa}$$

Fuerza cortante. Aquí el área $A' = 0$, ya que el punto C se ubica en la parte superior del elemento. Por lo tanto, $Q = \bar{y}'A' = 0$ y para C, figura 8-5*e*, el esfuerzo cortante

$$\tau_C = 0$$

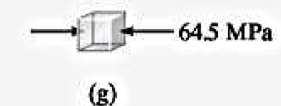
Momento flexionante. El punto C se ubica en $y = c = 0.125$ m desde el eje neutro, por lo que el esfuerzo normal en C, figura 8-5*f*, es

$$\sigma_C = \frac{Mc}{I} = \frac{(32.89(10^3)\text{ N}\cdot\text{m})(0.125\text{ m})}{\left[\frac{1}{12}(0.050\text{ m})(0.250\text{ m})^3\right]} = 63.16\text{ MPa}$$

Superposición. El esfuerzo cortante es cero. Al sumar los esfuerzos normales determinados anteriormente se obtiene un esfuerzo de compresión en C con un valor de

$$\sigma_C = 1.32\text{ MPa} + 63.16\text{ MPa} = 64.5\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Este resultado, que actúa sobre un elemento en *C*, se muestra en la figura 8-5*g*.

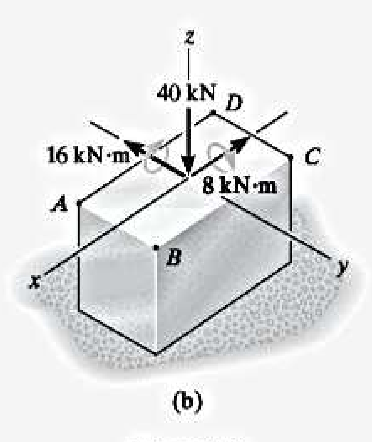


(g)

EJEMPLO 8.5

40 kN
0.8 m
0.4 m
D
C
A
B

(a)



(b)

Figura 8-6

El bloque rectangular de peso insignificante que se muestra en la figura 8-6*a*, está sometido a una fuerza vertical de 40 kN, el cual se aplica a su esquina. Determine el mayor esfuerzo normal que actúa sobre una sección a través de *ABCD*.

SOLUCIÓN

Cargas internas. Si se considera el equilibrio del segmento inferior del bloque, figura 8-6*b*, se observa que la fuerza de 40 kN debe actuar a través del centroide de la sección transversal y *dos* componentes de momento flexionante también deben actuar respecto a los ejes centroidales o principales de inercia para la sección. Verifique estos resultados.

Componentes de esfuerzo.

Fuerza normal. En la figura 8-6*c* se muestra la distribución uniforme del esfuerzo normal. Se tiene

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{40(10^3)\text{ N}}{(0.8\text{ m})(0.4\text{ m})} = 125\text{ kPa}$$

Momentos flexionantes. La distribución del esfuerzo normal para el momento de 8 kN · m se muestra en la figura 8-6*d*. El esfuerzo máximo es

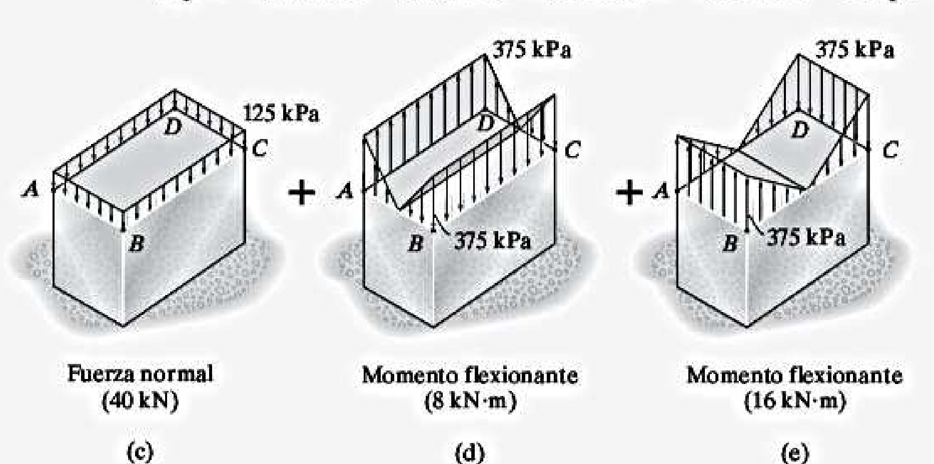
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_x c_y}{I_x} = \frac{8(10^3)\text{ N}\cdot\text{m}(0.2\text{ m})}{\left[\frac{1}{12}(0.8\text{ m})(0.4\text{ m})^3\right]} = 375\text{ kPa}$$

Del mismo modo, para el momento de 16 kN · m, figura 8-6*e*, el esfuerzo normal máximo es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_y c_x}{I_y} = \frac{16(10^3)\text{ N}\cdot\text{m}(0.4\text{ m})}{\left[\frac{1}{12}(0.4\text{ m})(0.8\text{ m})^3\right]} = 375\text{ kPa}$$

Superposición. Por inspección, el esfuerzo normal en el punto *C* es el más grande, puesto que en ese punto cada carga genera un esfuerzo de compresión. Por lo tanto,

$$\sigma_C = -125\text{ kPa} - 375\text{ kPa} - 375\text{ kPa} = -875\text{ kPa} \qquad \textit{Resp.}$$



Fuerza normal (40 kN)
(c)

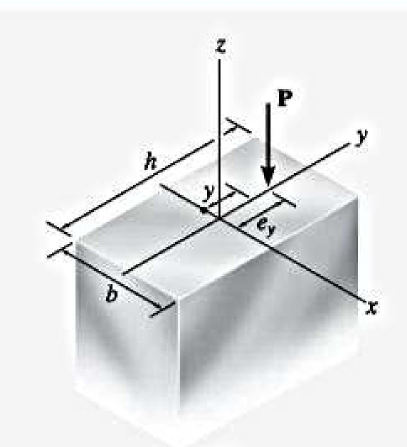
Momento flexionante (8 kN·m)
(d)

Momento flexionante (16 kN·m)
(e)

8

EJEMPLO 8.6

Un bloque rectangular, tiene un peso insignificante y se somete a una fuerza vertical **P**, figura 8-7*a*. (a) Determine el rango de valores para la excentricidad e_y de la carga a lo largo del eje *y*, de manera que no cause ningún esfuerzo de tensión en el bloque. (b) Especifique la región en la sección transversal en la que **P** puede aplicarse sin causar un esfuerzo de tensión en el bloque.

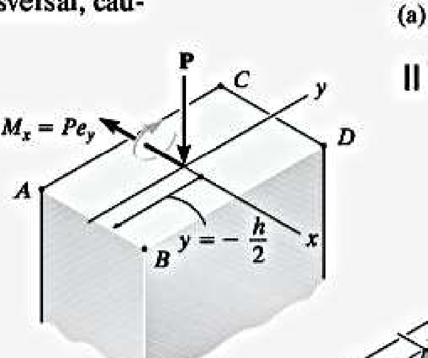


(a)

SOLUCIÓN

Parte (a). Cuando **P** se mueve al centroide de la sección transversal, figura 8-7*b*, es necesario añadir un momento $M_x = Pe_y$, a fin de mantener una carga estáticamente equivalente. El esfuerzo normal combinado, en cualquier ubicación coordenada *y* sobre la sección transversal, causado por estas dos cargas es

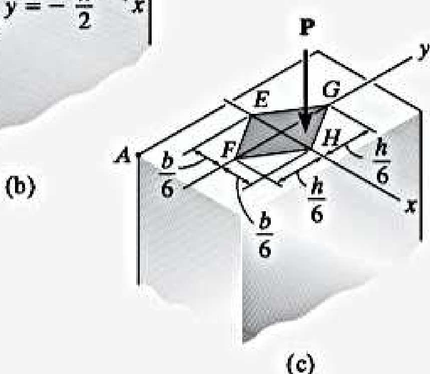
$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{(Pe_y)y}{I_x} = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{Ae_y y}{I_x}\right)$$



(b)

Aquí, el signo negativo indica un esfuerzo de compresión. Para una e_y positiva, figura 8-7*a*, el *menor* esfuerzo de compresión se producirá a lo largo del borde *AB*, donde $y = -h/2$, figura 8-7*b*. (Por inspección, **P** ocasiona compresión en ese punto, pero $\mathbf{M}_x$ causa tensión.) Por lo tanto,

$$\sigma_{\text{mín}} = -\frac{P}{A}\left(1 - \frac{Ae_y h}{2I_x}\right)$$



(c)

Figura 8-7

Este esfuerzo se mantendrá negativo, es decir, en compresión, siempre que el término entre paréntesis sea positivo; es decir,

$$1 > \frac{Ae_y h}{2I_x}$$

Como $A = bh$ e $I_x = \frac{1}{12}bh^3$, entonces

$$1 > \frac{6e_y}{h} \quad \text{o} \quad e_y < \frac{1}{6}h \qquad \textit{Resp.}$$

En otras palabras, si $-\frac{1}{6}h \leq e_y \leq \frac{1}{6}h$, el esfuerzo en el bloque a lo largo del borde *AB* o *CD* será cero o permanecerá en *compresión*.

NOTA: En ocasiones, esto se conoce como la *"regla del tercio medio"*. Es muy importante tener en cuenta esta regla cuando las columnas o arcos cargados tienen una sección transversal rectangular y están hechos de materiales como la piedra o el concreto, que pueden soportar poco, o incluso nulo, esfuerzo de tensión. Este análisis se puede extender de la misma manera mediante la colocación de **P** a lo largo del eje *x* en la figura 8-7. El resultado producirá un paralelogramo como el que se muestra de color gris oscuro en la figura 8-7*c*. Esta región se conoce como el núcleo o kern de la sección. Cuando **P** se aplica en el núcleo, el esfuerzo normal en las esquinas de la sección transversal será de compresión.

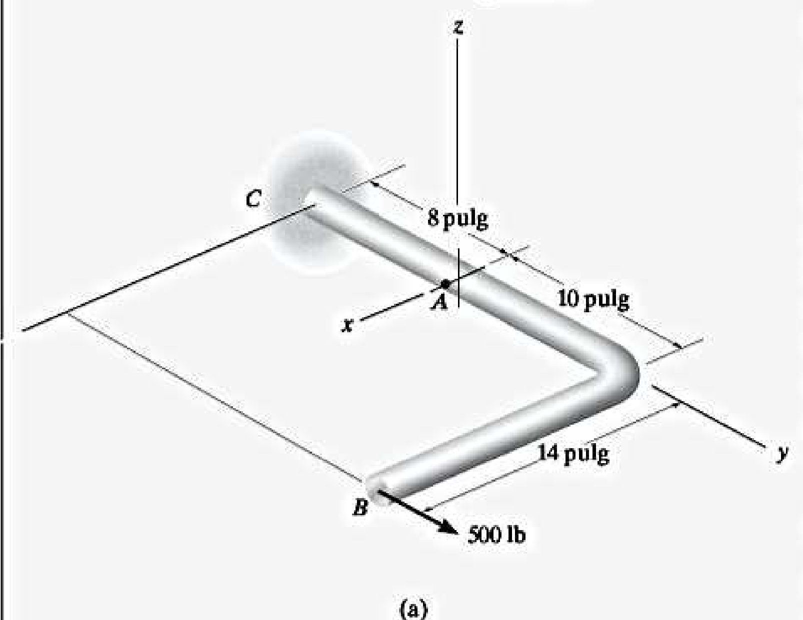


Éste es un ejemplo donde puede ocurrir la combinación de esfuerzos axial y flexionante.

8

EJEMPLO 8.7

La barra sólida de la figura 8-8*a* tiene un radio de 0.75 pulg. Si está sometida a la fuerza de 500 lb, determine el estado de esfuerzo en el punto *A*.



(a)

z
500 lb
x
10 pulg
500 lb (14 pulg) = 7000 lb·pulg
14 pulg
y
500 lb

(b)

SOLUCIÓN

Cargas internas. La barra se secciona a través del punto *A*. Usando el diagrama de cuerpo libre del segmento *AB*, figura 8-8*b*, las cargas internas resultantes se determinan con base en las ecuaciones de equilibrio. Verifique estos resultados. Con el fin de "visualizar" de mejor manera las distribuciones de esfuerzo debidas a estas cargas, es posible considerar las *resultantes iguales pero opuestas* que actúan sobre el segmento *AC*, figura 8-8*c*.

Componentes de esfuerzo.

Fuerza normal. En la figura 8-8*d* se muestra la distribución del esfuerzo normal. Para el punto *A*, se tiene

$$(\sigma_A)_y = \frac{P}{A} = \frac{500 \text{ lb}}{\pi(0.75 \text{ pulg})^2} = 283 \text{ psi} = 0.283 \text{ ksi}$$

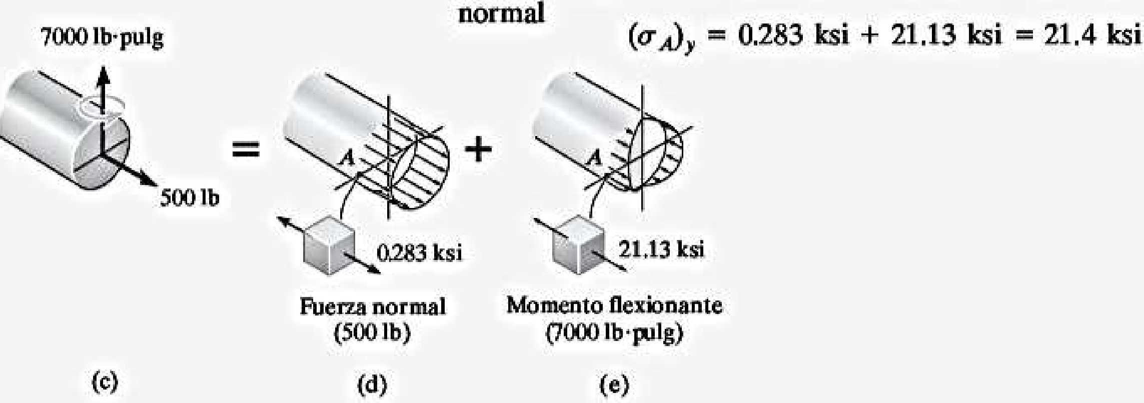
Momento flexionante. Para el momento, $c = 0.75$ pulg, por lo que el esfuerzo normal en el punto *A*, figura 8-8*e*, es

$$(\sigma_A)_y = \frac{Mc}{I} = \frac{7000 \text{ lb}\cdot\text{pulg}(0.75 \text{ pulg})}{[\frac{1}{4}\pi(0.75 \text{ pulg})^4]}$$

$$= 21{,}126 \text{ psi} = 21.13 \text{ ksi}$$

Superposición. Cuando los resultados anteriores se superponen, se observa que un elemento de material en *A* está sometido al esfuerzo normal

$$(\sigma_A)_y = 0.283 \text{ ksi} + 21.13 \text{ ksi} = 21.4 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$



(c) (d) (e)

Figura 8-8

EJEMPLO 8.8

La barra sólida de la figura 8-9*a* tiene un radio de 0.75 pulg. Si está sometida a la fuerza de 800 lb, determine el estado de esfuerzo en el punto *A*.

SOLUCIÓN

Cargas internas. La barra se secciona a través del punto *A*. Usando el diagrama de cuerpo libre del segmento *AB*, figura 8-9*b*, las cargas internas resultantes se determinan a partir de las seis ecuaciones de equilibrio. Verifique estos resultados. Las *resultantes iguales pero opuestas* actúan sobre el segmento *AC* como se muestra en la figura 8-9*c*.

Componentes de esfuerzo.

Fuerza cortante. En la figura 8-9*d* se muestra la distribución del esfuerzo cortante. Para el punto *A*, *Q* se determina a partir del área *semicircular superior* en gris oscuro. Si se emplea la tabla que se encuentra (al reverso de la contraportada de este libro), se tiene

$$Q = \bar{y}'A' = \frac{4(0.75\text{ pulg})}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\pi(0.75\text{ pulg})^2\right] = 0.2813\text{ pulg}^3$$

de modo que

$$(\tau_{yz})_A = \frac{VQ}{It} = \frac{800\text{ lb}(0.2813\text{ pulg}^3)}{\left[\frac{1}{4}\pi(0.75\text{ pulg})^4\right]2(0.75\text{ pulg})}$$

$$= 604\text{ psi} = 0.604\text{ ksi}$$

Momento flexionante. Como el punto *A* se encuentra sobre el eje neutro, figura 8-9*e*, el esfuerzo normal es

$$\sigma_A = 0$$

Momento de torsión. En el punto *A*, $\rho_A = c = 0.75$ pulg, figura 8-9*f*. Por lo que el esfuerzo cortante es

$$(\tau_{yz})_A = \frac{Tc}{J} = \frac{11\,200\text{ lb}\cdot\text{pulg}(0.75\text{ pulg})}{\left[\frac{1}{2}\pi(0.75\text{ pulg})^4\right]} = 16\,901\text{ psi} = 16.90\text{ ksi}$$

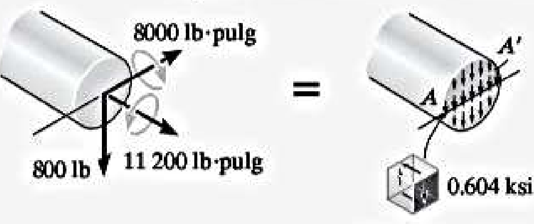
Superposición. Aquí, el elemento de material en *A* está sometido sólo a un componente de esfuerzo cortante, donde

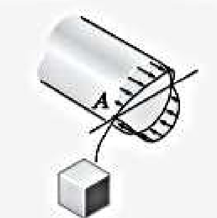
$$(\tau_{yz})_A = 0.604\text{ ksi} + 16.90\text{ ksi} = 17.5\text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

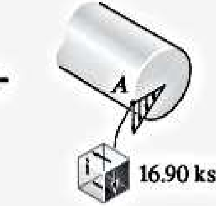
(a)

(b)

Figura 8-9





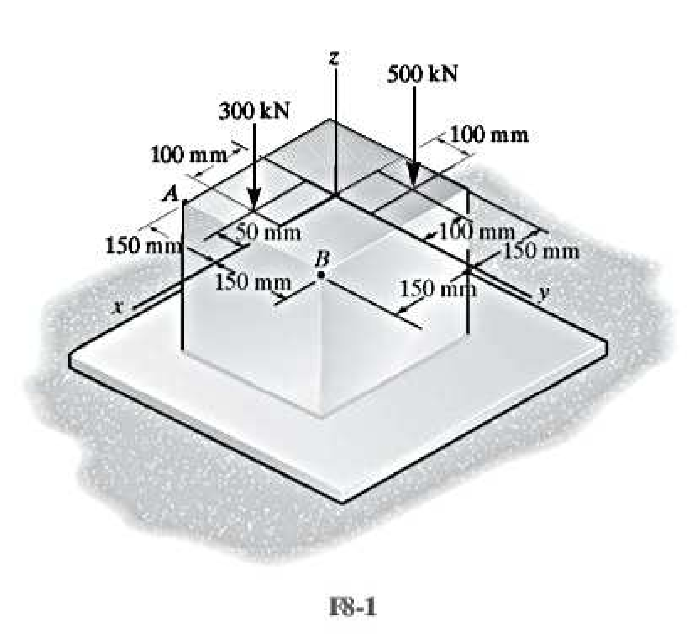




(c) (d) (e) (f)

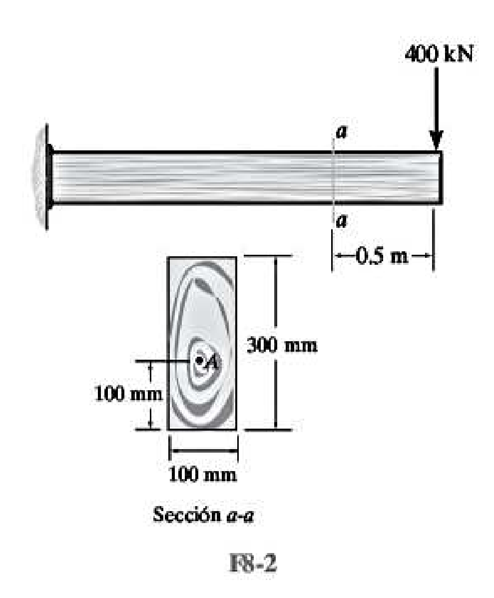
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F8-1. Determine el esfuerzo normal desarrollado en las esquinas A y B de la columna.



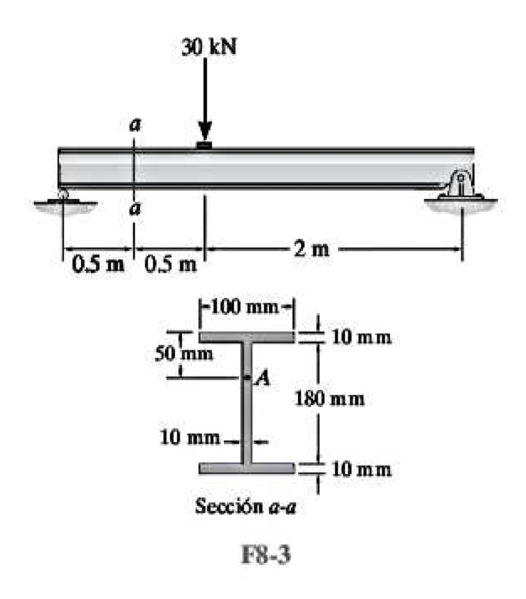
F8-1

F8-2. Determine el estado de esfuerzo en el punto A, ubicado sobre el área transversal, en la sección a-a de la viga en voladizo.



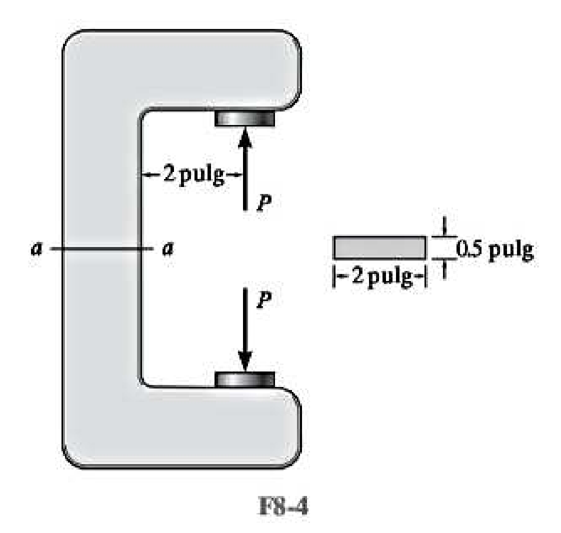
F8-2

F8-3. Determine el estado de esfuerzo en el punto A, ubicado sobre el área transversal de la viga, en la sección a-a.



F8-3

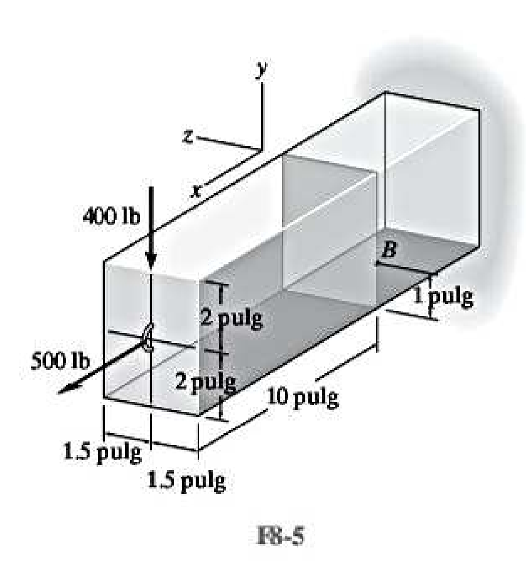
F8-4. Determine la magnitud de la carga P que producirá un esfuerzo normal máximo de $\sigma_{máx} = 30$ ksi sobre el eslabón, a lo largo de la sección a-a.



F8-4

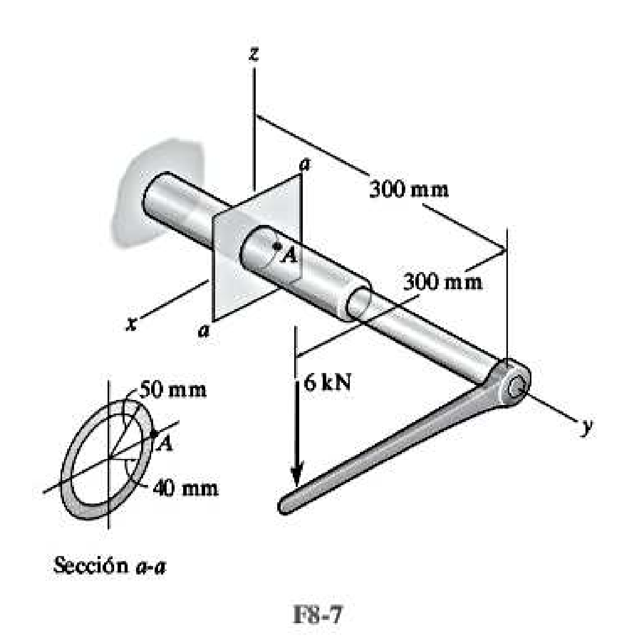
8

F8-5. La viga tiene una sección transversal rectangular y está sometida a la carga mostrada. Determine las componentes de esfuerzo σ_x, σ_y y τ_{xy} en el punto B.



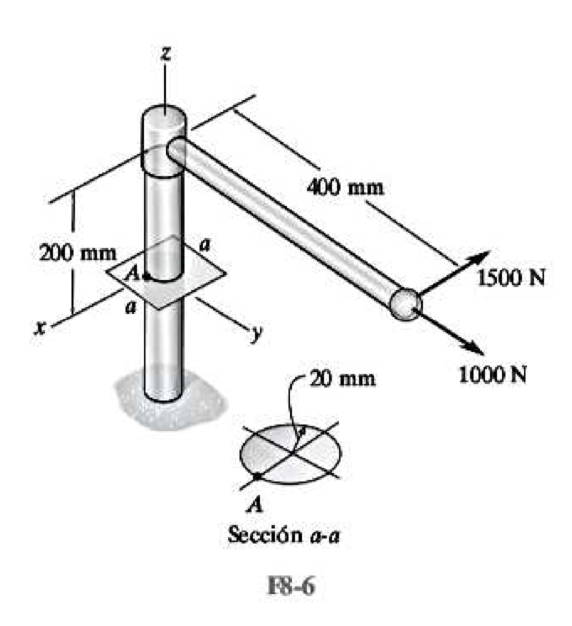
F8-5

F8-7. Determine el estado de esfuerzo en el punto A ubicado sobre el área transversal del tubo, en la sección a-a.



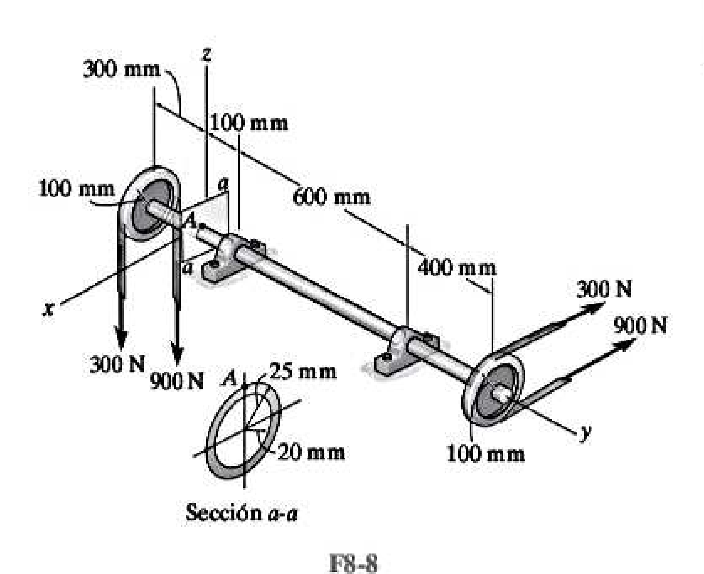
F8-7

F8-6. Determine el estado de esfuerzo en el punto A ubicado sobre el área transversal del ensamble de tubos, en la sección a-a.



F8-6

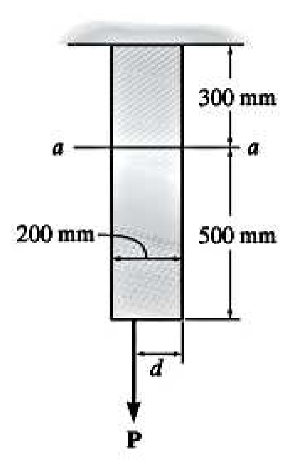
F8-8. Determine el estado de esfuerzo en el punto A ubicado sobre el área transversal del eje, en la sección a-a.



F8-8

PROBLEMAS

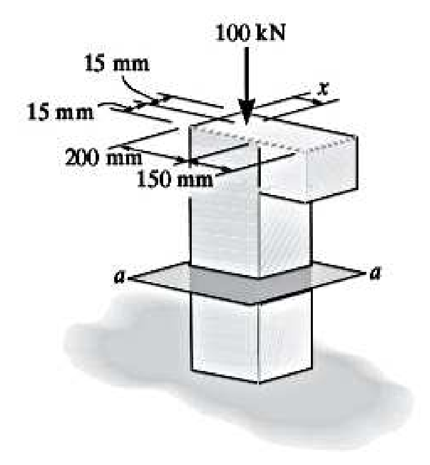
8-18. La fuerza vertical **P** actúa sobre la parte inferior de la placa que tiene un peso insignificante. Determine la distancia más corta d hasta el borde de la placa en la que se puede aplicar la fuerza, de manera que no produzca esfuerzos de compresión sobre la placa en la sección a-a. La placa tiene un grosor de 10 mm y **P** actúa a lo largo de la línea central de este grosor.



Prob. 8-18

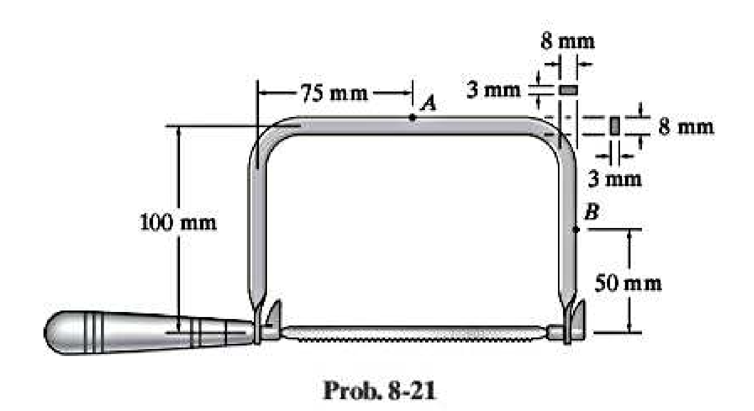
8-19. Determine el esfuerzo normal máximo y mínimo en la ménsula sobre la sección a-a, cuando la carga se aplica en $x = 0$.

***8-20.** Determine el esfuerzo normal máximo y mínimo en la ménsula sobre la sección a-a, cuando la carga se aplica en $x = 300$ mm.



Probs. 8-19/20

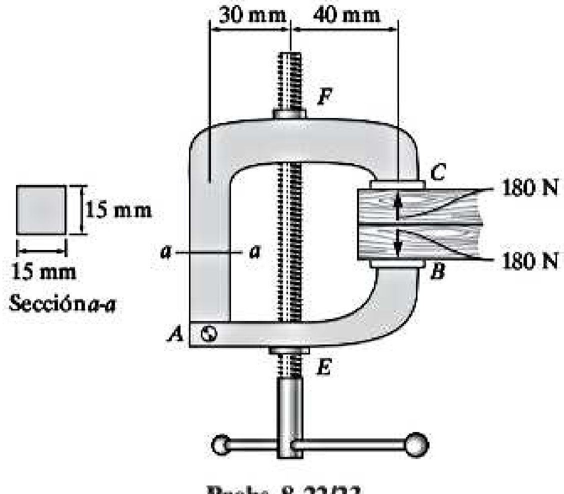
•**8-21.** La sierra caladora tiene una cuchilla ajustable que se ajusta con una tensión de 40 N. Determine el estado de esfuerzo en el marco sobre los puntos A y B.



Prob. 8-21

8-22. La mordaza se forma con los elementos AB y AC, los cuales están articulados en A. Si se ejerce una fuerza de compresión en C y B de 180 N, determine el esfuerzo de compresión máximo sobre la mordaza en la sección a-a. El tornillo EF se somete sólo a una fuerza de tensión a lo largo de su eje.

8-23. La mordaza se forma con los elementos AB y AC, los cuales están articulados en A. Si se ejerce una fuerza de compresión en C y B de 180 N, determine la distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección a-a. El tornillo EF se somete sólo a una fuerza de tensión a lo largo de su eje.

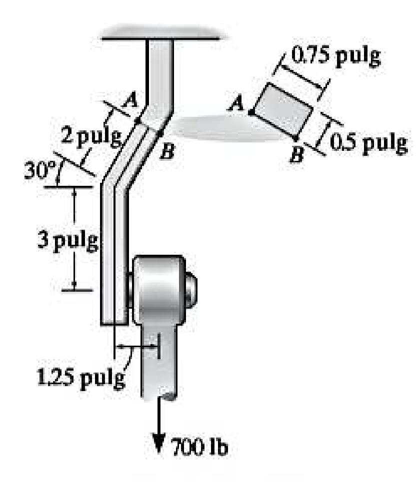


Probs. 8-22/23

8

*8-24. El pasador de apoyo soporta la carga de 700 lb. Determine las componentes de esfuerzo en el elemento de apoyo en el punto A. El soporte tiene de 0.5 pulg de grosor.

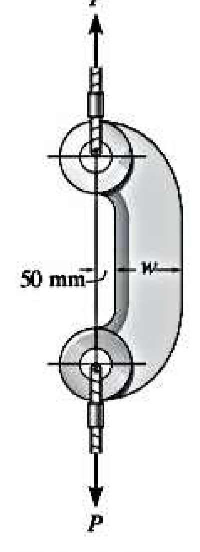
•8-25. El pasador de apoyo soporta la carga de 700 lb. Determine las componentes de esfuerzo en el elemento de apoyo en el punto B. El soporte tiene 0.5 pulg de grosor.



Probs. 8-24/25

8-26. El eslabón descentrado soporta la carga de $P = 30$ kN. Determine su anchura w requerida si el esfuerzo normal permisible es $\sigma_{perm} = 73$ MPa. El eslabón tiene un grosor de 40 mm.

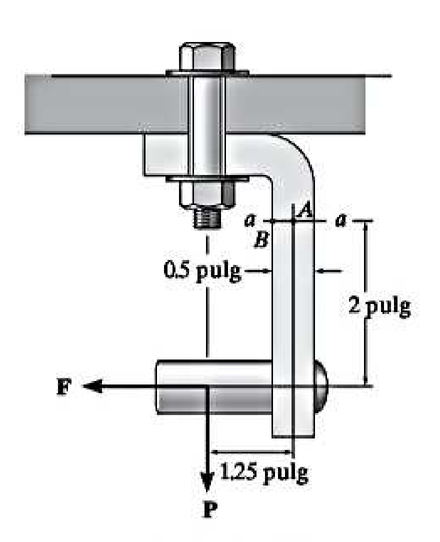
8-27. El eslabón descentrado tiene una anchura de w = 200 mm y un grosor de 40 mm. Si el esfuerzo normal permisible es $\sigma_{perm} = 75$ MPa, determine la carga máxima P que puede aplicarse a los cables.



Probs. 8-26/27

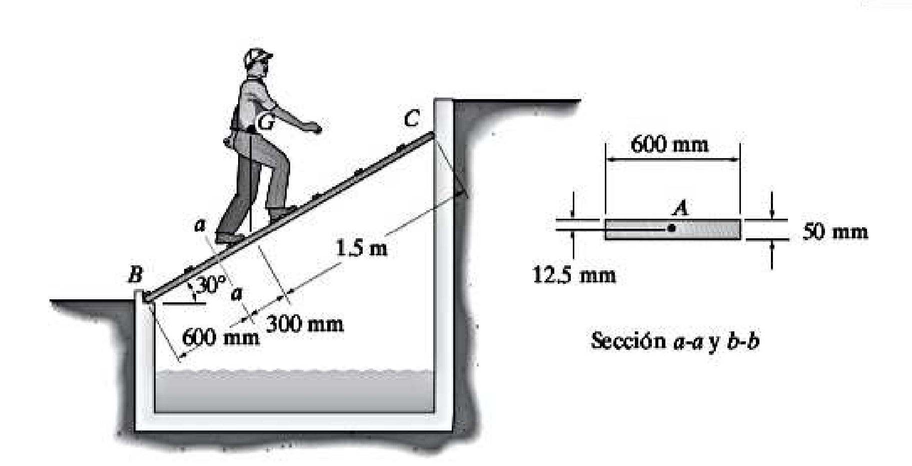
*8-28. La junta está sometida a una fuerza de $P = 80$ lb y $F = 0$. Dibuje la distribución del esfuerzo normal que actúa sobre la sección a-a, si el elemento tiene un área transversal rectangular con una anchura de 2 pulg y un grosor de 0.5 pulg.

•8-29. La junta está sometida a una fuerza de $P = 200$ lb y $F = 150$ lb. Determine el estado de esfuerzo en los puntos A y B, y dibuje los resultados sobre los elementos diferenciales ubicados en estos puntos. El elemento tiene un área transversal rectangular con una anchura de 0.75 pulg y un grosor de 0.5 pulg.



Probs. 8-28/29

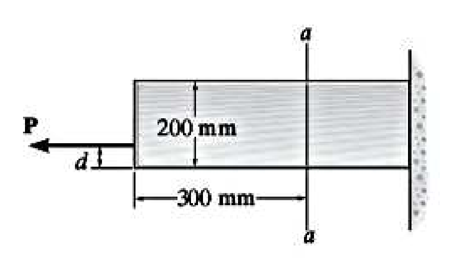
8-30. Si el hombre de 75 kg se encuentra en la posición mostrada en la figura, determine el estado de esfuerzo en el punto A del área transversal de la plancha en la sección a-a. El centro de gravedad del hombre está en G. Suponga que el punto de contacto en C es liso.



Prob. 8-30

8-31. Determine la menor distancia d hasta el borde de la placa en la que se puede aplicar la fuerza $\mathbf{P}$ de modo que no produzca esfuerzos de compresión sobre la placa en la sección a-a. La placa tiene un grosor de 20 mm y $\mathbf{P}$ actúa a lo largo de la línea central de este grosor.

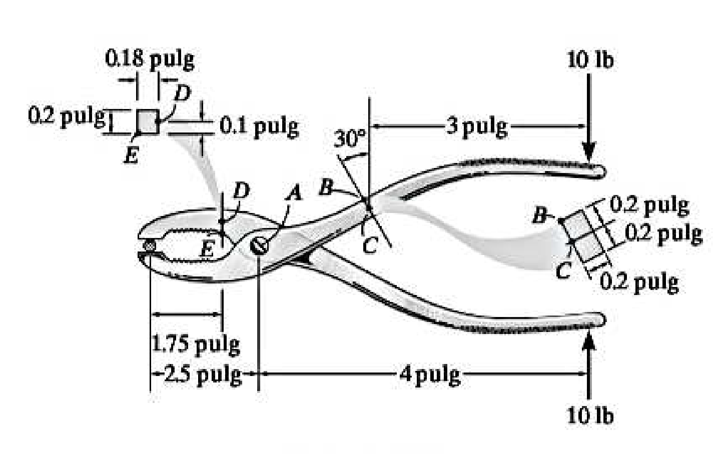
***8-32.** La fuerza horizontal de $P = 80$ kN actúa en el extremo de la placa; ésta tiene un grosor de 10 mm y $\mathbf{P}$ actúa a lo largo de la línea central del grosor de forma que $d = 50$ mm. Grafique la distribución del esfuerzo normal que actúa a lo largo de la sección a-a.



Probs. 8-31/32

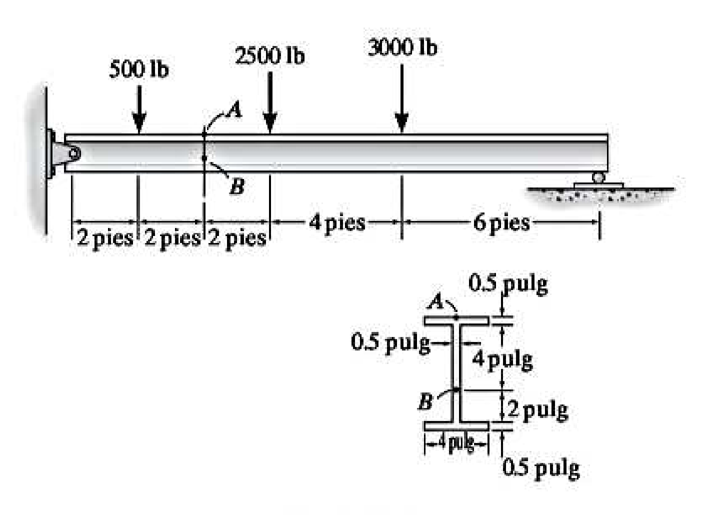
•**8-33.** Las pinzas están fabricadas con dos partes de acero articuladas entre sí en A. Si un perno liso se sostiene entre las quijadas y se aplica una fuerza de apriete de 10 lb a los mangos, determine el estado de esfuerzo desarrollado en las pinzas en los puntos B y C. Aquí la sección transversal es rectangular, con las dimensiones indicadas en la figura.

8-34. Resuelva el problema 8-33 para los puntos D y E.



Probs. 8-33/34

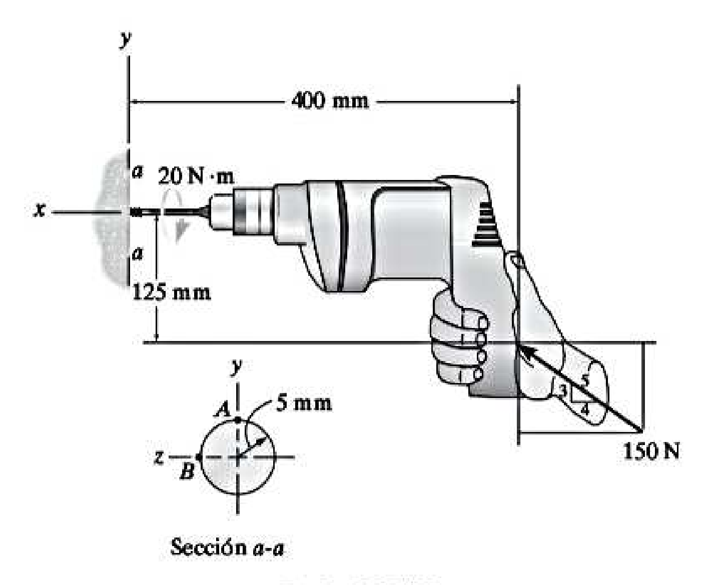
8-35. La viga I de ala ancha está sometida a la carga mostrada en la figura. Determine las componentes de esfuerzo en los puntos A y B, y muestre los resultados en un elemento de volumen en cada uno de estos puntos. Use la fórmula del esfuerzo cortante para calcular el esfuerzo cortante.



Prob. 8-35

***8-36.** El taladro se hunde en la pared y se somete al par de torsión y a la fuerza mostrados en la figura. Determine el estado de esfuerzo en el punto A sobre el área transversal de la broca, en la sección a-a.

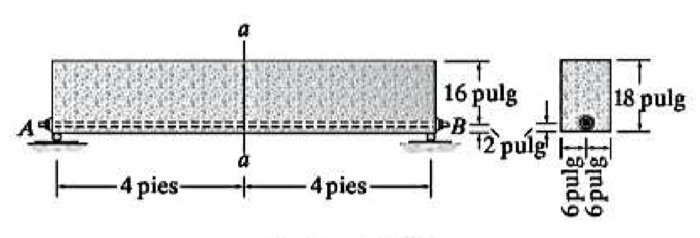
•**8-37.** El taladro se hunde en la pared y se somete al par de torsión y a la fuerza mostrados en la figura. Determine el estado de esfuerzo en el punto B sobre el área transversal de la broca, en la sección a-a.



Probs. 8-36/37

8-38. Como el concreto puede soportar poca o nula tensión, este problema se puede evitar mediante el uso de alambres o varillas para *pretensar* al concreto una vez que está formado. Considere la viga simplemente apoyada que se muestra en la figura, la cual tiene una sección transversal rectangular de 18 × 12 pulg. Si el concreto tiene un peso específico de 150 lb/pie³, determine la tensión necesaria en la barra AB que corre a través de la viga, para que no se desarrolle esfuerzo de tensión sobre el concreto en su sección central *a-a*. No tome en cuenta el tamaño de la barra y cualquier deflexión de la viga.

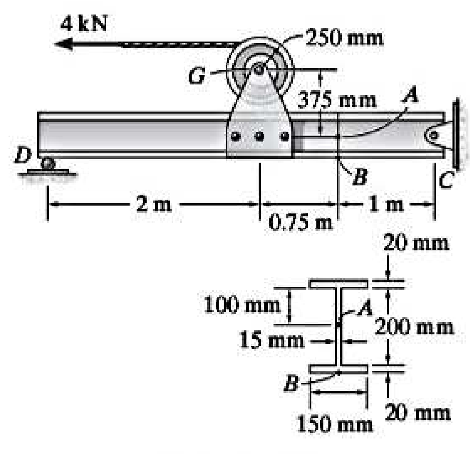
8-39. Resuelva el problema 8-38 si la barra tiene un diámetro de 0.5 pulg. Utilice el método del área transformada que se analizó en la sección 6.6. $E_{ac} = 29(10^3)$ksi, $E_c = 3.60(10^3)$ ksi.



Probs. 8-38/39

•8-40. Determine el estado de esfuerzo en el punto A cuando la viga está sometida a una fuerza del cable de 4 kN. Indique el resultado como un elemento diferencial de volumen.

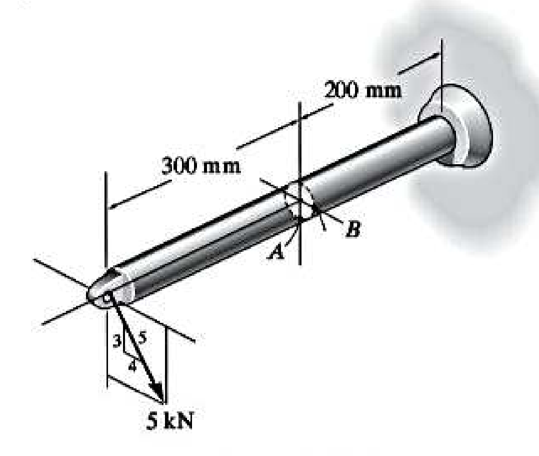
•8-41. Determine el estado de esfuerzo en el punto B cuando la viga está sometida a una fuerza del cable de 4 kN. Indique el resultado como un elemento diferencial de volumen.



Probs. 8-40/41

8-42. La barra tiene un diámetro de 80 mm. Determine las componentes del esfuerzo que actúan en el punto A y muestre los resultados sobre un elemento de volumen situado en este punto.

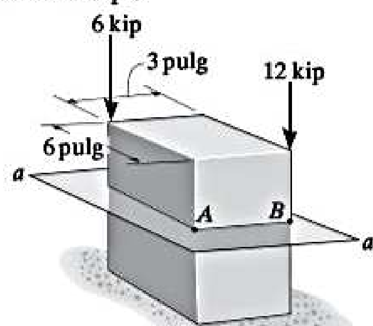
8-43. La barra tiene un diámetro de 80 mm. Determine las componentes del esfuerzo que actúan en el punto B y muestre los resultados sobre un elemento de volumen situado en este punto.



Probs. 8-42/43

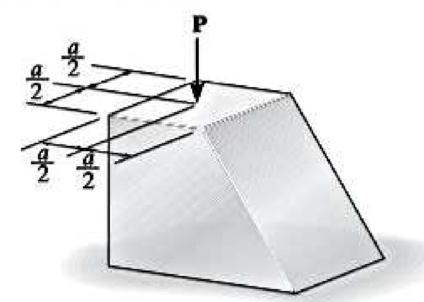
•8-44. Determine el esfuerzo normal desarrollado en los puntos A y B. No tome en cuenta el peso del bloque.

•8-45. Dibuje la distribución del esfuerzo normal que actúa sobre el área transversal en la sección *a-a*. No tome en cuenta el peso del bloque.



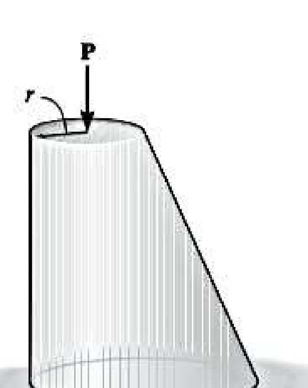
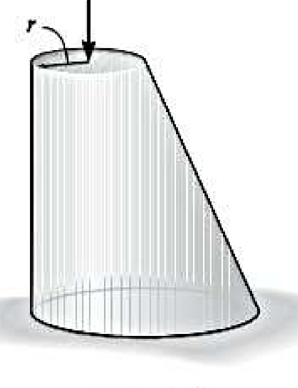
Probs. 8-44/45

8-46. El soporte está sometido a la carga de compresión **P**. Determine el esfuerzo normal absoluto máximo y mínimo que actúa en el material.



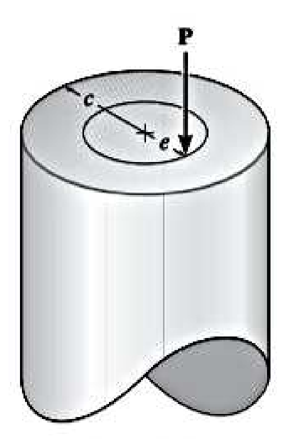
Prob. 8-46

8-47. El soporte está sometido a la carga de compresión **P**. Determine el esfuerzo normal máximo y mínimo que actúan en el material. Todas las secciones transversales horizontales son circulares.

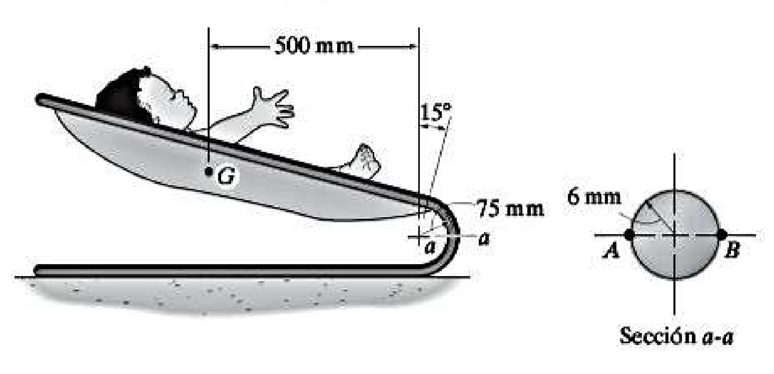
Prob. 8-47

***8-48.** El poste tiene una sección transversal circular de radio c. Determine el radio máximo e en el que se puede aplicar la carga, de modo que ninguna parte del poste experimente un esfuerzo de tensión. No tome en cuenta el peso del poste.



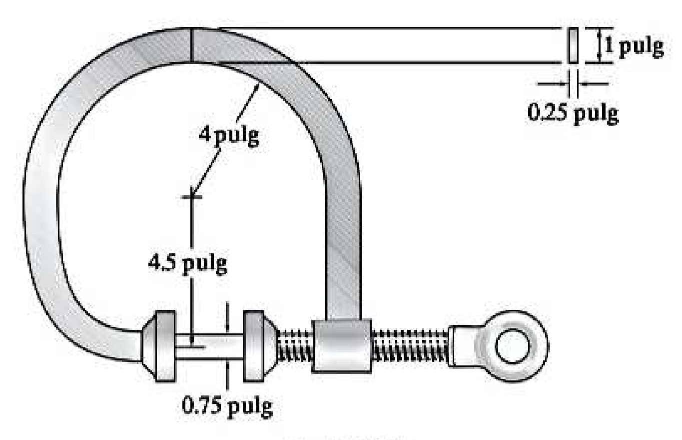
Prob. 8-48

•**8-49.** Si el bebé tiene una masa de 5 kg y su centro de masa está en G, determine el esfuerzo normal en los puntos A y B sobre el área transversal de la varilla en la sección a-a. Se tienen dos varillas, una a cada lado de la cuna.



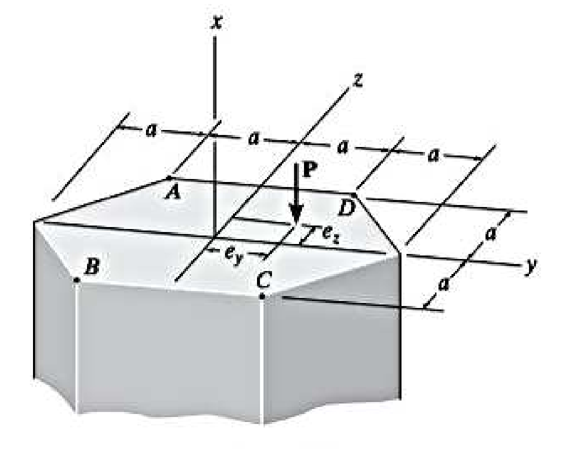
Prob. 8-49

8-50. La mordaza en C aplica un esfuerzo de compresión de 80 psi sobre el bloque cilíndrico. Determine el esfuerzo normal máximo desarrollado en la mordaza.



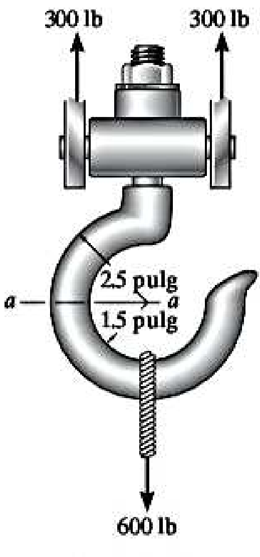
Prob. 8-50

8-51. Un poste que tiene las dimensiones mostradas en la figura se somete a la carga de apoyo **P**. Especifique la región en la que se puede aplicar esta carga sin que se desarrollen esfuerzos de tensión en los puntos A, B, C y D.



Prob. 8-51

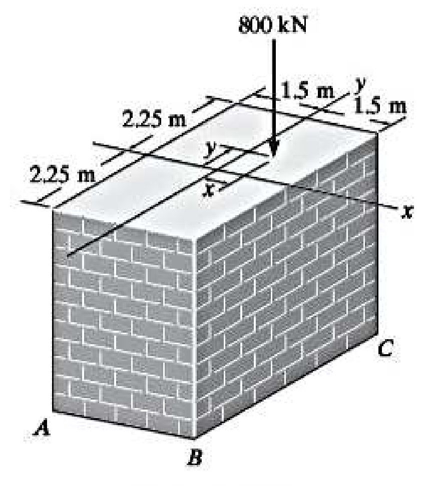
*8-52. El gancho se usa para levantar la carga de 600 lb. Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la sección *a-a*. El área transversal es circular y tiene un diámetro de 1 pulg. Use la fórmula de las viga curva para calcular el esfuerzo flexionante.



Prob. 8-52

•8-53. El pilar de ladrillos se somete a una carga 800 kN. Determine la ecuación de la línea $y = f(x)$ a lo largo de la cual puede colocarse la carga sin causar esfuerzos de tensión en el pilar. No tome en cuenta el peso de éste.

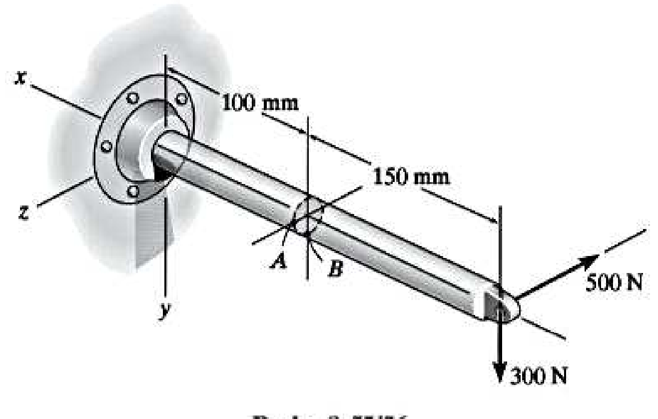
8-54. El pilar de ladrillos se somete a una carga 800 kN. Si $x = 0.25$ m y $y = 0.5$ m, determine el esfuerzo normal en cada esquina *A*, *B*, *C*, *D* (no mostrado en la figura) y grafique la distribución de esfuerzos sobre la sección transversal. No tome en cuenta el peso del pilar.



Probs. 8-53/54

8-55. La barra tiene un diámetro de 40 mm. Si está sometida a las dos componentes de fuerza en uno de sus extremos, tal como se indica en la figura, determine el estado de esfuerzo en el punto *A* y muestre los resultados sobre un elemento diferencial de volumen situado en este punto.

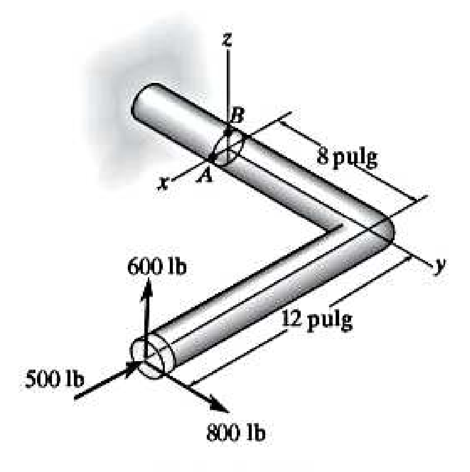
*8-56. Resuelva el problema 8-55 para el punto *B*.



Probs. 8-55/56

•8-57. La varilla de 2 pulg de diámetro está sometida a las cargas mostradas en la figura. Determine el estado de esfuerzo en el punto *A* y muestre los resultados en un elemento diferencial situado en ese punto.

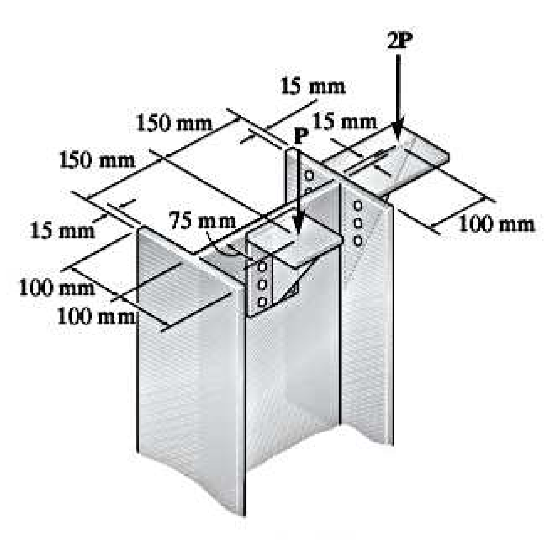
8-58. La varilla de 2 pulg de diámetro está sometida a las cargas mostradas en la figura. Determine el estado de esfuerzo en el punto *B* y muestre los resultados en un elemento diferencial situado en ese punto.



Probs. 8-57/58

8-59. Si $P = 60$ kN, determine el esfuerzo normal máximo desarrollado en la sección transversal de la columna.

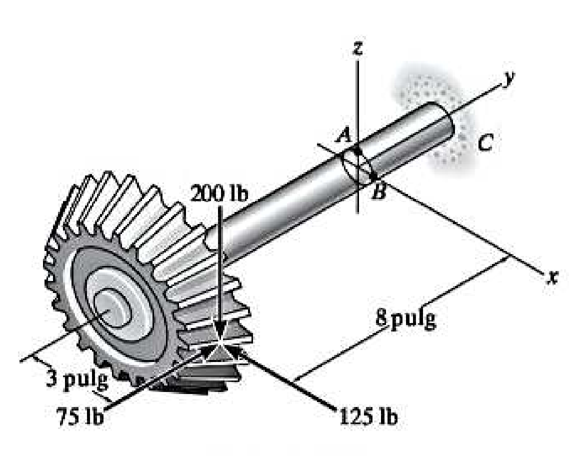
***8-60.** Determine la máxima fuerza **P** permisible si la columna está hecha de un material que tiene un esfuerzo normal permisible de $\sigma_{perm} = 100$ MPa.



Probs. 8-59/60

•**8-61.** El engrane cónico se somete a las cargas mostradas en la figura. Determine las componentes del esfuerzo que actúan sobre el eje en el punto A y muestre los resultados en un elemento de volumen ubicado en ese punto. El eje tiene un diámetro de 1 pulg y está fijo a la pared en C.

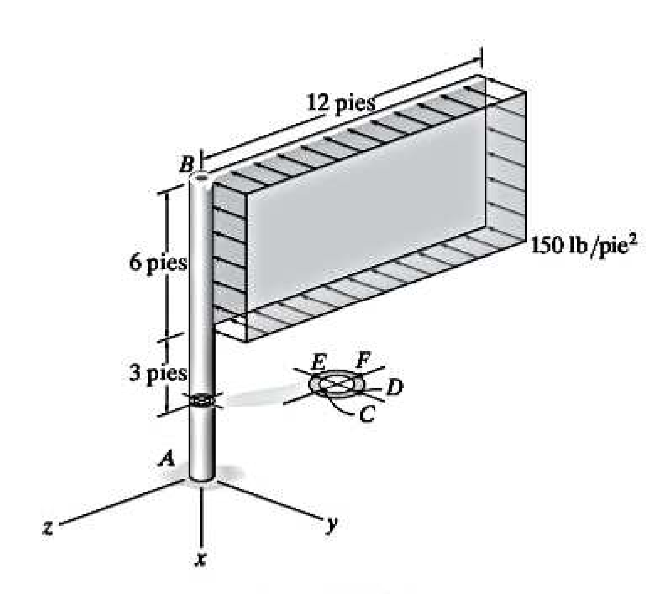
8-62. El engrane cónico se somete a las cargas mostradas en la figura. Determine las componentes del esfuerzo que actúan sobre el eje en el punto B y muestre los resultados en un elemento de volumen ubicado en ese punto. El eje tiene un diámetro de 1 pulg y está fijo a la pared en C.



Probs. 8-61/62

8-63. La señal uniforme tiene un peso de 1500 lb y se sostiene mediante el tubo AB, que tiene un radio interior de 2.75 pulg y un radio exterior de 3.00 pulg. Si la cara de la señal se somete a una presión uniforme del viento de $p = 150$ lb/pie^2, determine el estado de esfuerzo en los puntos C y D. Muestre los resultados en un elemento diferencial de volumen situado en cada uno de estos puntos. No tome en cuenta el grosor de la señal y suponga que está soportada en el borde externo del tubo.

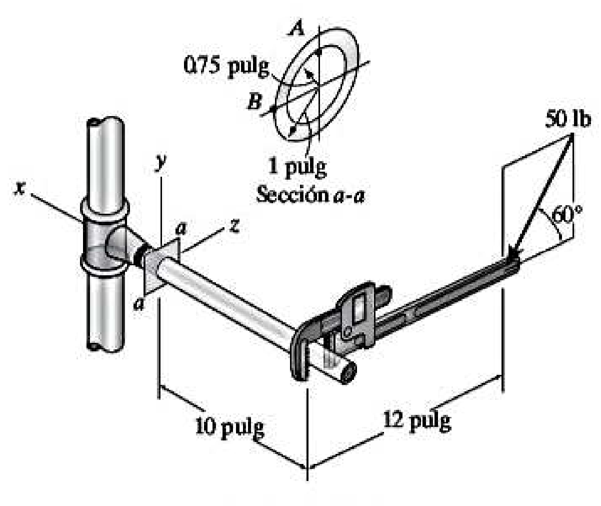
***8-64.** Resuelva el problema 8-63 para los puntos E y F.



Probs. 8-63/64

•**8-65.** Determine el estado de esfuerzo en el punto A sobre el área transversal del tubo, en la sección a-a.

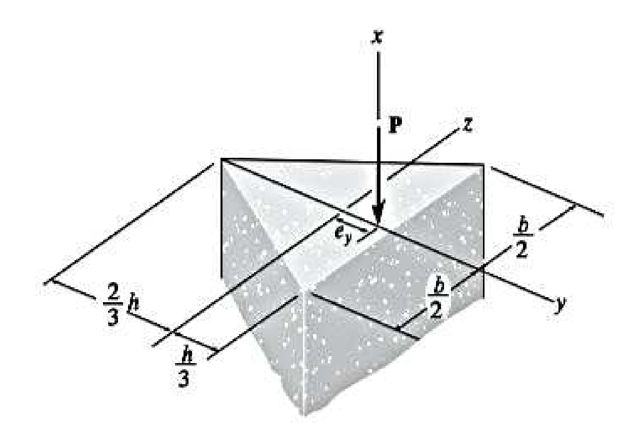
8-66. Determine el estado de esfuerzo en el punto B sobre el área transversal del tubo, en la sección a-a.



Probs. 8-65/66

8

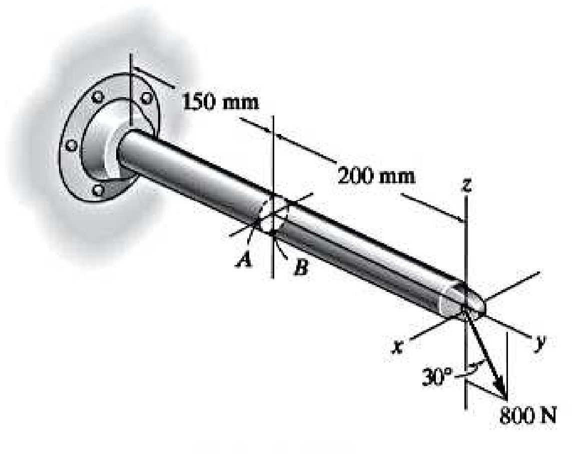
•8-67. La fuerza excéntrica **P** se aplica sobre el soporte de concreto mostrado en la figura, a una distancia e_y de su centroide. Determine el intervalo a lo largo del eje y donde puede aplicarse **P** sobre la sección transversal, de modo que no se desarrollen esfuerzos de tensión en el material.



Prob. 8-67

*8-68. La barra tiene un diámetro de 40 mm. Si está sometida a una fuerza de 800 N como se muestra en la figura, determine las componentes del esfuerzo que actúan en el punto A y muestre los resultados sobre un elemento de volumen ubicado en ese punto.

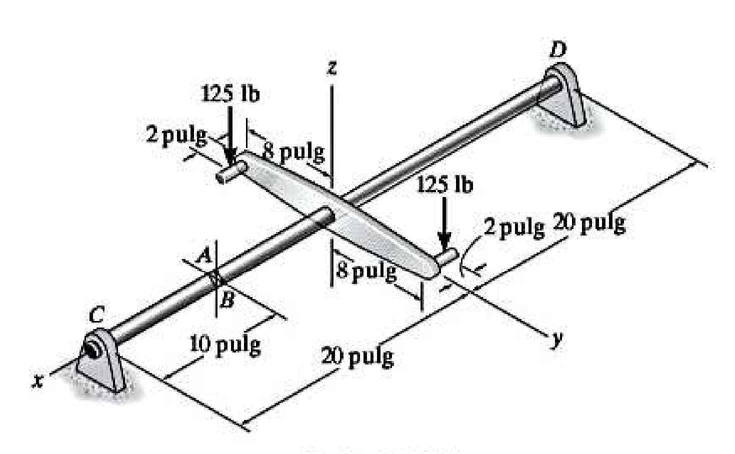
•8-69. Resuelva el problema 8-68 para el punto B.



Probs. 8-68/69

8-70. El eje con $\frac{3}{4}$ de pulg de diámetro está sometido a la carga mostrada en la figura. Determine las componentes del esfuerzo que actúan en el punto A. Dibuje los resultados sobre un elemento de volumen situado en ese punto. La chumacera en C puede ejercer sólo componentes de fuerza $\mathbf{C}_y$ y $\mathbf{C}_z$ sobre el eje y el cojinete de empuje en D puede ejercer componentes de fuerza $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ y $\mathbf{D}_z$ sobre el eje.

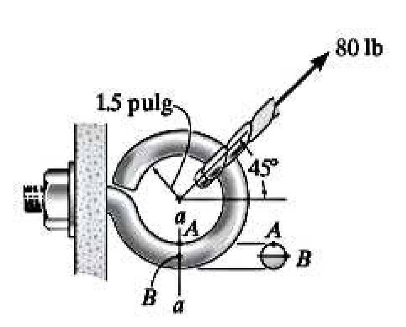
8-71. Resuelva el problema 8-70 para las componentes del esfuerzo en el punto B.



Probs. 8-70/71

*8-72. El gancho está sometido a la fuerza de 80 lb. Determine el estado de esfuerzo sobre el punto A en la sección a-a. La sección transversal es circular y tiene un diámetro de 0.5 pulg. Use la fórmula de la viga curva para calcular el esfuerzo flexionante.

•8-73. El gancho está sometido a la fuerza de 80 lb. Determine el estado de esfuerzo sobre el punto B en la sección a-a. La sección transversal tiene un diámetro de 0.5 pulg. Use la fórmula de la viga curva para calcular el esfuerzo flexionante.



Probs. 8-72/73

REPASO DE CAPÍTULO

Se considera que un recipiente a presión tiene una pared delgada siempre que $r/t \geq 10$. Para un recipiente cilíndrico de pared delgada, el esfuerzo circunferencial o anular es

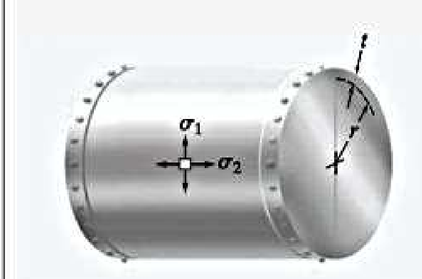
$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$

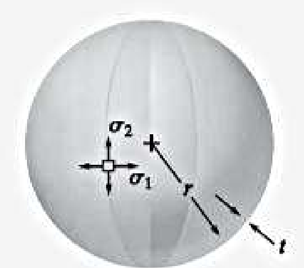
Este esfuerzo es dos veces mayor que el esfuerzo longitudinal,

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

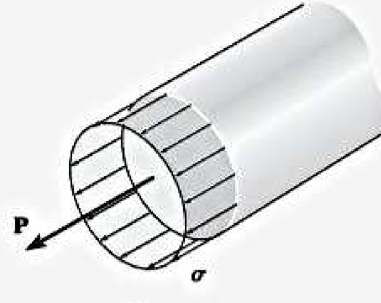
Los recipientes esféricos de pared delgada tienen el mismo esfuerzo dentro de sus paredes en todas direcciones. Esto es

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

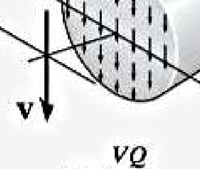


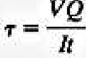


La superposición de componentes de esfuerzo puede utilizarse para determinar los esfuerzos normal y cortante en un punto de un elemento sometido a una carga combinada. Para ello, primero es necesario determinar las fuerzas resultantes axial y cortante, y los momentos internos resultantes de torsión y flexión en la sección donde se ubica el punto. Después, se determinan las componentes resultantes de los esfuerzos normal y cortante sumando algebraicamente las componentes del esfuerzo normal y cortante de cada carga.

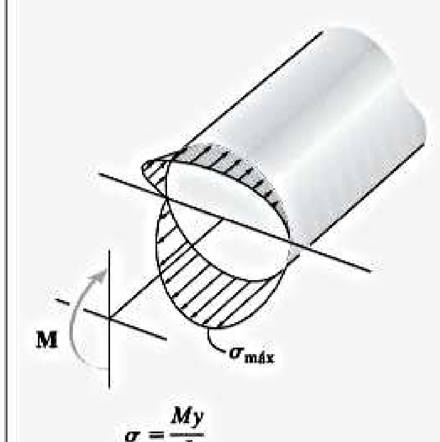


$$\sigma = \frac{P}{A}$$

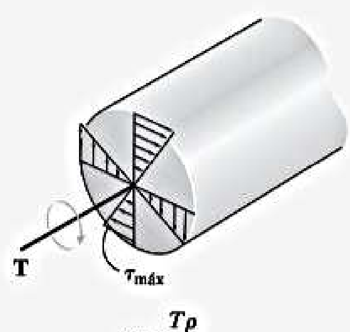




$$\tau = \frac{VQ}{It}$$



$$\sigma = \frac{My}{I}$$



$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

PROBLEMAS CONCEPTUALES

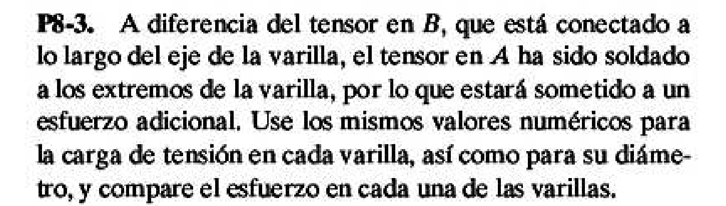


P8-1

P8-1. Explique por qué la falla en esta manguera de jardín ocurrió cerca de su extremo y por qué la rotura se produjo en el sentido de su longitud. Use valores numéricos para explicar el resultado. Suponga que la presión del agua es de 30 psi.



P8-3



P8-3. A diferencia del tensor en *B*, que está conectado a lo largo del eje de la varilla, el tensor en *A* ha sido soldado a los extremos de la varilla, por lo que estará sometido a un esfuerzo adicional. Use los mismos valores numéricos para la carga de tensión en cada varilla, así como para su diámetro, y compare el esfuerzo en cada una de las varillas.



P8-2

P8-2. Este silo con un extremo abierto contiene material granular. Se construyó con tiras de madera unidas mediante bandas de acero. Explique, con valores numéricos, por qué las bandas no están uniformemente espaciadas a través de la altura del cilindro. Además, ¿cómo podría encontrar esta separación si cada banda estará sometida al mismo esfuerzo?

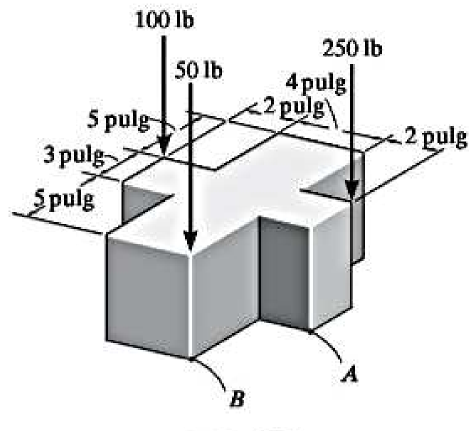


P8-4

P8-4. Un viento constante que sopla contra un lado de esta chimenea ha causado deformaciones unitarias por erosión en las juntas de mortero, de tal manera que la chimenea tiene una deformación apreciable. Explique la forma de obtener la distribución de esfuerzos sobre una sección en la base de la chimenea, y dibuje esta distribución sobre la sección.

PROBLEMAS DE REPASO

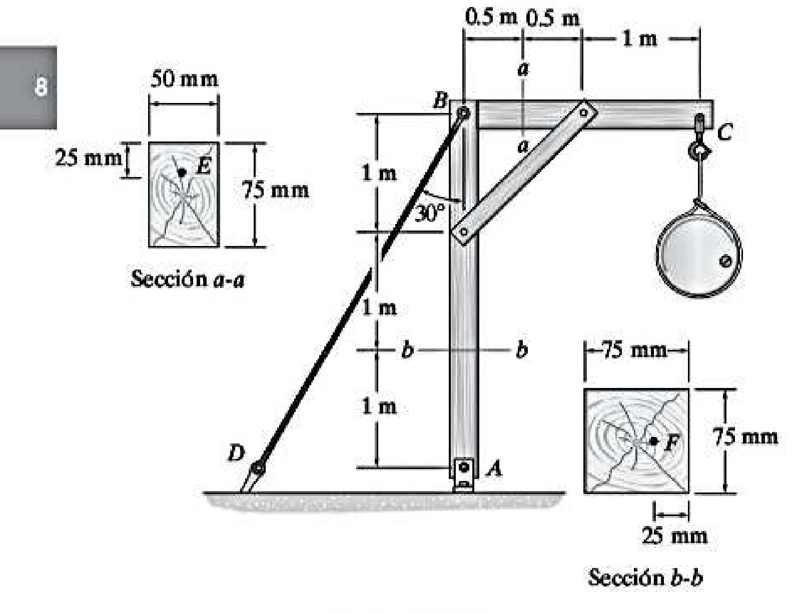
8-74. El bloque está sometido a las tres cargas axiales mostradas en la figura. Determine el esfuerzo normal desarrollado en los puntos A y B. No tome en cuenta el peso del bloque.



Prob. 8-74

8-75. El tambor de 20 kg está suspendido de un gancho montado en el bastidor de madera. Determine el estado de esfuerzo en el punto E sobre el área transversal del bastidor en la sección a-a. Indique los resultados sobre un elemento.

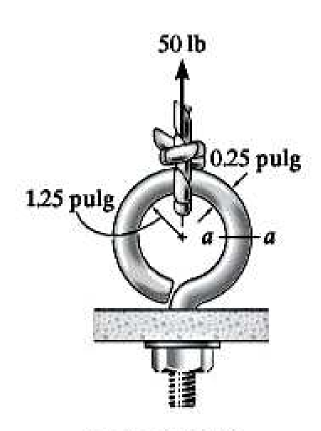
***8-76.** El tambor de 20 kg está suspendido de un gancho montado en el bastidor de madera. Determine el estado de esfuerzo en el punto F sobre el área transversal del bastidor en la sección b-b. Indique los resultados sobre un elemento.



Probs. 8-75/76

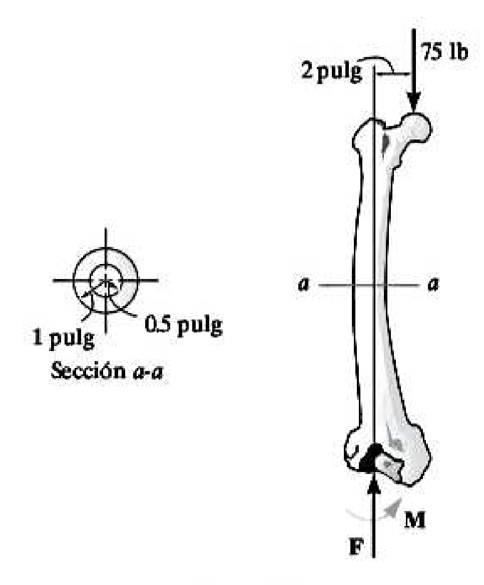
•8-77. La armella está sometida a la fuerza de 50 lb. Determine los esfuerzos máximos en tensión y en compresión sobre la sección a-a. La sección transversal es circular y tiene un diámetro de 0.25 pulg. Use la fórmula de la viga curva para calcular el esfuerzo flexionante.

8-78. Resuelva el problema 8-77 si la sección transversal es cuadrada, con dimensiones de 0.25 × 0.25 pulg.



Probs. 8-77/78

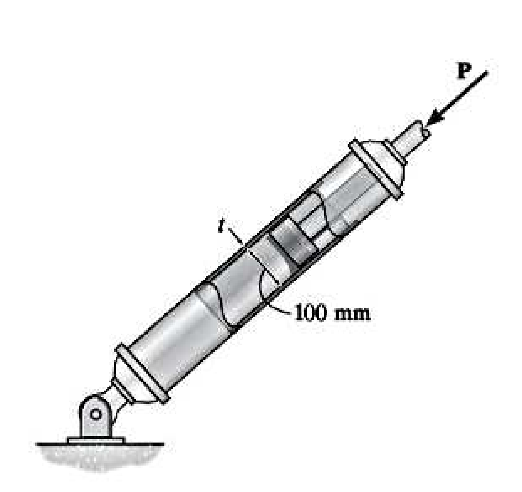
8-79. Si el área transversal del fémur en la sección a-a puede aproximarse como un tubo circular como el mostrado en la figura, determine el esfuerzo normal máximo desarrollado sobre el área transversal en la sección a-a debido a la carga de 75 lb.



Prob. 8-79

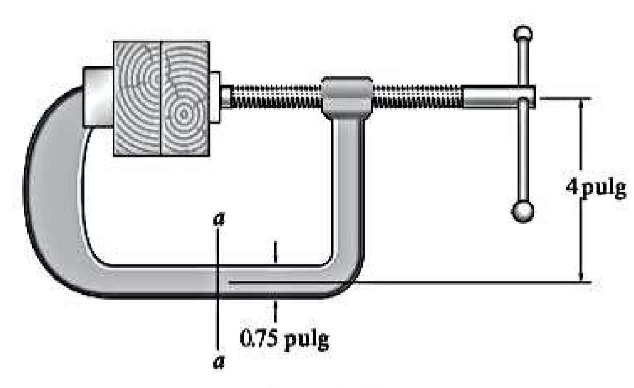
*8-80. Se requiere que el cilindro hidráulico soporte una fuerza de $P = 100$ kN. Si éste tiene un diámetro interior de 100 mm y está hecho de un material que tiene un esfuerzo normal permisible de $\sigma_{perm} = 150$ MPa, determine el grosor mínimo t requerido para la pared del cilindro.

•8-81. El cilindro hidráulico tiene un diámetro interior de 100 mm y un grosor de pared de $t = 4$ mm. Si está fabricado de un material que tiene un esfuerzo normal permisible de $\sigma_{perm} = 150$ MPa, determine la fuerza **P** máxima permisible.



Probs. 8-80/81

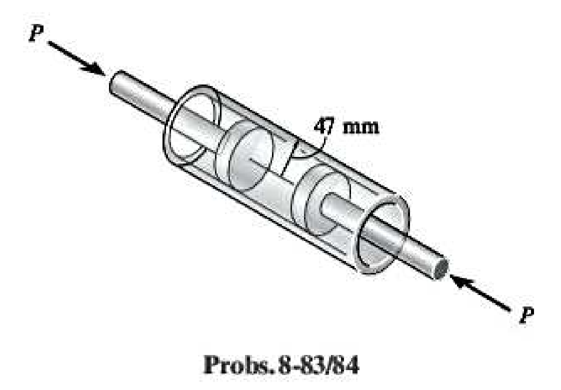
8-82. El tornillo de la mordaza ejerce sobre los bloques de madera una fuerza de compresión de 500 lb. Determine el esfuerzo normal máximo desarrollado a lo largo de la sección a-a. La sección transversal es rectangular, de 0.75 × 0.50 pulg.



Prob. 8-82

8-83. La presión del aire en el cilindro se incrementa al ejercer fuerzas $P = 2$ kN sobre los dos pistones, cada uno con un radio de 45 mm. Si la pared del cilindro tiene un grosor de 2 mm, determine el estado de esfuerzo en esa pared.

*8-84. Determine la máxima fuerza P que puede ejercerse sobre cada uno de los dos pistones, de modo que la componente del esfuerzo circunferencial en el cilindro no sea superior a 3 MPa. Cada pistón tiene un radio de 45 mm y la pared del cilindro tiene un grosor de 2 mm.



Probs. 8-83/84

•8-85. La tapa del tanque cilíndrico está empernada a éste a lo largo de las bridas. El tanque tiene un diámetro interior de 1.5 m y un grosor de pared de 18 mm. Si el mayor esfuerzo normal no debe exceder 150 MPa, determine la presión máxima que puede soportar el tanque. Además, calcule el número de pernos necesarios para fijar la tapa al tanque si cada perno tiene un diámetro de 20 mm. El esfuerzo permisible para los pernos es $(\sigma_{perm})_b = 180$ MPa.

8-86. La tapa del tanque cilíndrico está empernada a éste a lo largo de las bridas. El tanque tiene un diámetro interior de 1.5 m y un grosor de pared de 18 mm. Si la presión en el tanque es $p = 1.20$ MPa, determine la fuerza en cada uno de los 16 pernos que se emplean para fijar la tapa al tanque. Además, especifique el estado de esfuerzo en la pared del tanque.



Probs. 8-85/86



Las hélices de esta turbina se encuentran sometidas a un patrón de esfuerzo complejo. Al diseñarlas, es necesario determinar en qué punto y con qué dirección se produce el esfuerzo máximo.

Transformación de esfuerzo

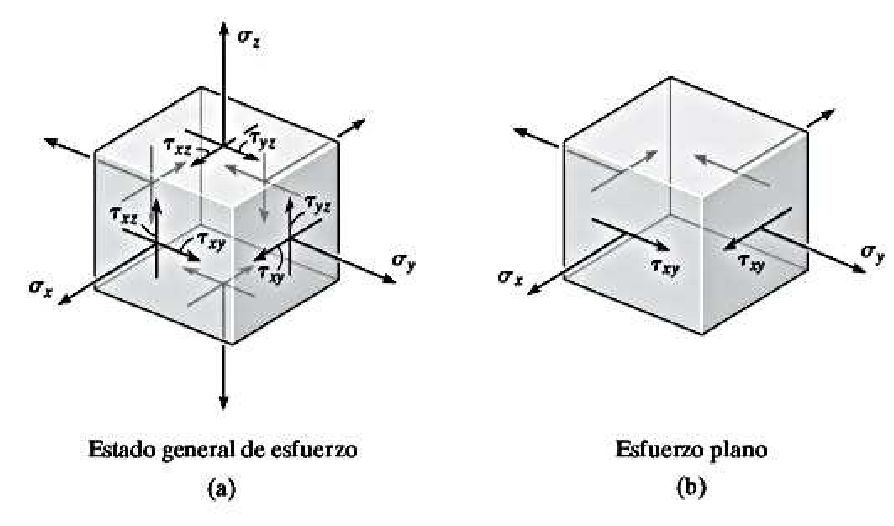
9

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se mostrará cómo se transforman las componentes de esfuerzo que están asociadas con un sistema coordenado particular en componentes asociadas con otro sistema de coordenadas que tiene una orientación diferente. Después de haber establecido las ecuaciones de transformación necesarias, será posible obtener los esfuerzos normal máximo y cortante máximo en un punto y determinar la orientación de los elementos sobre los que actúan. En la primera parte del capítulo se analizará la transformación de esfuerzo plano, puesto que ésta es la condición más común en la práctica de la ingeniería. Al final se estudiará un método para encontrar el esfuerzo cortante máximo absoluto en un punto en el que el material se encuentra sometido a estados de esfuerzo tanto planos como tridimensionales.

9.1 Transformación de esfuerzo plano

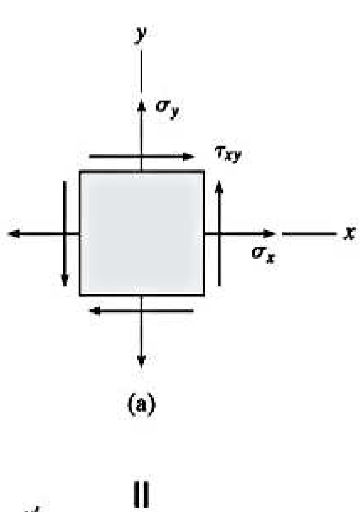
En la sección 1.3 se mostró que el estado general de esfuerzo en un punto se caracteriza mediante *seis* componentes independientes de esfuerzo normal y esfuerzo cortante, que actúan sobre las caras de un elemento de material ubicado en ese punto, figura 9-1*a*. Sin embargo, este estado de esfuerzo no se encuentra con frecuencia en la práctica de la ingeniería. En su lugar, los ingenieros suelen hacer aproximaciones o simplificaciones de las cargas sobre un cuerpo con el fin de que el esfuerzo producido en un elemento de la estructura o un elemento mecánico pueda analizarse en un *solo plano*. Cuando se presenta este caso, se dice que el material está sometido a *esfuerzo plano*, figura 9-1*b*. Por ejemplo, si no hay carga en la superficie de un cuerpo, entonces las componentes de los esfuerzos normal y cortante serán iguales a cero sobre la cara de un elemento que se encuentre en esta superficie. En consecuencia, las componentes de esfuerzo correspondientes en la cara opuesta también serán cero, por lo que el material en el punto estará sometido a esfuerzo plano. Este caso se analizó a lo largo del capítulo anterior.



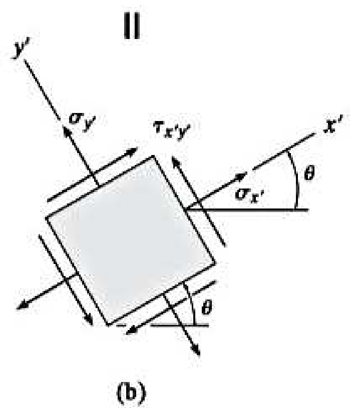
Estado general de esfuerzo
(a)

Esfuerzo plano
(b)

Figura 9-1

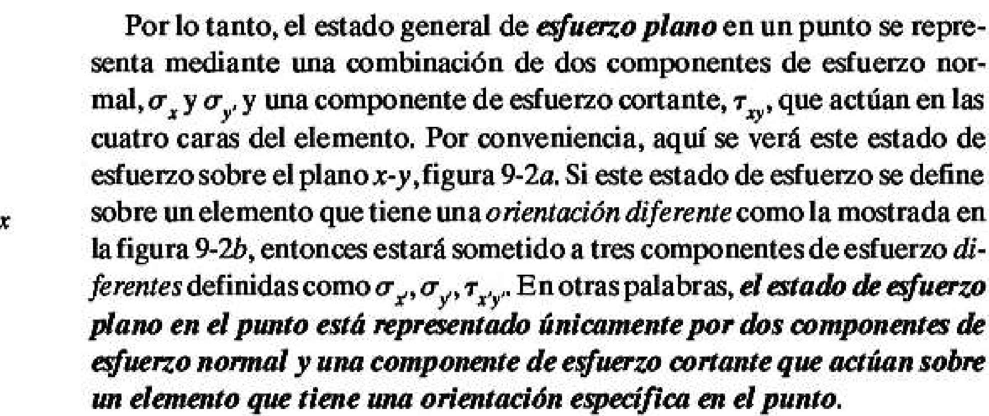


(a)



(b)

Figura 9-2



Por lo tanto, el estado general de ***esfuerzo plano*** en un punto se representa mediante una combinación de dos componentes de esfuerzo normal, σ_x y σ_y, y una componente de esfuerzo cortante, τ_{xy}, que actúan en las cuatro caras del elemento. Por conveniencia, aquí se verá este estado de esfuerzo sobre el plano *x-y*, figura 9-2*a*. Si este estado de esfuerzo se define sobre un elemento que tiene una *orientación diferente* como la mostrada en la figura 9-2*b*, entonces estará sometido a tres componentes de esfuerzo *diferentes* definidas como $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$. En otras palabras, ***el estado de esfuerzo plano en el punto está representado únicamente por dos componentes de esfuerzo normal y una componente de esfuerzo cortante que actúan sobre un elemento que tiene una orientación específica en el punto.***

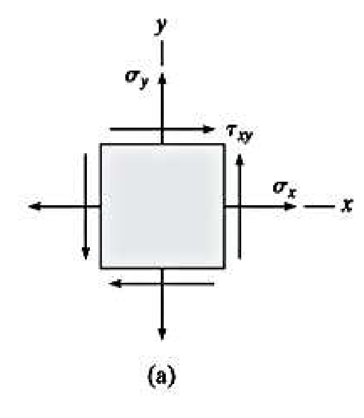
En esta sección, se mostrará cómo *transformar* las componentes de esfuerzo de la orientación de un elemento mostrada en la figura 9-2*a* a la orientación del elemento en la figura 9-2*b*. Esto es equivalente a conocer dos componentes de fuerza, es decir, $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, dirigidas a lo largo de los ejes *x* y *y*, que producen una fuerza resultante $\mathbf{F}_R$, y luego tratar de encontrar las componentes de fuerza $\mathbf{F}_{x'}$ y $\mathbf{F}_{y'}$ dirigidas a lo largo de los ejes *x'* y *y'*, de manera que produzcan *la misma* resultante. La transformación de la fuerza sólo debe tener en cuenta la magnitud y la dirección de la componente de fuerza. Sin embargo, la transformación de las componentes de esfuerzo es más difícil ya que la transformación debe tener en cuenta la magnitud y la dirección de cada componente de esfuerzo, *y* la orientación del área sobre la que actúa cada componente.

9

Procedimiento de análisis

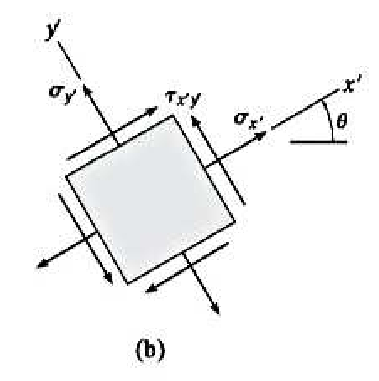
Si se conoce el estado de esfuerzo en un punto para una orientación dada de un elemento de material, figura 9-3*a*, entonces el estado de esfuerzo en un elemento que tiene alguna otra orientación θ, figura 9-3*b*, puede determinarse mediante el siguiente procedimiento.

- Para determinar las componentes de esfuerzo normal y cortante $\sigma_{x'}$, $\tau_{x'y'}$, que actúan sobre la cara $+x'$ del elemento, figura 9-3*b*, seccione el elemento de la figura 9-3*a* como se muestra en la figura 9-3*c*. Si el área seccionada es ΔA, entonces las áreas adyacentes del segmento serán ΔA sen θ y $\Delta A \cos \theta$.
- Dibuje el diagrama de cuerpo libre del segmento, el cual debe mostrar las *fuerzas* que actúan sobre el segmento, figura 9-3*d*. Esto se hace al multiplicar las componentes de esfuerzo sobre cada cara por el área sobre la que actúan.
- Aplique las ecuaciones de fuerza de equilibrio en las direcciones x' y y'. El área ΔA se cancelará de las ecuaciones y entonces será posible determinar las dos componentes de esfuerzo desconocidas $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$.
- Si debe determinarse $\sigma_{y'}$, que actúa sobre la cara $+y'$ del elemento en la figura 9-3*b*, entonces es necesario considerar un segmento del elemento, como se muestra en la figura 9-3*e* y seguir el mismo procedimiento que se acaba de describir. Sin embargo, aquí el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ no debe determinarse si ya se calculó previamente, puesto que es complementario; es decir, debe tener la misma magnitud en cada una de las cuatro caras del elemento, figura 9-3*b*.

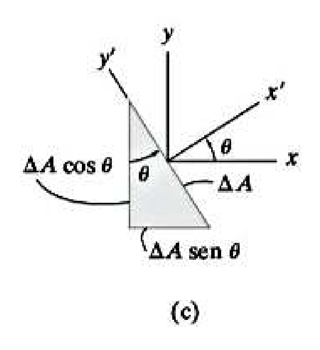


(a)

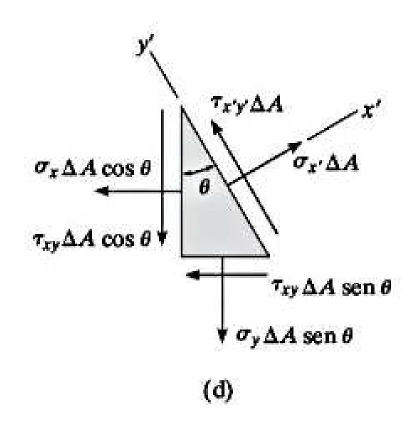
=



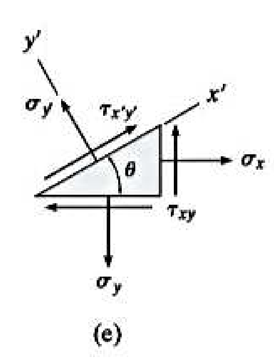
(b)



(c)



(d)

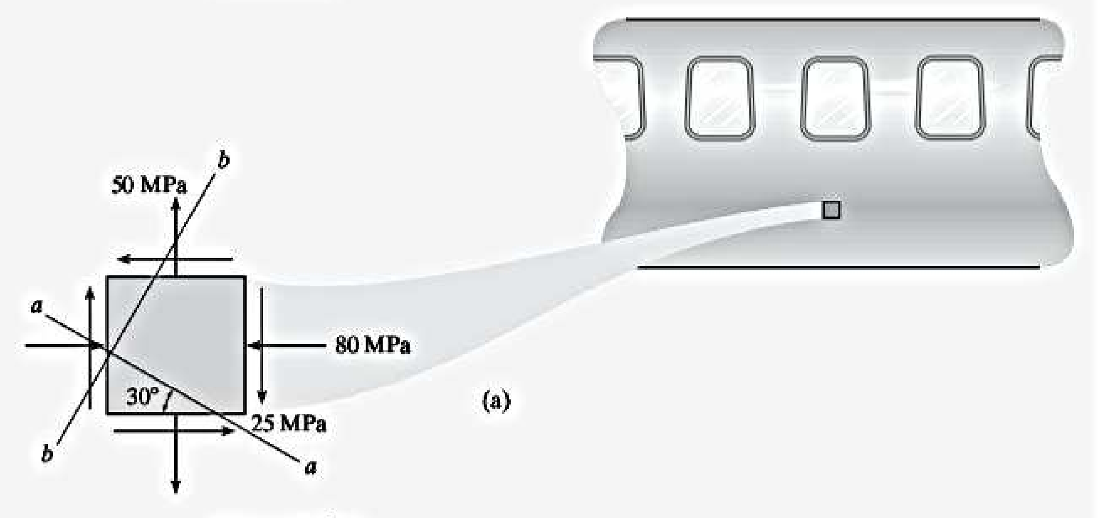


(e)

Figura 9-3

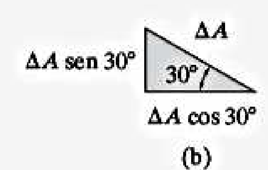
EJEMPLO 9.1

El estado de esfuerzo plano en un punto sobre la superficie del fuselaje del avión se representa en el elemento orientado como se indica en la figura 9-4*a*. Represente el estado de esfuerzo del punto de un elemento que está orientado a 30° medidos en sentido horario desde la posición mostrada.



SOLUCIÓN

El elemento rotado se muestra en la figura 9-4*d*. Para obtener la componente de esfuerzo en este elemento, primero se secciona el elemento de la figura 9-4*a* a través de la línea *a-a*. El segmento inferior se retira, y suponiendo que el plano seccionado (inclinado) tiene un área de ΔA, los planos horizontal y vertical tienen las áreas indicadas en la figura 9-4*b*. El diagrama de cuerpo libre de este segmento se muestra en la figura 9-4*c*. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en las direcciones x' y y' para evitar una solución simultánea de las dos incógnitas $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$, se tiene

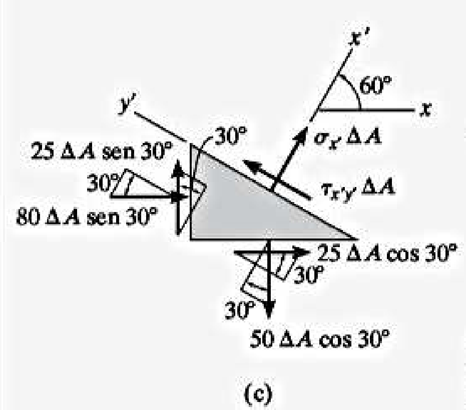


$$+\nearrow\Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (50\,\Delta A\cos 30^\circ)\cos 30^\circ + (25\,\Delta A\cos 30^\circ)\operatorname{sen} 30^\circ + (80\,\Delta A\operatorname{sen} 30^\circ)\operatorname{sen} 30^\circ + (25\,\Delta A\operatorname{sen} 30^\circ)\cos 30^\circ = 0$$

$$\sigma_{x'} = -4.15\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\nwarrow\Sigma F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\,\Delta A - (50\,\Delta A\cos 30^\circ)\operatorname{sen} 30^\circ - (25\,\Delta A\cos 30^\circ)\cos 30^\circ - (80\,\Delta A\operatorname{sen} 30^\circ)\cos 30^\circ + (25\,\Delta A\operatorname{sen} 30^\circ)\operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

$$\tau_{x'y'} = 68.8\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$



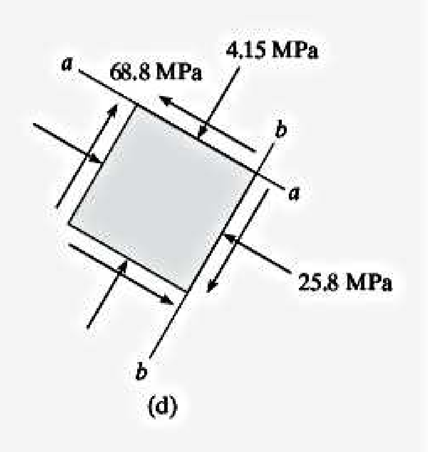
(c)

Figura 9-4

Como $\sigma_{x'}$ es negativo, actúa en dirección opuesta a la indicada en la figura 9-4*c*. Los resultados se muestran en la *parte superior* del elemento de la figura 9-4*d*, puesto que esta superficie es la considerada en la figura 9-4*c*.

9

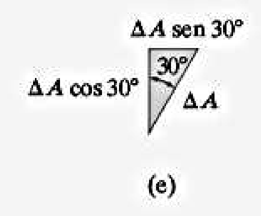
Ahora es necesario repetir el procedimiento para obtener el esfuerzo en el plano *perpendicular* *b-b*. Si se secciona el elemento de la figura 9-4*a* a lo largo de *b-b* se obtiene un segmento que tiene lados con las áreas indicadas en la figura 9-4*e*. Al orientar el eje $+x'$ hacia fuera, perpendicular a la cara seccionada, el diagrama de cuerpo libre asociado es como se muestra en la figura 9-4*f*. Por lo tanto,



(d)

$$+\searrow\Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (25\,\Delta A\cos 30^\circ)\,\text{sen}\,30^\circ + (80\,\Delta A\cos 30^\circ)\cos 30^\circ - (25\,\Delta A\,\text{sen}\,30^\circ)\cos 30^\circ - (50\,\Delta A\,\text{sen}\,30^\circ)\,\text{sen}\,30^\circ = 0$$

$$\sigma_{x'} = -25.8\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$



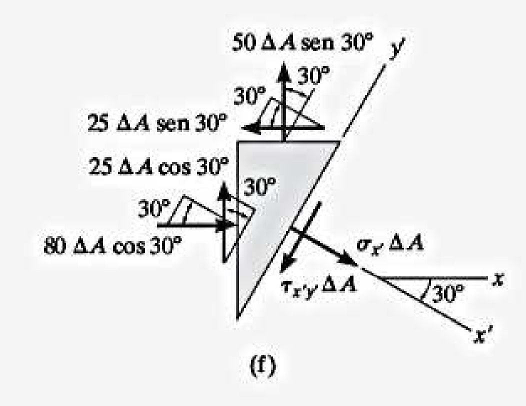
(e)

$$+\nearrow\Sigma F_{y'} = 0; \quad -\tau_{x'y'}\,\Delta A + (25\,\Delta A\cos 30^\circ)\cos 30^\circ + (80\,\Delta A\cos 30^\circ)\,\text{sen}\,30^\circ - (25\,\Delta A\,\text{sen}\,30^\circ)\,\text{sen}\,30^\circ + (50\,\Delta A\,\text{sen}\,30^\circ)\cos 30^\circ = 0$$

$$\tau_{x'y'} = 68.8\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Como $\sigma_{x'}$ es una cantidad negativa, actúa en sentido opuesto a la dirección que se indica en la figura 9-4*f*. Las componentes de esfuerzo se muestran actuando de *lado derecho* del elemento en la figura 9-4*d*.

Por lo tanto, a partir de este análisis se puede concluir que el estado de esfuerzo en el punto puede representarse al elegir un elemento orientado como se muestra en la figura 9-4*a*, o al seleccionarlo con la orientación indicada en la figura 9-4*d*. En otras palabras, estos estados de esfuerzo son equivalentes.



(f)

9

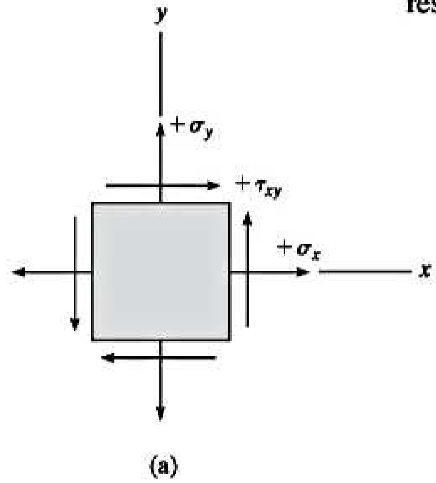
9.2 Ecuaciones generales de transformación de esfuerzo plano

El método para transformar las componentes de esfuerzo normal y cortante de los ejes de coordenadas x y y a los ejes x' y y', analizado en la sección anterior, puede desarrollarse de manera general y expresarse como un conjunto de ecuaciones de transformación de esfuerzo.

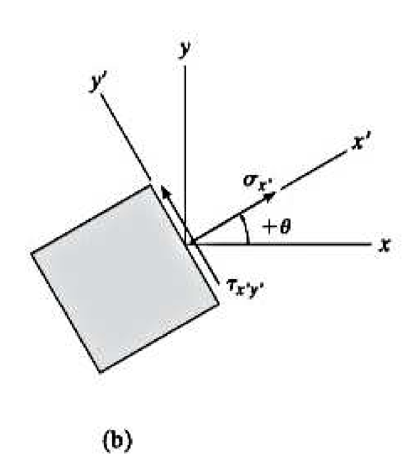
Convención de signos. En primer lugar se debe establecer una convención de signos para las componentes de esfuerzo. Para ello, los ejes $+x$ y $+x'$ se usan para definir la normal hacia afuera de un lado del elemento. Entonces σ_x y $\sigma_{x'}$ son positivos cuando actúan en las direcciones positivas x y x', y τ_{xy} y $\tau_{x'y'}$ son positivos cuando actúan en las direcciones positivas y y y', figura 9-5.

La orientación del plano en el que se deben determinar las componentes de esfuerzo normal y cortante estará definida por el ángulo θ, que se mide desde el eje $+x$ hasta el eje $+x'$ de la figura 9-5*b*. Observe que los dos conjuntos de ejes con tilde y sin tilde en esta figura forman sistemas coordenadas derechos; es decir, los ejes positivos z (o z') se establecen mediante la regla de la mano derecha. Al curvar los dedos desde x (o x') hacia y (o y') se obtiene la dirección para el eje z (o z') positivo que apunta hacia fuera, a lo largo del pulgar. El *ángulo* θ será *positivo* siempre que siga la curvatura de los dedos de la mano derecha, es decir en sentido antihorario como se muestra en la figura 9-5*b*.

Componentes de esfuerzo normal y cortante. Si se usa la convención de signos establecida, el elemento de la figura 9-6*a* se secciona a lo largo del plano inclinado y se aísla el segmento mostrado en la figura 9-6*b*. Suponiendo que el área seccionada es ΔA, entonces las caras horizontal y vertical del segmento tiene un área de ΔA sen θ y ΔA cos θ, respectivamente.



(a)



(b)

Convención de signos positivos

Figura 9-5

9

En la figura 9-6*c* se muestra el *diagrama de cuerpo libre* resultante para el segmento. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio para determinar las componentes desconocidas de esfuerzo normal y cortante $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$, se tiene

$$+\nearrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (\tau_{xy}\,\Delta A \operatorname{sen}\theta)\cos\theta - (\sigma_y\,\Delta A \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta$$
$$- (\tau_{xy}\,\Delta A\cos\theta)\operatorname{sen}\theta - (\sigma_x\,\Delta A\cos\theta)\cos\theta = 0$$
$$\sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\operatorname{sen}^2\theta + \tau_{xy}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$
$$+\nwarrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\,\Delta A + (\tau_{xy}\,\Delta A\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta - (\sigma_y\,\Delta A\operatorname{sen}\theta)\cos\theta$$
$$- (\tau_{xy}\,\Delta A\cos\theta)\cos\theta + (\sigma_x\,\Delta A\cos\theta)\operatorname{sen}\theta = 0$$
$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

Estas dos ecuaciones pueden simplificarse utilizando las identidades trigonométricas sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ, $\operatorname{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ y $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, en cuyo caso,

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\operatorname{sen}2\theta \qquad (9\text{-}1)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen}2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (9\text{-}2)$$

Si se requiere el esfuerzo normal que actúa en la dirección y', éste puede obtenerse simplemente al sustituir ($\theta = \theta + 90°$) para θ en la ecuación 9-1, figura 9-6*d*. De aquí se obtiene

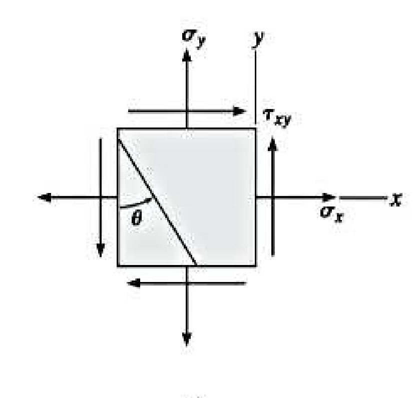
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\operatorname{sen}2\theta \qquad (9\text{-}3)$$

Si $\sigma_{y'}$ se calcula como una cantidad positiva, esto indica que actúa en la dirección y' positiva que se muestra en la figura 9-6*d*.

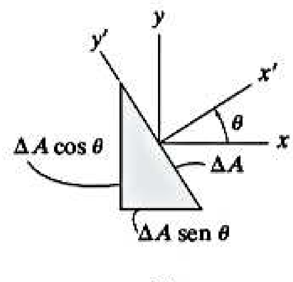
Procedimiento de análisis

Para aplicar las ecuaciones de transformación de esfuerzo 9-1 y 9-2, sólo es necesario sustituir los datos conocidos para σ_x, σ_y, τ_{xy} y θ de acuerdo con la convención de signos establecida, figura 9-5. Si $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ se calculan como cantidades positivas, entonces estos esfuerzos actúan en la dirección positiva de los ejes x' y y'.

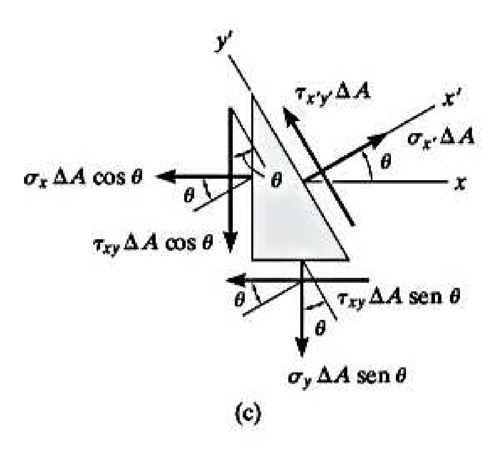
Por conveniencia, estas ecuaciones se pueden programar fácilmente en una calculadora de bolsillo.



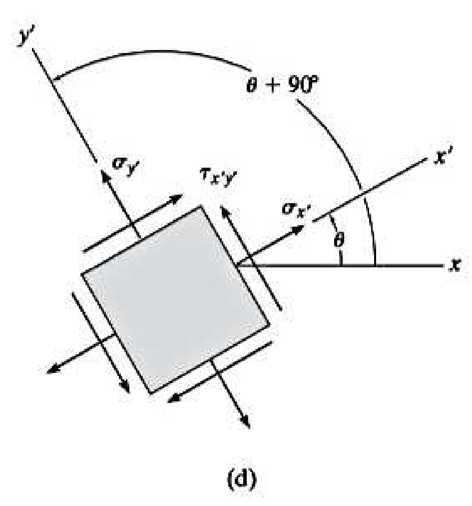
(a)



(b)



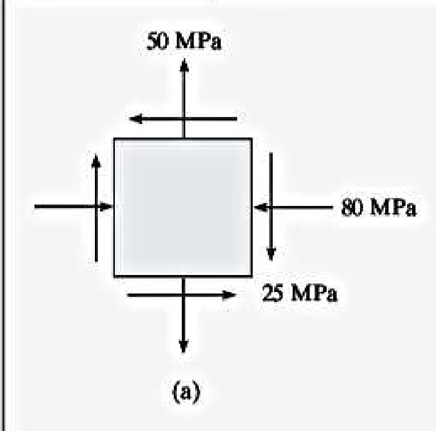
(c)



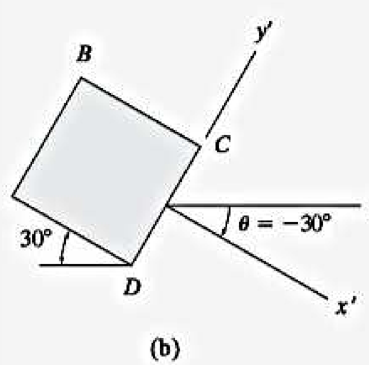
(d)

Figura 9-6

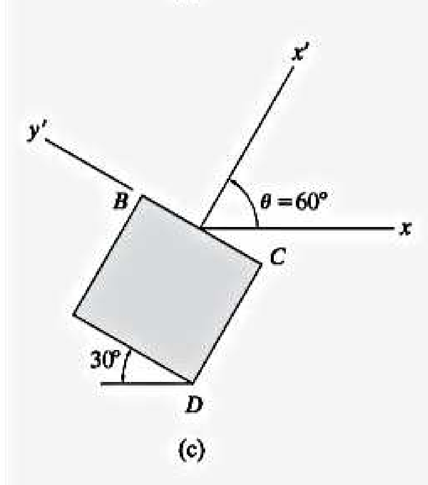
EJEMPLO 9.2



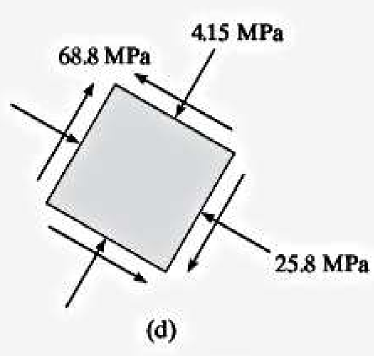
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 9-7

El estado de esfuerzo plano en un punto está representado por el elemento que se muestra en la figura 9-7*a*. Determine el estado de esfuerzo en el punto sobre otro elemento orientado a 30° en sentido horario desde la posición indicada.

SOLUCIÓN

Este problema se resolvió en el ejemplo 9.1 mediante principios básicos. Aquí se aplicarán las ecuaciones 9-1 y 9-2. A partir de la convención de signos establecida, figura 9-5, se observa que

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}$$

Plano *CD*. Para obtener las componentes de esfuerzo en el plano *CD*, figura 9-7*b*, el eje positivo x' se dirige hacia fuera, perpendicular a *CD*, y el eje y' asociado se dirige a lo largo de *CD*. El ángulo medido desde el eje x hasta el eje x' es $\theta = -30°$ (sentido horario). Al aplicar las ecuaciones 9-1 y 9-2 se obtiene

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2}\cos 2(-30°) + (-25)\,\text{sen}\,2(-30°)$$

$$= -25.8 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\frac{-80 - 50}{2}\,\text{sen}\,2(-30°) + (-25)\cos 2(-30°)$$

$$= -68.8 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Los signos negativos indican que $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ actúan en las direcciones negativas x' y y', respectivamente. En la figura 9-7*d* se muestran los resultados actuando sobre el elemento.

Plano *BC*. De manera similar, las componentes de esfuerzo que actúan sobre la cara *BC*, figura 9-7*c*, se obtienen usando $\theta = 60°$. Al aplicar las ecuaciones 9-1 y 9-2,* se obtiene

$$\sigma_{x'} = \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2}\cos 2(60°) + (-25)\,\text{sen}\,2(60°)$$

$$= -4.15 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80 - 50}{2}\,\text{sen}\,2(60°) + (-25)\cos 2(60°)$$

$$= 68.8 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Aquí $\tau_{x'y'}$ se calculó en dos ocasiones a fin de realizar una verificación. El signo negativo para $\sigma_{x'}$ indica que este esfuerzo actúa en la dirección negativa x', figura 9-7*c*. En la figura 9-7*d* se muestran los resultados sobre el elemento.

*Como alternativa, es posible aplicar la ecuación 9-3 con $\theta = -30°$ en vez de la ecuación 9-1.

9

9.3 Esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo en el plano

A partir de las ecuaciones 9-1 y 9-2, se observa que las magnitudes de $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ dependen del ángulo de inclinación θ de los planos sobre los que actúan estos esfuerzos. En la práctica de la ingeniería suele ser importante determinar la orientación del elemento que hace que el esfuerzo normal sea máximo y mínimo, y la orientación que causa que el esfuerzo cortante sea máximo. En esta sección se considerará cada uno de estos problemas.

Esfuerzos principales en el plano. Para determinar el *esfuerzo normal* máximo y mínimo, es necesario diferenciar la ecuación 9.1 con respecto a θ e igualar el resultado a cero. De lo anterior se obtiene

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2\,\text{sen}\,2\theta) + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Al resolver esta ecuación resulta la orientación $\theta = \theta_p$ de los planos donde ocurre el esfuerzo normal máximo y mínimo.

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \qquad (9\text{-}4)$$

La solución tiene dos raíces, θ_{p1} y θ_{p2}. En específico, los valores de $2\theta_{p1}$ y $2\theta_{p2}$ están separados a 180°, por lo que θ_{p1} y θ_{p2} estarán separados a 90°.

Si se deben obtener los esfuerzos normales requeridos, es necesario sustituir los valores de θ_{p1} y θ_{p2} en la ecuación 9-1. Para ello, es posible obtener el seno y el coseno necesarios de $2\theta_{p1}$ y $2\theta_{p2}$ en los triángulos en gris de la figura 9-8. La construcción de estos triángulos se basa en la ecuación 9-4, suponiendo que τ_{xy} y $(\sigma_x - \sigma_y)$ son ambas cantidades positivas o negativas.

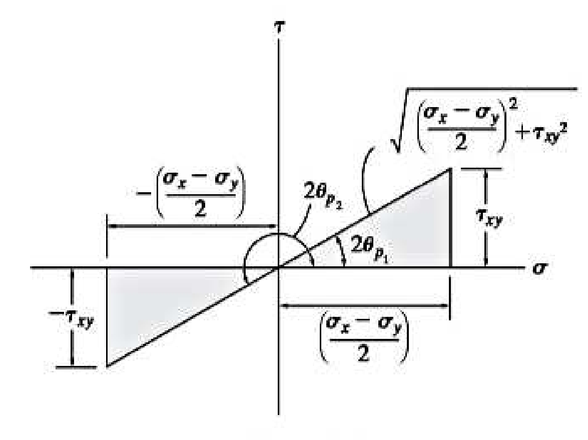


Figura 9-8



Las grietas en esta viga de concreto fueron causadas por el esfuerzo a tensión, a pesar de que la viga estuvo sometida tanto a un momento como a una fuerza cortante internos. Las ecuaciones de transformación de esfuerzo pueden utilizarse para predecir la dirección de las grietas, y los esfuerzos normales principales que las causaron.

Al sustituir estos valores en la ecuación trigonométrica 9-1 para después simplificarla, se obtiene

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9\text{-}5)$$

Dependiendo del signo elegido, este resultado proporciona el esfuerzo normal máximo o mínimo que actúa en un punto del plano, cuando $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Este conjunto particular de valores se denomina ***esfuerzos principales*** en el plano, y los planos correspondientes sobre los que actúan se llaman ***planos principales*** de esfuerzo, figura 9-9. Por otra parte, si las relaciones trigonométricas para θ_{p_1} o θ_{p_2} se sustituyen en la ecuación 9-2, puede verse que $\tau_{x'y'} = 0$; en otras palabras, ***ningún esfuerzo cortante actúa sobre los planos principales.***

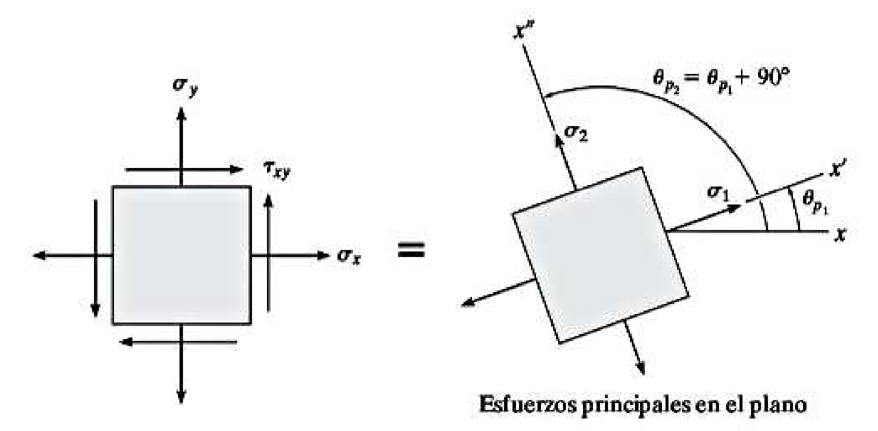


Figura 9-9

Esfuerzo cortante máximo en el plano. La orientación de un elemento que está sometido al esfuerzo cortante máximo sobre sus lados puede determinarse al obtener la derivada de la ecuación 9.2 con respecto a θ y al igualar el resultado a cero. De aquí resulta

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \qquad (9\text{-}6)$$

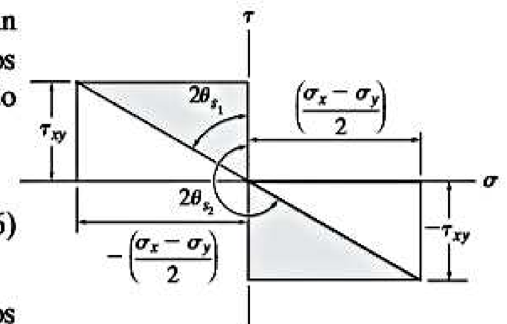


Figura 9-10

Las dos raíces de esta ecuación, θ_{s_1} y θ_{s_2}, pueden determinarse a partir de los triángulos en gris que se muestran en la figura 9-10. En comparación con la ecuación 9-4, tan $2\theta_s$ es el recíproco negativo de tan $2\theta_p$ y por ende cada raíz $2\theta_s$ está a 90° de $2\theta_p$, y las raíces θ_s y θ_p están separadas por 45°. Por lo tanto, un elemento sometido al ***esfuerzo cortante máximo estará a 45° de la posición de un elemento que está sometido al esfuerzo principal.***

Si se usa cualquiera de las raíces θ_{s_1} o θ_{s_2}, el esfuerzo cortante máximo puede encontrarse tomando los valores trigonométricos de sen $2\theta_s$ y cos $2\theta_s$ de la figura 9-10 y sustituyéndolos en la ecuación 9-2. El resultado es

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9\text{-}7)$$

El valor de $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}}$ calculado a partir de esta ecuación se conoce como el ***esfuerzo cortante máximo en el plano***, ya que actúa sobre el elemento en el plano *x-y*.

Al sustituir los valores para sen $2\theta_s$ y cos $2\theta_s$, en la ecuación 9-1, se observa que *también* hay un esfuerzo normal promedio sobre los planos de esfuerzo cortante máximo en el plano. Se obtiene

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad (9\text{-}8)$$

Al igual que las ecuaciones de transformación de esfuerzo, puede ser conveniente programar las ecuaciones 9-4 a 9-8 para ser usadas en una calculadora de bolsillo.

Puntos importantes

- Los *esfuerzos principales* representan el esfuerzo normal máximo y mínimo en el punto.
- Cuando el estado de esfuerzo se representa mediante los esfuerzos principales, *ningún esfuerzo cortante* actuará sobre el elemento.
- El estado de esfuerzo en el punto también se puede representar en términos del *esfuerzo cortante máximo en el plano*. En este caso, sobre el elemento también actúa un *esfuerzo normal promedio*.
- El elemento que representa el esfuerzo cortante máximo en el plano con los esfuerzos normales promedio asociados está *orientado* a 45° del elemento que representa los esfuerzos principales.

EJEMPLO 9.3



Observe cómo el plano de falla forma un ángulo (23.7°) debido al desgarramiento del material, figura 9-11c.

El estado de esfuerzo plano en un punto de falla sobre el eje se muestra sobre el elemento de la figura 9-11*a*. Represente este estado de esfuerzo en términos de los esfuerzos principales.

SOLUCIÓN

A partir de la convención de signos establecida, se tiene

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Orientación del elemento. Al aplicar la ecuación 9-4,

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{60}{(-20 - 90)/2}$$

Al resolver y denominar a esta raíz θ_{p_2}, como se mostrará a continuación, resulta

$$2\theta_{p_2} = -47.49^\circ \qquad \theta_{p_2} = -23.7^\circ$$

Como la diferencia entre $2\theta_{p_1}$ y $2\theta_{p_2}$ es de 180°, se tiene

$$2\theta_{p_1} = 180^\circ + 2\theta_{p_2} = 132.51^\circ \qquad \theta_{p_1} = 66.3^\circ$$

Recuerde que θ se mide *en sentido antihorario* positivo desde el eje x hasta la normal hacia afuera (eje x') sobre la cara del elemento, de modo que los resultados son los que se muestran en la figura 9-11*b*.

Esfuerzos principales. Se tiene

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-20 + 90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2}$$

$$= 35.0 \pm 81.4$$

$$\sigma_1 = 116 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_2 = -46.4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

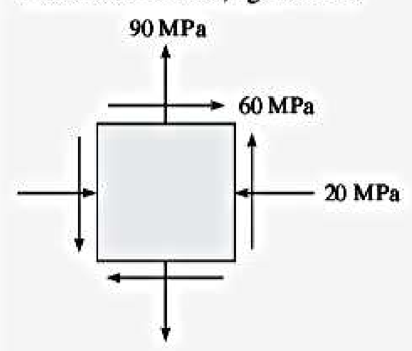
El plano principal sobre el que actúa cada esfuerzo normal puede determinarse al aplicar la ecuación 9-1 con, digamos, $\theta = \theta_{p_2} = -23.7^\circ$. Se tiene

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta$$

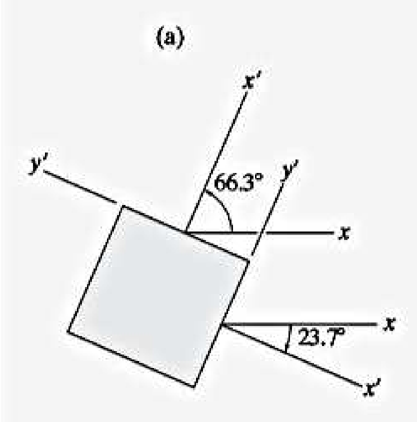
$$= \frac{-20 + 90}{2} + \frac{-20 - 90}{2}\cos 2(-23.7^\circ) + 60 \,\text{sen}\, 2(-23.7^\circ)$$

$$= -46.4 \text{ MPa}$$

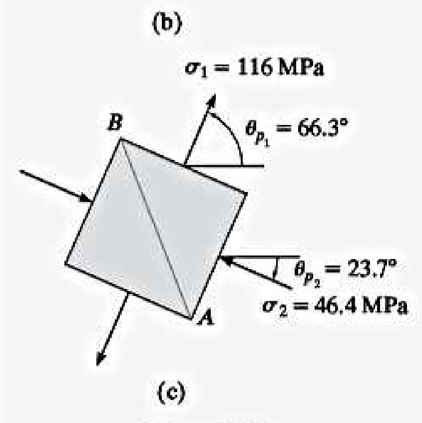
Por lo tanto, $\sigma_2 = -46.4$ MPa actúa sobre el plano definido por $\theta_{p_2} = -23.7^\circ$, mientras que $\sigma_1 = 116$ MPa actúa sobre el plano definido por $\theta_{p_1} = 66.3^\circ$. Los resultados se muestran sobre el elemento de la figura 9-11*c*. Recuerde que sobre este elemento no actúa ningún esfuerzo cortante.



(a)



(b)



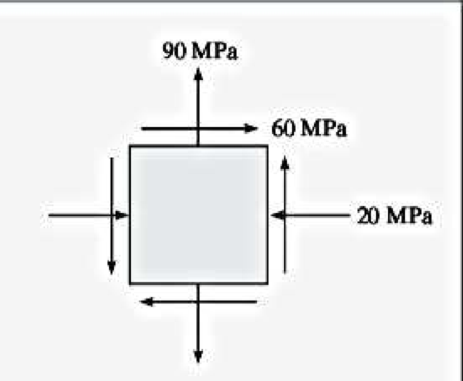
(c)

Figura 9-11

9

EJEMPLO 9.4

El estado de esfuerzo plano en un punto sobre un cuerpo está representado sobre el elemento que se muestra en la figura 9-12*a*. Represente este estado de esfuerzo en términos del esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal promedio asociado.



(a)

SOLUCIÓN

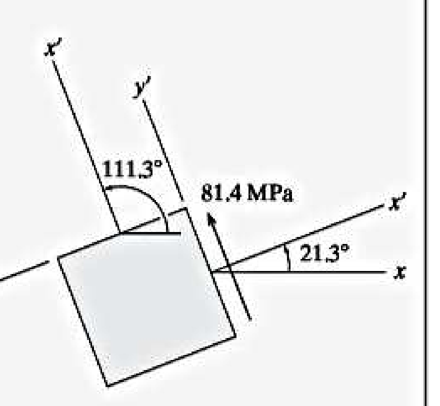
Orientación del elemento. Como $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 90$ MPa y $\tau_{xy} = 60$ MPa, al aplicar la ecuación 9-6, se tiene

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(-20 - 90)/2}{60}$$

$$2\theta_{s_2} = 42.5^\circ \qquad \theta_{s_2} = 21.3^\circ$$

$$2\theta_{s_1} = 180^\circ + 2\theta_{s_2} \qquad \theta_{s_1} = 111.3^\circ$$

Observe que estos ángulos mostrados en la figura 9-12*b* están a 45° de los planos principales de esfuerzo, los cuales se determinaron en el ejemplo 9.3.



(b)

Esfuerzo cortante máximo en el plano. Al aplicar la ecuación 9-7,

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2}$$

$$= \pm 81.4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

La dirección adecuada de $\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}}$ sobre el elemento puede determinarse mediante la sustitución de $\theta = \theta_{s_2} = 21.3^\circ$ en la ecuación 9-2. Se tiene

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen } 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)\text{sen } 2(21.3^\circ) + 60 \cos 2(21.3^\circ)$$

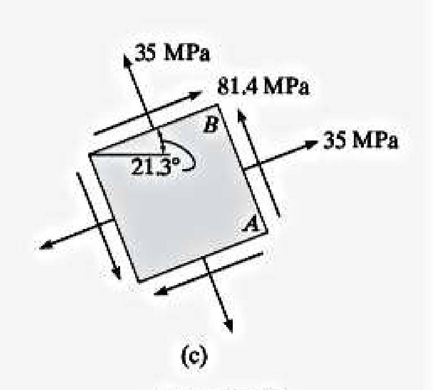
$$= 81.4 \text{ MPa}$$

Este resultado positivo indica que $\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = \tau_{x'y'}$ actúa en la dirección *positiva* y' sobre esta cara ($\theta = 21.3^\circ$) figura 9-12*b*. Los esfuerzos cortantes sobre las otras tres caras están dirigidos como se muestra en la figura 9-12*c*.

Esfuerzo normal promedio. Además del esfuerzo cortante máximo que se calculó anteriormente, el elemento también está sometido a un esfuerzo normal promedio determinado a partir de la ecuación 9-8; es decir,

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

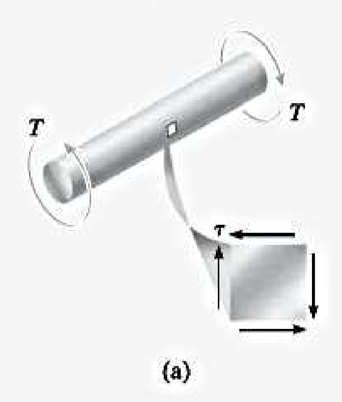
Este es un esfuerzo de tensión. Los resultados se muestran en la figura 9-12*c*.



(c)

Figura 9-12

EJEMPLO 9.5



(a)

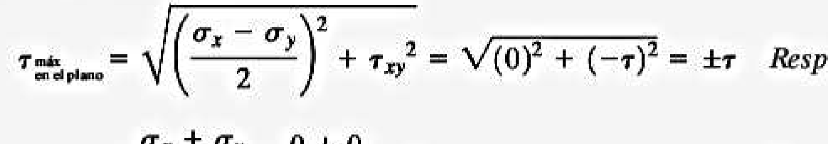
Cuando se aplica la carga de torsión T a la barra mostrada en la figura 9-13a, ésta produce un estado de esfuerzo cortante puro en el material. Determine (a) el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal promedio asociado, así como (b) los esfuerzos principales.

SOLUCIÓN

A partir de la convención de signos establecida,

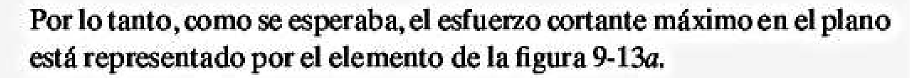
$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -\tau$$

Esfuerzo cortante máximo en el plano. Al aplicar las ecuaciones 9-7 y 9-8, se tiene



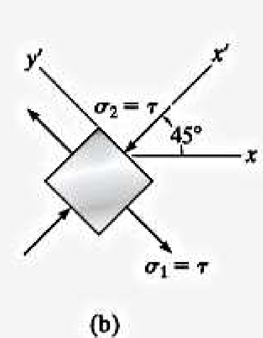
$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\tau)^2} = \pm\tau \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$



Por lo tanto, como se esperaba, el esfuerzo cortante máximo en el plano está representado por el elemento de la figura 9-13a.

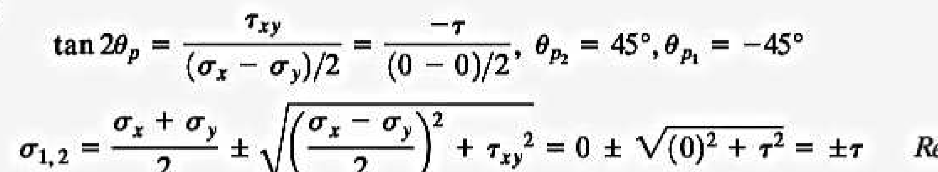
NOTA: Mediante experimentación se ha comprobado que los materiales *dúctiles fallan* debido al *esfuerzo cortante*. En consecuencia, si la barra de la figura 9-13a es de acero de bajo carbono, el esfuerzo cortante máximo en el plano la haría fallar como se muestra en la foto adyacente.



(b)

Figura 9-13

Esfuerzos principales. Al aplicar las ecuaciones 9-4 y 9-5 se obtiene



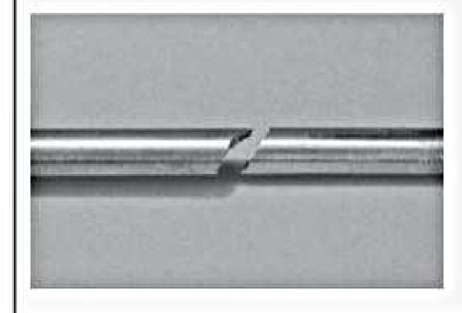
$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{-\tau}{(0 - 0)/2}, \ \theta_{p_2} = 45^\circ, \theta_{p_1} = -45^\circ$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{(0)^2 + \tau^2} = \pm\tau \qquad \textit{Resp.}$$

Si ahora se aplica la ecuación 9-1 con $\theta_{p_2} = 45^\circ$, entonces,

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta$$
$$= 0 + 0 + (-\tau)\,\text{sen}\, 90^\circ = -\tau$$

Así, $\sigma_2 = -\tau$ actúa en $\theta_{p_2} = 45^\circ$ como se muestra en la figura 9-13b y $\sigma_1 = \tau$ actúa sobre la otra cara, $\theta_{p_1} = -45^\circ$.

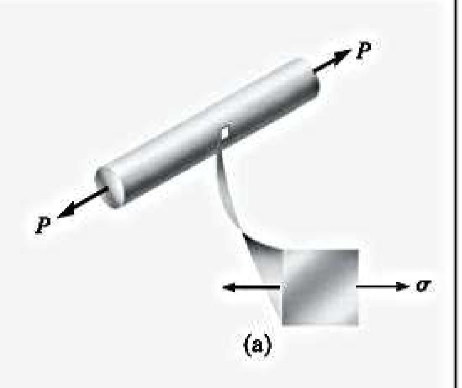


NOTA: Los materiales que son *frágiles* fallan debido al *esfuerzo normal*. Por lo tanto, si la barra de la figura 9-13a está hecha de hierro fundido, se producirá una falla por tensión con una inclinación de 45° como se ve en la foto adyacente.

9

EJEMPLO 9.6

Cuando se aplica la carga axial P a la barra de la figura 9-14*a*, se produce un esfuerzo de tensión en el material. Determine (a) los esfuerzos principales y (b) el esfuerzo cortante máximo en el plano, así como el esfuerzo normal promedio asociado.



(a)

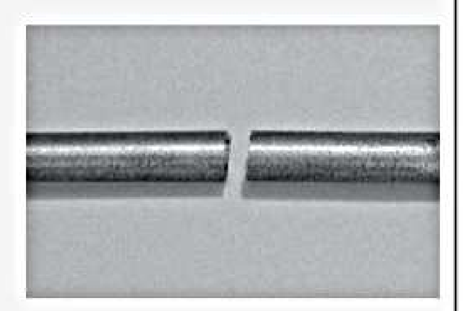
SOLUCIÓN

Con base en la convención de signos establecida,

$$\sigma_x = \sigma \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$

Esfuerzos principales. Por observación, el elemento orientado como se muestra en la figura 9-14*a* ilustra una condición de esfuerzo principal puesto que ningún esfuerzo cortante actúa sobre este elemento. Esto también se puede mostrar mediante la sustitución directa de los valores anteriores en las ecuaciones 9-4 y 9 5. Así,

$$\sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \textit{Resp.}$$



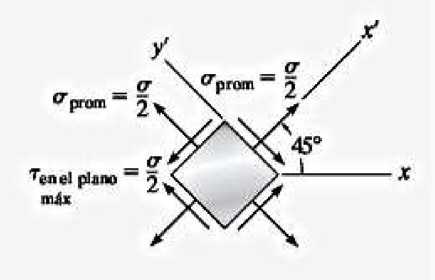
NOTA: Los experimentos han demostrado que los *materiales frágiles* fallan debido al esfuerzo normal. Por consiguiente, si la barra de la figura 9-14*a* está hecha de hierro fundido, se producirá una falla como la mostrada en la foto adyacente.

Esfuerzo cortante máximo en el plano. Al aplicar las ecuaciones 9-6, 9-7 y 9-8, se tiene

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(\sigma - 0)/2}{0}; \; \theta_{s_1} = 45^\circ, \theta_{s_2} = -45^\circ$$

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + (0)^2} = \pm\frac{\sigma}{2} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

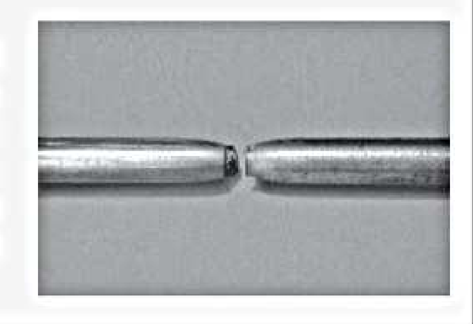
Figura 9-14

Para determinar la orientación adecuada del elemento, se aplica la ecuación 9-2.

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -\frac{\sigma - 0}{2}\operatorname{sen} 90^\circ + 0 = -\frac{\sigma}{2}$$

Este esfuerzo cortante negativo actúa sobre la cara x', en la dirección negativa y' como se muestra en la figura 9-14*b*.

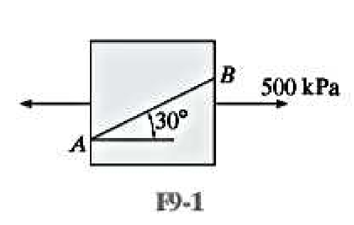
NOTA: Si la barra de la figura 9-14*a* está hecha de un *material dúctil* como el acero de bajo carbono, el *esfuerzo cortante* le ocasionará una falla. Esto puede observarse en la foto adyacente; aquí, dentro de la región de estricción, el esfuerzo cortante ha ocasionado un "deslizamiento" a lo largo de las fronteras cristalinas del acero, lo que resulta en un plano de falla que ha formado un *cono* alrededor de la barra orientado a unos 45°, tal como se calculó anteriormente.



9

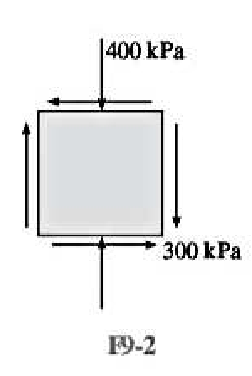
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F9-1. Determine el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante que actúan sobre el plano inclinado AB. Grafique el resultado sobre el elemento seccionado.



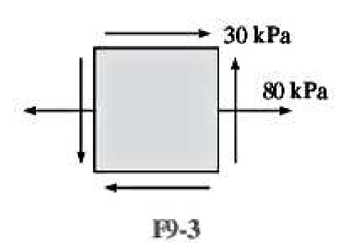
F9-1

F9-2. Determine el estado de esfuerzo equivalente sobre un elemento en el mismo punto orientado a 45° en sentido horario con respecto al elemento mostrado en la figura.



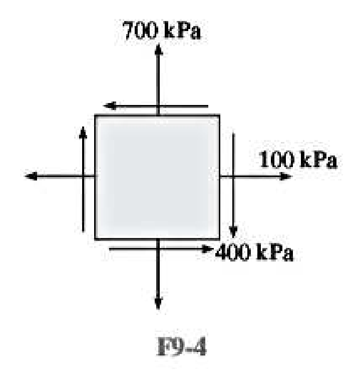
F9-2

F9-3. Determine el estado de esfuerzo equivalente sobre un elemento en el mismo punto que representa los esfuerzos principales en el punto. Además, encuentre la orientación correspondiente del elemento con respecto al elemento mostrado en la figura.



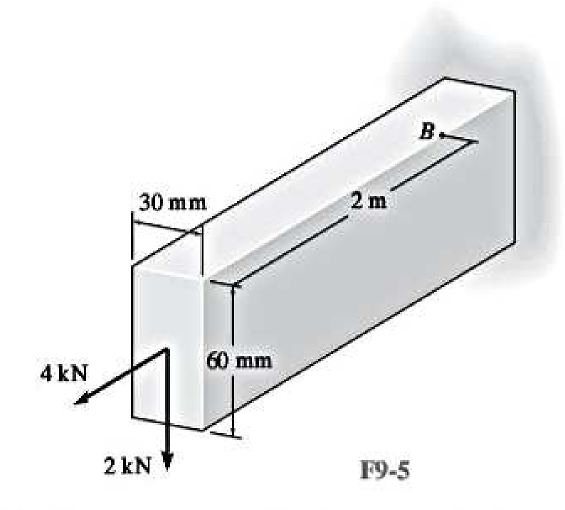
F9-3

F9-4. Determine el estado de esfuerzo equivalente sobre un elemento en el mismo punto que representa el esfuerzo cortante máximo en el plano en ese punto.



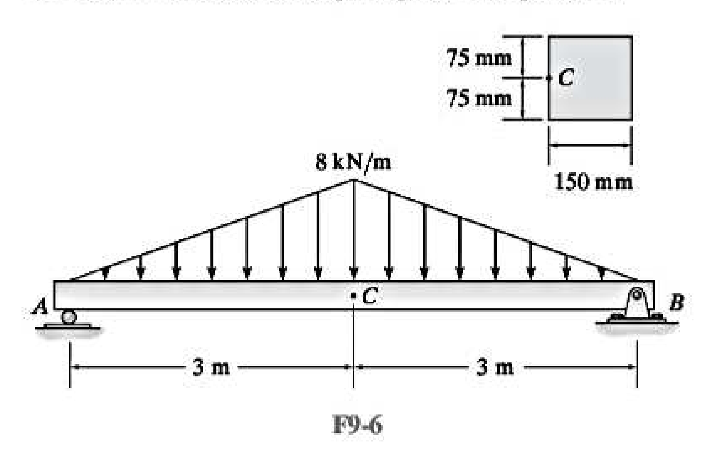
F9-4

F9-5. La viga está sometida a la carga mostrada en uno de sus extremos. Determine los esfuerzos principales máximos en el punto B.



F9-5

F9-6. La viga está sometida a la carga mostrada en la figura. Determine los esfuerzos principales en el punto C.



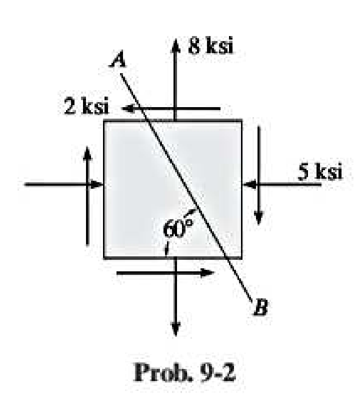
F9-6

9

PROBLEMAS

9-1. Demuestre que la suma de los esfuerzos normales $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}$ es constante. Vea las figuras 9-2*a* y 9-2*b*.

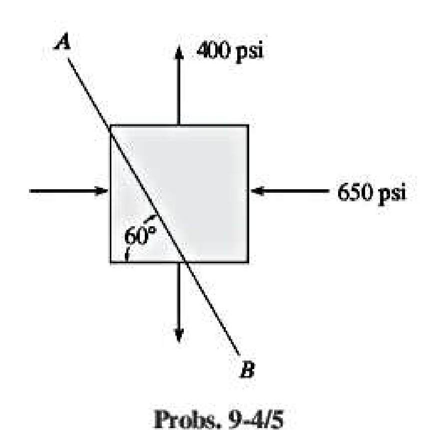
9-2. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine las componentes de esfuerzo que actúan sobre el plano inclinado *AB*. Resuelva el problema usando el método de equilibrio descrito en la sección 9.1.



Prob. 9-2

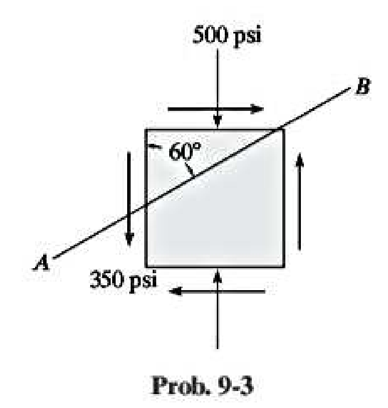
•9-4. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine las componentes de esfuerzo que actúan sobre el plano inclinado *AB*. Resuelva el problema usando el método de equilibrio descrito en la sección 9.1.

•9-5. Resuelva el problema 9-4 usando las ecuaciones para la transformación de esfuerzos desarrolladas en la sección 9.2.



Probs. 9-4/5

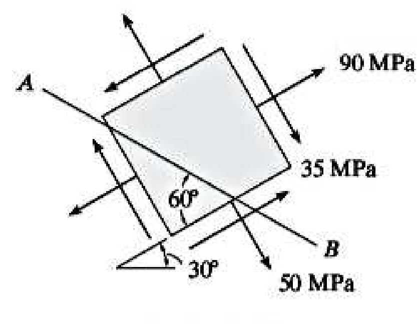
9-3. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine las componentes de esfuerzo que actúan sobre el plano inclinado *AB*. Resuelva el problema usando el método de equilibrio descrito en la sección 9.1.



Prob. 9-3

9-6. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine las componentes de esfuerzo que actúan sobre el plano inclinado *AB*. Resuelva el problema usando el método de equilibrio descrito en la sección 9.1.

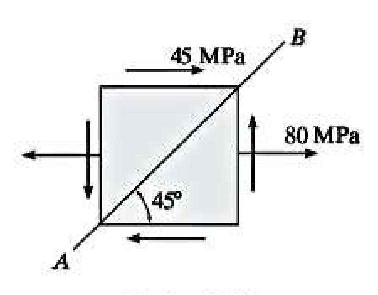
9-7. Resuelva el problema 9-6 usando las ecuaciones para la transformación de esfuerzos desarrolladas en la sección 9.2. Grafique el resultado.



Probs. 9-6/7

***9-8.** Determine el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante que actúan sobre el plano inclinado AB. Resuelva el problema usando el método de equilibrio descrito en la sección 9.1.

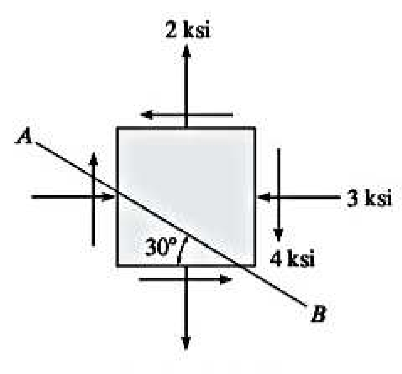
•9-9. Determine el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante que actúan sobre el plano inclinado AB. Resuelva el problema usando las ecuaciones para la transformación de esfuerzos. Muestre el resultado sobre el elemento seccionado.



Probs. 9-8/9

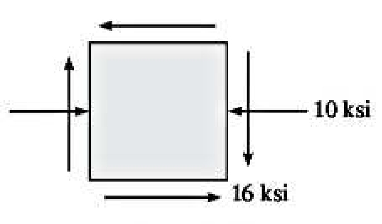
9-10. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine las componentes de esfuerzo que actúan sobre el plano inclinado AB. Resuelva el problema usando el método de equilibrio descrito en la sección 9.1.

9-11. Resuelva el problema 9-10 usando las ecuaciones para la transformación de esfuerzos desarrolladas en la sección 9.2. Grafique el resultado.



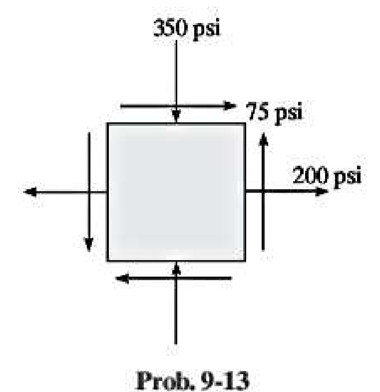
Probs. 9-10/11

***9-12.** Determine el estado de esfuerzo equivalente sobre un elemento si éste se encuentra orientado a 50° en sentido antihorario desde el elemento mostrado. Use las ecuaciones para la transformación de esfuerzos.



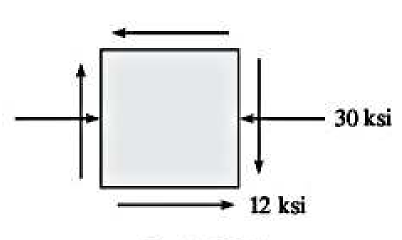
Prob. 9-12

•9-13. Determine el estado de esfuerzo equivalente en un elemento si éste se encuentra orientado a 60° en sentido horario desde el elemento indicado en la figura. Grafique el resultado.



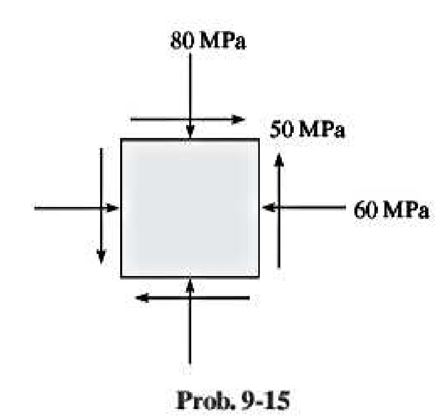
Prob. 9-13

9-14. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine (a) los esfuerzos principales y (b) el esfuerzo cortante máximo en el plano, así como el esfuerzo normal promedio en el punto. Especifique la orientación del elemento en cada caso. Muestre los resultados sobre cada elemento.



Prob. 9-14

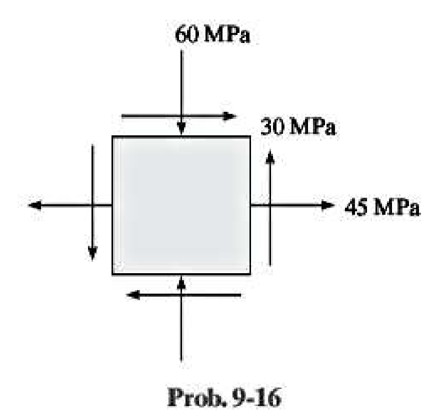
9-15. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine (a) los esfuerzos principales y (b) el esfuerzo cortante máximo en el plano, así como el esfuerzo normal promedio en el punto. Especifique la orientación del elemento en cada caso. Muestre los resultados sobre cada elemento.



Prob. 9-15

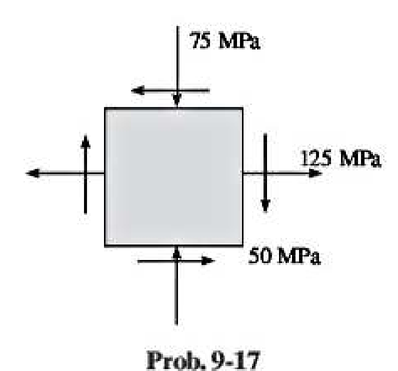
9

•9-16. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine (a) los esfuerzos principales y (b) el esfuerzo cortante máximo en el plano, así como el esfuerzo normal promedio en el punto. Especifique la orientación del elemento en cada caso. Muestre los resultados sobre cada elemento.



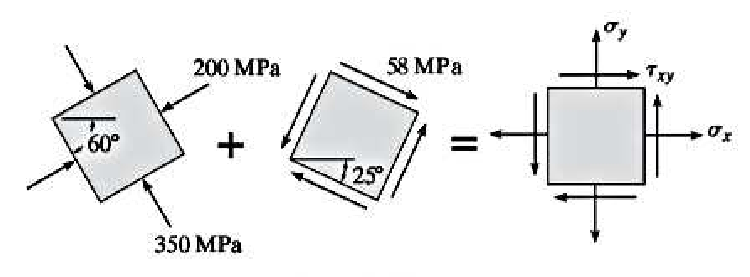
Prob. 9-16

•9-17. Determine el estado de esfuerzo equivalente sobre un elemento en el mismo punto que representa (a) los esfuerzos principales y (b) el esfuerzo cortante máximo en el plano, así como el esfuerzo normal promedio asociado. Además, para cada caso, determine la orientación correspondiente del elemento con respecto al elemento mostrado. Grafique los resultados sobre cada elemento.



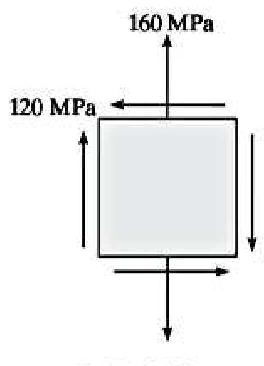
Prob. 9-17

9-18. Un punto sobre una placa delgada se somete a los dos estados sucesivos de esfuerzo que se muestran en la figura. Determine el estado resultante de esfuerzo representado sobre el elemento que se orienta en la forma indicada a la derecha.



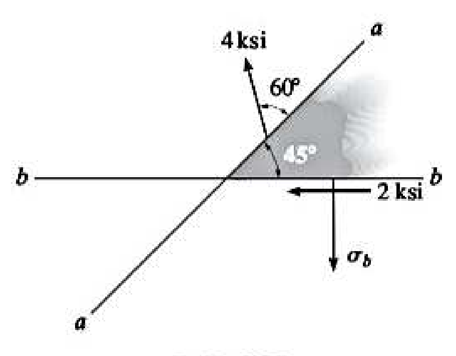
Prob. 9-18

9-19. En la figura, el estado de esfuerzo en un punto se muestra sobre el elemento. Determine (a) los esfuerzos principales y (b) el esfuerzo cortante máximo en el plano, así como el esfuerzo normal promedio en el punto. Especifique la orientación del elemento en cada caso. Grafique los resultados sobre cada elemento.



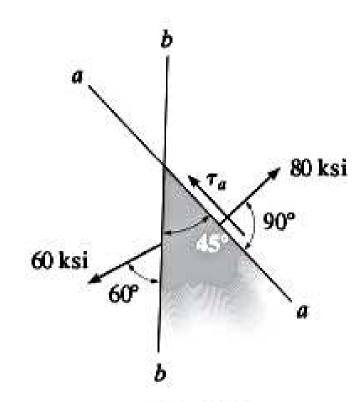
Prob. 9-19

•9-20. En la figura se indica el esfuerzo que actúa sobre dos planos en un punto. Determine el esfuerzo normal σ_b y los esfuerzos principales en el punto.



Prob. 9-20

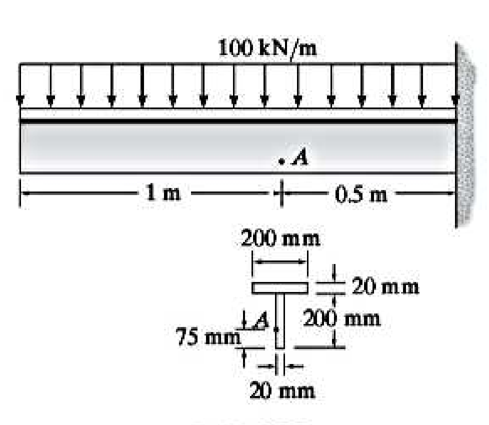
•9-21. En la figura se indica el esfuerzo que actúa sobre dos planos en un punto. Determine el esfuerzo cortante sobre el plano *a-a* y los esfuerzos principales en el punto.



Prob. 9-21

Los problemas siguientes involucran al material cubierto en el capítulo 8.

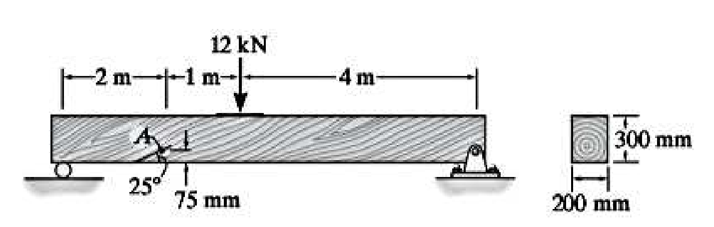
9-22. La viga T está sometida a una carga distribuida que se aplica a lo largo de su línea central. Determine los esfuerzos principales en el punto A y muestre los resultados sobre un elemento situado en ese punto.



Prob. 9-22

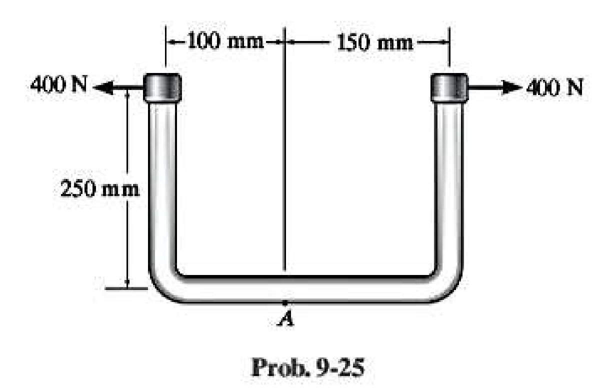
•**9-23.** La viga de madera está sometida a una carga de 12 kN. Si la fibra de madera en la viga ubicada en el punto A forma un ángulo de 25° con la horizontal como se muestra en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante debidos a la carga que actúan en forma perpendicular y paralela a la fibra.

***9-24.** La viga de madera está sometida a una carga de 12 kN. Determine los esfuerzos principales en el punto A y especifique la orientación del elemento.



Probs. 9-23/24

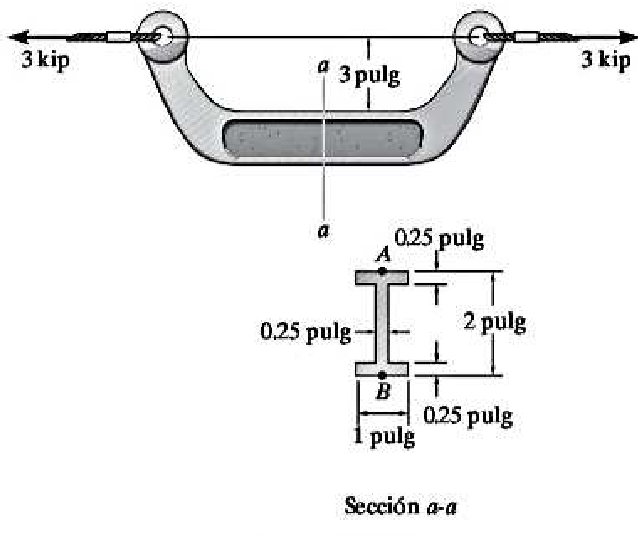
•**9-25.** La varilla doblada tiene un diámetro de 20 mm y está sometida a la fuerza de 400 N. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano que se desarrolla en el punto A. Muestre los resultados sobre un elemento ubicado en este punto, con la orientación adecuada.



Prob. 9-25

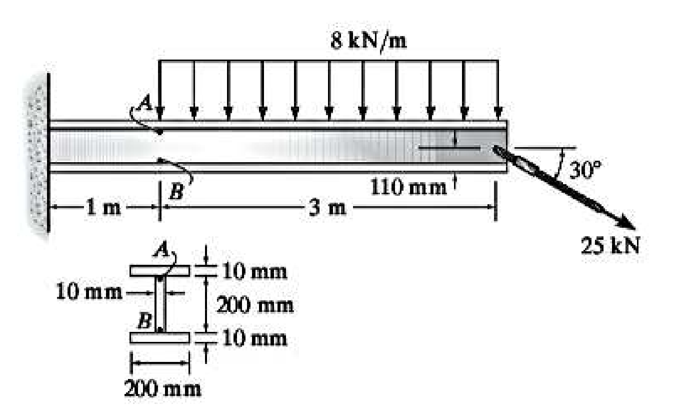
9-26. La ménsula está sometida a la fuerza de 3 kip. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano sobre el punto A del área transversal en la sección a-a. Especifique la orientación de este estado de esfuerzo y muestre los resultados sobre los elementos.

9-27. La ménsula está sometida a la fuerza de 3 kip. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano sobre el punto B del área transversal en la sección a-a. Especifique la orientación de este estado de esfuerzo y muestre los resultados sobre los elementos.



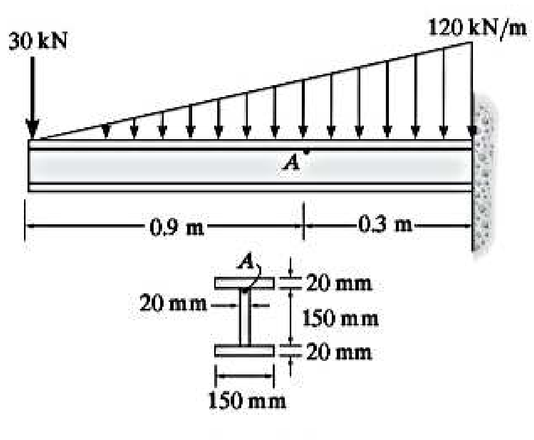
Probs. 9-26/27

*9-28. La viga I de ala ancha está sometida a la carga indicada en la figura. Determine los esfuerzos principales en la viga en los puntos A y B. Estos puntos se encuentran en la parte superior e inferior del alma, respectivamente. Aunque no sea muy exacto, use la fórmula del esfuerzo cortante para determinar éste.



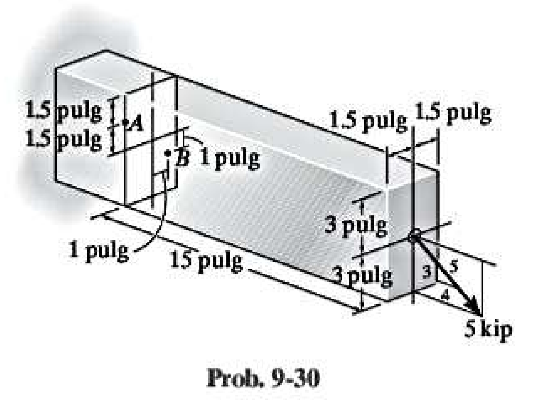
Prob. 9-28

•9-29. La viga I de ala ancha está sometida a la carga indicada en la figura. Determine los esfuerzos principales en la viga en el punto A, el cual se encuentra en la parte superior del alma. Aunque no sea muy exacto, use la fórmula del esfuerzo cortante para determinar éste. Muestre el resultado sobre un elemento situado en este punto.



Prob. 9-29

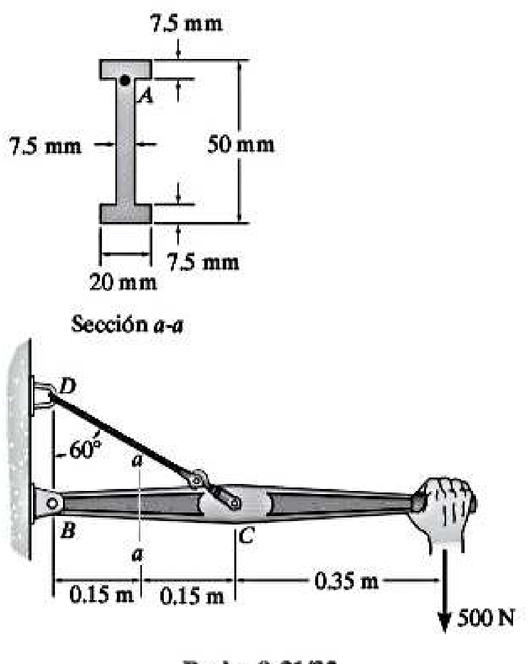
9-30. La barra rectangular en voladizo está sometida a la fuerza de 5 kip. Determine los esfuerzos principales en los puntos A y B.



Prob. 9-30

9-31. Determine los esfuerzos principales en el punto A sobre el área transversal del brazo en la sección a-a. Especifique la orientación de este estado de esfuerzo y muestre los resultados sobre un elemento ubicado en el punto.

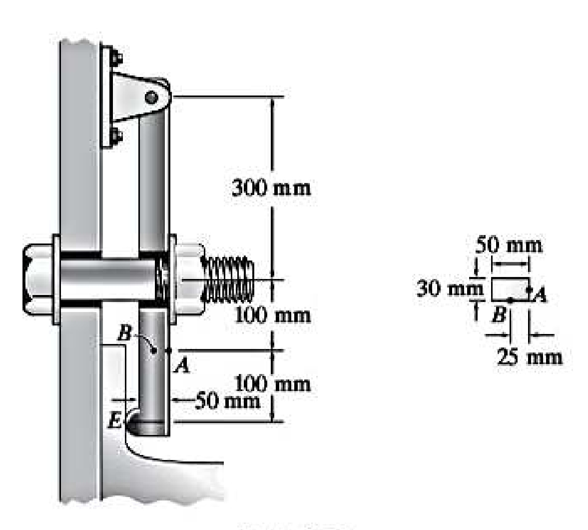
*9-32. Determine el esfuerzo cortante máximo en el plano desarrollado en el punto A sobre el área transversal del brazo en la sección a-a. Especifique la orientación de este estado de esfuerzo y muestre los resultados sobre un elemento ubicado en el punto.



Probs. 9-31/32

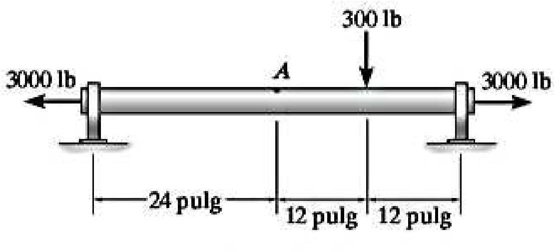
9

•9-33. La mordaza oprime la superficie lisa en E al apretar el tornillo. Si la fuerza de tensión en el tornillo es de 40 kN, determine los esfuerzos principales en los puntos A y B, y muestre los resultados sobre los elementos situados en cada uno de estos puntos. En la figura adyacente se muestra el área de la sección transversal en A y B.



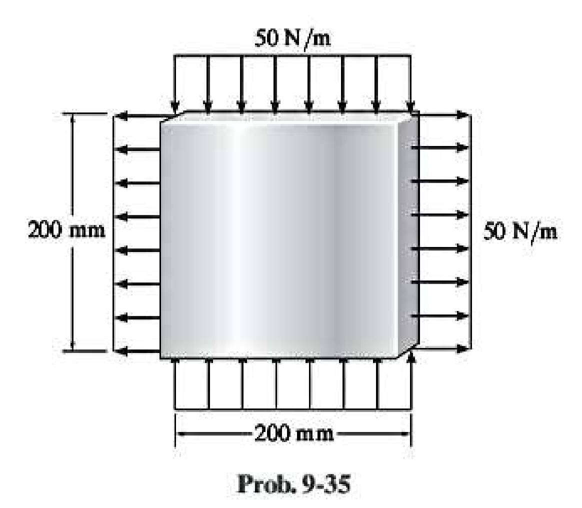
Prob. 9-33

9-34. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano que se desarrolla en el punto A ubicado en el eje que tiene 2 pulg de diámetro. Muestre los resultados sobre un elemento situado en ese punto. Los cojinetes soportan sólo reacciones verticales.



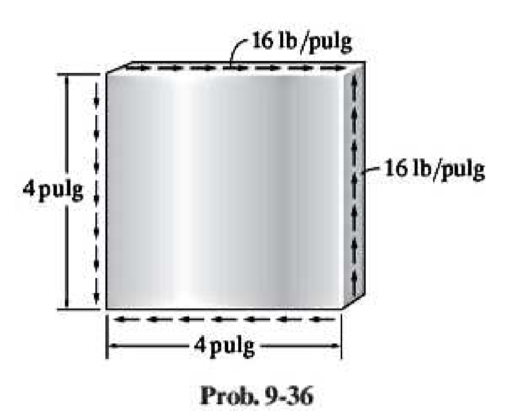
Prob. 9-34

9-35. La placa cuadrada de acero tiene un grosor de 10 mm y está sometida a la carga mostrada en el borde. Determine el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal desarrollado en el acero.



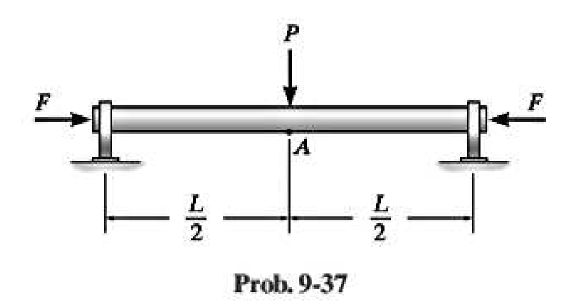
Prob. 9-35

*9-36. La placa cuadrada de acero tiene un grosor de 0.5 pulg y está sometida a las cargas mostradas en el borde. Determine los esfuerzos principales desarrollados en el acero.



Prob. 9-36

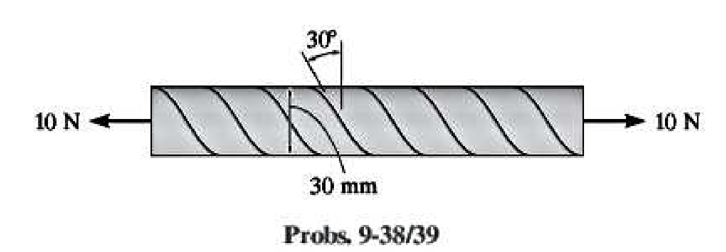
•9-37. El eje tiene un diámetro d y está sometido a las cargas mostradas en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano que se desarrolla en el punto A. Los cojinetes sólo soportan reacciones verticales.



Prob. 9-37

9-38. Un tubo de papel se forma al enrollar una tira de este material en forma de espiral para después pegar los bordes como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo cortante que actúa a lo largo de la pegadura, que forma un ángulo de 30° con la vertical, si el tubo está sometido a una fuerza axial de 10 N. El papel tiene 1 mm de grosor y el tubo tiene un diámetro exterior de 30 mm.

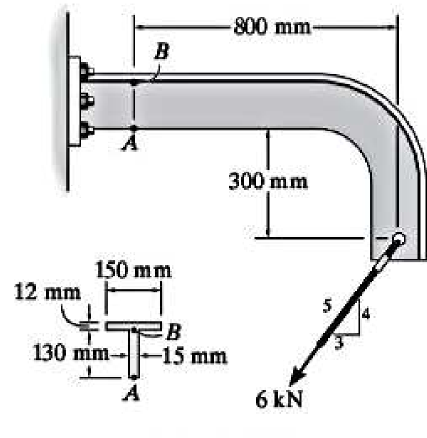
9-39. Resuelva el problema 9-38 para el esfuerzo normal que actúa perpendicularmente a la pegadura.



Probs. 9-38/39

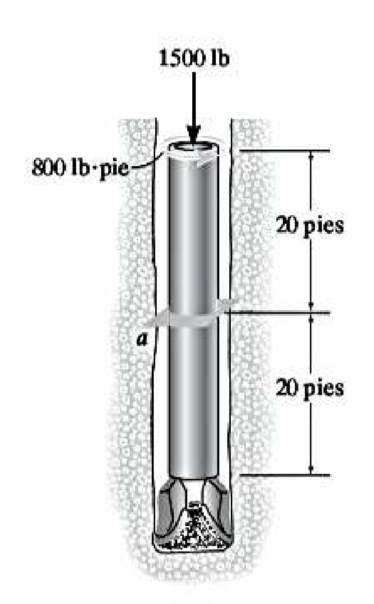
***9-40.** Determine los esfuerzos principales que actúan en el punto A del bastidor de apoyo. Muestre los resultados sobre un elemento ubicado en este punto, con la orientación adecuada.

•9-41. Determine los esfuerzos principales que actúan en el punto B, el cual se encuentra ubicado sobre el alma, bajo el segmento horizontal de la sección transversal. Muestre los resultados sobre un elemento ubicado en este punto, con la orientación adecuada. Aunque no sea muy exacto, use la fórmula del esfuerzo cortante para calcular éste.



Probs. 9-40/41

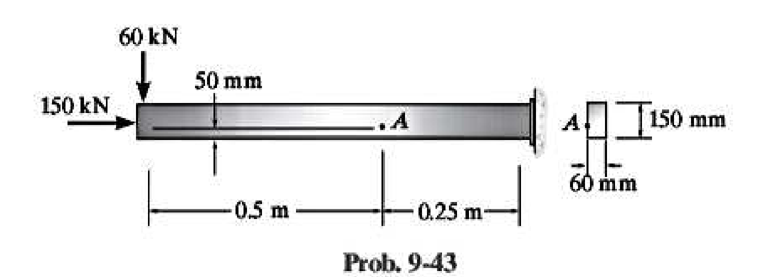
9-42. La tubería de perforación tiene un diámetro exterior de 3 pulg, un grosor de pared de 0.25 pulg y un peso de 50 lb/pie. Si se somete a un par de torsión y a una carga axial como los mostrados en la figura, determine (a) los esfuerzos principales y (b) el esfuerzo cortante máximo en el plano para un punto sobre su superficie en la sección a.



Prob. 9-42



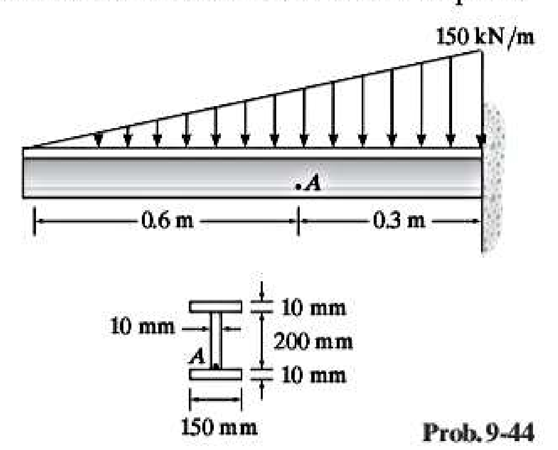
9-43. Determine los esfuerzos principales en la viga en el punto A.



Prob. 9-43

9

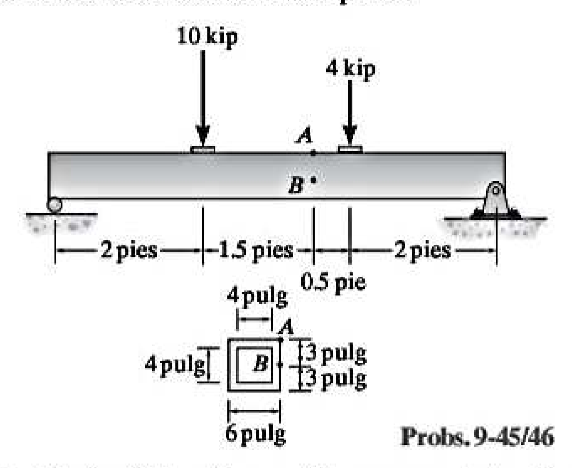
*9-44. Determine los esfuerzos principales en el punto A que se encuentra en la parte inferior del alma. Muestre los resultados sobre un elemento ubicado en este punto.



Prob. 9-44

•9-45. Determine el esfuerzo cortante máximo en el plano sobre el punto A de la viga de caja. Muestre los resultados sobre un elemento ubicado en este punto.

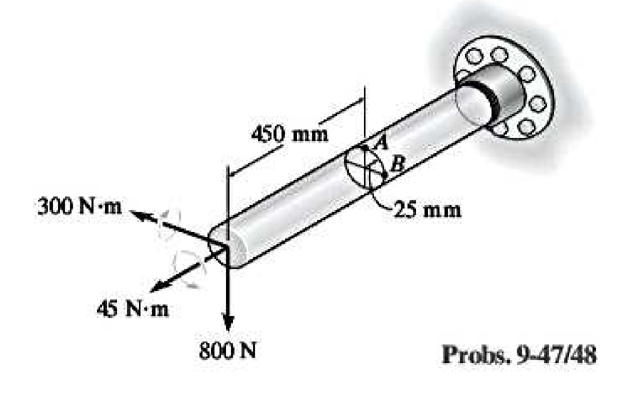
9-46. Determine los esfuerzos principales en el punto B de la viga de caja mostrada en la figura. Indique los resultados sobre un elemento situado en este punto.



Probs. 9-45/46

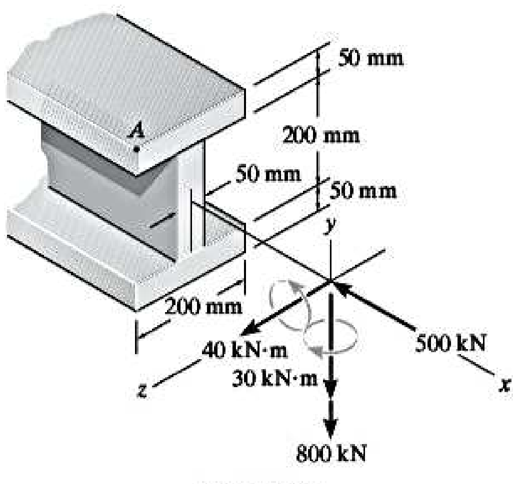
9-47. El eje sólido está sometido a un par de torsión, un momento flexionante y un esfuerzo cortante, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales que actúan en el punto A.

*9-48. Resuelva el problema 9-47 para el punto B.



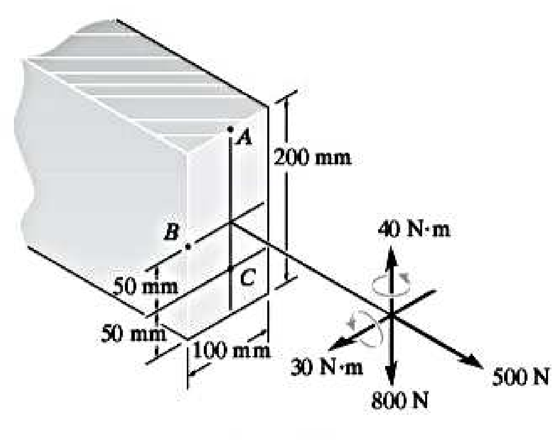
Probs. 9-47/48

•9-49. En la figura se muestran las cargas internas en una sección de la viga. Determine los esfuerzos principales en el punto A. Calcule también el esfuerzo cortante máximo en el plano para este punto.



Prob. 9-49

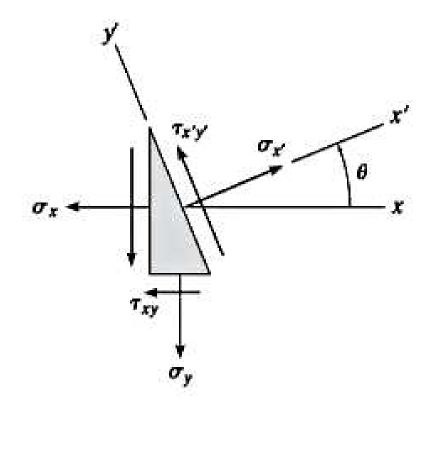
9-50. Las cargas internas en una sección de la viga consisten en una fuerza axial de 500 N, una fuerza cortante de 800 N y dos componentes de momento de 30 N·m y 40 N·m. Determine los esfuerzos principales en el punto A. También calcule el esfuerzo cortante máximo en el plano para este punto.



Prob. 9-50

9.4 Círculo de Mohr para el esfuerzo plano

En esta sección, se mostrará cómo aplicar las ecuaciones para la transformación de esfuerzo plano, utilizando una solución gráfica cuyo uso suele ser conveniente y fácil de recordar. Por otra parte, este método permitirá "visualizar" cómo varían las componentes de esfuerzo normal y cortante $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ de acuerdo con la orientación en diferentes direcciones del plano sobre el que actúan, figura 9-15*a*.



(a)

Figura 9-15

Si se escriben las ecuaciones 9-1 y 9-2 en la forma

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (9\text{-}9)$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (9\text{-}10)$$

el parámetro θ puede *eliminarse* al elevar al cuadrado cada ecuación y al sumar las ecuaciones. El resultado es

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Para un problema específico, σ_x, σ_y y τ_{xy} son *constantes conocidas*. Por consiguiente, la ecuación anterior puede escribirse en una forma más compacta como

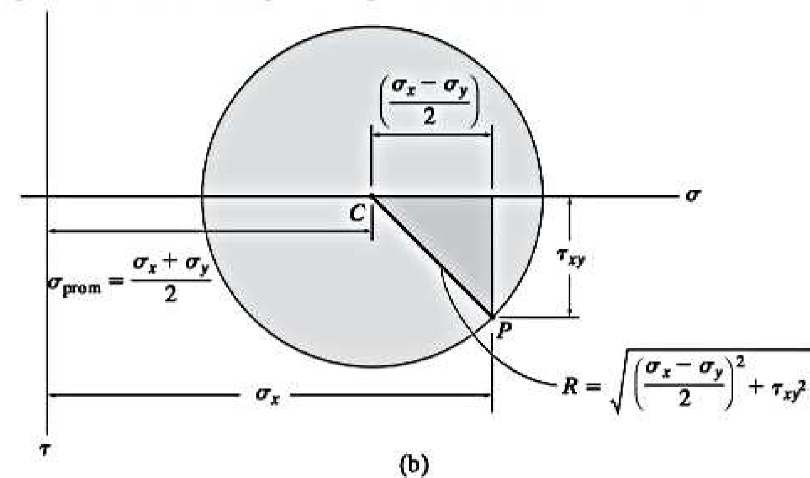
$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{prom}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \qquad (9\text{-}11)$$

donde

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9\text{-}12)$$

Si se establecen los ejes de coordenadas, *σ positivo a la derecha* y *τ positivo hacia abajo*, y después se grafica la ecuación 9-11, se verá que esta ecuación representa un *círculo* con radio R y centro sobre el eje σ en el punto C (σ_{prom}, 0), figura 9-15*b*. Este círculo se denomina *círculo de Mohr*, porque fue desarrollado por el ingeniero alemán Otto Mohr.



(b)

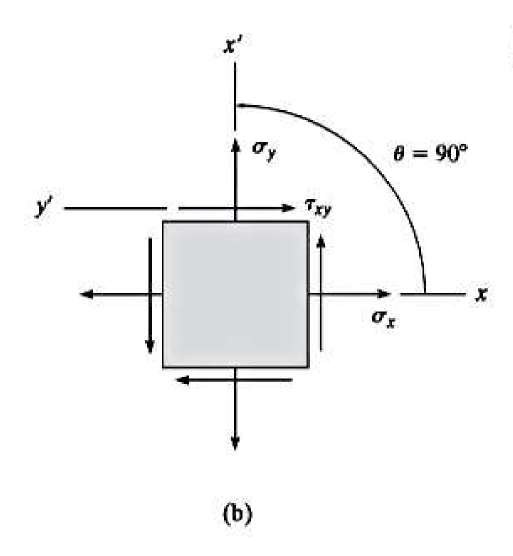
9

(a)

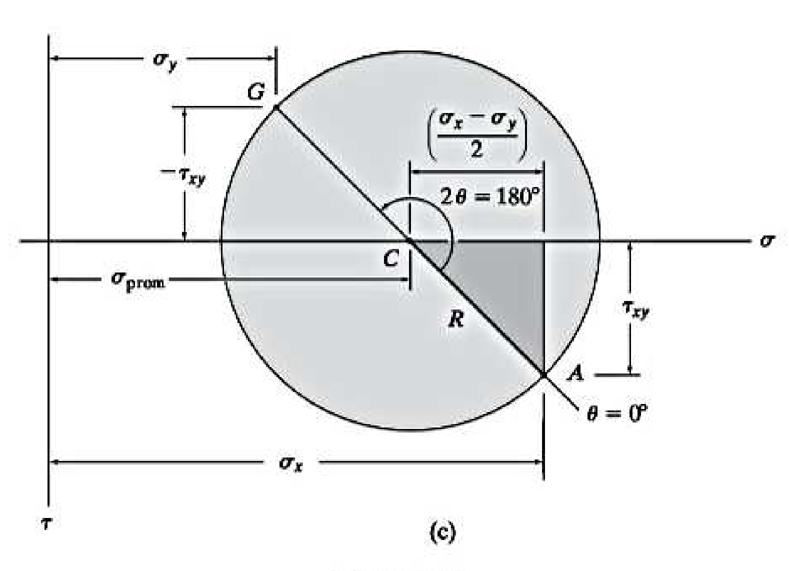
Cada punto en el círculo de Mohr representa las dos componentes de esfuerzo $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$, que actúan sobre el lado del elemento definido por el eje x', cuando el eje está en una dirección específica θ. Por ejemplo, cuando x' coincide con el eje x como se muestra en la figura 9-16*a*, entonces $\theta = 0°$ y $\sigma_{x'} = \sigma_x$, $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$. A esto se le denominará "punto de referencia" A y sus coordenadas $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ se grafican como se muestra en la figura 9-16*c*.

Ahora considere girar el eje x' 90° en sentido antihorario, figura 9-16*b*. Entonces $\sigma_{x'} = \sigma_y$ y $\tau_{x'y'} = -\tau_{xy}$. Estos valores son las coordenadas del punto $G(\sigma_y, -\tau_{xy})$ en el círculo, figura 9-16*c*. Por consiguiente, la línea radial CG está a 180° en sentido antihorario de la "línea de referencia" CA. En otras palabras, una rotación θ del eje x' sobre el elemento corresponderá a una rotación de 2θ sobre el círculo en la *misma dirección*.*

Una vez construido, el círculo de Mohr puede usarse para determinar los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal asociado, así como el esfuerzo sobre cualquier plano arbitrario.



(b)



(c)

Figura 9-16

*Si en cambio el eje τ se estableciera como *positivo hacia arriba*, entonces el ángulo 2θ sobre el círculo se mediría en la *dirección opuesta* a la orientación θ del plano.

Procedimiento de análisis

Los siguientes pasos son necesarios para dibujar y utilizar el círculo de Mohr.

Construcción del círculo.

- Establezca un sistema de coordenadas de tal manera que el eje horizontal represente el esfuerzo normal σ, con *los valores positivos a la derecha*, y el eje vertical represente el esfuerzo cortante τ, con *los valores positivos hacia abajo*, figura 9-17*a*.*
- Mediante la convención de signos positivos para σ_x, σ_y y τ_{xy}, como se muestra en la figura 9-17*b*, grafique el centro *C* del círculo, que se encuentra en el eje σ a una distancia $\sigma_{prom} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ desde el origen, figura 9-17*a*.
- Grafique el "punto de referencia" *A* que tiene coordenadas $A(\sigma_x, \tau_{xy})$. Este punto representa las componentes de esfuerzo normal y cortante sobre la cara vertical derecha del elemento, y como el eje x' coincide con el eje *x*, esto representa $\theta = 0°$, figura 9-17*a*.
- Conecte el punto *A* con el centro *C* del círculo y determine *CA* por trigonometría. Esta distancia representa el radio *R* del círculo, figura 9-17*a*.
- Una vez que se ha determinado *R*, grafique el círculo.

Esfuerzos principales.

- Los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) son las coordenadas de los puntos *B* y *D*, donde el círculo interseca al eje σ, es decir, donde $\tau = 0$, figura 9-17*a*.
- Estos esfuerzos actúan en planos definidos por los ángulos θ_{p_1} y θ_{p_2}, figura 9-17*c*. Están representados en el círculo por los ángulos $2\theta_{p_1}$ (mostrado) y $2\theta_{p_2}$ (no mostrado) y se miden *desde* la línea de referencia radial *CA hasta* las líneas *CB* y *CD*, respectivamente.
- Usando la trigonometría, sólo debe calcularse uno de estos ángulos a partir del círculo, ya que θ_{p_1} y θ_{p_2} están separados por 90°. Recuerde que la dirección de rotación $2\theta_p$ en el círculo (en este caso resulta ser en sentido antihorario) representa el *mismo* sentido de rotación θ_p desde el eje de referencia (+*x*) hasta el plano principal (+*x*′), figura 9-17*c*.*

Esfuerzo cortante máximo en el plano.

- Las componentes del esfuerzo normal promedio y el esfuerzo cortante máximo en el plano se determinan a partir del círculo como las coordenadas de los puntos *E* o *F*, figura 9-17*a*.

Procedimiento de análisis (*continuación*)

- En este caso, los ángulos θ_{s_1} y θ_{s_2} proporcionan la orientación de los planos que contienen estas componentes, figura 9-17*d*. El ángulo $2\theta_{s_1}$ que se muestra en la figura 9-17*a* puede determinarse usando la trigonometría. Aquí, la rotación resulta tener un sentido horario, desde *CA* hasta *CE*, y así θ_{s_1} debe tener un sentido horario sobre el elemento, figura 9-17*d*.*

Esfuerzos sobre un plano arbitrario.

- Las componentes de esfuerzo normal y cortante $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ que actúan sobre un plano específico o eje x', definido por el ángulo θ, figura 9-17*e*, puede obtenerse a partir del círculo usando la trigonometría para determinar las coordenadas del punto *P*, figura 9-17*a*.
- Para encontrar *P*, el ángulo conocido θ (en este caso en sentido antihorario), figura 9-17*e*, se medirá sobre el círculo en la *misma dirección* 2θ (sentido antihorario), *desde* la línea de referencia radial *CA hasta* la línea radial del *CP*, figura 9-17*a*.*

*Si el eje τ se hiciera *positivo hacia arriba*, entonces el ángulo 2θ sobre el círculo se mediría en la *dirección opuesta* a la orientación θ del eje x'.

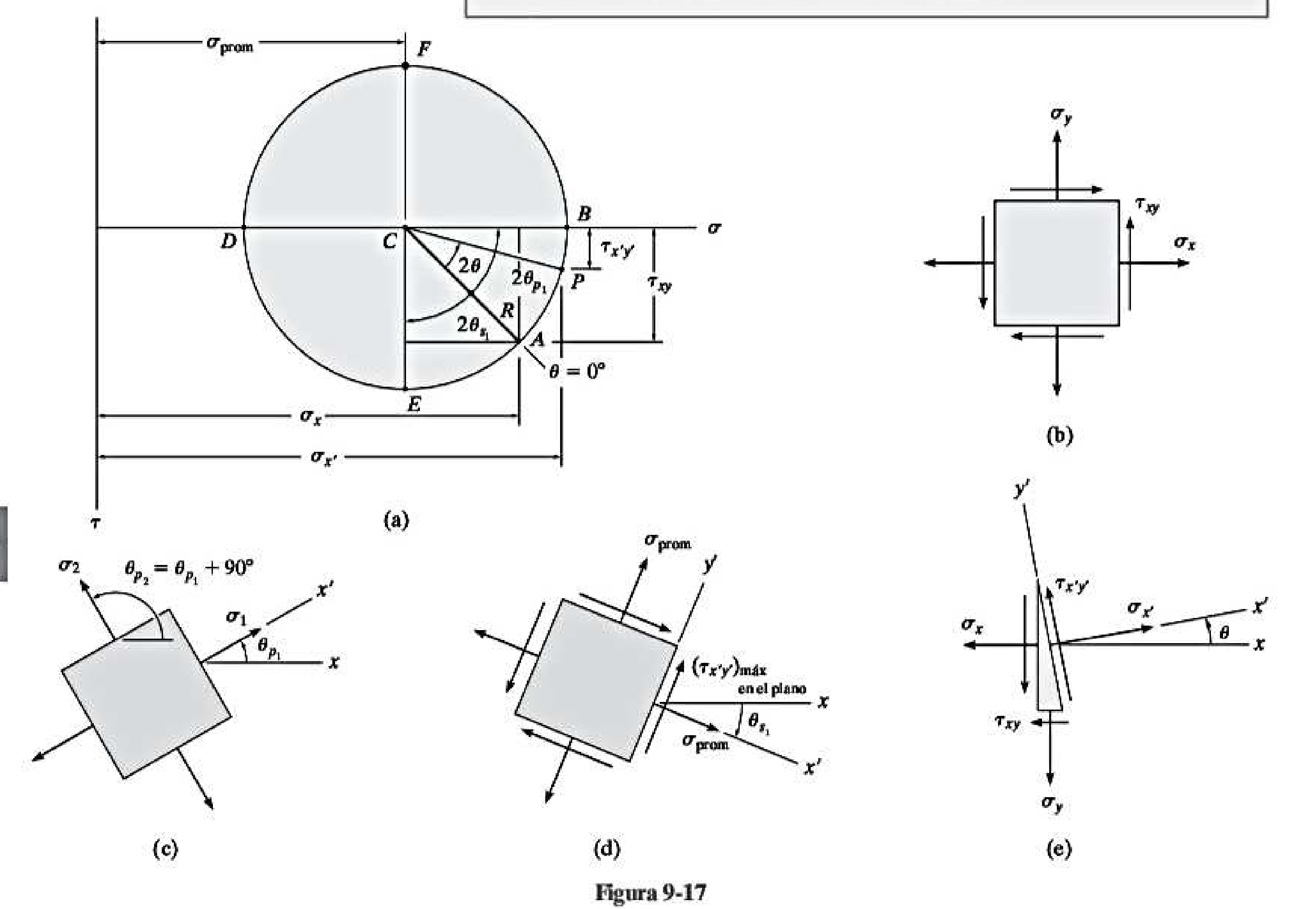
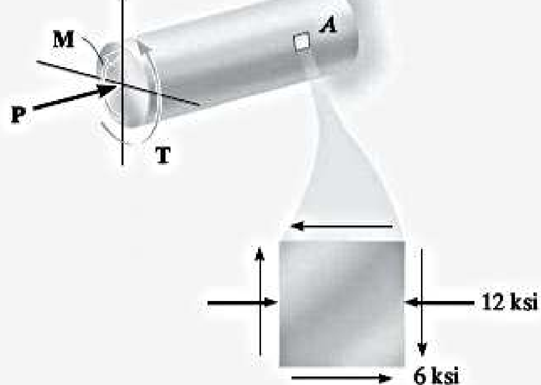


Figura 9-17

9

EJEMPLO 9.7

Debido a la carga aplicada, el elemento en el punto A sobre el eje sólido de la figura 9-18*a*, se somete al estado de esfuerzo mostrado en la figura. Determine los esfuerzos principales que actúan en este punto.



(a)

SOLUCIÓN

Construcción del círculo. A partir de la figura 9-18*a*,

$$\sigma_x = -12 \text{ ksi} \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -6 \text{ ksi}$$

El centro del círculo se encuentra en

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{-12 + 0}{2} = -6 \text{ ksi}$$

El punto de referencia $A(-12, -6)$ y el centro $C(-6, 0)$ están representados en la figura 9-18*b*. El círculo se construye con un radio de

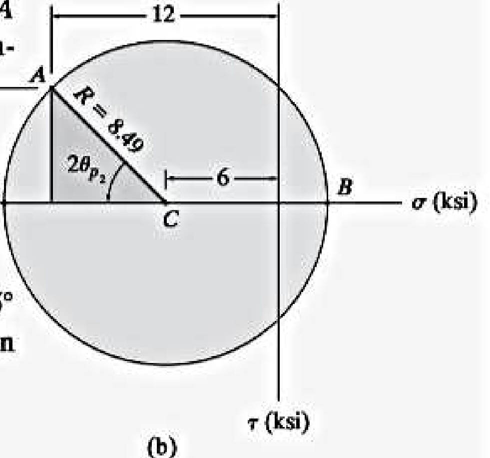
$$R = \sqrt{(12 - 6)^2 + (6)^2} = 8.49 \text{ ksi}$$

Esfuerzos principales. Los esfuerzos principales se indican mediante las coordenadas de los puntos B y D. Se tiene, para $\sigma_1 > \sigma_2$,

$$\sigma_1 = 8.49 - 6 = 2.49 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_2 = -6 - 8.49 = -14.5 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

La orientación del elemento puede determinarse al calcular el ángulo $2\theta_{p_2}$ en la figura 9-18*b*, el cual se mide *en sentido antihorario* desde CA hasta CD. Esta orientación define la dirección θ_{p_2} de σ_2 y su plano principal asociado. Se tiene

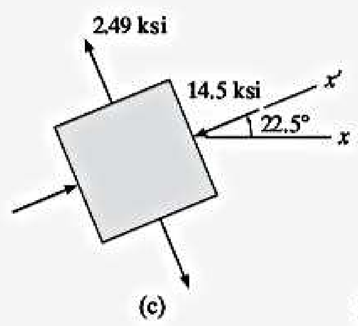


(b)

$$2\theta_{p_2} = \tan^{-1}\frac{6}{12 - 6} = 45.0°$$

$$\theta_{p_2} = 22.5°$$

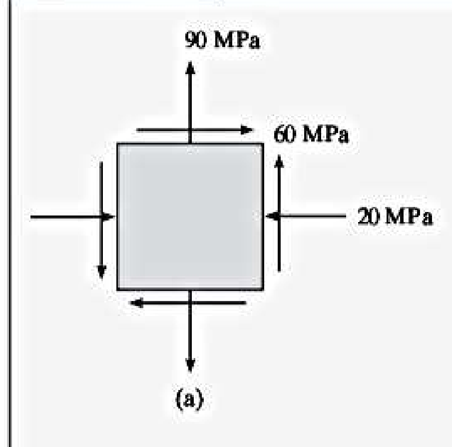
El elemento se orienta de manera que el eje x' o σ_2 esté dirigido a 22.5° *en sentido antihorario* desde la horizontal (eje x), como se muestra en la figura 9-18*c*.



(c)

Figura 9-18

EJEMPLO 9.8



(a)

El estado de esfuerzo plano en un punto se muestra sobre el elemento de la figura 9-19*a*. Determine el esfuerzo cortante máximo en el plano para este punto.

SOLUCIÓN

Construcción del círculo. A partir de los datos del problema,

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Los ejes σ y τ se establecen la figura 9-19*b*. El centro *C* del círculo se ubica sobre el eje σ, en el punto

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

Se grafican el punto *C* y el punto de referencia *A*(−20, 60). Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo gris oscuro a fin de determinar el radio *CA* del círculo, se tiene

$$R = \sqrt{(60)^2 + (55)^2} = 81.4 \text{ MPa}$$

(b)

Esfuerzo cortante máximo en el plano. El esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal promedio se identifican mediante el punto *E* (o *F*) en el círculo. Las coordenadas del punto *E*(35, 81.4) dan como resultado

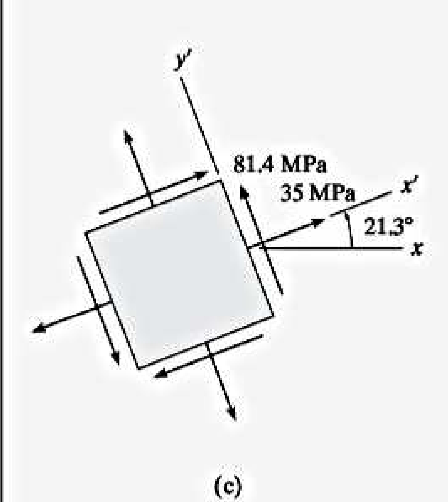
$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 81.4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = 35 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

El ángulo θ_{s_1}, medido *en sentido antihorario* desde *CA* hasta *CE*, se encuentra con base en el círculo, identificado como $2\theta_{s_2}$. Se tiene

$$2\theta_{s_1} = \tan^{-1}\left(\frac{20 + 35}{60}\right) = 42.5°$$

$$\theta_{s_1} = 21.3° \qquad \textit{Resp.}$$



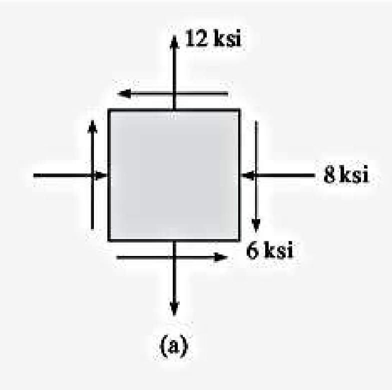
(c)

Figura 9-19

Este ángulo *en sentido antihorario* define la dirección del eje *x'*, figura 9-19*c*. Como el punto *E* tiene coordenadas *positivas*, entonces tanto el esfuerzo normal promedio como el esfuerzo cortante máximo en el plano actúan en las direcciones *positivas* *x'* y *y'*, tal como se muestra en la figura.

EJEMPLO 9.9

El estado de esfuerzo plano en un punto se muestra sobre el elemento de la figura 9-20*a*. Represente este estado de esfuerzo sobre un elemento orientado a 30° en sentido antihorario desde la posición mostrada.



(a)

SOLUCIÓN

Construcción del círculo. A partir de los datos del problema,

$$\sigma_x = -8 \text{ ksi} \qquad \sigma_y = 12 \text{ ksi} \qquad \tau_{xy} = -6 \text{ ksi}$$

Los ejes σ y τ se establecen en la figura 9-20*b*. El centro C del círculo está sobre el eje σ en

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{-8 + 12}{2} = 2 \text{ ksi}$$

El punto de referencia para $\theta = 0°$ tiene coordenadas $A(-8, -6)$. Por lo tanto, con base en el triángulo en gris oscuro, el radio CA es

$$R = \sqrt{(10)^2 + (6)^2} = 11.66$$

(b)

Esfuerzos sobre el elemento a 30°. Como el elemento debe girarse 30° *en sentido antihorario*, se debe construir una línea radial CP, 2(30°) = 60° *en sentido antihorario*, medida desde $CA(\theta = 0°)$, figura 9-20*b*. A continuación deben obtenerse las coordenadas del punto $P(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$. Con base en la geometría del círculo,

$$\phi = \tan^{-1}\frac{6}{10} = 30.96° \qquad \psi = 60° - 30.96° = 29.04°$$

$$\sigma_{x'} = 2 - 11.66 \cos 29.04° = -8.20 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\tau_{x'y'} = 11.66 \operatorname{sen} 29.04° = 5.66 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

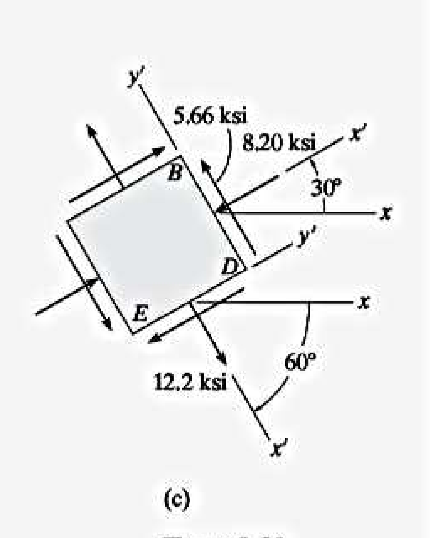
Estas dos componentes de esfuerzo actúan sobre la cara BD del elemento que se muestra en la figura 9-20*c*, puesto que el eje x' para esta cara está orientado a 30° *en sentido antihorario* desde el eje x.

Las componentes de esfuerzo que actúan sobre la cara DE adyacente del elemento, el cual está a 60° *en sentido horario* desde el eje x positivo, figura 9-20*c*, están representadas por las coordenadas del punto Q en el círculo. Este punto se encuentra en la línea radial CQ, que está a 180° desde CP. Las coordenadas del punto Q son

$$\sigma_{x'} = 2 + 11.66 \cos 29.04° = 12.2 \text{ ksi} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\tau_{x'y'} = -(11.66 \operatorname{sen} 29.04) = -5.66 \text{ ksi} \quad \text{(verificar)} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Aquí $\tau_{x'y'}$ actúa en la dirección $-y'$.

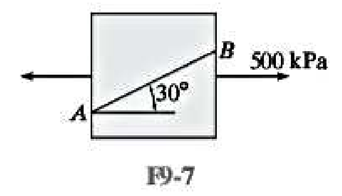


(c)

Figura 9-20

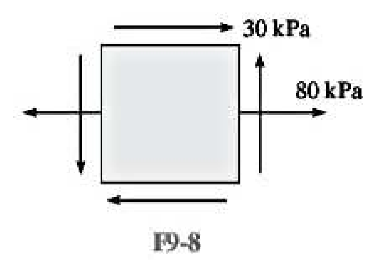
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F9-7. Determine el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante que actúan sobre el plano inclinado AB. Grafique el resultado sobre el elemento seccionado.



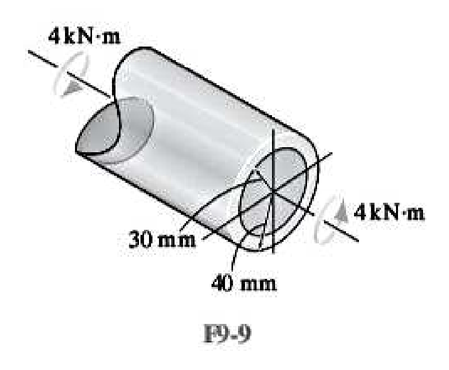
F9-7

F9-8. Determine el estado de esfuerzo equivalente sobre un elemento en el mismo punto que represente los esfuerzos principales en el punto. Además, encuentre la orientación correspondiente del elemento con respecto al elemento mostrado. Dibuje los resultados sobre el elemento.



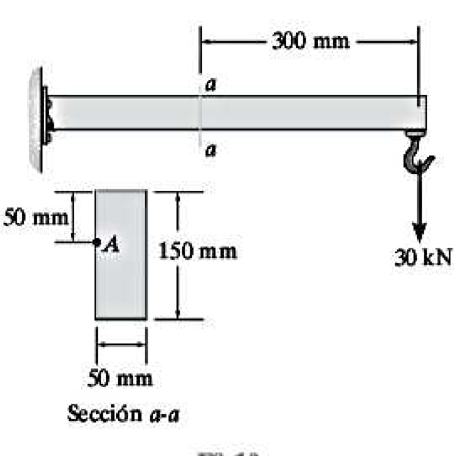
F9-8

F9-9. El eje hueco circular está sometido al par de torsión de 4 kN·m. Determine los esfuerzos principales desarrollados en un punto sobre la superficie del eje.



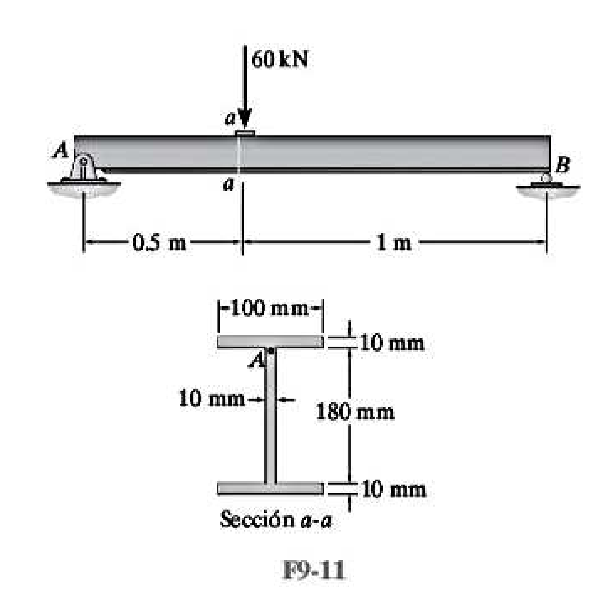
F9-9

F9-10. Determine los esfuerzos principales desarrollados en el punto A de la sección transversal de la viga en la sección a-a.



F9-10

F9-11. Determine el esfuerzo cortante máximo en el plano desarrollado en el punto A sobre la sección transversal de la viga en la sección a-a, que se ubica justo a la izquierda de la fuerza de 60 kN. El punto A está justamente debajo del ala.



F9-11

9

PROBLEMAS

9-51. Resuelva el problema 9-4 mediante el círculo de Mohr.

***9-52.** Resuelva el problema 9-6 mediante el círculo de Mohr.

•9-53. Resuelva el problema 9-14 mediante el círculo de Mohr.

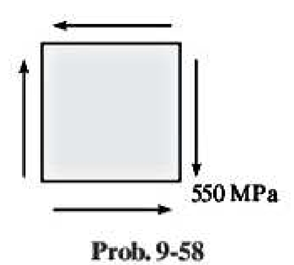
9-54. Resuelva el problema 9-16 mediante el círculo de Mohr.

9-55. Resuelva el problema 9-12 mediante el círculo de Mohr.

***9-56.** Resuelva el problema 9-11 mediante el círculo de Mohr.

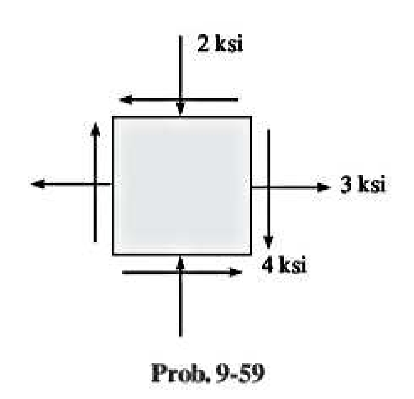
9-57. El círculo de Mohr para el estado de esfuerzo de la figura 9-15*a* se muestra en la figura 9-15*b*. Muestre que al encontrar las coordenadas del punto $P(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$ en el círculo se obtiene el mismo valor que con las ecuaciones para la transformación de esfuerzos 9-1 y 9-2.

9-58. Determine el estado de esfuerzo equivalente si un elemento está orientado a 25° en sentido antihorario desde el elemento mostrado.



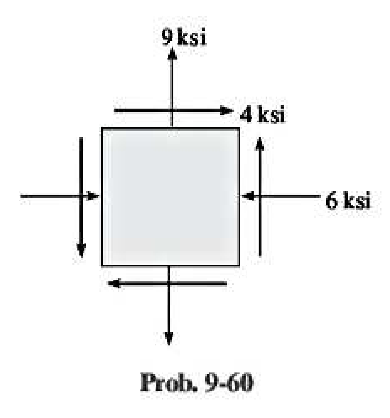
Prob. 9-58

9-59. Determine el estado de esfuerzo equivalente si un elemento está orientado a 20° en sentido horario desde el elemento mostrado.



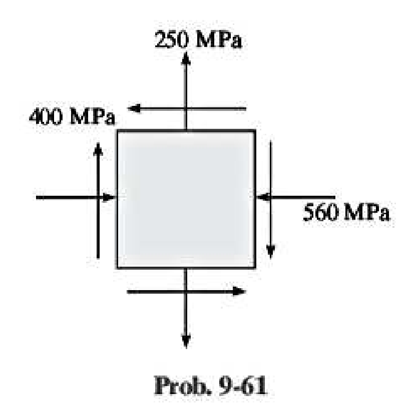
Prob. 9-59

***9-60.** Determine el estado de esfuerzo equivalente si un elemento está orientado a 30° en sentido horario desde el elemento mostrado. Represente el resultado sobre el elemento.



Prob. 9-60

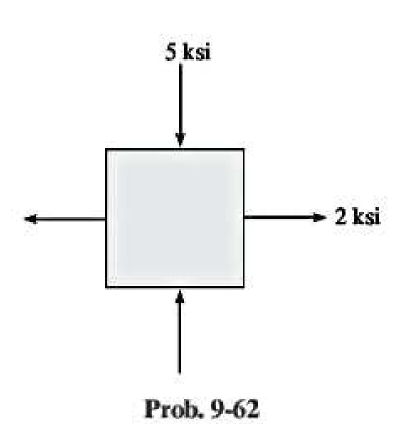
•9-61. Determine el estado de esfuerzo equivalente para un elemento orientado a 60° en sentido antihorario desde el elemento mostrado. Represente el resultado sobre el elemento.



Prob. 9-61

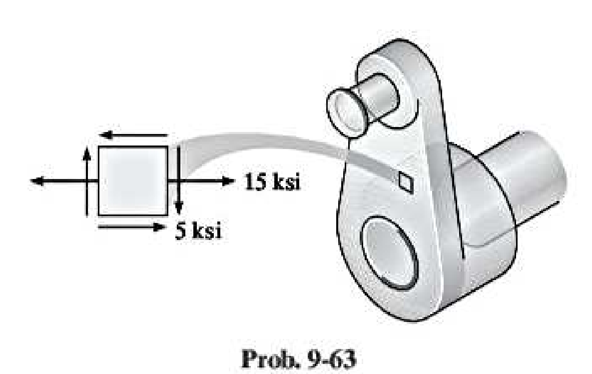
9

9-62. Determine el estado equivalente de esfuerzo para un elemento orientado a 30° en sentido horario desde el elemento mostrado. Represente el resultado sobre el elemento.



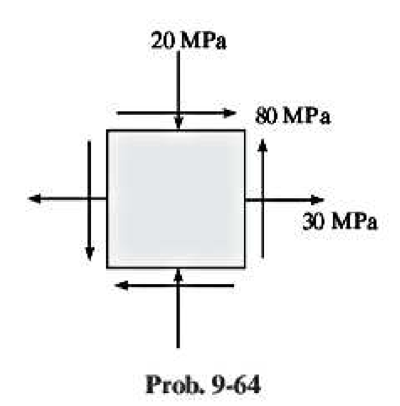
Prob. 9-62

9-63. Determine los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal promedio. Especifique la orientación del elemento en cada caso.



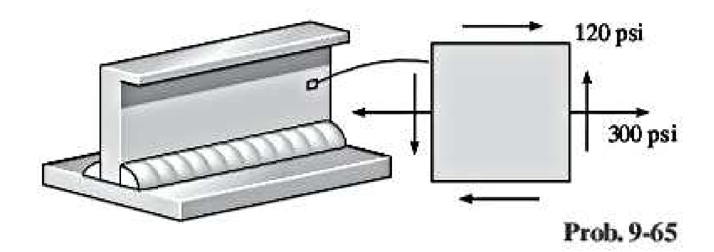
Prob. 9-63

*9-64. Determine los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal promedio. Especifique la orientación del elemento en cada caso.



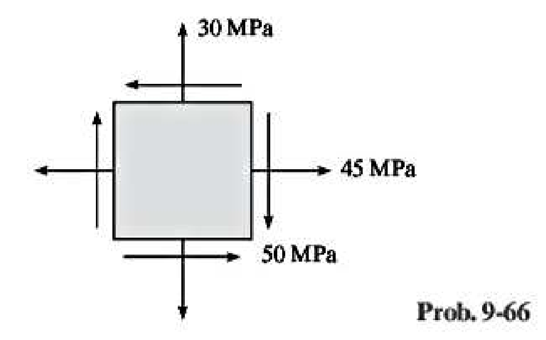
Prob. 9-64

•9-65. Determine los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal promedio. Especifique la orientación del elemento en cada caso.



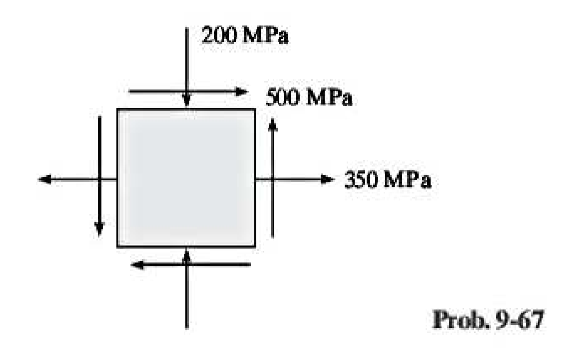
Prob. 9-65

9-66. Determine los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal promedio. Especifique la orientación del elemento en cada caso.



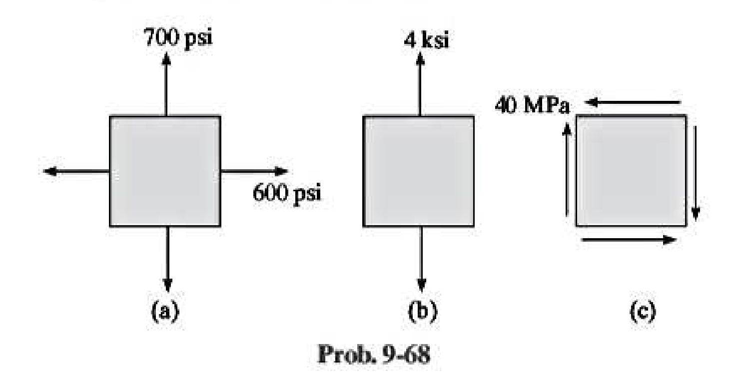
Prob. 9-66

9-67. Determine los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo normal promedio. Especifique la orientación del elemento en cada caso.



Prob. 9-67

*9-68. Dibuje el círculo de Mohr que describe cada uno de los siguientes estados de esfuerzo.

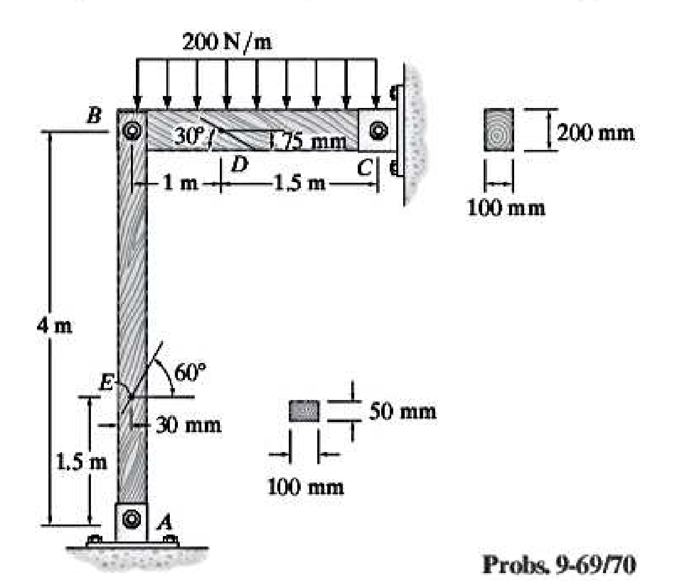


Prob. 9-68

Los problemas siguientes involucran material cubierto en el capítulo 8.

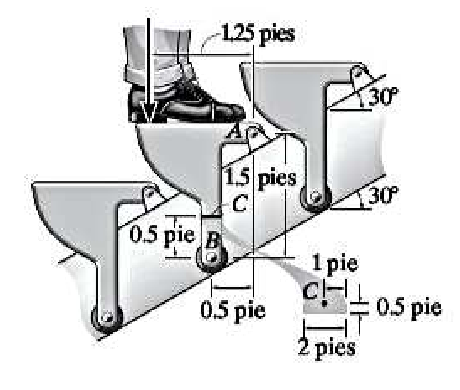
9-69. El bastidor soporta la carga distribuida de 200 N/m. Determine los esfuerzos normal y cortante en el punto *D* que actúan respectivamente en forma perpendicular y paralela a las fibras. En este punto las fibras forman un ángulo de 30° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura.

9-70. El bastidor soporta la carga distribuida de 200 N/m. Determine los esfuerzos normal y cortante en el punto *E* que actúan respectivamente en forma perpendicular y paralela a las fibras. En este punto las fibras forman un ángulo de 60° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura.



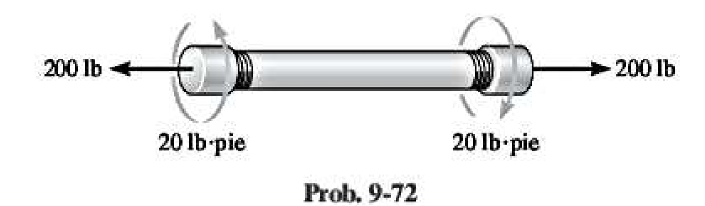
Probs. 9-69/70

9-71. El peldaño de la escalera mecánica está sostenido en dos de sus lados por el pasador móvil en *A* y el rodillo en *B*. Si un hombre tiene un peso de 300 lb y se para en el centro del escalón, determine los esfuerzos principales desarrollados en el soporte ubicado sobre la sección transversal en el punto *C*. Los escalones se mueven a velocidad constante.



Prob. 9-71

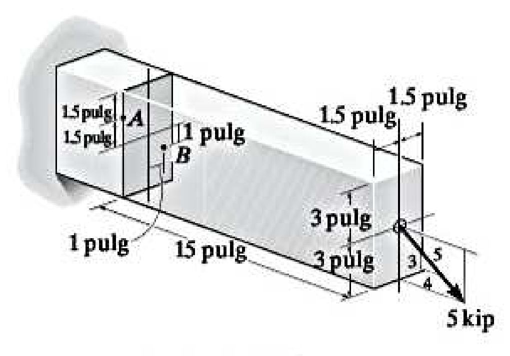
*9-72. El tubo de pared delgada tiene un diámetro interior de 0.5 pulg y un grosor de 0.025 pulg. Si se somete a una presión interna de 500 psi y a la tensión axial y las cargas de torsión mostradas en la figura, determine los esfuerzos principales en un punto sobre la superficie de la tubería.



Prob. 9-72

•**9-73.** La barra rectangular en voladizo está sometida a la fuerza de 5 kip. Determine los esfuerzos principales en el punto *A*.

9-74. Resuelva el problema 9-73 para los esfuerzos principales en el punto *B*.



Probs. 9-73/74

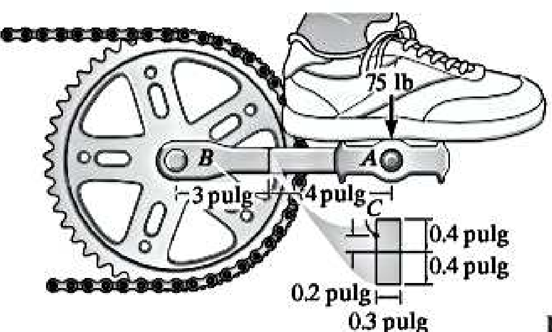
9-75. El eje propulsor *AB* del helicóptero, con 2 pulg de diámetro, se somete a una tensión axial de 10 000 lb y a un par de torsión de 300 lb·pie. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano que actúan en un punto sobre la superficie del eje.



Prob. 9-75

9

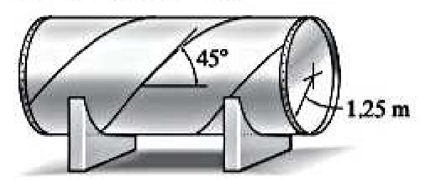
*9-76. El brazo que conecta el pedal de la bicicleta tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si está fijo al engrane en *B* y no gira mientras está sometido a una fuerza de 75 lb, determine los esfuerzos principales en el material sobre la sección transversal en el punto *C*.



Prob. 9-76

•9-77. Un recipiente esférico a presión tiene un radio interior de 5 pies y un grosor de pared de 0.5 pulg. Dibuje el círculo de Mohr para el estado de esfuerzo en un punto sobre el recipiente y explique la importancia del resultado. El recipiente está sometido a una presión interna de 80 psi.

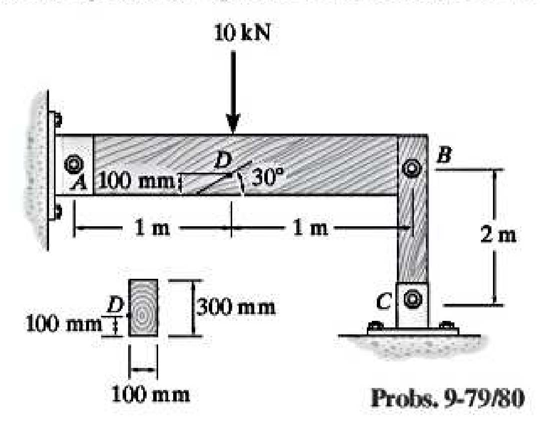
9-78. El recipiente cilíndrico a presión tiene un radio interior de 1.25 m y un grosor de pared de 15 mm. Está hecho de placas de acero que se sueldan a lo largo de la costura a 45°. Determine las componentes de esfuerzo normal y cortante a lo largo de esta costura si el recipiente está sometido a una presión interna de 8 MPa.



Prob. 9-78

•9-79. Determine el esfuerzo normal y cortante en el punto *D*, que actúan respectivamente en forma perpendicular y paralela a las fibras. En este punto las fibras forman un ángulo de 30° respecto a la horizontal como se muestra en la figura. El punto *D* se ubica justo a la izquierda de la fuerza de 10 kN.

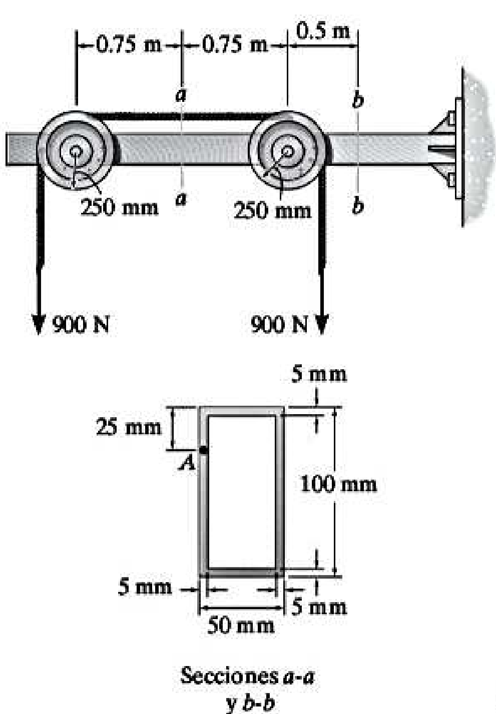
*9-80. Determine los esfuerzos principales en el punto *D*, que se encuentra justo a la izquierda de la fuerza de 10 kN.



Probs. 9-79/80

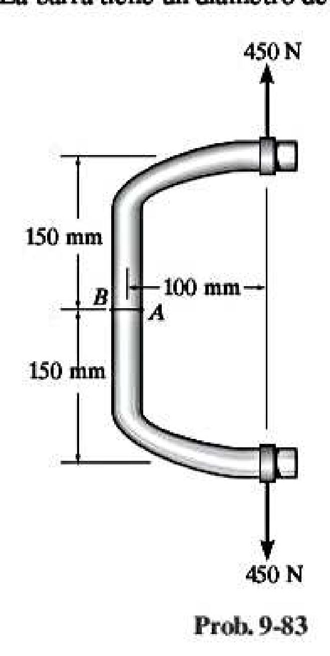
•9-81. Determine los esfuerzos principales en el punto *A* sobre el área transversal del suspensor en la sección *a-a*. Especifique la orientación de este estado de esfuerzo e indique el resultado sobre un elemento ubicado en el punto.

9-82. Determine los esfuerzos principales en el punto *A* sobre el área transversal del suspensor en la sección *b-b*. Especifique la orientación de este estado de esfuerzo e indique el resultado sobre un elemento ubicado en el punto.



Probs. 9-81/82

9-83. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano que se desarrollan en el punto *A*. Muestre los resultados sobre un elemento situado en este punto. La barra tiene un diámetro de 40 mm.



Prob. 9-83

9.5 Esfuerzo cortante máximo absoluto

Cuando un punto en un cuerpo se somete a un estado general de esfuerzo tridimensional, un elemento de material tiene un esfuerzo normal y dos componentes de esfuerzo cortante que actúan sobre cada una de sus caras, figura 9-21*a*. Como en el caso del esfuerzo plano, es posible desarrollar ecuaciones de transformación de esfuerzo que pueden usarse para determinar las componentes σ y τ del esfuerzo normal y el esfuerzo cortante que actúan en *cualquier* plano transversal del elemento, figura 9-21*b*. Por otra parte, en el punto también es posible determinar la orientación única de un elemento que sólo tiene esfuerzos principales que actúan sobre sus caras. En general, como se muestra en la figura 9-21*c*, estos esfuerzos principales tienen magnitudes de intensidad máxima, intermedia y mínima, es decir, $\sigma_{máx} \geq \sigma_{int} \geq \sigma_{mín}$. Ésta es una condición conocida como ***esfuerzo triaxial***.

Un análisis de la transformación de esfuerzos en tres dimensiones está fuera del alcance de este libro; sin embargo, se estudia en los libros relacionados con la teoría de la elasticidad. Para los propósitos de este capítulo, el estudio se limitará sólo al caso del esfuerzo plano. Por ejemplo, considere

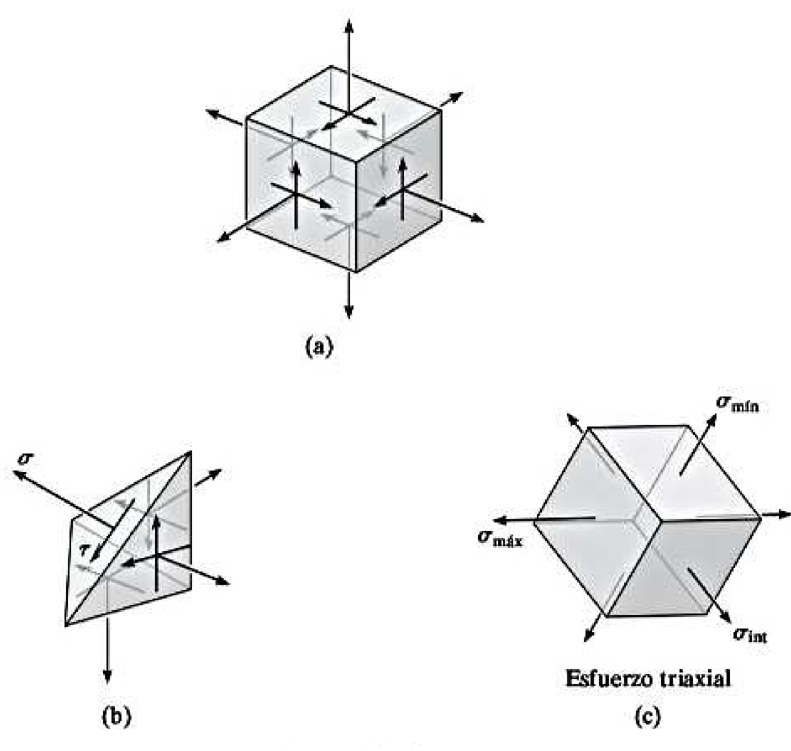
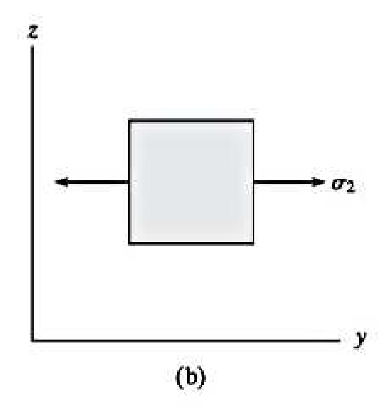


Figura 9-21

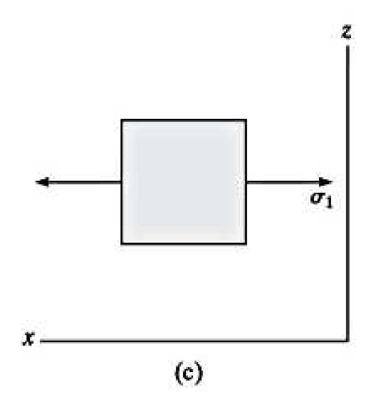
Esfuerzo plano x-y

(a)

que el material se somete a los esfuerzos principales en el plano σ_1 y σ_2 que se muestran en la figura 9-22a, donde *ambos* esfuerzos son de tensión. Si se considera el elemento en dos dimensiones, es decir en los planos y-z, x-z y x-y, figura 9-22*b*, 9-22*c* y 9-22*d*, entonces puede usarse el círculo de Mohr para determinar el esfuerzo cortante máximo en el plano para cada caso y, a partir de esto, determinar el *esfuerzo cortante máximo absoluto* en el material. Por ejemplo, para el caso que se muestra en la figura 9-22*b*, el diámetro del círculo de Mohr se extiende desde 0 hasta σ_2. A partir de este círculo, figura 9-22*e*, el esfuerzo máximo cortante en el plano es $\tau_{y'z'} = \sigma_2/2$. Para los tres círculos, se observa que aunque el esfuerzo cortante máximo en el plano es $\tau_{x'y'} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, este valor *no* es el esfuerzo cortante máximo absoluto. En cambio, a partir de la figura 9-22*e*,



(b)

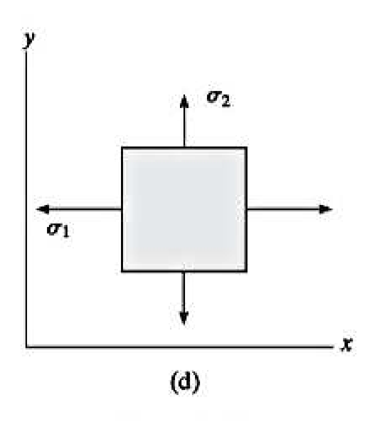


(c)

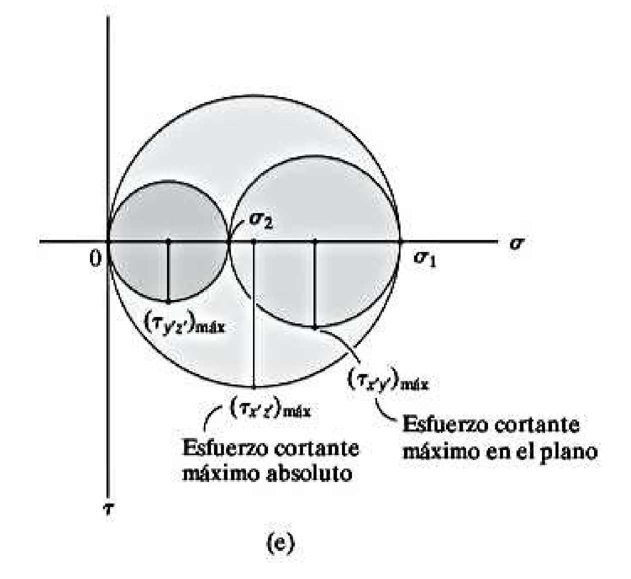


$$\tau_{\substack{\text{abs}\\\text{máx}}} = \frac{\sigma_1}{2} \qquad (9\text{-}13)$$

σ_1 y σ_2 tienen el mismo signo

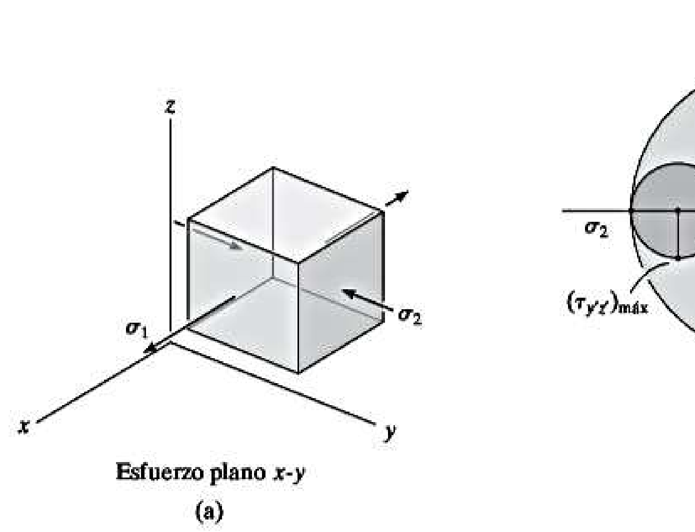


(d)

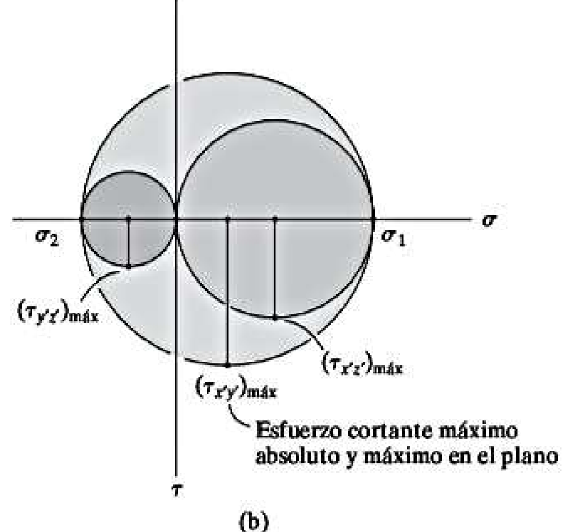


(e)

Figura 9-22



(a)



(b)

Figura 9-23

Si uno de los esfuerzos principales en el plano tiene *signo contrario* al del otro esfuerzo principal, figura 9-23*a*, entonces los tres círculos de Mohr que describen el estado de esfuerzo para las orientaciones del elemento respecto a cada eje de coordenadas son como se muestran en la figura 9-23*b*. Resulta claro que, en este caso

$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (9\text{-}14)$$

σ_1 y σ_2 tienen signos opuestos

El cálculo del esfuerzo cortante máximo absoluto, como se indica aquí, es importante al momento de diseñar elementos fabricados de un material dúctil, puesto que la resistencia del material depende de su capacidad para resistir el esfuerzo cortante. Esta situación se analizará con mayor detalle en la sección 10.7.

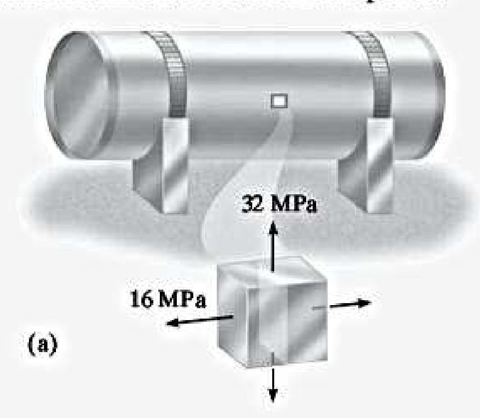
Puntos importantes

- El estado general de esfuerzo tridimensional en un punto puede representarse mediante un elemento orientado de manera que sobre él sólo actúen tres esfuerzos principales $\sigma_{máx}$, σ_{int} y $\sigma_{mín}$.
- En el caso del esfuerzo plano, si los dos esfuerzos principales en el plano tienen el *mismo signo*, el *esfuerzo cortante máximo absoluto* se producirá *fuera del plano* y tendrá un valor de $\tau_{\substack{abs \\ máx}} = \sigma_{máx}/2$. Este valor es mayor que el esfuerzo cortante en el plano.
- Si los esfuerzos principales en el plano tienen *signos opuestos*, entonces el *esfuerzo cortante máximo absoluto será igual al esfuerzo cortante máximo en el plano*; es decir, $\tau_{\substack{abs \\ máx}} = (\sigma_{máx} - \sigma_{mín})/2$.

9

EJEMPLO 9.10

El punto sobre la superficie del recipiente cilíndrico a presión mostrado en la figura 9-24*a* se somete al estado de esfuerzo plano. Determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en este punto.



SOLUCIÓN

Los esfuerzos principales son $\sigma_1 = 32$ MPa, $\sigma_2 = 16$ MPa. Si estos esfuerzos se grafican a lo largo del eje σ, es posible construir los tres círcu los de Mohr que describen el estado de esfuerzo visto en cada uno de los tres planos perpendiculares, figura 9-24*b*. El círculo más grande tiene un radio de 16 MPa y describe el estado de esfuerzo en el plano que contiene sólo a $\sigma_1 = 32$ MPa, el cual se muestra sombreado en gris oscuro en la figura 9-24*a*. Una orientación de un elemento a 45° dentro de este plano genera el estado de esfuerzo cortante máximo absoluto y el esfuerzo normal promedio asociado, a saber,

$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = 16 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\sigma_{prom} = 16 \text{ MPa}$$

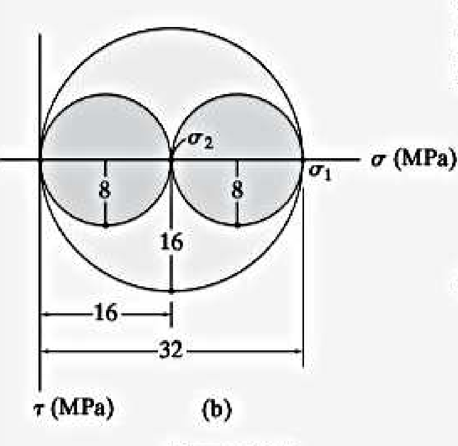


Figura 9-24

Este mismo resultado para $\tau_{\substack{abs \\ máx}}$ puede obtenerse al aplicar de manera directa la ecuación 9-13.

$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{prom} = \frac{32 + 0}{2} = 16 \text{ MPa}$$

Por comparación, el esfuerzo cortante máximo en el plano puede determinarse a partir del círculo de Mohr trazado entre $\sigma_1 = 32$ MPa y $\sigma_2 = 16$ MPa, figura 9-24*b*. De aquí resulta un valor de

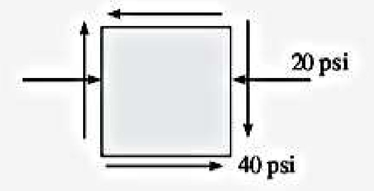
$$\tau_{\substack{máx \\ \text{en el plano}}} = \frac{32 - 16}{2} = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{prom} = \frac{32 + 16}{2} = 24 \text{ MPa}$$

9

EJEMPLO 9.11

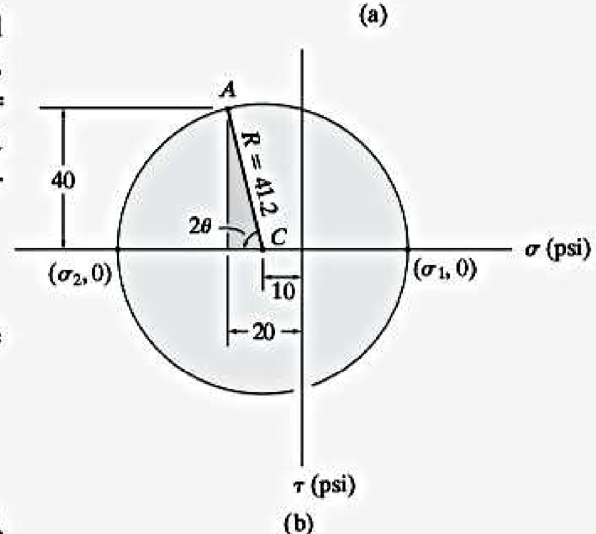
Debido a una carga aplicada, un elemento ubicado en el punto de un eje de máquina está sometido al estado de esfuerzo plano de la figura 9-25*a*. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo absoluto en el punto.



(a)

SOLUCIÓN

Esfuerzos principales. Los esfuerzos principales en el plano pueden determinarse a partir del círculo de Mohr. El centro del círculo se encuentra sobre el eje σ en $\sigma_{prom} = (-20 + 0)/2 = -10$ psi. Al graficar el punto de referencia $A(-20, -40)$, se establece el radio CA y el círculo puede dibujarse como se muestra en la figura 9-25*b*. El radio es



(b)

$$R = \sqrt{(20 - 10)^2 + (40)^2} = 41.2 \text{ psi}$$

Los esfuerzos principales se encuentran en los puntos donde el círculo interseca al eje σ; es decir,

$$\sigma_1 = -10 + 41.2 = 31.2 \text{ psi}$$
$$\sigma_2 = -10 - 41.2 = -51.2 \text{ psi}$$

Con base en el círculo, el ángulo *en sentido antihorario* 2θ, medido desde CA hasta el eje $-\sigma$, es

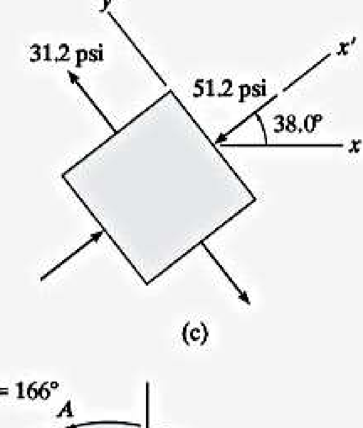
$$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{40}{20 - 10}\right) = 76.0°$$

Por lo tanto,

$$\theta = 38.0°$$

Esta rotación *en sentido antihorario* define la dirección del eje x' y σ_2, y su plano principal asociado, figura 9-25*c*. Se tiene

$$\sigma_1 = 31.2 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = -51.2 \text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$

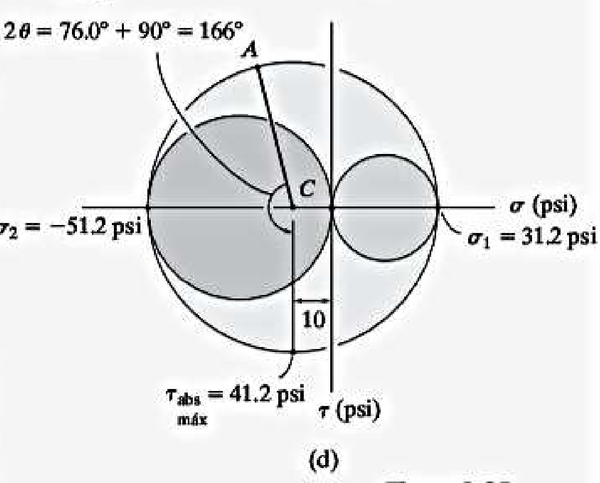


(c)

Esfuerzo cortante máximo absoluto. Dado que estos esfuerzos tienen signos opuestos, al aplicar la ecuación 9-14 se tiene

$$\tau_{\substack{abs\\máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{31.2 - (-51.2)}{2} = 41.2 \text{ psi} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{prom} = \frac{31.2 - 51.2}{2} = -10 \text{ psi}$$



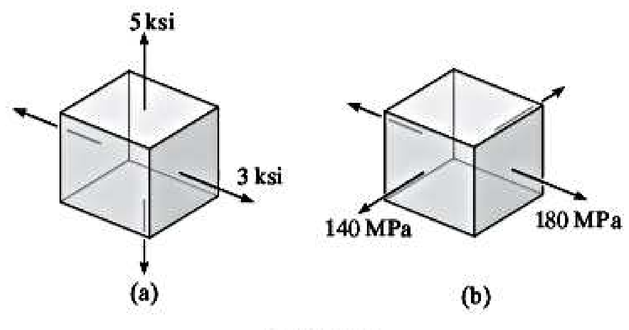
(d)

Figura 9-25

NOTA: Estos mismos resultados pueden obtenerse también al dibujar el círculo de Mohr para cada orientación de un elemento respecto a los ejes x, y y z, figura 9-25*d*. Como σ_1 y σ_2 tienen *signos opuestos*, entonces el esfuerzo cortante máximo absoluto es igual al esfuerzo cortante máximo en el plano.

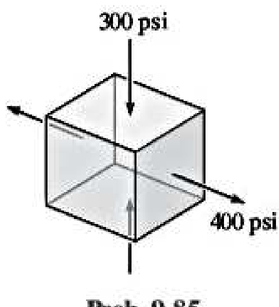
PROBLEMAS

•9-84. Dibuje los tres círculos de Mohr que describen cada uno de los siguientes estados de esfuerzo.



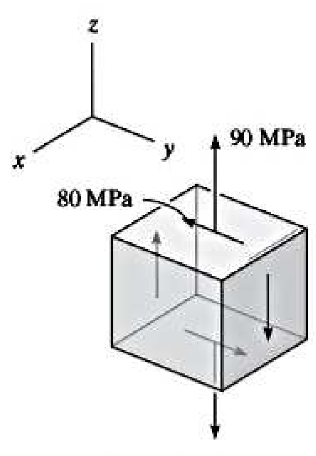
Prob. 9-84

•9-85. Dibuje los tres círculos de Mohr que describen el siguiente estado de esfuerzo.



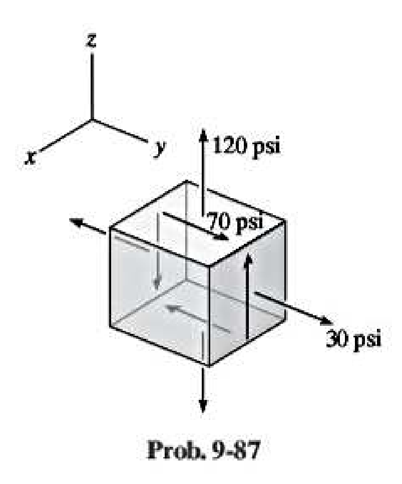
Prob. 9-85

9-86. El esfuerzo en un punto se muestra sobre el elemento. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo absoluto.



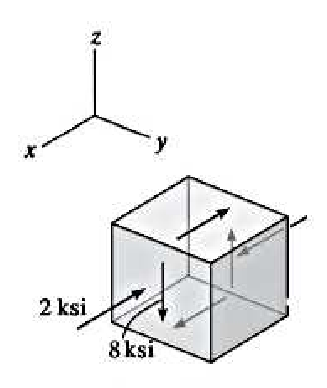
Prob. 9-86

9-87. El esfuerzo en un punto se muestra sobre el elemento. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo absoluto.



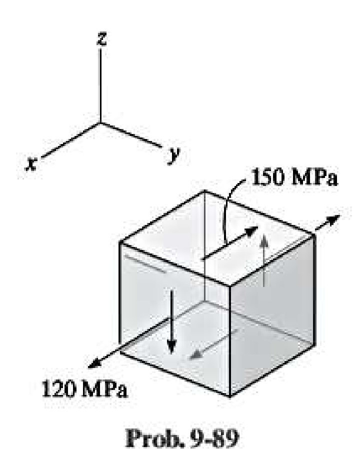
Prob. 9-87

*9-88. El esfuerzo en un punto se muestra sobre el elemento. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo absoluto.



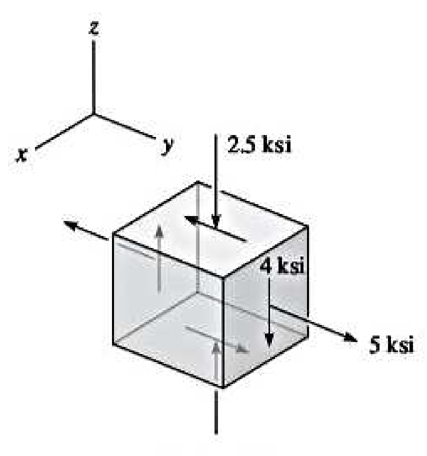
Prob. 9-88

•9-89. El esfuerzo en un punto se muestra sobre el elemento. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo absoluto.



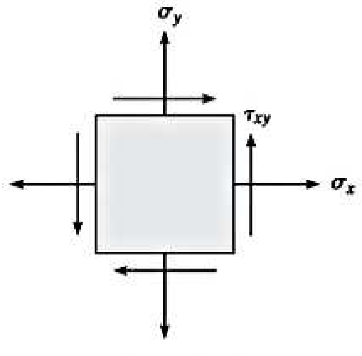
Prob. 9-89

9-90. El estado de esfuerzo en un punto se muestra sobre el elemento. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo absoluto.



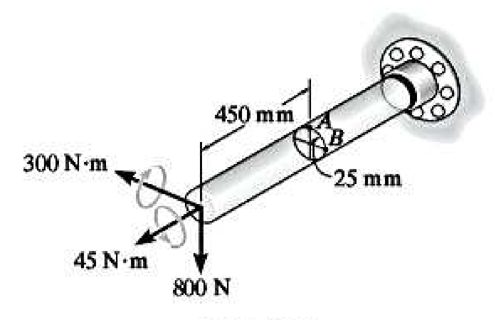
Prob. 9-90

9-91. Considere el caso general de esfuerzo plano mostrado en la figura. Escriba un programa de computadora que presente una gráfica de los tres círculos de Mohr para el elemento, además debe calcular el esfuerzo cortante máximo en el plano y el esfuerzo cortante máximo absoluto.



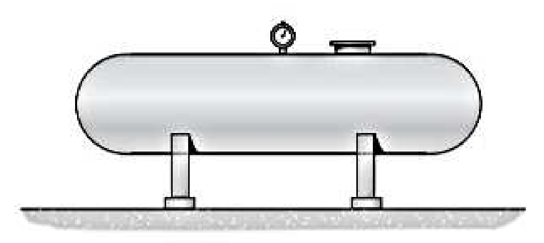
Prob. 9-91

*9-92. El eje sólido está sometido al par de torsión, al momento flexionante y a la fuerza cortante que se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales que actúan en los puntos A y B, y el esfuerzo cortante máximo absoluto.



Prob. 9-92

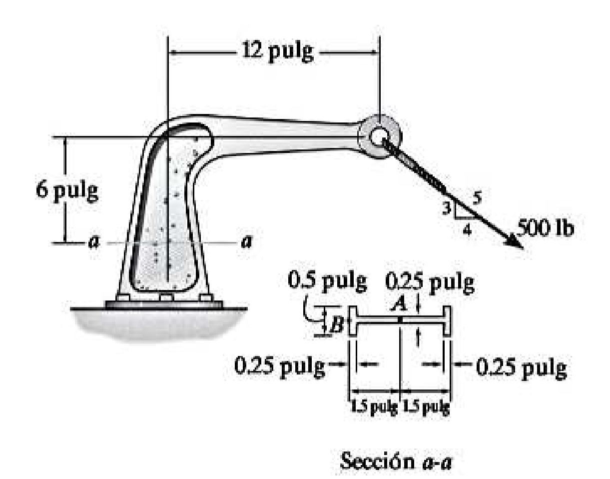
•9-93. El tanque de gas propano tiene un diámetro interior de 1500 mm y un grosor de pared de 15 mm. Si el tanque está presurizado a 2 MPa, determine el esfuerzo cortante máximo absoluto en la pared del tanque.



Prob. 9-93

9-94. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo absoluto desarrollados en el punto A del área transversal de la ménsula en la sección a-a.

9-95. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo absoluto desarrollados en el punto B del área transversal de la ménsula en la sección a-a.



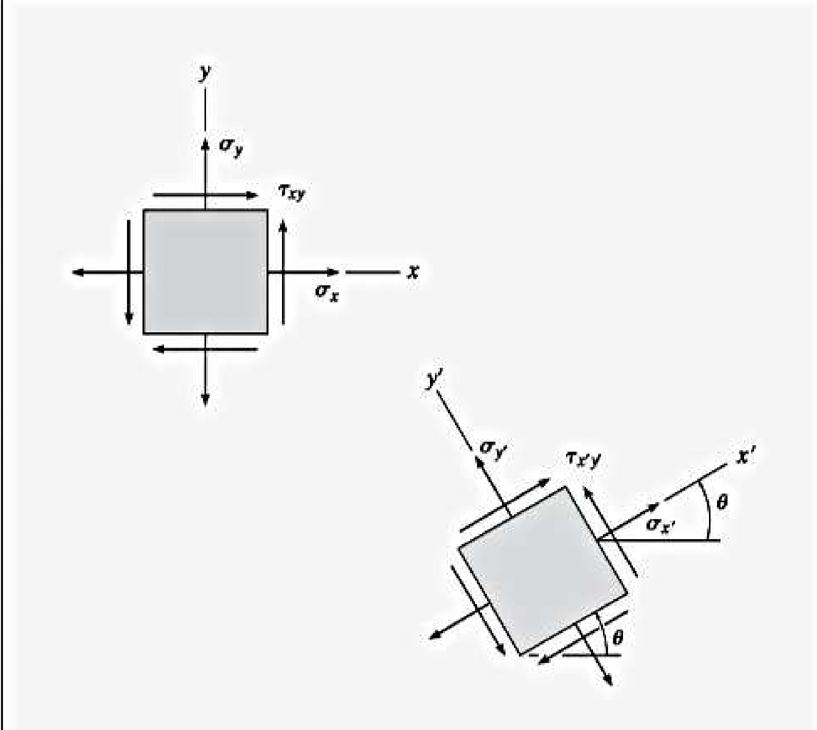
Probs. 9-94/95

REPASO DE CAPÍTULO

El esfuerzo plano se produce cuando el material en un punto está sometido a dos componentes de esfuerzo normal σ_x y σ_y, y una de esfuerzo cortante τ_{xy}. Siempre que estas componentes sean conocidas, las componentes de esfuerzo que actúan sobre un elemento con una orientación θ diferente pueden determinarse usando las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas o las ecuaciones para la transformación de esfuerzos.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\, 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$



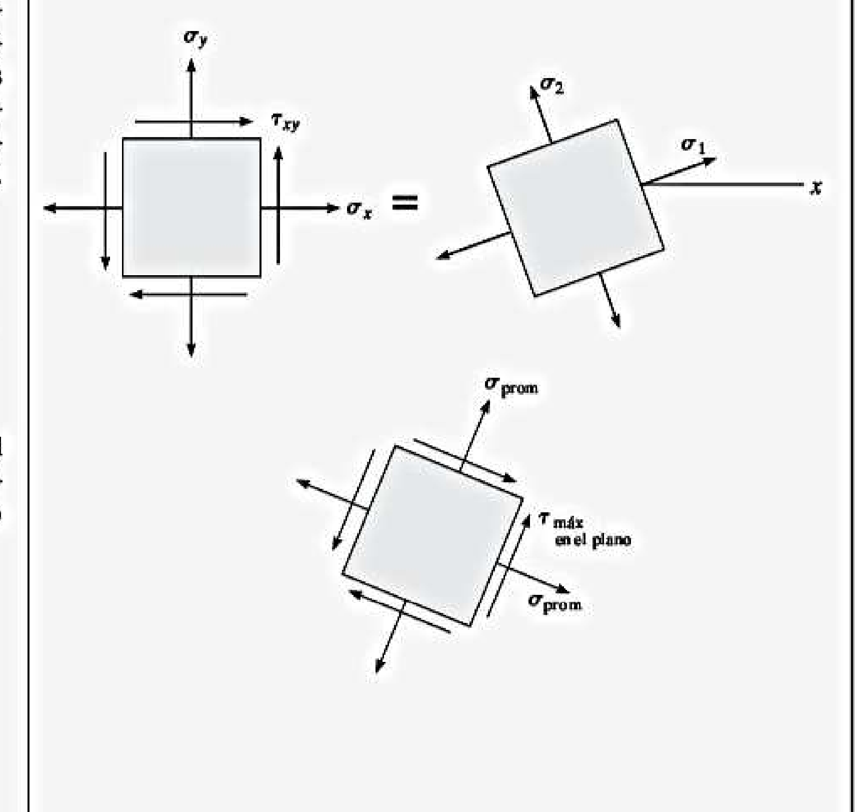
Para el diseño, es importante determinar la orientación del elemento que produce los esfuerzos normales principales máximos y el esfuerzo cortante máximo en el plano. Al usar las ecuaciones para la transformación de esfuerzos, se comprueba que ningún esfuerzo cortante actúa sobre los planos de esfuerzo principal. Los esfuerzos principales son

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}}$$

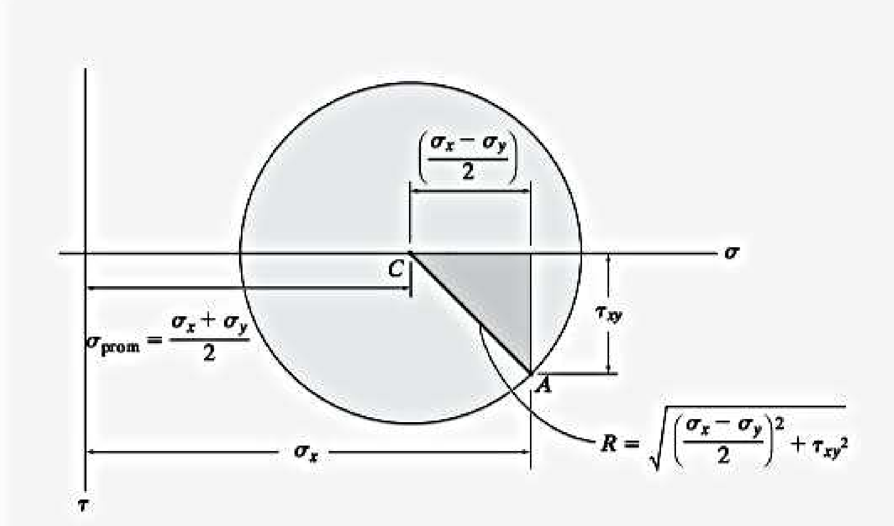
Los planos de esfuerzo cortante máximo en el plano se orientan a 45° de esta dirección, y sobre estos planos cortantes existe un esfuerzo normal promedio asociado.

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{en el plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

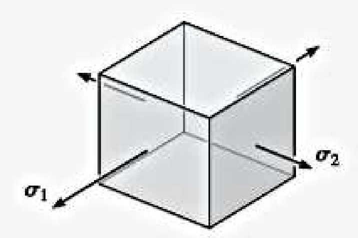


El círculo de Mohr proporciona un método semigráfico para encontrar el esfuerzo sobre cualquier plano, los esfuerzos normales principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano. Para dibujar el círculo, se establecen los ejes σ y τ, se grafican el centro del círculo $C[(\sigma_x + \sigma_y)/2, 0]$ y el punto de referencia $A(\sigma_x, \tau_{xy})$. El radio R del círculo se extiende entre estos dos puntos y se determina mediante la trigonometría.



Si σ_1 y σ_2 son del mismo signo, entonces el esfuerzo cortante máximo absoluto se encuentran fuera de plano.

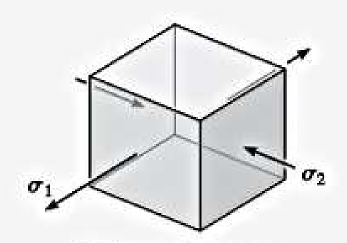
$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = \frac{\sigma_1}{2}$$



Esfuerzo plano *x*-*y*

En el caso de esfuerzo plano, el esfuerzo cortante máximo absoluto será igual al esfuerzo cortante máximo en el plano siempre que los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 tengan signo contrario.

$$\tau_{\substack{abs \\ máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

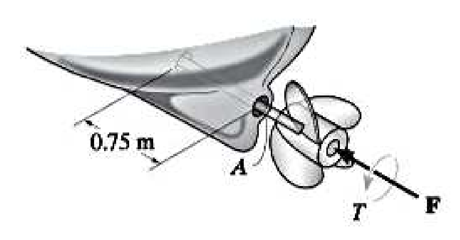


Esfuerzo plano *x*-*y*

PROBLEMAS DE REPASO

*9-96. El eje propulsor sólido de un barco se extiende hacia afuera del casco. Durante su operación gira a $\omega = 15$ rad/s cuando el motor genera 900 kW de potencia. Esto provoca un empuje de $F = 1.23$ MN sobre el eje. Si éste tiene un diámetro exterior de 250 mm, determine los esfuerzos principales en cualquier punto situado sobre la superficie del eje.

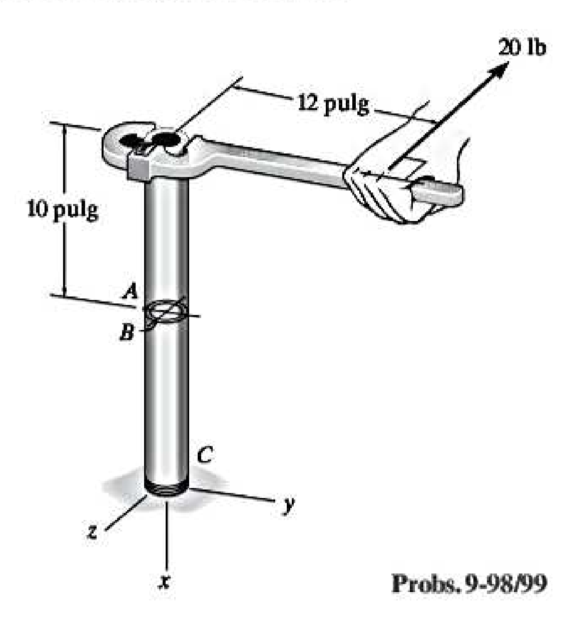
•9-97. El eje propulsor sólido de un barco se extiende hacia afuera del casco. Durante su operación gira a $\omega = 15$ rad/s cuando el motor genera 900 kW de potencia. Esto provoca un empuje de $F = 1.23$ MN sobre el eje. Si éste tiene un diámetro exterior de 250 mm, determine el esfuerzo cortante máximo en el plano en cualquier punto situado sobre la superficie del eje.



Probs. 9-96/97

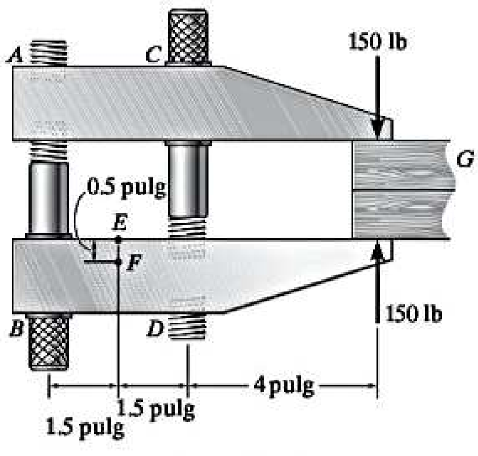
9-98. El tubo de acero tiene un diámetro interior de 2.75 pulg y un diámetro exterior de 3 pulg. Si se encuentra fijo en C y está sometido a la fuerza horizontal de 20 lb que actúa sobre el mango de la llave de torsión ubicada en su extremo, determine los esfuerzos principales sobre el tubo en el punto A, que se encuentra en la superficie de la tubería.

9-99. Resuelva el problema 9-98 para el punto B, que se encuentra en la superficie del tubo.



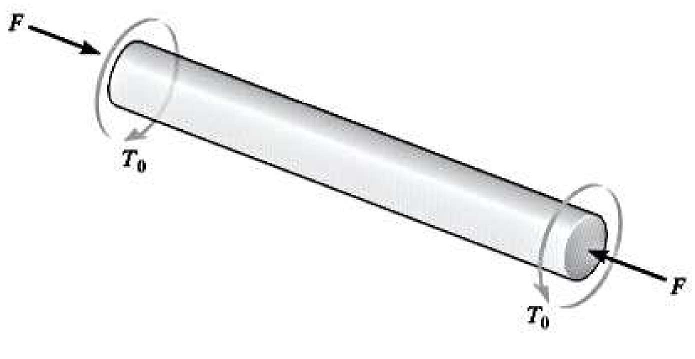
Probs. 9-98/99

*9-100. La mordaza ejerce una fuerza de 150 lb sobre las tablas en G. Determine la fuerza axial en cada tornillo, AB y CD, y después calcule los esfuerzos principales en los puntos E y F. Muestre los resultados sobre los elementos debidamente orientados y ubicados en estos puntos. La sección a través de EF es rectangular y tiene 1 pulg de ancho.



Prob. 9-100

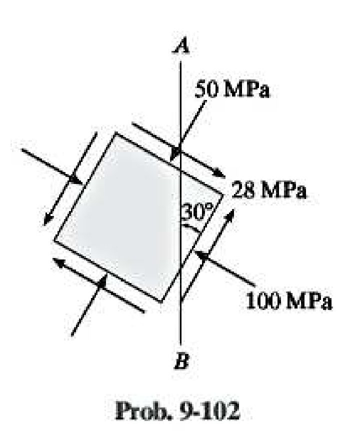
9-101. El eje tiene un diámetro d y está sometido a las cargas mostradas en la figura. Determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el plano que se desarrolla en cualquier punto sobre la superficie del eje.



Prob. 9-101

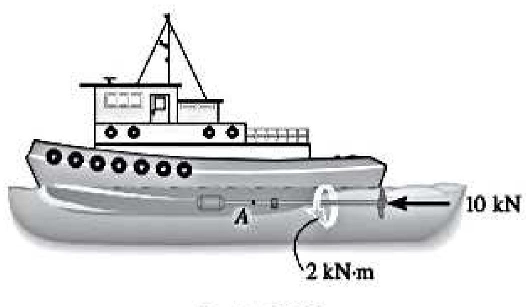
9

9-102. El estado de esfuerzo en un punto de un miembro se muestra sobre el elemento. Determine las componentes que actúan sobre el plano AB.



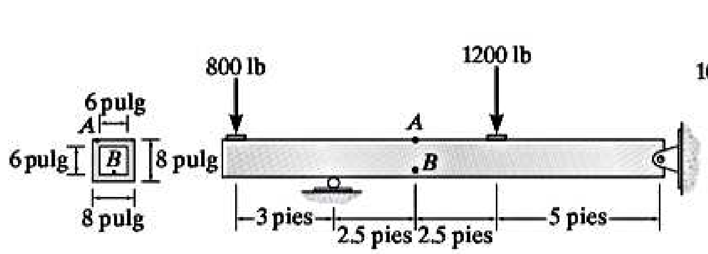
Prob. 9-102

9-103. El eje propulsor del remolcador está sometido a la fuerza de compresión y al par mostrados. Si el eje tiene un diámetro interior de 100 mm y un diámetro exterior de 150 mm, determine los esfuerzos principales en un punto A ubicado sobre la superficie externa.



Prob. 9-103

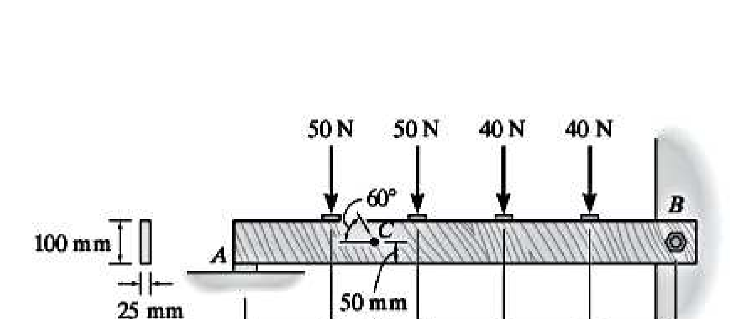
***9-104.** La viga de caja está sometida a la carga indicada. Determine los esfuerzos principales en la viga en los puntos A y B.





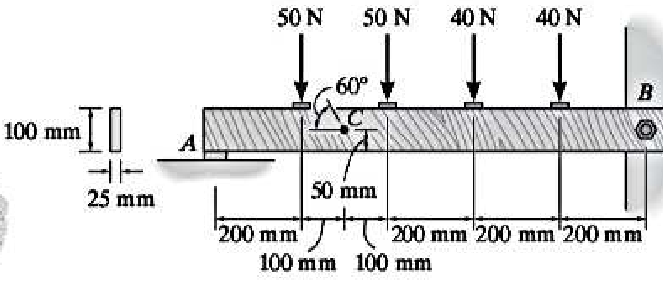
Prob. 9-104

•**9-105.** El puntal de madera está sometido a las cargas mostradas en la figura. Determine los esfuerzos principales que actúan en el punto C y especifique la orientación del elemento en ese punto. El puntal se sostiene mediante un perno (pasador) en B y por medio de un soporte liso en A.

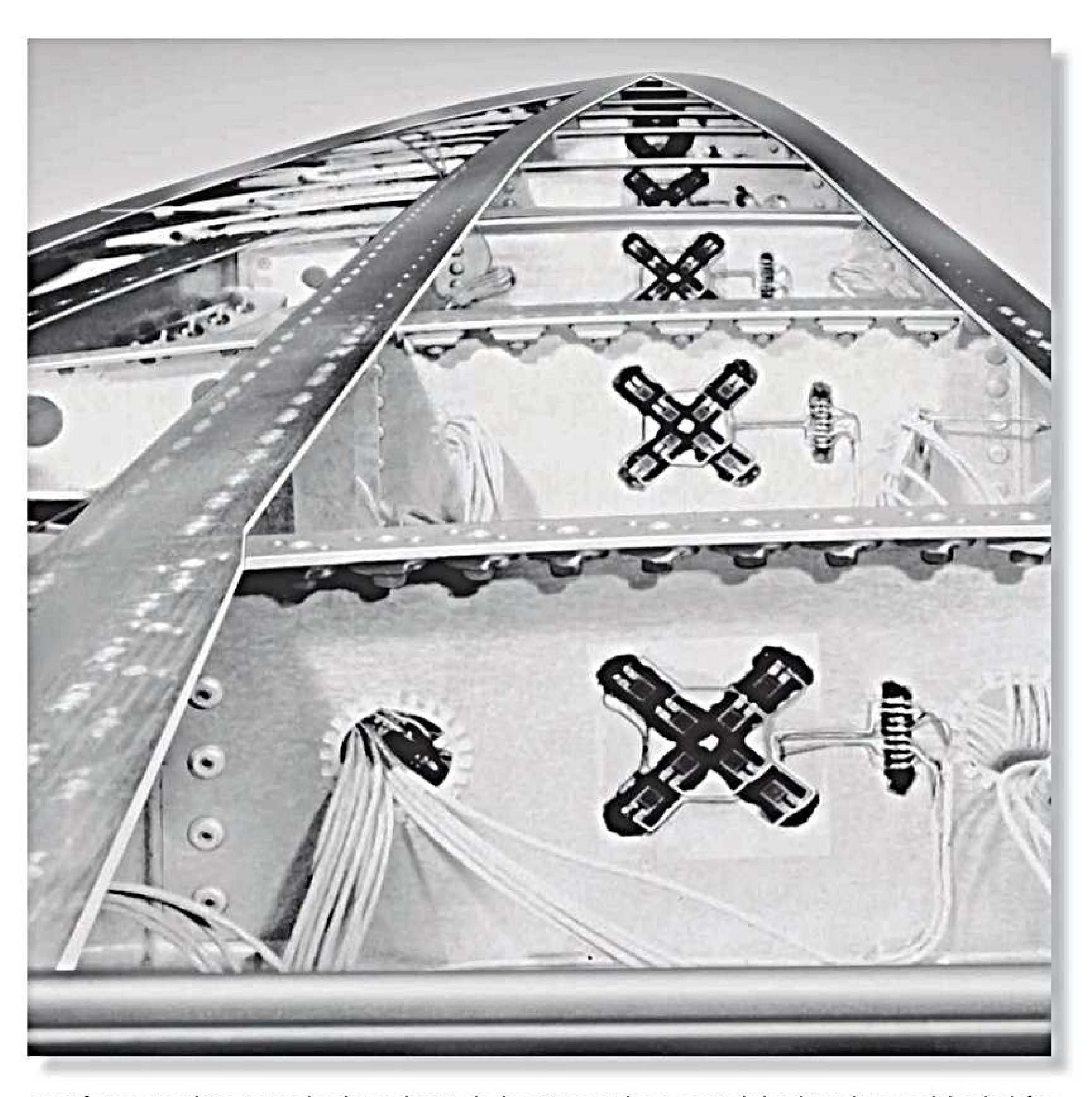


Prob. 9-105

9-106. El puntal de madera está sometido a las cargas mostradas. Si las fibras de la madera en el punto C forman un ángulo de 60° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura, determine los esfuerzos normal y cortante que actúan respectivamente en forma perpendicular y paralela a las fibras, debido a la carga. El puntal se sostiene mediante un perno (pasador) en B y por medio del apoyo liso en A.



Prob. 9-106



Los esfuerzos complejos generados dentro de esta ala de avión se analizan a partir de los datos de un medidor de deformación. (*Cortesía de Measurements Group, Inc., Raleigh, Carolina del Norte, 27611, EUA.*)

Transformación de la deformación

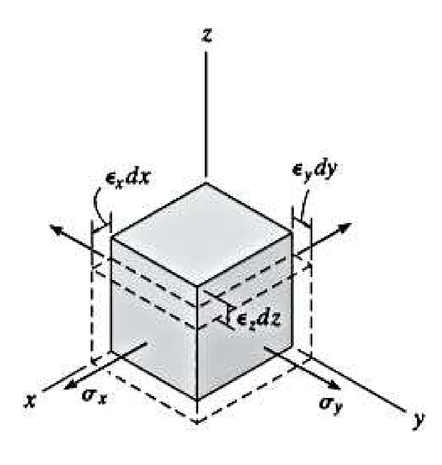
10

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

La transformación de la deformación en un punto es similar a la transformación del esfuerzo y se aplicará en este capítulo como resultado de los métodos del capítulo 9. Aquí también se analizarán diversas formas de medir la deformación y se desarrollarán algunas relaciones importantes entre las propiedades de los materiales, incluyendo una forma generalizada de la ley de Hooke. Al final del capítulo, se estudiarán ciertas teorías usadas para predecir la falla de un material.

10.1 Deformación plana

Como se mencionó en la sección 2.2, el estado general de deformación en un punto de un cuerpo se representa mediante una combinación de tres componentes de la deformación normal, $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ y tres componentes de la deformación cortante γ_{xy}, γ_{xz} y γ_{yz}. Estas seis componentes tienden a deformar cada cara de un elemento del material y, al igual que el esfuerzo, las *componentes* de la deformación normal y cortante en el punto variarán de acuerdo con la orientación del elemento. Las *deformaciones* en un punto suelen determinarse mediante el uso de medidores de deformación, que miden la deformación normal en *direcciones específicas*. Sin embargo, hay ocasiones en que los ingenieros deben transformar estos datos, tanto para el análisis como para el diseño, a fin de obtener la deformación en otras direcciones.



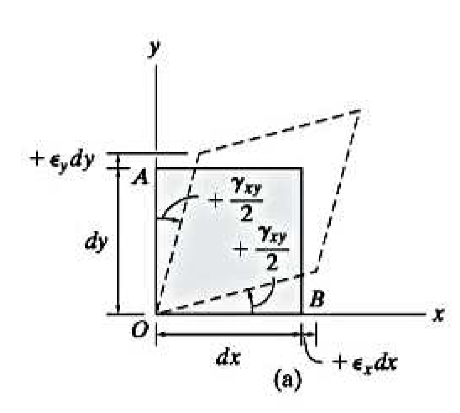
El esfuerzo plano, σ_x, σ_y, no causa deformación plana en el plano *x-y* puesto que $\epsilon_z \neq 0$.

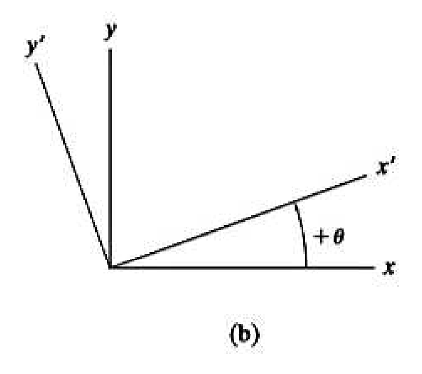
Figura 10-1

Para entender cómo se logra esto, primero se estudiará la ***deformación plana***. En específico, no se considerarán los efectos de las componentes ϵ_z, γ_{xz} y γ_{yz}. Entonces, de manera general, un elemento con deformación plana se somete a dos componentes de deformación normal ϵ_x, ϵ_y y a una componente de deformación cortante γ_{xy}. Aunque la deformación y el esfuerzo planos tienen cada uno tres componentes que se encuentran en el mismo plano, observe que el esfuerzo plano *no* necesariamente causa deformación plana o viceversa. La razón de esto tiene que ver con el efecto de Poisson analizado en la sección 3.6. Por ejemplo, si el elemento de la figura 10-1 se somete al esfuerzo plano σ_x y σ_y, no sólo se producen las deformaciones normales ϵ_x y ϵ_y, sino que *también* hay una deformación normal asociada, ϵ_z. Obviamente, esto *no* es un caso de deformación plana. Por lo tanto, en general, el efecto de Poisson *evitará* la ocurrencia simultánea de deformación plana y esfuerzo plano, a menos que $\nu = 0$.

10.2 Ecuaciones generales para la transformación de la deformación plana

En el análisis de la deformación plana es importante establecer las ecuaciones de transformación que pueden utilizarse para determinar las componentes x' y y' de la deformación normal y cortante en un punto, siempre que las componentes x, y de la deformación sean conocidas. En esencia, éste es un problema de geometría y requiere relacionar las deformaciones y las rotaciones de los segmentos de línea, que representan los lados de los elementos diferenciales que son paralelos a cada conjunto de ejes.





Convención de signos positivos

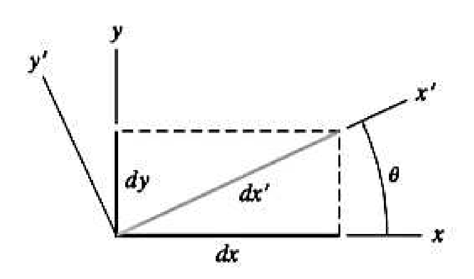
Figura 10-2

Convención de signos. Antes de poder desarrollar las ecuaciones para la transformación de las deformaciones, primero se debe establecer una convención de signos para las transformaciones. En relación con el elemento diferencial mostrado en la figura 10-2*a*, las *deformaciones normales* ϵ_x y ϵ_y son *positivas* si causan *elongación* a lo largo de los ejes *x* y *y*, respectivamente; y la *deformación cortante* γ_{xy} es *positiva* si el ángulo interior *AOB se vuelve menor* a 90°. Esta convención de signos también sigue la convención correspondiente que se usa para el esfuerzo plano, figura 9-5*a*; es decir, σ_x, σ_y, τ_{xy} positivos causarán que el elemento se *deforme* en las direcciones positivas ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}, respectivamente.

El problema aquí consiste en determinar las deformaciones normales y cortantes $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ y $\gamma_{x'y'}$ en un punto, medidas en relación con los ejes x', y' si se conocen ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} medidas en relación con los ejes x, y. Si el ángulo entre los ejes x y x' es θ, entonces, como en el caso de el esfuerzo plano, θ será *positivo* si sigue la curvatura de los dedos de la mano derecha, es decir, si tiene un sentido antihorario como se muestra en la figura 10-2*b*.

Deformaciones normal y cortante. Con el fin de desarrollar la ecuación para la transformación de la deformación $\epsilon_{x'}$, se debe determinar la elongación de un segmento de línea dx' que se encuentra a lo largo del eje x' y está sometido a las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}. Como se muestra en la figura 10-3*a*, las componentes de la línea dx' a lo largo de los ejes x y y son

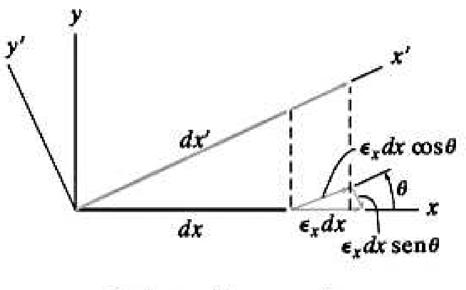
$$dx = dx' \cos\theta$$
$$dy = dx' \operatorname{sen}\theta \qquad (10\text{-}1)$$



Antes de la deformación

(a)

Cuando ocurre la deformación normal positiva ϵ_x, la línea dx se alarga $\epsilon_x dx$, figura 10-3*b*, lo que ocasiona que la línea dx' se alargue $\epsilon_x dx \cos\theta$. Del mismo modo, cuando se produce ϵ_y, la línea dy se alarga $\epsilon_y\, dy$, figura 10-3*c*, lo que ocasiona que la línea dx' se alargue $\epsilon_y\, dy \operatorname{sen}\theta$. Por último, suponiendo que dx permanece fijo en su posición, la deformación cortante γ_{xy}, que es el cambio en el ángulo entre dx y dy, ocasiona que la parte superior de la línea dy se desplace $\gamma_{xy} dy$ a la derecha, como se muestra en la figura 10-3*d*. Esto hace que dx' se alargue $\gamma_{xy} dy \cos\theta$. Si estas tres elongaciones se suman, entonces la elongación resultante de dx' es



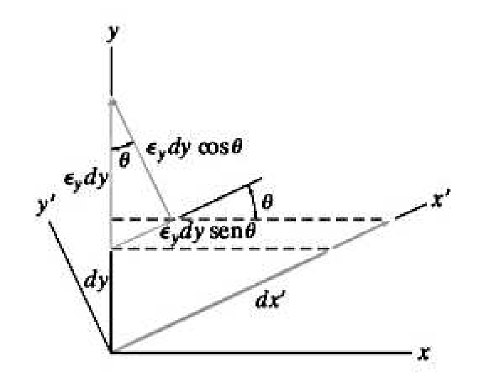
Deformación normal ϵ_x

(b)

$$\delta x' = \epsilon_x\, dx \cos\theta + \epsilon_y\, dy \operatorname{sen}\theta + \gamma_{xy}\, dy \cos\theta$$

A partir de la ecuación 2-2, la deformación normal a lo largo de la línea dx' es $\epsilon_{x'} = \delta x'/dx'$. Por lo tanto, si se usa la ecuación 10-1, se tiene

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad (10\text{-}2)$$

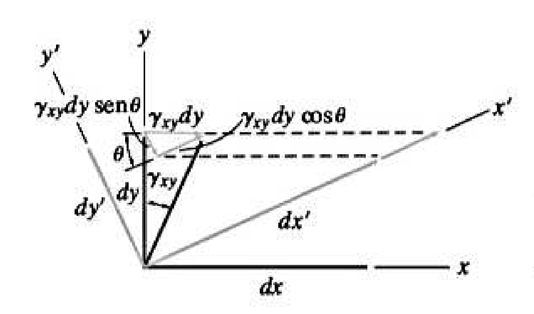


Deformación normal ϵ_y

(c)



La probeta de goma se sujeta entre los dos soportes fijos, por lo que estará sometida a deformación plana cuando se apliquen sobre ella cargas en el plano horizontal.



Deformación cortante γ_{xy}

(d)

Figura 10-3

10

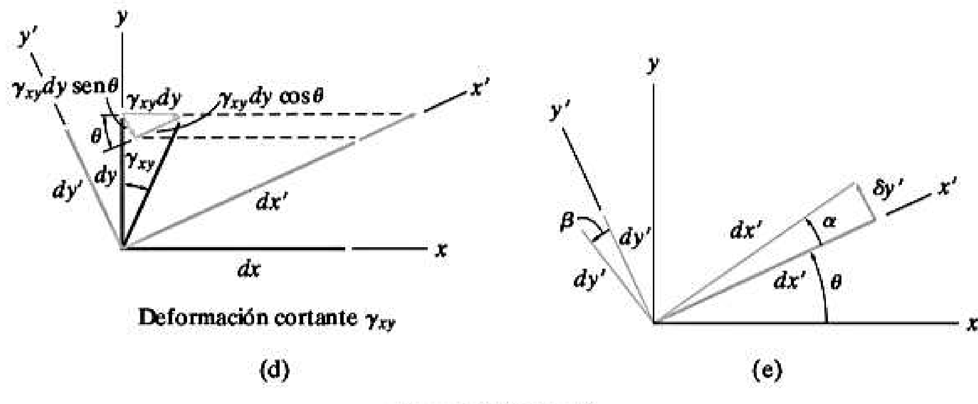


Figura 10-3 (cont.)

La ecuación para la transformación de la deformación $\gamma_{x'y}$ se puede desarrollar considerando la cantidad de rotación que experimenta cada uno de los segmentos de línea dx' y dy' cuando están sometidos a las componentes de transformación ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}. Primero se considerará la rotación de dx', que está definida por el ángulo en sentido antihorario α que se muestra en la figura 10-3*e*. Éste puede determinarse mediante el desplazamiento causado por $\delta y'$ usando $\alpha = \delta y'/dx'$. Para obtener $\delta y'$, considere las siguientes tres componentes de desplazamiento que actúan en la dirección y': una desde ϵ_x, que resulta en $-\epsilon_x dx$ sen θ, figura 10-3*b*; otra desde ϵ_y, que da $\epsilon_y dy \cos\theta$, figura 10-3*c*; y por último desde γ_{xy}, que resulta en $-\gamma_{xy} dy$ sen θ, figura 10-3*d*. Así, $\delta y'$ provocada por todas las componentes de deformación es

$$\delta y' = -\epsilon_x\, dx \operatorname{sen}\theta + \epsilon_y\, dy \cos\theta - \gamma_{xy}\, dy \operatorname{sen}\theta$$

Al dividir cada término entre dx' y al usar la ecuación 10-1, con $\alpha = \delta y'/dx'$, se tiene

$$\alpha = (-\epsilon_x + \epsilon_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \gamma_{xy} \operatorname{sen}^2\theta \qquad (10\text{-}3)$$

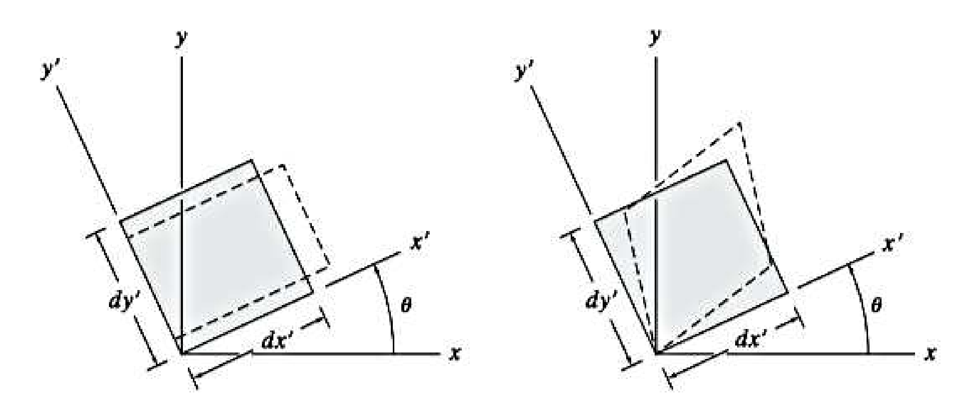
Como se muestra en la figura 10-3*e*, la línea dy' gira una cantidad β. Es posible determinar este ángulo mediante un análisis similar, o simplemente al sustituir θ por $\theta + 90°$ en la ecuación 10-3. Si se usan las identidades sen $(\theta + 90°) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90°) = -$sen θ, se tiene

$$\begin{aligned}\beta &= (-\epsilon_x + \epsilon_y) \operatorname{sen}(\theta + 90°) \cos(\theta + 90°) - \gamma_{xy} \operatorname{sen}^2(\theta + 90°)\\ &= -(-\epsilon_x + \epsilon_y) \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \gamma_{xy} \cos^2\theta\end{aligned}$$

10

Dado que α y β representan la rotación de los lados dx' y dy' de un elemento diferencial cuyos lados estaban originalmente orientados a lo largo de los ejes x' y y', figura 10-3*e*, entonces el elemento se somete a una deformación cortante de

$$\gamma_{x'y'} = \alpha - \beta = -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \qquad (10\text{-}4)$$



Deformación normal positiva, $\epsilon_{x'}$

(a)

Deformación cortante positiva, $\gamma_{x'y'}$

(b)

Figura 10-4

Si se usan las identidades trigonométricas sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ, $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ y $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$, es posible escribir las ecuaciones 10-2 y 10-4 en la forma final

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen}\,2\theta \qquad (10\text{-}5)$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\text{sen}\,2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \qquad (10\text{-}6)$$

Estas ecuaciones para la transformación de la deformación proporcionan la deformación normal $\epsilon_{x'}$ en la dirección x' y la deformación cortante $\gamma_{x'y'}$ de un elemento orientado con un ángulo θ, como se muestra en la figura 10-4. De acuerdo con la convención de signos establecida, si $\epsilon_{x'}$ es *positiva*, el elemento se *alarga* en la dirección positiva x', figura 10-4*a*, y si $\gamma_{x'y'}$ es positiva, el elemento se deforma como se muestra en la figura 10-4*b*.

Si se requiere la deformación normal en la dirección y', ésta puede obtenerse de la ecuación 10-5 simplemente al sustituir θ por $(\theta + 90°)$. El resultado es

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen}\,2\theta \qquad (10\text{-}7)$$

Debe señalarse la similitud entre las tres ecuaciones anteriores y las correspondientes para la transformación del esfuerzo plano, ecuaciones 9-1, 9-2 y 9-3. Por comparación, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{x'}, \sigma_{y'}$ corresponden a $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{x'}, \epsilon_{y'}$; y $\tau_{xy}, \tau_{x'y'}$ corresponden a $\gamma_{xy}/2, \gamma_{x'y'}/2$.

Deformaciones principales. Al igual que en el esfuerzo, un elemento puede orientarse en un punto de modo que la deformación del elemento sea causada sólo por deformaciones normales, *sin* deformación cortante. Cuando esto ocurre, las deformaciones normales se denominan *deformaciones principales* y, si el material es isotrópico, los ejes a lo largo de los cuales suceden estas deformaciones coincidirán con los ejes que definen los planos de esfuerzo principal.

Con base en las ecuaciones 9-4 y 9-5, y la correspondencia entre el esfuerzo y la deformación mencionada anteriormente, la dirección del eje x' y de los dos valores de las deformaciones principales ϵ_1 y ϵ_2 se determinan a partir de



En las juntas donde se unen la parte cilíndrica y la semiesférica del recipiente, suelen desarrollarse esfuerzos complejos, los cuales pueden determinarse al hacer mediciones de la deformación.

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{10-8}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{10-9}$$

Deformación cortante máxima en el plano. Si se usan las ecuaciones 9-6, 9-7 y 9-8, la dirección del eje x', y la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio asociada se determinan a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\tan 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) \tag{10-10}$$

$$\frac{\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{10-11}$$

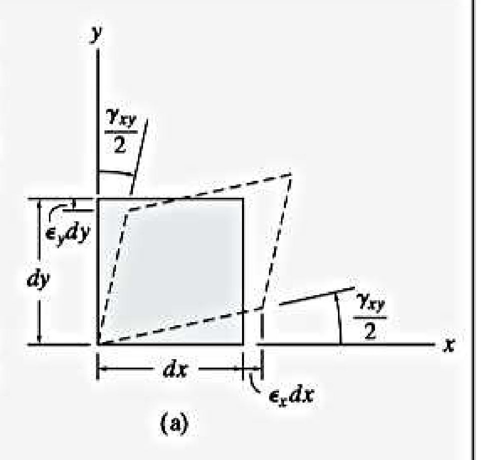
$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \tag{10-12}$$

Puntos importantes

- En caso de esfuerzo plano, el análisis de la deformación plana puede usarse dentro del plano de los esfuerzos para analizar los datos de los medidores de deformación. Sin embargo, recuerde que habrá una deformación normal que será perpendicular a los medidores, debido al efecto de Poisson.
- Cuando el estado de deformación está representado por las deformaciones principales, sobre el elemento no actuará ninguna deformación cortante.
- El estado de deformación en un punto puede representarse en términos de la deformación cortante máxima en el plano. En este caso, también actúa sobre el elemento una deformación normal promedio.
- El elemento que representa la deformación cortante máxima en el plano y sus deformaciones normales promedio asociadas están a 45° respecto a la orientación de un elemento que representa las deformaciones principales.

EJEMPLO 10.1

Un elemento diferencial de material en un punto está sometido a un estado de deformación plana $\epsilon_x = 500(10^{-6})$, $\epsilon_y = -300(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 200(10^{-6})$, que tiende a distorsionar al elemento como se muestra en la figura 10-5*a*. Determine las deformaciones equivalentes que actúan sobre un elemento del material ubicado en el punto, orientado a 30° en *sentido horario* respecto a la posición original.



SOLUCIÓN

A fin de resolver el problema, se usarán las ecuaciones 10-5 y 10-6 para la transformación de las deformaciones. Como θ es *positivo en sentido antihorario*, entonces para este problema $\theta = -30°$. Por lo tanto,

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen } 2\theta$$

$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(-30°))$$

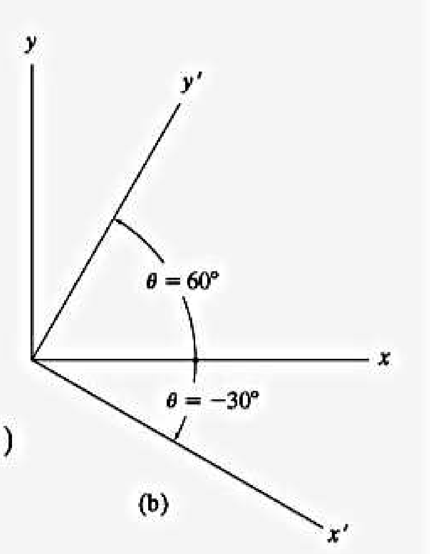
$$+ \left[\frac{200(10^{-6})}{2}\right]\text{sen}(2(-30°))$$

$$\epsilon_{x'} = 213(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\text{sen } 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\,\text{sen}(2(-30°)) + \frac{200(10^{-6})}{2}\cos(2(-30°))$$

$$\gamma_{x'y'} = 793(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$



La deformación en la dirección y' puede obtenerse de la ecuación 10-7 con $\theta = -30°$. Sin embargo, también es posible obtener $\epsilon_{y'}$ mediante la ecuación 10-5 con $\theta = 60°(\theta = -30° + 90°)$, figura 10-5*b*. Al remplazar $\epsilon_{x'}$ con $\epsilon_{y'}$ se tiene,

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen } 2\theta$$

$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(60°))$$

$$+ \frac{200(10^{-6})}{2}\text{sen}(2(60°))$$

$$\epsilon_{y'} = -13.4(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

Estos resultados tienden a distorsionar al elemento como se muestra en la figura 10-5*c*.

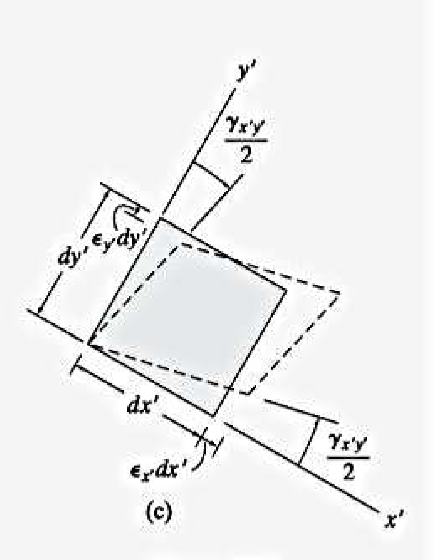


Figura 10-5

EJEMPLO 10.2

Un elemento diferencial de material en un punto está sometido a un estado de deformación plana definido por $\epsilon_x = -350(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 80(10^{-6})$, que tiende a distorsionar al elemento como se muestra en la figura 10-6*a*. Determine las deformaciones principales en el punto y la orientación asociada del elemento.

(a)

SOLUCIÓN

Orientación del elemento. A partir de la ecuación 10-8 se tiene

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$= \frac{80(10^{-6})}{(-350 - 200)(10^{-6})}$$

Por lo tanto, $2\theta_p = -8.28°$ y $-8.28° + 180° = 171.72°$, por lo que

$$\theta_p = -4.14° \text{ y } 85.9° \qquad \textit{Resp.}$$

Cada uno de estos ángulos se mide *en sentido antihorario positivo*, desde el eje x hasta las normales hacia afuera en cada cara del elemento, figura 10-6*b*.

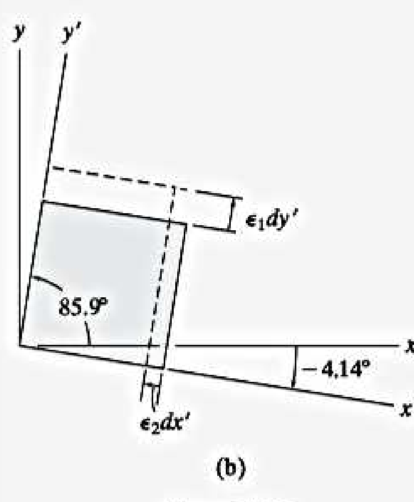
Deformaciones principales. Las deformaciones principales se determinan a partir de la ecuación 10-9. Se tiene

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{(-350 + 200)(10^{-6})}{2} \pm \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$= -75.0(10^{-6}) \pm 277.9(10^{-6})$$

$$\epsilon_1 = 203(10^{-6}) \qquad \epsilon_2 = -353(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Figura 10-6

Es posible determinar cuál de estas dos deformaciones distorsiona el elemento en la dirección x' mediante la aplicación de la ecuación 10-5 con $\theta = -4.14°$. Así,

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \left(\frac{-350 + 200}{2}\right)(10^{-6}) + \left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6})\cos 2(-4.14°)$$

$$+ \frac{80(10^{-6})}{2}\operatorname{sen} 2(-4.14°)$$

$$\epsilon_{x'} = -353(10^{-6})$$

Por lo tanto, $\epsilon_{x'} = \epsilon_2$. Cuando está sometido a deformaciones principales, el elemento se distorsiona como se muestra en la figura 10-6*b*.

EJEMPLO 10.3

Un elemento diferencial de material en un punto está sometido a un estado de deformación plana definido por $\epsilon_x = -350(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 80(10^{-6})$, que tiende a distorsionar al elemento como se muestra en la figura 10-7*a*. Determine la deformación cortante máxima en el plano para el punto y la orientación asociada del elemento.

SOLUCIÓN

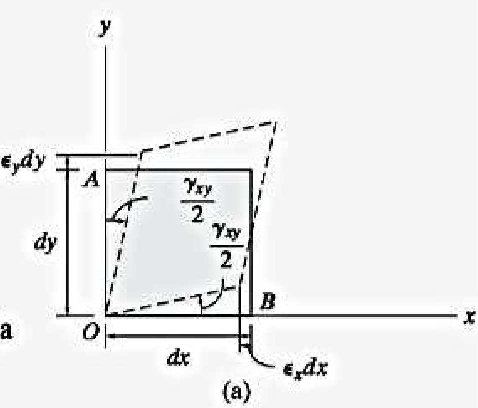
Orientación del elemento. A partir de la ecuación 10-10 se tiene

$$\tan 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) = -\frac{(-350 - 200)(10^{-6})}{80(10^{-6})}$$

Por lo tanto, $2\theta_s = 81.72°$ y $81.72° + 180° = 261.72°$, por lo que

$$\theta_s = 40.9° \text{ y } 131°$$

Observe que esta orientación está a 45° respecto a la mostrada en la figura 10-6*b* del ejemplo 10.2, tal como se esperaba.





Deformación cortante máxima en el plano. Al aplicar la ecuación 10-11 se obtiene

$$\frac{\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 556(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

Debido a la raíz cuadrada, el signo adecuado de $\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}}$ puede obtenerse al aplicar la ecuación 10-6 con $\theta = 40.9°$. Se tiene

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6}) \operatorname{sen} 2(40.9°) + \frac{80(10^{-6})}{2}\cos 2(40.9°)$$

$$\gamma_{x'y'} = 556(10^{-6})$$

Este resultado es positivo y por consiguiente $\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}}$ tiende a distorsionar al elemento de modo que el ángulo recto entre dx' y dy' se *reduce* (convención de signos positivos), figura 10-7*b*.

Además, hay deformaciones normales promedio asociadas impuestas sobre el elemento que se determinan a partir de la ecuación 10-12:

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{-350 + 200}{2}(10^{-6}) = -75(10^{-6})$$

Estas deformaciones tienden a causar que el elemento se contraiga, figura 10-7*b*.

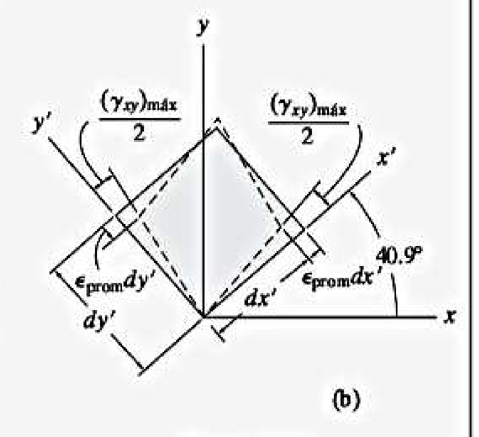


Figura 10-7

10

*10.3 Círculo de Mohr para deformación plana

Como las ecuaciones para la transformación de la deformación plana son matemáticamente similares a las ecuaciones para la transformación del esfuerzo plano, también es posible resolver problemas que implican la transformación de la deformación mediante el círculo de Mohr.

Al igual que en el caso del esfuerzo, el parámetro θ en las ecuaciones 10-5 y 10-6 puede eliminarse y el resultado se reescribe de la siguiente manera

$$(\epsilon_{x'} - \epsilon_{\text{prom}})^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = R^2 \tag{10-13}$$

donde

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

La ecuación 10-13 representa la ecuación del círculo de Mohr para la deformación. Tiene su centro en el eje ϵ en el punto $C(\epsilon_{\text{prom}}, 0)$ y un radio R.

Procedimiento de análisis

El procedimiento para dibujar el círculo de Mohr para la deformación es igual al establecido para el esfuerzo.

Construcción del círculo.

- Establezca un sistema de coordenadas de tal manera que la abscisa represente la deformación normal ϵ, con *los valores positivos a la derecha*, y la ordenada represente *la mitad* de la deformación cortante $\gamma/2$, con *los valores positivos hacia abajo*, figura 10-8.
- Usando la convención de signos positivos para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, como se muestra en la figura 10-2, determine el centro C del círculo, que se encuentra en el eje ϵ a una distancia $\epsilon_{\text{prom}} = (\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ desde el origen, figura 10-8.
- Grafique el punto de referencia A que tiene coordenadas $A(\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$. Este punto representa el caso para el cual el eje x' coincide con el eje x. Por lo tanto, $\theta = 0°$, figura 10-8.
- Conecte el punto A con el centro C del círculo y determine el radio R del círculo a partir del triángulo en gris oscuro, de la figura 10-8.
- Una vez que se ha determinado R, grafique el círculo.

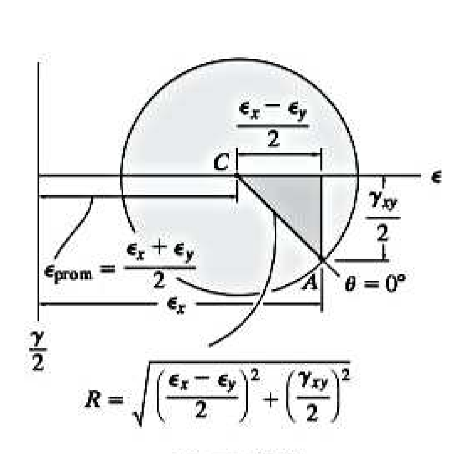


Figura 10-8

Deformaciones principales.

- Las deformaciones principales ϵ_1 y ϵ_2 se determinan a partir del círculo como las coordenadas de los puntos *B* y *D*, que es donde $\gamma/2 = 0$, figura 10-9*a*.
- La orientación del plano sobre el que actúa ϵ_1 puede determinarse a partir del círculo al calcular $2\theta_{p_1}$ mediante la trigonometría. Aquí, este ángulo resulta tener un sentido antihorario *desde* la línea de referencia radial *CA* *hacia* la línea *CB*, figura 10-9*a*. Recuerde que la *rotación* de θ_{p_1} debe tener la *misma dirección*, desde el eje de referencia del elemento *x* hacia el eje *x'*, figura 10-9*b*.*
- Cuando se indica que ϵ_1 y ϵ_2 son positivas como en la figura 10-9*a*, el elemento de la figura 10-9*b* se alargará en las direcciones *x'* y *y'*, como lo muestra la línea discontinua.

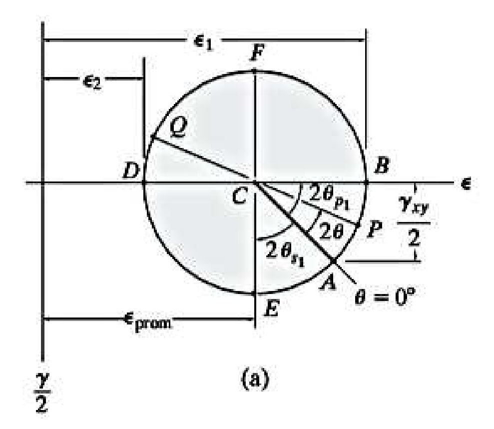
Deformación cortante máxima en el plano.

- La deformación normal promedio y la mitad de la deformación cortante máxima en el plano se determinan a partir del círculo como las coordenadas del punto *E* o *F*, figura 10-9*a*.
- La orientación del plano sobre el que actúan $\gamma_{\text{máx en el plano}}$ y ϵ_{prom} puede determinarse con base en el círculo al calcular $2\theta_{s_1}$ mediante la trigonometría. Aquí, este ángulo resulta tener un sentido horario *desde* la línea de referencia radial *CA* *hacia* la línea *CE*, figura 10-9*a*. Recuerde que la *rotación* de θ_{s_1} debe tener esa *misma dirección*, desde el eje de referencia del elemento *x* hacia el eje *x'*, figura 10-9*c*.*

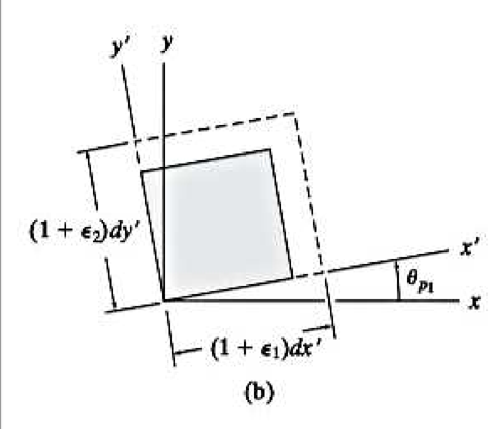
Deformaciones en un plano arbitrario.

- Las componentes de las deformaciones normal y cortante $\epsilon_{x'}$ y $\gamma_{x'y'}$ para un plano orientado con un ángulo θ, figura 10-9*d*, pueden obtenerse con base en el círculo usando la trigonometría a fin de determinar las coordenadas del punto *P*, figura 10-9*a*.
- Para ubicar a *P*, el ángulo conocido θ del eje *x'* se mide en el círculo como 2θ. Esta medición se hace *desde* la línea de referencia radial *CA* *hasta* la línea radial *CP*. Recuerde que las mediciones para 2θ en el círculo deben tener la misma dirección que θ para el eje *x'*.*
- Si se requiere el valor de $\epsilon_{y'}$, éste puede determinarse al calcular las coordenadas del punto *Q* en la figura 10-9*a*. La línea *CQ* está a 180° de *CP* y por lo tanto representa un giro de 90° del eje *x'*.

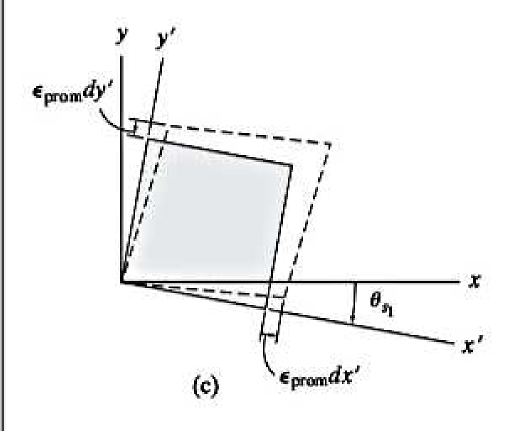
*Si el eje $\gamma/2$ se construyera como *positivo hacia arriba*, entonces el ángulo 2θ en el círculo se mediría en *dirección opuesta* a la orientación θ del plano.



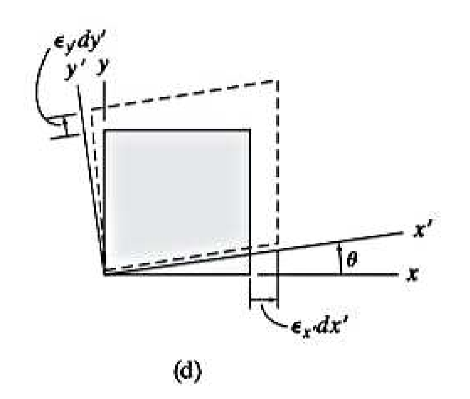
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10-9

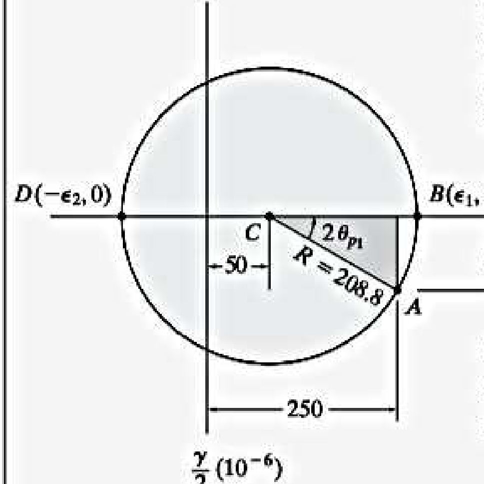
10

EJEMPLO 10.4

El estado de deformación plana en un punto se representa mediante las componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -150(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = 120(10^{-6})$. Determine las deformaciones principales y la orientación del elemento.

SOLUCIÓN

Construcción del círculo. Los ejes ϵ y $\gamma/2$ se establecen en la figura 10-10*a*. Recuerde que el eje $\gamma/2$ *positivo* debe estar dirigido *hacia abajo* de manera que las rotaciones del elemento *en sentido antihorario* correspondan a la rotación *antihoraria* alrededor del círculo, y viceversa. El centro C del círculo está situado sobre el eje ϵ en



(a)

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{250 + (-150)}{2}(10^{-6}) = 50(10^{-6})$$

Como $\gamma_{xy}/2 = 60(10^{-6})$, el punto de referencia $A(\theta = 0°)$ tiene las coordenadas $A(250(10^{-6}), 60(10^{-6}))$. A partir del triángulo (en gris más oscuro) de la figura 10-10*a*, el radio del círculo es CA; es decir,

$$R = \left[\sqrt{(250 - 50)^2 + (60)^2}\right](10^{-6}) = 208.8(10^{-6})$$

Deformaciones principales. Las coordenadas ϵ de los puntos B y D representan las deformaciones principales. Éstas son

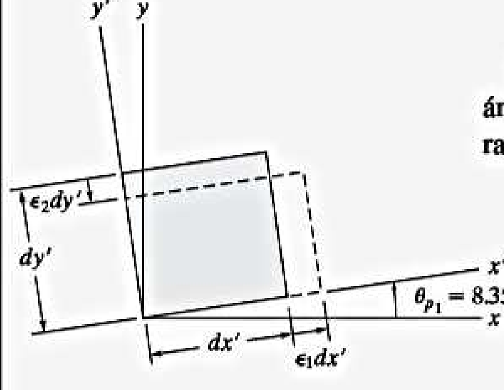
$$\epsilon_1 = (50 + 208.8)(10^{-6}) = 259(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

$$\epsilon_2 = (50 - 208.8)(10^{-6}) = -159(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

La dirección de la deformación principal positiva ϵ_1 se define por el ángulo $2\theta_{p_1}$ *en sentido antihorario*, medido desde la línea de referencia radial CA $(\theta = 0°)$ hacia la línea CB. Se tiene

$$\tan 2\theta_{p_1} = \frac{60}{(250 - 50)}$$

$$\theta_{p_1} = 8.35° \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

Figura 10-10

Por lo tanto, el lado dx' del elemento se orienta a 8.35° *en sentido antihorario*, como se muestra en la figura 10-10*b*. Esto también define la dirección de ϵ_1. La deformación del elemento también se muestra en la figura.

EJEMPLO 10.5

El estado de deformación plana en un punto se representa mediante las componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -150(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = 120(10^{-6})$. Determine las deformaciones cortantes máximas en el plano y la orientación de un elemento.

SOLUCIÓN

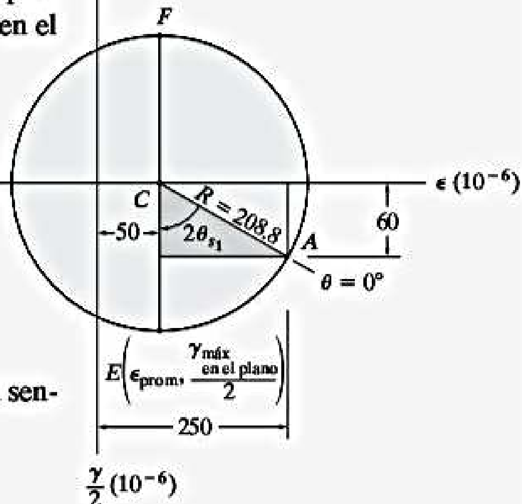
El círculo se estableció en el ejemplo anterior y se muestra en la figura 10-11*a*.

Deformación cortante máxima en el plano. La mitad de la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio se representan mediante las coordenadas del punto *E* o *F* en el círculo. A partir de las coordenadas del punto *E*,

$$\frac{(\gamma_{x'y'})_{\substack{\text{máx}\\\text{en el plano}}}}{2} = 208.8(10^{-6})$$

$$(\gamma_{x'y'})_{\substack{\text{máx}\\\text{en el plano}}} = 418(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

$$\epsilon_{\text{prom}} = 50(10^{-6})$$



(a)

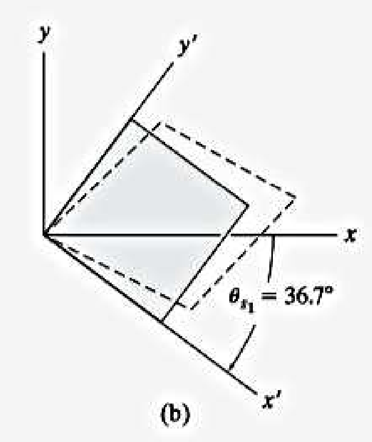
Figura 10-11

Para orientar el elemento se puede determinar el ángulo $2\theta_{s_1}$ en sentido horario, medido desde *CA* ($\theta = 0°$) hasta *CE*.

$$2\theta_{s_1} = 90° - 2(8.35°)$$

$$\theta_{s_1} = 36.7° \qquad \textit{Resp.}$$

Este ángulo se muestra en la figura 10-11*b*. Como la deformación cortante definida a partir del punto *E* en el círculo tiene un valor positivo y la deformación normal promedio también es positiva, estas deformaciones distorsionan el elemento en la forma discontinua que se muestra en la figura.



(b)

EJEMPLO 10.6

El estado de deformación plana en un punto se representa sobre un elemento con componentes $\epsilon_x = -300(10^{-6})$, $\epsilon_y = -100(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = 100(10^{-6})$. Determine el estado de deformación de un elemento orientado a 20° en sentido horario desde esta posición reportada.

SOLUCIÓN

Construcción del círculo. Los ejes ϵ y $\gamma/2$ se establecen en la figura 10-12*a*. El centro del círculo está en el eje ϵ en

$$\epsilon_{\text{prom}} = \left(\frac{-300 - 100}{2}\right)(10^{-6}) = -200(10^{-6})$$

(a)

El punto de referencia A tiene coordenadas $A(-300(10^{-6}), 50(10^{-6}))$. Por lo tanto, el radio CA determinado a partir del triángulo en gris oscuro es

$$R = \left[\sqrt{(300 - 200)^2 + (50)^2}\right](10^{-6}) = 111.8(10^{-6})$$

Deformaciones sobre el elemento inclinado. Como el elemento debe estar orientado a 20° *en sentido horario*, se debe establecer una línea radial CP, $2(20°) = 40°$ *en sentido horario*, medido desde CA $(\theta = 0°)$, figura 10-12*a*. Las coordenadas del punto $P(\epsilon_{x'}, \gamma_{x'y'}/2)$ se obtienen de la geometría del círculo. Observe que

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{50}{(300 - 200)}\right) = 26.57°, \qquad \psi = 40° - 26.57° = 13.43°$$

Así que,

$$\epsilon_{x'} = -(200 + 111.8 \cos 13.43°)(10^{-6})$$
$$= -309(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

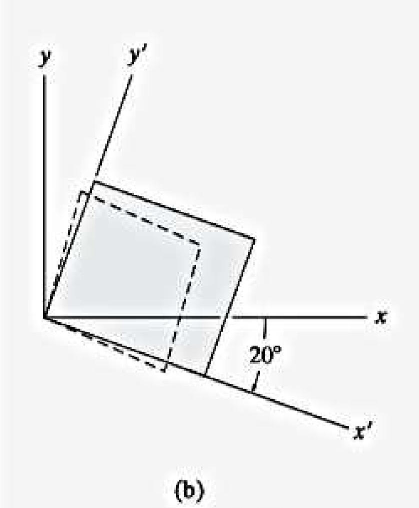
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -(111.8 \operatorname{sen} 13.43°)(10^{-6})$$

$$\gamma_{x'y'} = -52.0(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

La deformación normal $\epsilon_{y'}$ puede determinarse a partir de las coordenadas del punto Q en el círculo, figura 10-12*a*, ¿por qué?

$$\epsilon_{y'} = -(200 - 111.8 \cos 13.43°)(10^{-6}) = -91.3(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$

Como resultado de estas deformaciones, el elemento se distorsiona en relación con los ejes x' y y' como se muestra en la figura 10-12*b*.



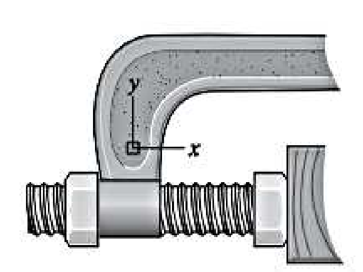
(b)

Figura 10-12

PROBLEMAS

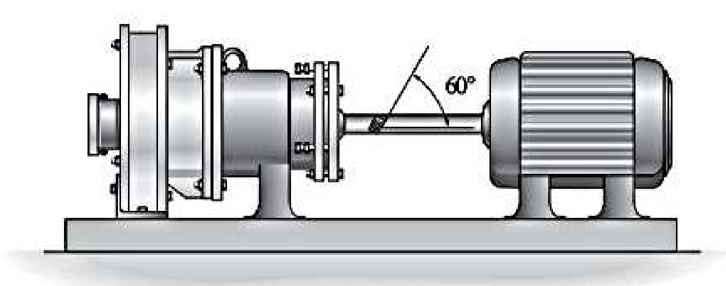
10-1. Demuestre que la suma de las deformaciones normales en direcciones perpendiculares es constante.

10-2. El estado de deformación en el punto tiene componentes de $\epsilon_x = 200(10^{-6})$, $\epsilon_y = -300(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = 400(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de esfuerzos a fin de determinar las deformaciones equivalentes en el plano de un elemento orientado a un ángulo de 30° en sentido antihorario desde la posición original. Grafique el elemento deformado debido a estas deformaciones en el plano x-y.



Prob. 10-2

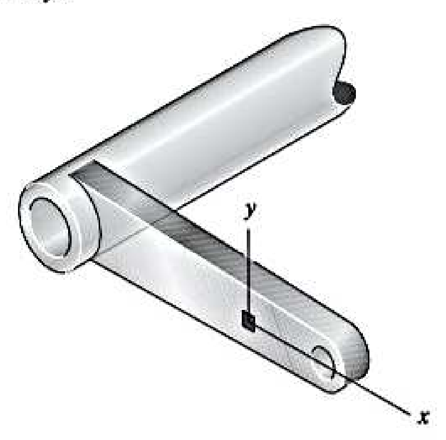
10-3. Un medidor de deformación se monta sobre el eje de acero A-36 con 1 pulg de diámetro, como se muestra en la figura. Cuando el eje gira con una velocidad angular de $\omega = 1760$ rev/min, la lectura del medidor de deformación es de $\epsilon = 800(10^{-6})$. Determine la salida de potencia del motor. Suponga que el eje sólo está sometido a un par de torsión.



Prob. 10-3

***10-4.** El estado de deformación en el punto sobre una llave de torsión tiene componentes $\epsilon_x = 120(10^{-6})$, $\epsilon_y = -180(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso especifique la orientación del elemento y muestre la forma en que las deformaciones distorsionan al elemento en el plano x-y.

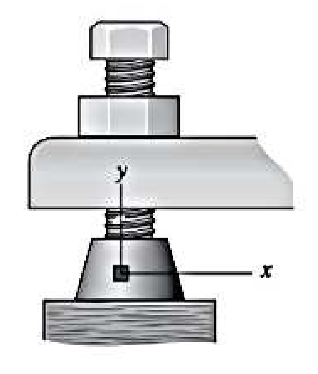
10-5. El estado de deformación en el punto sobre el brazo tiene componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -450(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -825(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso especifique la orientación del elemento y muestre la forma en que las deformaciones distorsionan al elemento en el plano x-y.



Prob. 10-5

10-6. El estado de deformación en el punto tiene componentes $\epsilon_x = -100(10^{-6})$, $\epsilon_y = 400(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -300(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar las deformaciones equivalentes en el plano sobre un elemento orientado a un ángulo de 60° en sentido antihorario desde la posición original. Grafique el elemento deformado debido a estas deformaciones en el plano x-y.

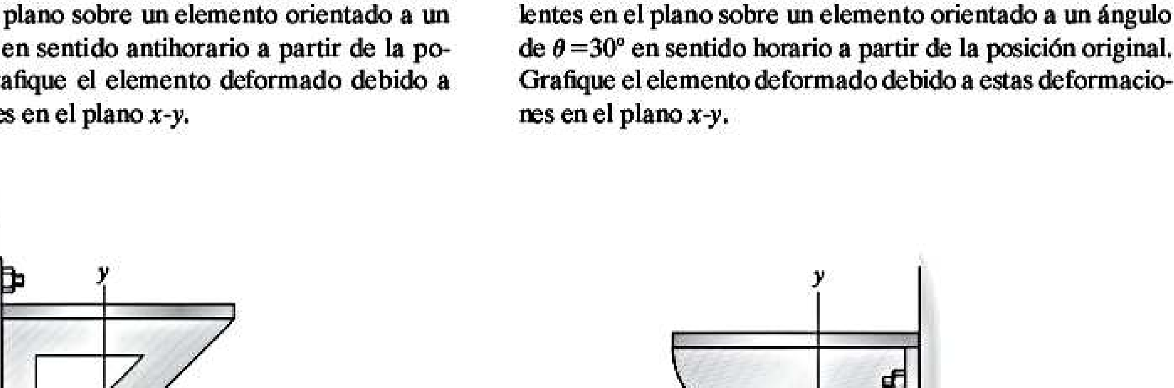
10-7. El estado de deformación en el punto tiene componentes $\epsilon_x = 100(10^{-6})$, $\epsilon_y = 300(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -150(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar las deformaciones equivalentes en el plano sobre un elemento orientado a $\theta = 30°$ en sentido horario. Grafique el elemento deformado debido a estas deformaciones en el plano x-y.



Probs. 10-6/7

***10-8.** El estado de deformación en el punto de la ménsula tiene componentes $\epsilon_x = -200(10^{-6})$, $\epsilon_y = -650(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -175(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar las deformaciones equivalentes en el plano sobre un elemento orientado a un ángulo de $\theta = 20°$ en sentido antihorario a partir de la posición original. Grafique el elemento deformado debido a estas deformaciones en el plano *x-y*.

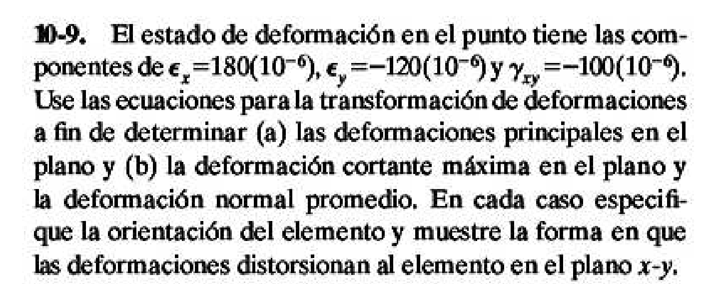
10-10. El estado de deformación en el punto de la ménsula tiene componentes $\epsilon_x = 400(10^{-6})$, $\epsilon_y = -250(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = 310(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar las deformaciones equivalentes en el plano sobre un elemento orientado a un ángulo de $\theta = 30°$ en sentido horario a partir de la posición original. Grafique el elemento deformado debido a estas deformaciones en el plano *x-y*.



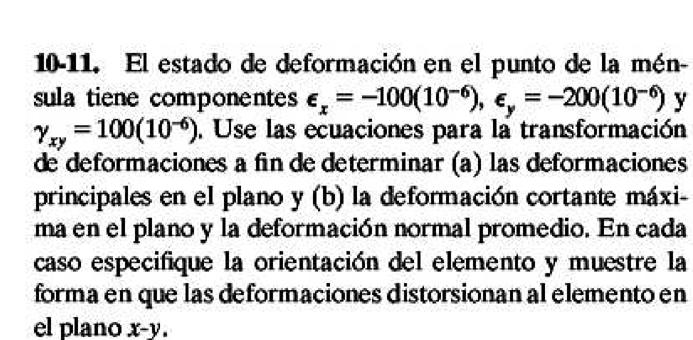
Prob. 10-8

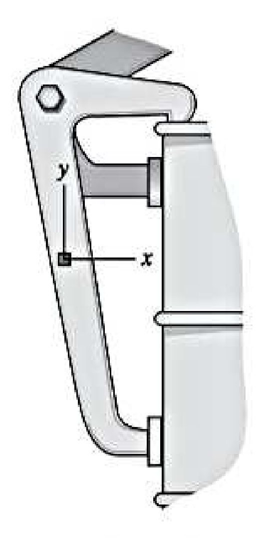
Prob. 10-10

10-9. El estado de deformación en el punto tiene las componentes de $\epsilon_x = 180(10^{-6})$, $\epsilon_y = -120(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -100(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso especifique la orientación del elemento y muestre la forma en que las deformaciones distorsionan al elemento en el plano *x-y*.

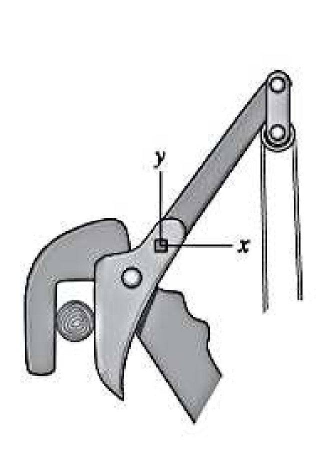


10-11. El estado de deformación en el punto de la ménsula tiene componentes $\epsilon_x = -100(10^{-6})$, $\epsilon_y = -200(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = 100(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso especifique la orientación del elemento y muestre la forma en que las deformaciones distorsionan al elemento en el plano *x-y*.





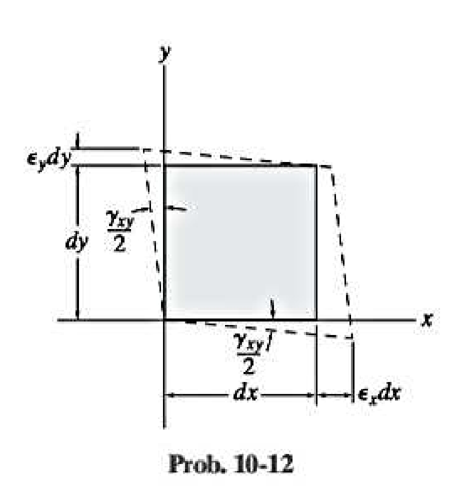
Prob. 10-9



Prob. 10-11

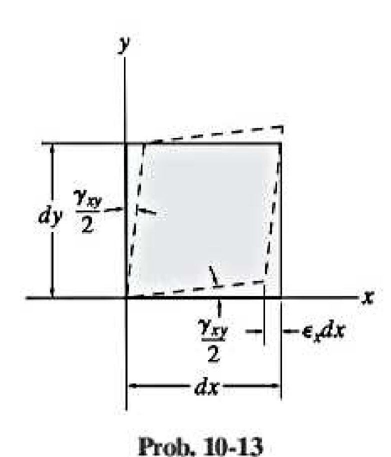
10

•10-12. El estado de deformación plana sobre un elemento está dado por $\epsilon_x = 500(10^{-6})$, $\epsilon_y = 300(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -200(10^{-6})$. Determine el estado equivalente de deformación sobre un elemento en el mismo punto orientado a 45° en sentido horario respecto al elemento original.



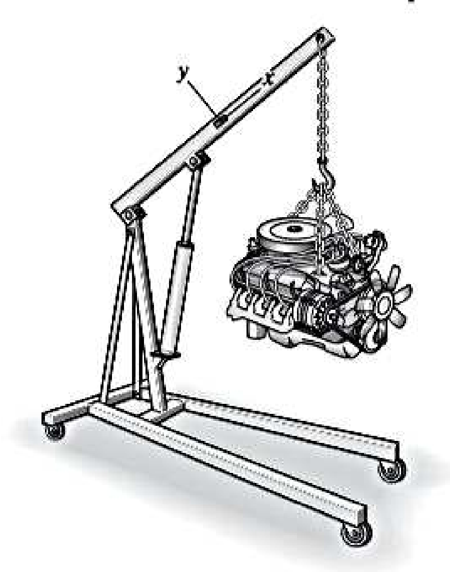
Prob. 10-12

10-13. El estado de deformación plana sobre un elemento es $\epsilon_x = -300(10^{-6})$, $\epsilon_y = 0$ y $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. Determine el estado de esfuerzo equivalente que represente (a) las deformaciones principales y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio asociada. Especifique la orientación de los elementos correspondientes para estos estados de deformación con respecto al elemento original.



Prob. 10-13

10-14. El estado de deformación en un punto del aguilón de una grúa hidráulica para motores tiene las componentes de $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = 300(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -180(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso especifique la orientación del elemento y muestre la forma en que las deformaciones distorsionan al elemento en el plano *x-y*.



Prob. 10-14

■10-15. Considere el caso general de deformación plana donde ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} son conocidas. Escriba un programa de computadora que pueda usarse para determinar las deformaciones normal y cortante, $\epsilon_{x'}$ y $\gamma_{x'y'}$, sobre el plano de un elemento orientado a θ respecto a la horizontal. Además, incluya las deformaciones principales y la orientación del elemento, así como la deformación cortante máxima en el plano, la deformación normal promedio y la orientación del elemento.

•10-16. El estado de deformación en el punto de un soporte tiene las componentes de $\epsilon_x = 350(10^{-6})$, $\epsilon_y = 400(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -675(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones a fin de determinar (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso especifique la orientación del elemento y muestre la forma en que las deformaciones distorsionan al elemento en el plano *x-y*.

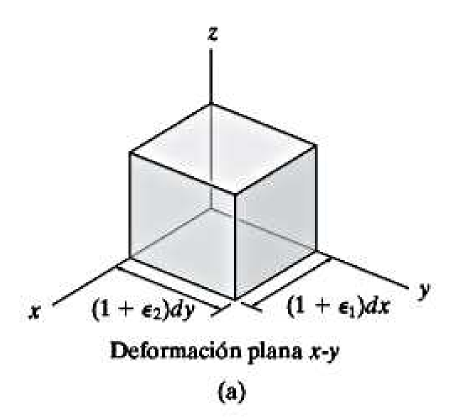
•10-17. Resuelva el inciso (a) del problema 10-4 usando el círculo de Mohr.

10-18. Resuelva el inciso (b) del problema 10-4 usando el círculo de Mohr.

10-19. Resuelva el problema 10-8 usando el círculo de Mohr.

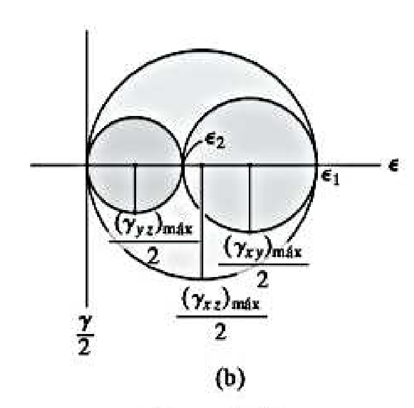
•10-20. Resuelva el problema 10-10 usando el círculo de Mohr.

•10-21. Resuelva el problema 10-14 usando el círculo de Mohr.



Deformación plana x-y

(a)



(b)

Figura 10-13

*10.4 Deformación cortante máxima absoluta

En la sección 9.5 se señaló que en el caso del esfuerzo plano, el esfuerzo cortante máximo absoluto en un elemento de material se producirá fuera del plano cuando los esfuerzos principales tengan el mismo signo, es decir, cuando ambos sean de tensión o de compresión. Un resultado similar se produce para la deformación plana. Por ejemplo, si las deformaciones principales en el plano causan elongaciones, figura 10-13*a*, entonces los tres círculos de Mohr que describen las componentes de las deformaciones normal y cortante para los elementos orientados alrededor de los ejes x', y' y z' son como se muestran en la figura 10-13*b*. Por inspección, el círculo más grande tiene un radio $R = (\gamma_{x'z'})_{\text{máx}}/2$. Por lo tanto,

$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = (\gamma_{x'z'})_{\text{máx}} = \epsilon_1 \qquad (10\text{-}14)$$

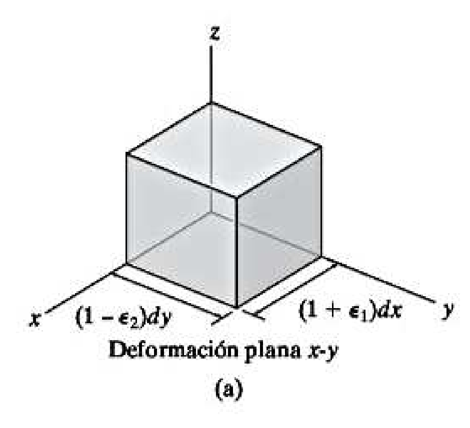
ϵ_1 y ϵ_2 tienen el mismo signo

Este valor proporciona la *deformación cortante máxima absoluta* para el material. Observe que es *mayor* que la deformación cortante máxima en el plano, que es $(\gamma_{x'y'})_{\text{máx}} = \epsilon_1 - \epsilon_2$.

Considere ahora el caso en que una de las deformaciones principales en el plano es de *signo contrario* a la otra deformación principal en el plano, de manera que ϵ_1 causa elongación y ϵ_2 ocasiona contracción, figura 10-14*a*. Los círculos de Mohr, que describen las deformaciones en cada orientación del elemento respecto a los ejes x', y', z', se muestran en la figura 10-14*b*. Aquí

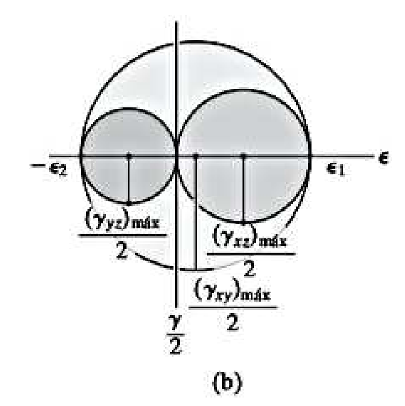
$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = (\gamma_{x'y'})_{\substack{\text{en el plano}\\ \text{máx}}} = \epsilon_1 - \epsilon_2 \qquad (10\text{-}15)$$

ϵ_1 y ϵ_2 tienen signos opuestos



Deformación plana x-y

(a)



(b)

Figura 10-14

Por lo tanto, es posible resumir los dos casos anteriores de la siguiente manera. Si las dos deformaciones principales en el plano tienen el mismo signo, la *deformación cortante máxima absoluta* se producirá *fuera de plano* y tendrá un valor de $\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = \epsilon_{\text{máx}}$. Sin embargo, si las deformaciones principales en el plano son de *signos opuestos*, entonces la deformación cortante máxima absoluta es *igual* a la deformación cortante máxima en el plano.

Puntos importantes

- La deformación cortante máxima absoluta será *mayor* que la deformación cortante máxima en el plano siempre que las deformaciones principales en el plano tengan el *mismo signo*. Cuando esto ocurre, la deformación cortante máxima absoluta actúa fuera del plano.
- Si las deformaciones principales en el plano son de signos opuestos, entonces la deformación cortante máxima absoluta será igual a la deformación cortante máxima en el plano.

10

EJEMPLO 10.7

El estado de deformación plana en un punto está representado por las componentes de deformación $\epsilon_x = -400(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. Determine la deformación cortante máxima en el plano y la deformación cortante máxima absoluta.

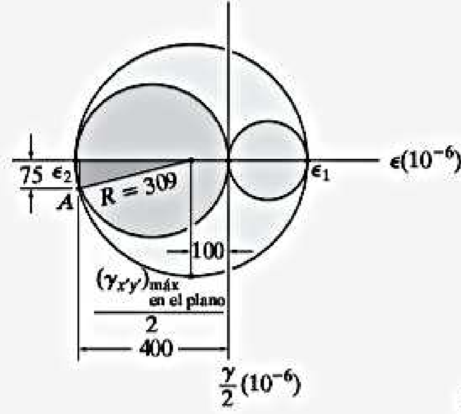


Figura 10-15

SOLUCIÓN

Deformación cortante máxima en el plano. Este problema se resolverá usando el círculo de Mohr. A partir de las componentes de deformación, el centro del círculo está sobre el eje ϵ en

$$\epsilon_{prom} = \frac{-400 + 200}{2}(10^{-6}) = -100(10^{-6})$$

Como $\gamma_{xy}/2 = 75(10^{-6})$, el punto de referencia A tiene coordenadas $(-400(10^{-6}), 75(10^{-6}))$. Por lo tanto, como se muestra en la figura 10-15, el radio del círculo es

$$R = \left[\sqrt{(400 - 100)^2 + (75)^2}\right](10^{-6}) = 309(10^{-6})$$

Si se calculan las deformaciones principales en el plano con base en el círculo, se tiene

$$\epsilon_1 = (-100 + 309)(10^{-6}) = 209(10^{-6})$$
$$\epsilon_2 = (-100 - 309)(10^{-6}) = -409(10^{-6})$$

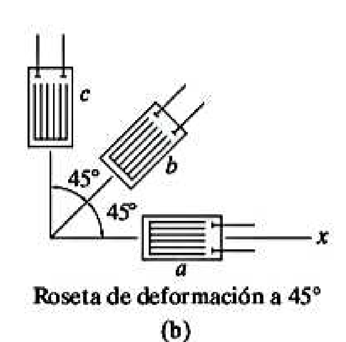
Además, la deformación cortante máxima en el plano es

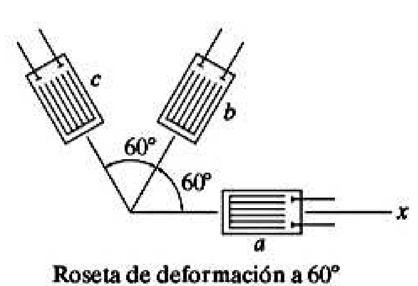
$$\gamma_{\substack{máx \\ en\ el\ plano}} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = [209 - (-409)](10^{-6}) = 618(10^{-6}) \quad \textit{Resp.}$$

Deformación cortante máxima absoluta. De los resultados anteriores se tiene $\epsilon_1 = 209(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -409(10^{-6})$. Además, en la figura 10-15 se muestran los tres círculos de Mohr graficados para orientaciones del elemento sobre cada uno de los ejes x, y, z. Se puede observar que las *deformaciones principales en el plano tienen signos opuestos* y la deformación cortante máxima en el plano *también es* la deformación cortante máxima absoluta; es decir,

$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 618(10^{-6}) \quad \textit{Resp.}$$

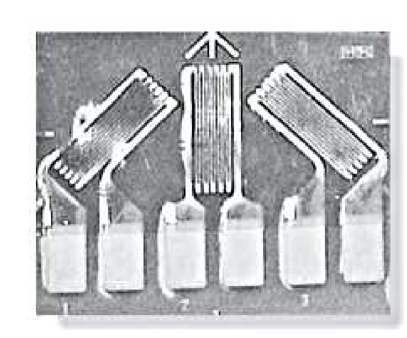
10





Roseta de deformación a 45°

(b)



Roseta de deformación a 60°

(c)

Figura 10-16

Roseta de deformación de resistencia eléctrica típica, con una disposición a 45°.

10.5 Rosetas de deformación

Cuando se realiza una prueba de tensión sobre una probeta como se analizó en la sección 3.1, la deformación normal en el material se mide utilizando un ***medidor de deformación de resistencia eléctrica***, que consiste en una malla de alambre o un pedazo de hoja metálica pegado a la probeta. Sin embargo, para una carga general sobre un cuerpo las deformaciones en un punto sobre su superficie libre se determinan mediante un conjunto de tres medidores de deformación de resistencia eléctrica, dispuestas en un patrón específico. Este patrón se conoce como ***roseta de deformación***, y una vez que se miden las deformaciones normales en los tres medidores, los datos pueden transformarse para especificar el estado de deformación en el punto. Como estas deformaciones se miden *sólo* en el plano de los medidores, y puesto que el cuerpo está libre de esfuerzo en su superficie, los medidores pueden someterse a *esfuerzo plano*, pero *no* a *deformación plana*. A pesar de que la deformación normal de la superficie no se mide, observe que el desplazamiento fuera del plano causado por esta deformación *no* afectará las mediciones de los medidores en el plano.

En el caso general, los ejes de los tres medidores están dispuestos con los ángulos θ_a, θ_b, θ_c que se muestran en la figura 10-16*a*. Si se toman las lecturas ϵ_a, ϵ_b, ϵ_c, es posible determinar las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} en el punto, aplicando la ecuación 10-2 para la transformación de la deformación en cada medidor. Se tiene

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2\theta_a + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_a + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta_a\cos\theta_a\\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2\theta_b + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_b + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta_b\cos\theta_b\\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2\theta_c + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_c + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta_c\cos\theta_c\end{aligned} \qquad (10\text{-}16)$$

Los valores de ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} se determinan al resolver estas tres ecuaciones de manera simultánea.

Las rosetas de deformación se disponen a menudo en patrones de 45° o 60°. En el caso de los 45° o de la roseta de deformación "rectangular" que se muestra en la figura 10-16*b*, $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 45°$, $\theta_c = 90°$, por lo que a partir de la ecuación 10-16 se obtiene

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a\\ \epsilon_y &= \epsilon_c\\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_b - (\epsilon_a + \epsilon_c)\end{aligned}$$

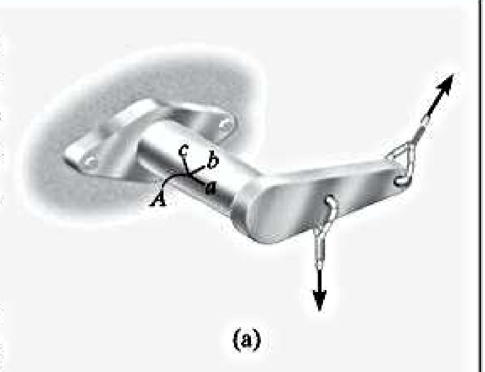
Y para la roseta de transformación a 60° mostrada en la figura 10-16*c*, $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 60°$, $\theta_c = 120°$. Aquí, la ecuación 10-16 da

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a\\ \epsilon_y &= \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a)\\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c)\end{aligned} \qquad (10\text{-}17)$$

Una vez que se determinan ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, pueden usarse las ecuaciones de transformación de la sección 10.2 o un círculo de Mohr para obtener las deformaciones principales en el plano y la deformación cortante máxima en el plano para el punto.

EJEMPLO 10.8

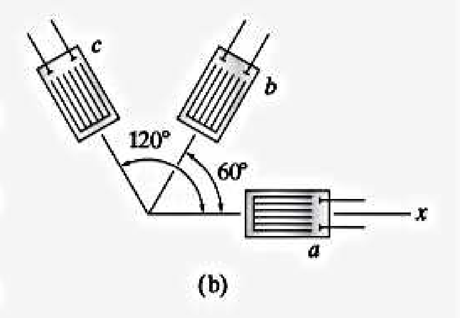
El estado de deformación en el punto A sobre la ménsula de la figura 10-17*a* se mide mediante la roseta de deformación mostrada en la figura 10-17*b*. Debido a las cargas, las lecturas de los medidores dan $\epsilon_a = 60(10^{-6})$, $\epsilon_b = 135(10^{-6})$ y $\epsilon_c = 264(10^{-6})$. Determine las deformaciones principales en el plano para el punto y las direcciones en las que actúan.



(a)

SOLUCIÓN

Para encontrar la solución se utilizarán las ecuaciones 10-16. Al establecer un eje x como el mostrado en la figura 10-17*b* y al medir los ángulos en sentido antihorario desde el eje $+x$ hacia las líneas de centro de cada medidor, se tiene $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 60°$ y $\theta_c = 120°$. Si se sustituyen estos resultados junto con los datos del problema en las ecuaciones, resulta



(b)

$$60(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 0° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 0° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 0° \cos 0°$$
$$= \epsilon_x \qquad (1)$$
$$135(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 60° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 60° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 60° \cos 60°$$
$$= 0.25\epsilon_x + 0.75\epsilon_y + 0.433\gamma_{xy} \qquad (2)$$
$$264(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 120° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 120° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 120° \cos 120°$$
$$= 0.25\epsilon_x + 0.75\epsilon_y - 0.433\gamma_{xy} \qquad (3)$$

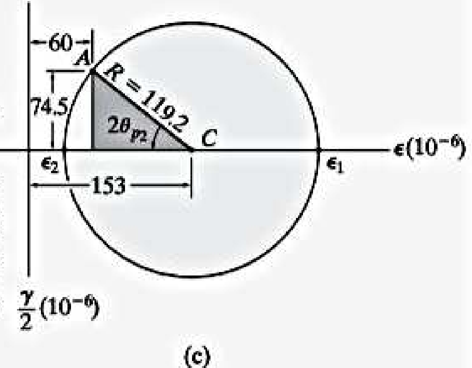
Si se usa la ecuación 1 y se resuelven simultáneamente las ecuaciones 2 y 3, se obtiene



$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \qquad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \qquad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$

Estos mismos resultados también pueden obtenerse de manera más directa a partir de la ecuación 10-17.

Las deformaciones principales en el plano pueden determinarse mediante el círculo de Mohr. El punto de referencia sobre el círculo está en $A[60(10^{-6}), -74.5(10^{-6})]$ y el centro del círculo, C, está sobre el eje ϵ en $\epsilon_{prom} = 153(10^{-6})$, figura 10-17*c*. A partir del triángulo gris oscuro, el radio es



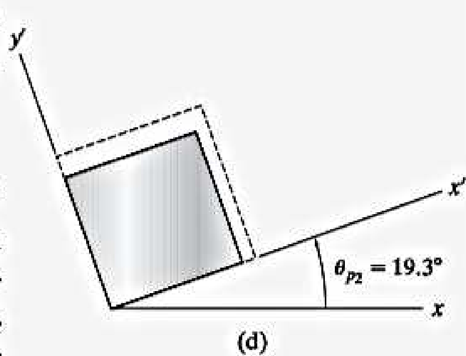
(c)

$$R = \left[\sqrt{(153 - 60)^2 + (74.5)^2}\right](10^{-6}) = 119.1(10^{-6})$$

Por lo tanto, las deformaciones principales en el plano son

$$\epsilon_1 = 153(10^{-6}) + 119.1(10^{-6}) = 272(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$
$$\epsilon_2 = 153(10^{-6}) - 119.1(10^{-6}) = 33.9(10^{-6}) \qquad \textit{Resp.}$$
$$2\theta_{p_2} = \tan^{-1}\frac{74.5}{(153 - 60)} = 38.7°$$
$$\theta_{p_2} = 19.3° \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: El elemento deformado se muestra con la línea discontinua de la figura 10-17*d*. Observe que, debido al efecto de Poisson, el elemento *también* se somete a una deformación fuera del plano, es decir, en la dirección z, aunque este valor no tendrá influencia en los resultados calculados.

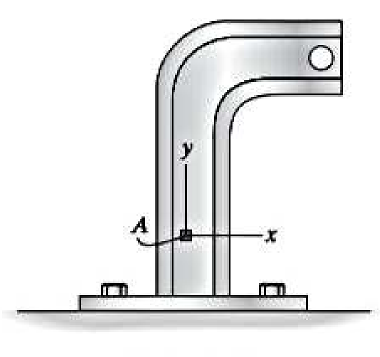


(d)

Figura 10-17

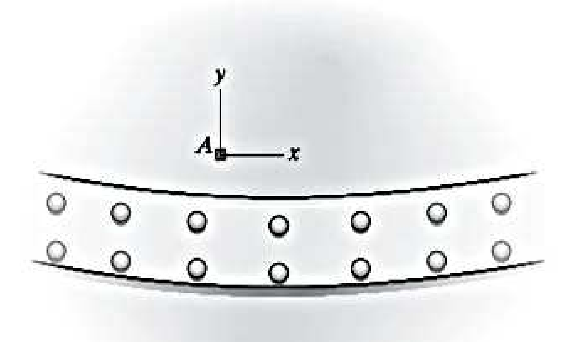
PROBLEMAS

10-22. La deformación en el punto A sobre la ménsula tiene componentes $\epsilon_x = 300(10^{-6})$, $\epsilon_y = 550(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -650(10^{-6})$. Determine (a) las deformaciones principales en A sobre el plano x-y, (b) la deformación cortante máxima en el plano x-y y (c) la deformación cortante máxima absoluta.



Prob. 10-22

***10-24.** La deformación en el punto A sobre la pared del recipiente a presión tiene componentes $\epsilon_x = 480(10^{-6})$, $\epsilon_y = 720(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = 650(10^{-6})$. Determine (a) las deformaciones principales en A sobre el plano x-y, (b) la deformación cortante máxima en el plano x-y y (c) la deformación cortante máxima absoluta.



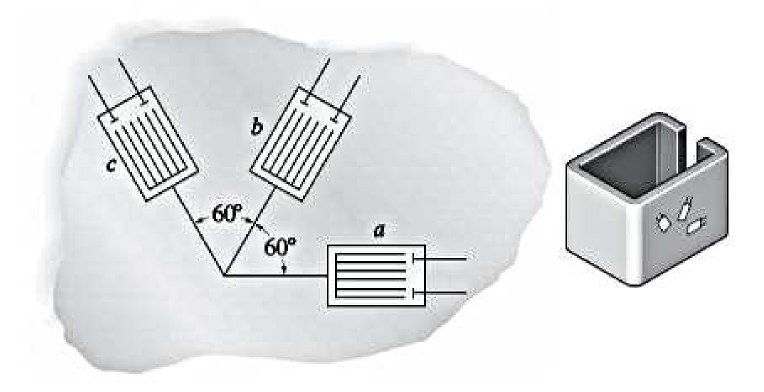
Prob. 10-24

10-23. La deformación en el punto A sobre la pata del ángulo tiene componentes $\epsilon_x = -140(10^{-6})$, $\epsilon_y = 180(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -125(10^{-6})$. Determine (a) las deformaciones principales en A sobre el plano x-y, (b) la deformación cortante máxima en el plano x-y y (c) la deformación cortante máxima absoluta.



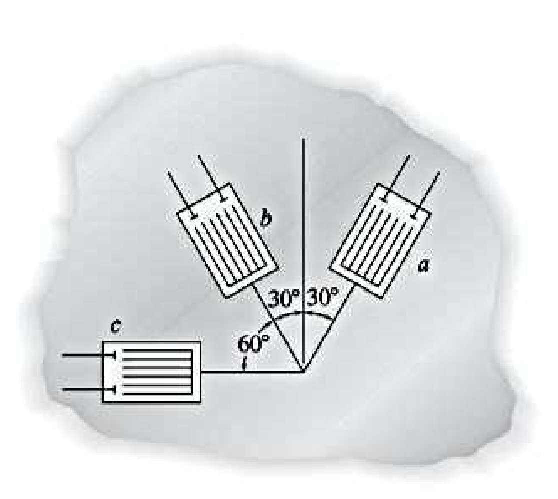
Prob. 10-23

•10-25. La roseta de deformación a 60° está montada sobre la ménsula. Se obtienen las siguientes lecturas para cada medidor: $\epsilon_a = -100(10^{-6})$, $\epsilon_b = 250(10^{-6})$ y $\epsilon_c = 150(10^{-6})$. Determine (a) las deformaciones principales y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio asociada. En cada caso muestre el elemento distorsionado debido a estas deformaciones.



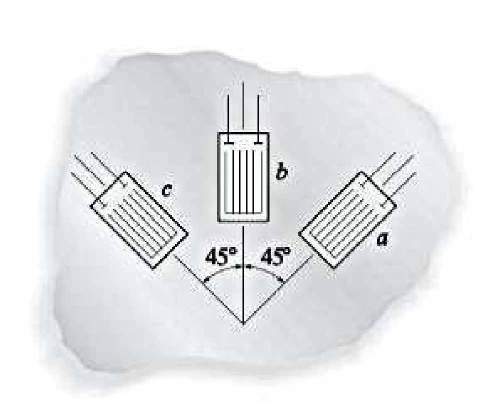
Prob. 10-25

10-26. La roseta de deformación a 60° está montada sobre una viga. Se obtienen las siguientes lecturas para cada medidor: $\epsilon_a = 200(10^{-6})$, $\epsilon_b = -450(10^{-6})$ y $\epsilon_c = 250(10^{-6})$. Determine (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso muestre el elemento distorsionado debido a estas deformaciones.

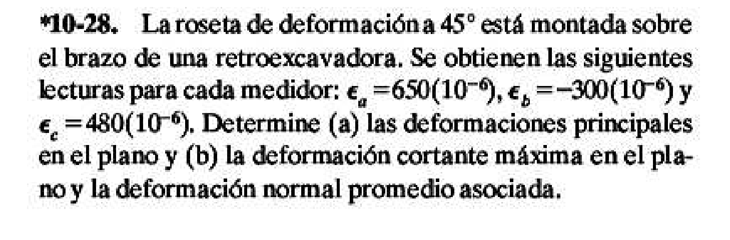


Prob. 10-26

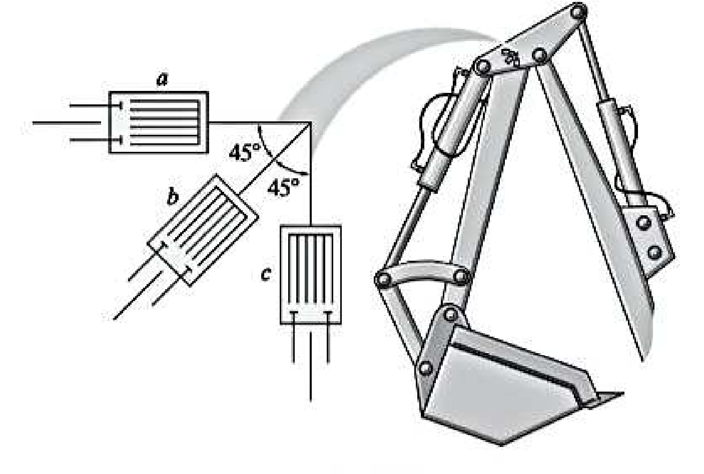
10-27. La roseta de deformación a 45° está montada sobre un eje de acero. Se obtienen las siguientes lecturas para cada medidor: $\epsilon_a = 300(10^{-6})$, $\epsilon_b = -250(10^{-6})$ y $\epsilon_c = -450(10^{-6})$. Determine (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso muestre el elemento distorsionado debido a estas deformaciones.



Prob. 10-27

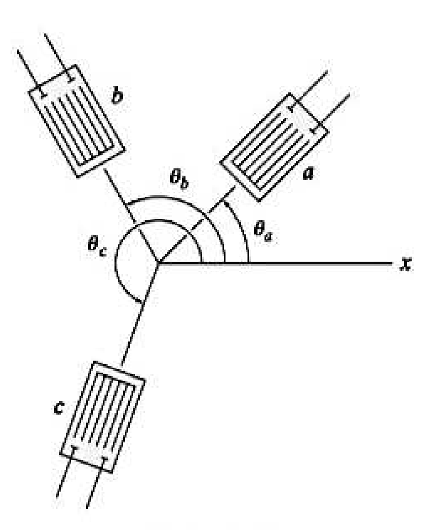


***10-28.** La roseta de deformación a 45° está montada sobre el brazo de una retroexcavadora. Se obtienen las siguientes lecturas para cada medidor: $\epsilon_a = 650(10^{-6})$, $\epsilon_b = -300(10^{-6})$ y $\epsilon_c = 480(10^{-6})$. Determine (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio asociada.



Prob. 10-28

10-29. Considere la orientación general de tres medidores de deformación en un punto, como se muestra en la figura. Escriba un programa de computadora que pueda usarse para determinar las deformaciones principales en el plano y la deformación cortante máxima en el plano para el punto. Muestre una aplicación del programa empleando los valores $\theta_a = 40°$, $\epsilon_a = 160(10^{-6})$, $\theta_b = 125°$, $\epsilon_b = 100(10^{-6})$, $\theta_c = 220°$, $\epsilon_c = 80(10^{-6})$.



Prob. 10-29

10.6 Relaciones entre las propiedades del material

En esta sección se presentarán algunas relaciones importantes que involucran a las propiedades de un material, las cuales se usan cuando el material está sometido a esfuerzo y deformación multiaxiales. Para ello, se supondrá que el material es homogéneo e isotrópico, y que se comporta de forma elástico lineal.

Generalización de la ley de Hooke. Si el material se somete en un punto a un estado de esfuerzo triaxial, σ_x, σ_y, σ_z, Figura 10-18*a*, se desarrollarán deformaciones normales asociadas ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z. Los esfuerzos pueden relacionarse con estas deformaciones usando el principio de superposición, la razón de Poisson, $\epsilon_{lat} = -\nu\epsilon_{long}$ y la ley de Hooke aplicada en la dirección uniaxial, $\epsilon = \sigma/E$. Por ejemplo, considere la deformación normal del elemento en la dirección x, causada por la aplicación independiente de cada esfuerzo normal. Cuando se aplica σ_x, figura 10-18*b*, el elemento se alarga en la dirección x y la deformación ϵ'_x es

$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

La aplicación de σ_y hace que el elemento se contraiga con una deformación ϵ''_x, figura 10-18*c*. Aquí

$$\epsilon''_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

Del mismo modo, la aplicación de σ_z, figura 10-18*d*, causa una contracción de modo que

$$\epsilon'''_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$$

(a) (b) (c) (d)

Figura 10-18

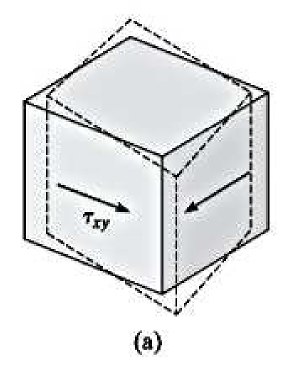
Cuando estas tres deformaciones normales se superponen, es posible determinar la deformación normal ϵ_x para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura 10-18*a*. También pueden desarrollarse ecuaciones similares para las deformaciones normales en las direcciones *y* y *z*. Los resultados finales se puede escribir como

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \qquad (10\text{-}18)$$
$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

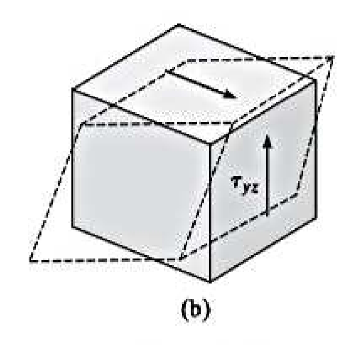
Estas tres ecuaciones expresan la ley de Hooke en una forma general para un estado de esfuerzo triaxial. En las aplicaciones, el esfuerzo de tensión se considera positivo y el de compresión es negativo. Si una deformación normal resultante es *positiva*, indica que el material se *alarga*, mientras que una deformación normal *negativa* significa que el material se *contrae*.

Si ahora se aplica un esfuerzo cortante τ_{xy} al elemento de la figura 10-19*a*, las observaciones experimentales indican que el material se deforma *sólo* debido a una deformación cortante γ_{xy}; es decir, τ_{xy} no ocasionará otras deformaciones en el material. Del mismo modo, τ_{yz} y τ_{xz} sólo causarán deformaciones angulares γ_{yz} y γ_{xz}, figuras 10-19*b* y 10-19*c*, y así la ley de Hooke para el esfuerzo cortante y la deformación cortante puede escribirse como

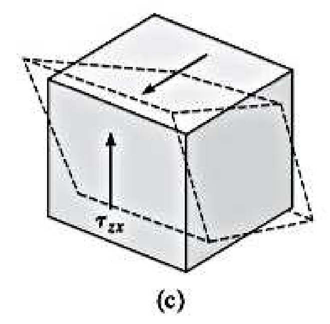
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \qquad (10\text{-}19)$$



(a)



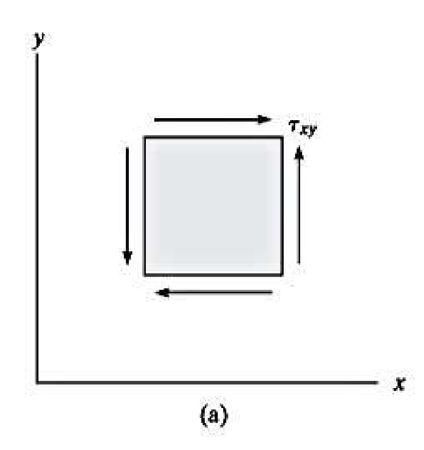
(b)



(c)

Figura 10-19

10



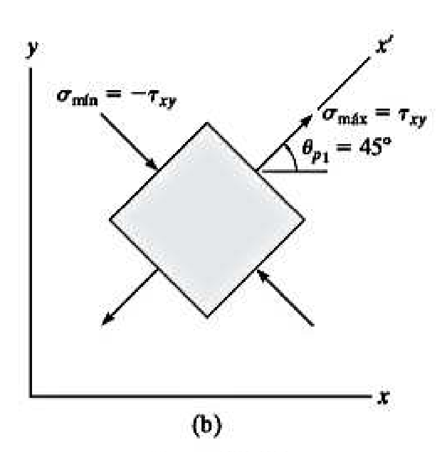


Figura 10-20

Relación que involucra a *E*, *ν* y *G*. En la sección 3.7 se estableció que el módulo de elasticidad E se relaciona con el módulo de cortante G en la ecuación 3-11, a saber,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{10-20}$$

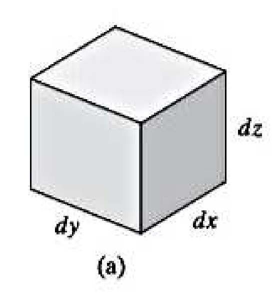
Una forma de obtener esta relación es considerar un elemento del material que estará sometido a cortante puro ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$), figura 10.20*a*. Al aplicar la ecuación 9-5 para obtener los esfuerzos principales se obtiene $\sigma_{máx} = \tau_{xy}$ y $\sigma_{mín} = -\tau_{xy}$. Este elemento debe estar orientado con $\theta_{p_1} = 45°$ en sentido antihorario desde el eje x, como se muestra en la figura 10-20*b*. Si los tres esfuerzos principales $\sigma_{máx} = \tau_{xy}$, $\sigma_{int} = 0$ y $\sigma_{mín} = -\tau_{xy}$ se sustituyen en la primera de las ecuaciones 10-18, la deformación principal $\epsilon_{máx}$ puede relacionarse con el esfuerzo cortante τ_{xy}. El resultado es

$$\epsilon_{máx} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1 + \nu) \tag{10-21}$$

Esta deformación, que distorsiona el elemento a lo largo del eje x', también puede relacionarse con la deformación cortante γ_{xy}. Para ello, primero observe que como $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, entonces a partir de la primera y segunda de las ecuaciones 10-18, $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$. Al sustituir estos resultados en la ecuación 10-9 para la transformación de la deformación, se obtiene

$$\epsilon_1 = \epsilon_{máx} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Por la ley de Hooke, $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, de modo que $\epsilon_{máx} = \tau_{xy}/2G$. Al sustituir en la ecuación 10-21 y al reordenar los términos se obtiene el resultado final, a saber, la ecuación 10-20.



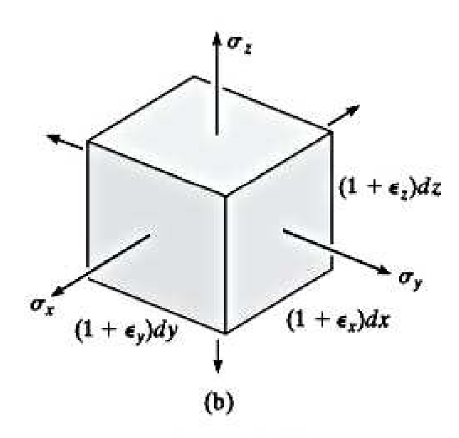


Figura 10-21

Dilatación y módulo de volumen. Cuando un material elástico se somete a esfuerzo normal, su volumen cambiará. Por ejemplo, considere un elemento de volumen que está sometido a los esfuerzos principales σ_x, σ_y, σ_z. Si los lados del elemento son originalmente dx, dy, dz, figura 10-21*a*, entonces después de la aplicación del esfuerzo se convierten en $(1 + \epsilon_x)\,dx$, $(1 + \epsilon_y)\,dy$, $(1 + \epsilon_z)\,dz$, figura 10-21*b*. Por lo tanto, el cambio de volumen en el elemento es

$$\delta V = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)\,dx\,dy\,dz - dx\,dy\,dz$$

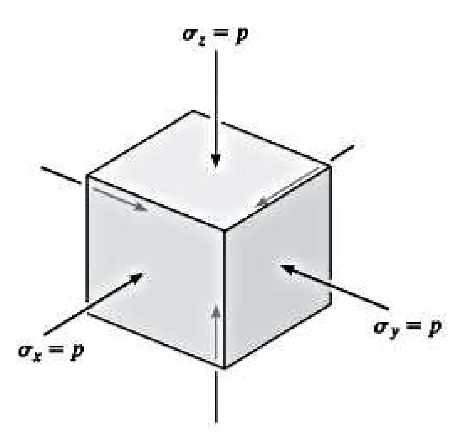
Si no se toman en cuenta los productos de las deformaciones debido a que éstas son muy pequeñas. Se tiene

$$\delta V = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)\,dx\,dy\,dz$$

El cambio de volumen por unidad de volumen se conoce como la "deformación volumétrica" o ***dilatación e***. Ésta puede escribirse como

$$e = \frac{\delta V}{dV} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{10-22}$$

En comparación, las deformaciones cortantes *no* modificarán el volumen del elemento, sino que sólo cambiará su forma rectangular.



Esfuerzo hidrostático

Figura 10-22

Además, si se usa la ley de Hooke de acuerdo con la definición dada por la ecuación 10-18, es posible escribir la dilatación en función del esfuerzo aplicado. Se tiene

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (10\text{-}23)$$

Cuando un elemento de volumen del material se somete a la presión uniforme p de un líquido, la presión sobre el cuerpo es igual en todas direcciones y siempre es normal a cualquier superficie sobre la que actúa. Los esfuerzos cortantes *no están presentes*, ya que la resistencia al cortante de un líquido es cero. Este estado de carga "hidrostática" requiere que los esfuerzos normales sean iguales en todas las direcciones, y por lo tanto un elemento del cuerpo está sometido a esfuerzos principales $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, figura 10-22. Al sustituir en la ecuación 10-23 y al reordenar términos se obtiene

$$\frac{p}{e} = -\frac{E}{3(1 - 2\nu)} \qquad (10\text{-}24)$$

Como esta proporción es *semejante* a la relación del esfuerzo lineal elástico sobre la deformación, que define a E, es decir, $\sigma/\epsilon = E$, el término de la derecha se llama *módulo de elasticidad del volumen* o ***módulo de volumen***. Tiene las mismas unidades que el esfuerzo y se simbolizará mediante la letra k; es decir,

$$\boxed{k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}} \qquad (10\text{-}25)$$

Tenga en cuenta que para la mayoría de los metales $\nu \approx \frac{1}{3}$ de modo que $k \approx E$. Si existe algún material que no cambie su volumen entonces $\delta V = e = 0$, y k tendría que ser infinita. Por lo tanto, a partir de la ecuación 10-25, el valor teórico *máximo* para la razón de Poisson es $\nu = 0.5$. Durante la cedencia, no se observa un cambio real en el volumen del material, por lo que cuando se produce cedencia plástica debe emplearse $\nu = 0.5$.

Puntos importantes

- Cuando un material isotrópico homogéneo se somete a un estado de esfuerzo triaxial, la deformación en cada dirección está influenciada por las deformaciones producidas por *todos* los esfuerzos. Éste es el resultado del efecto de Poisson, y de aquí se obtiene una forma generalizada de la ley de Hooke.
- A diferencia del esfuerzo normal, un esfuerzo cortante aplicado a un material isotrópico homogéneo sólo produce una deformación cortante en el mismo plano.
- Las constantes E, G y ν del material están matemáticamente relacionadas.
- La *dilatación* o *deformación volumétrica* se produce sólo por la deformación normal, no por la deformación cortante.
- El *módulo de volumen* es una medida de la rigidez de un volumen de material. Esta propiedad del material representa un límite superior para la razón de Poisson de $\nu = 0.5$, la cual se mantiene en este valor cuando ocurre cedencia plástica.

10

EJEMPLO 10.9

La ménsula del ejemplo 10-8, figura 10-23*a*, está hecha de acero para el cual $E_{ac} = 200$ GPa y $\nu_{ac} = 0.3$. Determine los esfuerzos principales en el punto *A*.

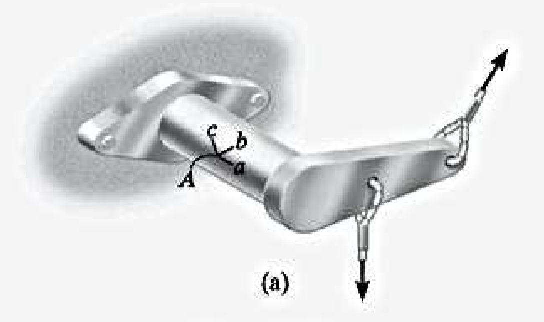


Figura 10-23

SOLUCIÓN I

En el ejemplo 10.8, las deformaciones principales se determinaron como

$$\epsilon_1 = 272(10^{-6})$$

$$\epsilon_2 = 33.9(10^{-6})$$

Como el punto *A* está sobre la *superficie* de la ménsula para la cual no hay carga, el esfuerzo sobre la superficie es cero, por lo que el punto *A* está sometido a esfuerzo plano. Al aplicar la ley de Hooke con $\sigma_3 = 0$, se tiene

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2; \quad 272(10^{-6}) = \frac{\sigma_1}{200(10^9)} - \frac{0.3}{200(10^9)}\sigma_2$$

$$54.4(10^6) = \sigma_1 - 0.3\sigma_2 \qquad (1)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1; \quad 33.9(10^{-6}) = \frac{\sigma_2}{200(10^9)} - \frac{0.3}{200(10^9)}\sigma_1$$

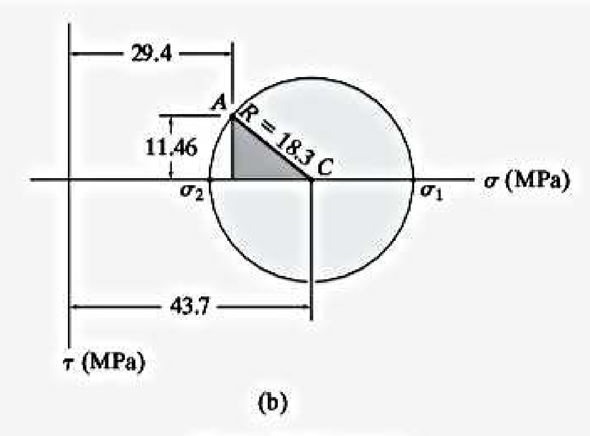
$$6.78(10^6) = \sigma_2 - 0.3\sigma_1 \qquad (2)$$

Al resolver de manera simultánea las ecuaciones 1 y 2, se obtiene

$$\sigma_1 = 62.0 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_2 = 25.4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

10



(b)

Figura 10-23 (cont.)

SOLUCIÓN II

El problema también puede resolverse usando el estado de deformación dado,

$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \qquad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \qquad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$

tal como se especifica en el ejemplo 10.8. Al aplicar la ley de Hooke en el plano x-y, se tiene

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y; \qquad 60(10^{-6}) = \frac{\sigma_x}{200(10^9)\text{ Pa}} - \frac{0.3\sigma_y}{200(10^9)\text{ Pa}}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x; \qquad 246(10^{-6}) = \frac{\sigma_y}{200(10^9)\text{ Pa}} - \frac{0.3\sigma_x}{200(10^9)\text{ Pa}}$$

$$\sigma_x = 29.4\text{ MPa} \qquad \sigma_y = 58.0\text{ MPa}$$

El esfuerzo cortante se determina mediante la ley de Hooke para cortante. Sin embargo, primero es necesario calcular G.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200\text{ GPa}}{2(1+0.3)} = 76.9\text{ GPa}$$

Por lo tanto,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \qquad \tau_{xy} = 76.9(10^9)[-149(10^{-6})] = -11.46\text{ MPa}$$

El círculo de Mohr para este estado de esfuerzo plano tiene un punto de referencia A(29.4 MPa, –11.46 MPa) y centro en $\sigma_{\text{prom}} = 43.7$ MPa, figura l0-23*b*. El radio se determina a partir del triángulo gris oscuro,

$$R = \sqrt{(43.7 - 29.4)^2 + (11.46)^2} = 18.3\text{ MPa}$$

Por lo tanto,

$$\sigma_1 = 43.7\text{ MPa} + 18.3\text{ MPa} = 62.0\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_2 = 43.7\text{ MPa} - 18.3\text{ MPa} = 25.4\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Cada una de estas soluciones es válida siempre que el material sea elástico lineal e isotrópico, puesto que en ese caso los planos principales de esfuerzo y deformación coinciden.

EJEMPLO 10.10

La barra de cobre que se muestra en la figura 10-24 está sometida a una carga uniforme a lo largo de sus bordes. Si tiene una longitud $a = 300$ mm, una anchura $b = 50$ mm y un grosor $t = 20$ mm antes de que la carga se aplique, determine su nueva longitud, anchura y grosor después de la aplicación de la carga. Considere $E_{cu} = 120$ GPa, $\nu_{cu} = 0.34$.

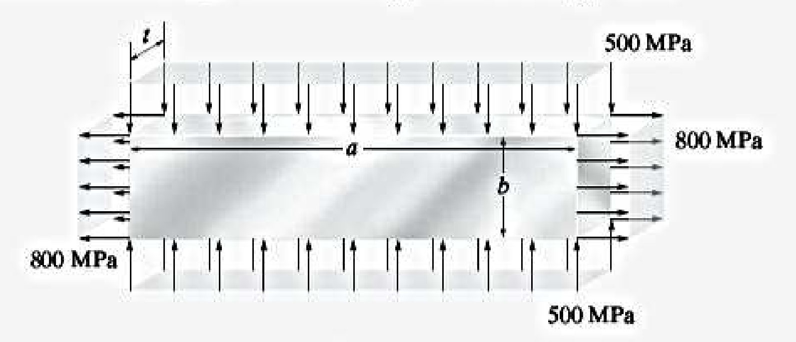


Figura 10-24

SOLUCIÓN

Por inspección, la barra está sometida a un estado de esfuerzo plano. A partir de la carga se tiene

$$\sigma_x = 800 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = -500 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad \sigma_z = 0$$

Las deformaciones normales asociadas se determinan a partir de la ley de Hooke generalizada, ecuación 10-18; es decir,

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$= \frac{800 \text{ MPa}}{120(10^3) \text{ MPa}} - \frac{0.34}{120(10^3) \text{ MPa}}(-500 \text{ MPa} + 0) = 0.00808$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$= \frac{-500 \text{ MPa}}{120(10^3) \text{ MPa}} - \frac{0.34}{120(10^3) \text{ MPa}}(800 \text{ MPa} + 0) = -0.00643$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$= 0 - \frac{0.34}{120(10^3) \text{ MPa}}(800 \text{ MPa} - 500 \text{ MPa}) = -0.000850$$

Por lo tanto, la nueva longitud, la nueva anchura y el nuevo grosor de la barra son

$$a' = 300 \text{ mm} + 0.00808(300 \text{ mm}) = 302.4 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$b' = 50 \text{ mm} + (-0.00643)(50 \text{ mm}) = 49.68 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$t' = 20 \text{ mm} + (-0.000850)(20 \text{ mm}) = 19.98 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

10

EJEMPLO 10.11

Si el bloque rectangular que se muestra en la figura 10-25 se somete a una presión uniforme de $p = 20$ psi, determine la dilatación y el cambio de longitud en cada lado. Considere $E = 600$ psi, $\nu = 0.45$.

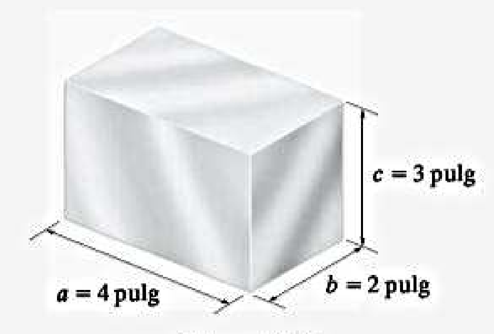


Figura 10-25

SOLUCIÓN

Dilatación. La dilatación puede determinarse mediante la ecuación 10-23 con $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -20$ psi. Se tiene

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$= \frac{1 - 2(0.45)}{600 \text{ psi}}[3(-20 \text{ psi})]$$

$$= -0.01 \text{ pulg}^3/\text{pulg}^3 \qquad \textit{Resp.}$$

Cambio en la longitud. La deformación normal en cada lado puede determinarse a partir de la ley de Hooke, ecuación 10-18; es decir,

$$\epsilon = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$= \frac{1}{600 \text{ psi}}[-20 \text{ psi} - (0.45)(-20 \text{ psi} - 20 \text{ psi})] = -0.00333 \text{ pulg/pulg}$$

Así, el cambio en la longitud de cada lado es

$$\delta a = -0.00333(4 \text{ pulg}) = -0.0133 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\delta b = -0.00333(2 \text{ pulg}) = -0.00667 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\delta c = -0.00333(3 \text{ pulg}) = -0.0100 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

Los signos negativos indican que cada una de las dimensiones se reduce.

10

PROBLEMAS

10-30. Para el caso del esfuerzo plano, muestre que la ley de Hooke puede escribirse como

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$$

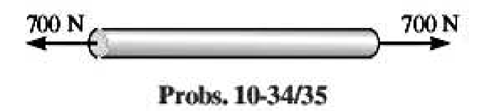
10-31. Use la ley de Hooke, ecuación 10-18, a fin de desarrollar las ecuaciones para la transformación de deformaciones, ecuaciones 10-5 y 10-6, con base en las ecuaciones de transformación del esfuerzo, ecuaciones 9-1 y 9-2.

***10-32.** Una barra de aleación de cobre se carga en una máquina de tensión y si se determina que $\epsilon_x = 940(10^{-6})$ y $\sigma_x = 14$ ksi, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$. Determine el módulo de elasticidad E_{cu} y la dilatación e_{cu} del cobre. $\nu_{cu} = 0.35$.

•**10-33.** Las deformaciones principales en un punto sobre el fuselaje de aluminio de un avión de propulsión son $\epsilon_1 = 780(10^{-6})$ y $\epsilon_2 = 400(10^{-6})$. Determine los esfuerzos principales asociados en el punto ubicados en el mismo plano. $E_{al} = 10(10^3)$ ksi, $\nu_{al} = 0.33$. *Sugerencia:* Vea el problema 10-30.

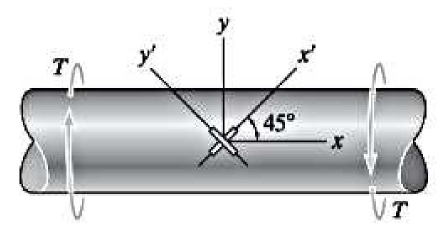
10-34. La varilla está fabricada de aluminio 2014-T6. Si está sometida a la carga de tensión de 700 N y tiene un diámetro de 20 mm, determine la deformación cortante máxima absoluta en la varilla en un punto sobre su superficie.

10-35. La varilla está fabricada de aluminio 2014-T6. Si está sometida a la carga de tensión de 700 N y tiene un diámetro de 20 mm, determine las deformaciones principales en un punto sobre la superficie de la varilla.



Probs. 10-34/35

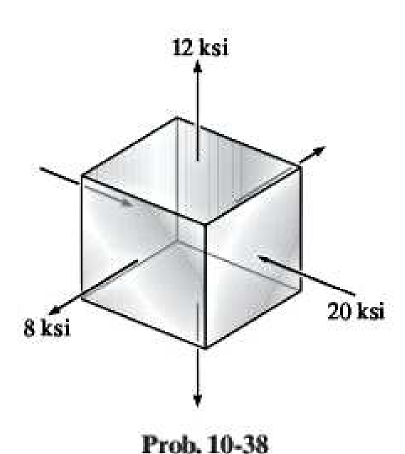
***10-36.** El eje de acero tiene un radio de 15 mm. Determine el par de torsión T en el eje si los dos medidores de deformación, unidos a la superficie del eje, reportan deformaciones de $\epsilon_{x'} = -80(10^{-6})$ y $\epsilon_{y'} = 80(10^{-6})$. Además, calcule las deformaciones que actúan en las direcciones x y y. $E_{ac} = 200$ GPa, $\nu_{ac} = 0.3$.



Prob. 10-36

10-37. Determine el módulo de volumen para cada uno de los siguientes materiales: (a) goma, $E_r = 0.4$ ksi, $\nu_r = 0.48$ y (b) vidrio, $E_g = 8(10^3)$ ksi, $\nu_g = 0.24$.

10-38. En la figura se muestran los esfuerzos principales en un punto. Si el material es acero A-36, determine las deformaciones principales.



Prob. 10-38

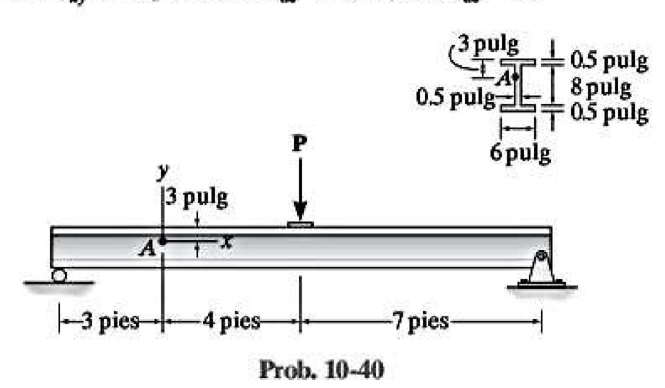
10-39. El recipiente esférico a presión tiene un diámetro interior de 2 m y un grosor de 10 mm. A éste se encuentra unido un medidor de deformación que tiene una longitud de 20 mm, y se observa un aumento de longitud de 0.012 mm cuando el recipiente está bajo presión. Determine la presión que causa esta deformación y encuentre el esfuerzo cortante máximo en el plano, así como el esfuerzo cortante máximo absoluto en un punto sobre la superficie exterior del recipiente. El material es acero, para el cual $E_{ac} = 200$ GPa y $\nu_{ac} = 0.3$.



Prob. 10-39

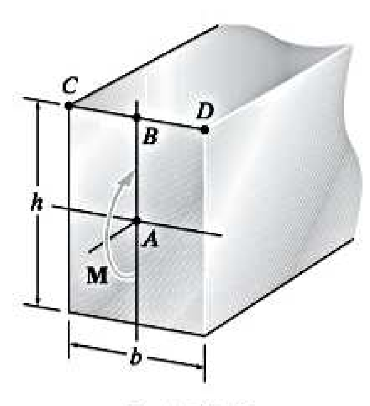
10

*10-40. Se mide la deformación en la dirección x en el punto A sobre la viga de acero y se encuentra que $\epsilon_x = -100(10^{-6})$. Determine la carga aplicada P. ¿Cuál es la deformación cortante γ_{xy} en el punto A? $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $\nu_{ac} = 0.3$.



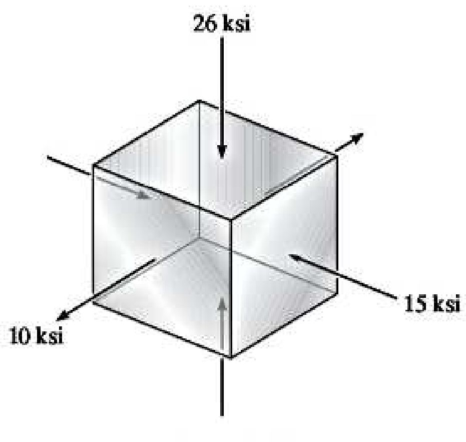
Prob. 10-40

•10-41. La sección transversal de la viga rectangular está sometida al momento flexionante **M**. Determine una expresión para el aumento de la longitud de las líneas AB y CD. El material tiene un módulo de elasticidad E y una razón de Poisson ν.



Prob. 10-41

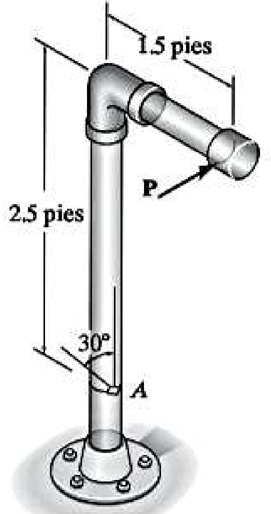
10-42. En la figura se muestran los esfuerzos principales en un punto. Si el material es de aluminio para el cual $E_{al} = 10(10^3)$ ksi y $\nu_{al} = 0.33$, determine las deformaciones principales.



Prob. 10-42

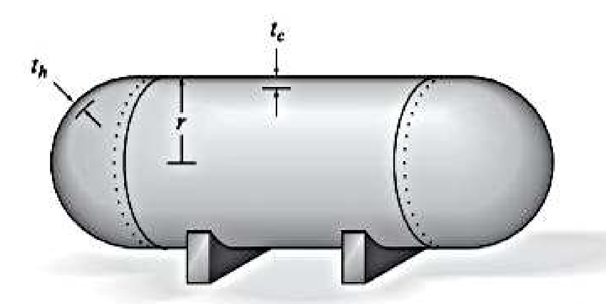
10-43. Un solo medidor de deformación, colocado sobre la superficie externa con un ángulo de 30° respecto al eje del tubo, da una lectura en el punto A de $\epsilon_a = -200(10^{-6})$. Determine la fuerza horizontal P si el tubo tiene un diámetro exterior de 2 pulg y un diámetro interior de 1 pulg. El tubo está fabricado de acero A-36.

*10-44. Un solo medidor de deformación, colocado en el plano vertical sobre la superficie externa con un ángulo de 30° respecto al eje del tubo, da una lectura en el punto A de $\epsilon_a = -200(10^{-6})$. Determine las deformaciones principales en el punto A del tubo. Éste tiene un diámetro exterior de 2 pulg y un diámetro interior de 1 pulg, y está fabricado de acero A-36.



Probs. 10-43/44

10-45. El recipiente cilíndrico a presión se fabrica usando tapas semiesféricas en los extremos a fin de reducir el esfuerzo flexionante que se produciría al utilizar tapas planas. Los esfuerzos flexionantes en las costuras, donde las tapas están unidas, pueden eliminarse mediante la adecuada elección del grosor t_h y t_c de las tapas y el cilindro, respectivamente. Esto requiere que la expansión radial sea igual para las dos semiesferas y el cilindro. Muestre que esta relación es $t_c/t_h = (2-\nu)/(1-\nu)$. Suponga que el recipiente está fabricado del mismo material y que tanto el cilindro como las semiesferas tienen el mismo radio interior. Si el cilindro debe tener un grosor de 0.5 pulg. ¿Cuál es el grosor requerido de las semiesferas? Considere $\nu = 0.3$.

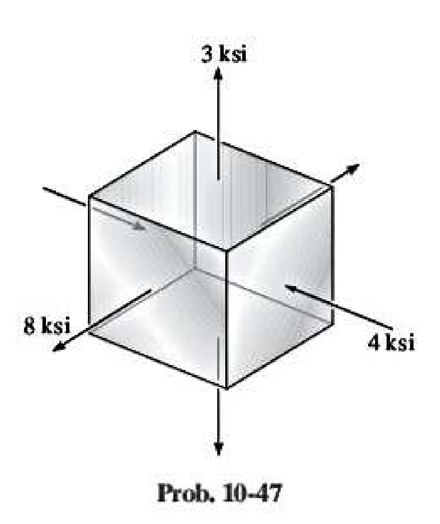


Prob. 10-45

10

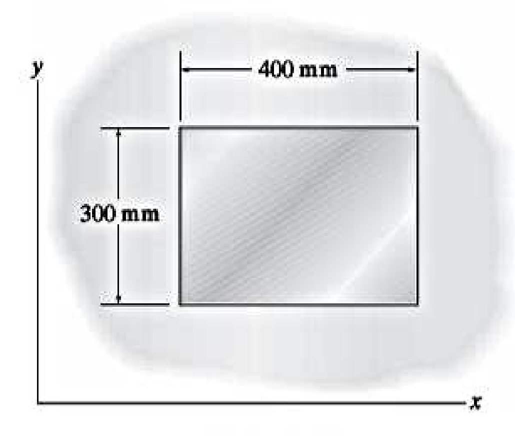
10-46. Las deformaciones principales en un plano, medidas experimentalmente en un punto sobre el fuselaje de aluminio de un avión a propulsión, son $\epsilon_1 = 630(10^{-6})$ y $\epsilon_2 = 350(10^{-6})$. Si éste es un caso de esfuerzo plano, determine los esfuerzos principales asociados en el punto del mismo plano. $E_{al} = 10(10^3)$ ksi y $\nu_{al} = 0.33$.

10-47. En la figura se muestran las deformaciones principales en un punto. Si el material es aluminio para el cual $E_{al} = 10(10^3)$ ksi y $\nu_{al} = 0.33$, determine las deformaciones principales.



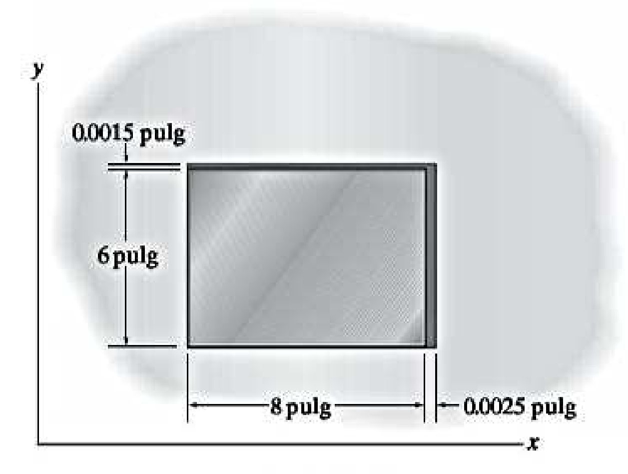
Prob. 10-47

***10-48.** La placa de aluminio 6061-T6 se inserta de manera ajustada en una oquedad rígida. Determine los esfuerzos normales σ_x y σ_y desarrollados en la placa si la temperatura se incrementa en $\Delta T = 50°C$. Para resolver este problema, agregue la deformación térmica $\alpha\Delta T$ a las ecuaciones de la ley de Hooke.



Prob. 10-48

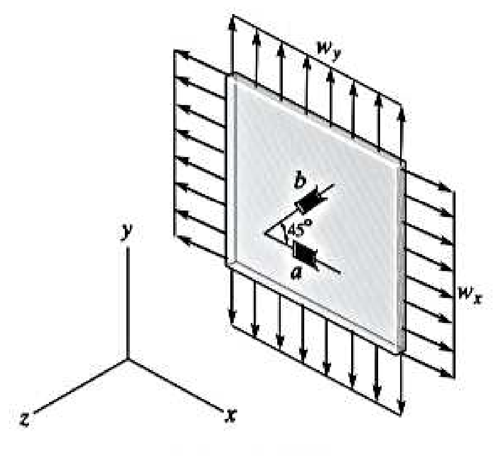
•**10-49.** En un inicio, los espacios entre la placa de acero A-36 y la oquedad rígida son los mostrados en la figura. Determine los esfuerzos normales σ_x y σ_y desarrollados en la placa si la temperatura se incrementa en $\Delta T = 100°F$. Para resolver este problema, agregue la deformación térmica $\alpha\Delta T$ a las ecuaciones de la ley de Hooke.



Prob. 10-49

10-50. Dos medidores de deformación a y b están unidos a una placa fabricada de un material que tiene un módulo de elasticidad de $E = 70$ GPa y una razón de Poisson $\nu = 0.35$. Si los medidores dan una lectura de $\epsilon_a = 450(10^{-6})$ y $\epsilon_b = 100(10^{-6})$, determine las intensidades de las cargas uniformemente distribuidas w_x y w_y que actúan sobre la placa. El grosor de la placa es de 25 mm.

10-51. Dos medidores de deformación a y b están unidos a la superficie de una placa que se encuentra sometida a las cargas uniformemente distribuidas $w_x = 700$ kN/m y $w_y = -175$ kN/m. Si los medidores dan una lectura de $\epsilon_a = 450(10^{-6})$ y $\epsilon_b = 100(10^{-6})$, determine el modulo de elasticidad E, el módulo de cortante G y la razón de Poisson ν para el material.



Probs. 10-50/51

10

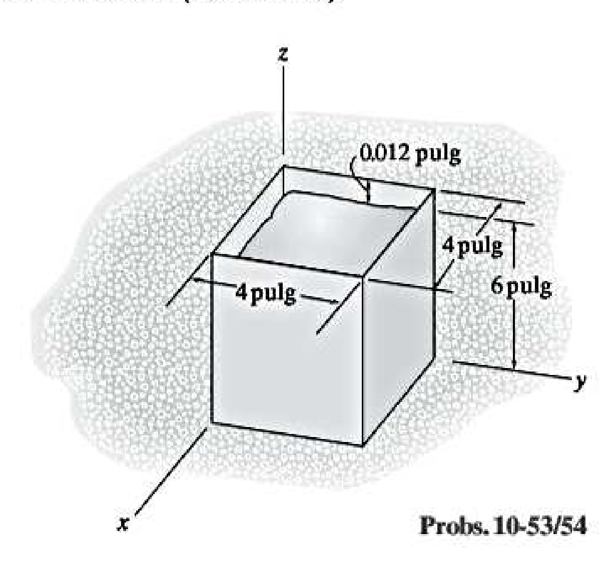
***10-52.** El bloque se ajusta entre los soportes fijos. Si la junta pegada puede resistir un esfuerzo cortante máximo de $\tau_{perm} = 2$ ksi, determine el aumento de temperatura que ocasionará una falla en la junta. Considere $E = 10(10^3)$ ksi, $\nu = 0.2$. *Sugerencia:* Use la ecuación 10-18 con un término adicional de deformación $\alpha\Delta T$ (ecuación 4-4).



Prob. 10-52

•10-53. La cavidad lisa y rígida se llena con aluminio 6061-T6 en estado líquido. Al enfriarse, queda a 0.012 pulg de la parte superior de la cavidad. Si ésta se cubre y la temperatura se incrementa en 200°F, determine las componentes de esfuerzo σ_x, σ_y y σ_z en el aluminio. *Sugerencia:* Use las ecuaciones 10-18 con un término adicional de deformación $\alpha\Delta T$ (ecuación 4-4).

10-54. La cavidad lisa y rígida se llena con aluminio 6061-T6 en estado líquido. Al enfriarse, queda a 0.012 pulg de la parte superior de la cavidad. Si ésta no se encuentra cubierta y la temperatura se incrementa en 200°F, determine las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z en el aluminio. *Sugerencia:* Use las ecuaciones 10-18 con un término adicional de deformación $\alpha\Delta T$ (ecuación 4-4).

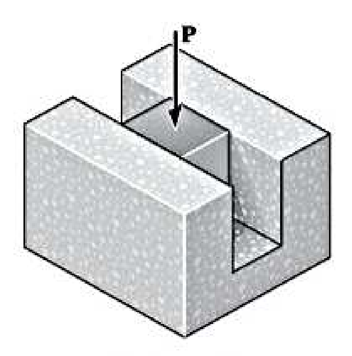


Probs. 10-53/54

10-55. Un recipiente esférico a presión con pared delgada, el cual tiene un radio interior r y un grosor t, está sometido a una presión interior p. Demuestre que el aumento de volumen dentro del recipiente es $\Delta V = (2p\pi r^4/Et)(1 - \nu)$. Use un análisis de deformaciones pequeñas.

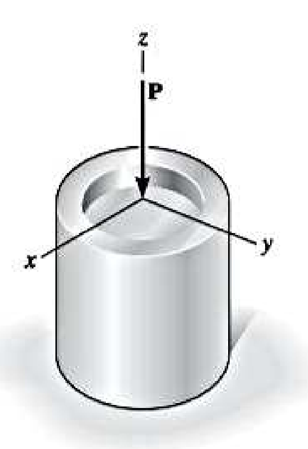
***10-56.** Un recipiente cilíndrico a presión con pared delgada tiene un radio interior r, un grosor t y una longitud L. Si se somete a una presión interna p, demuestre que el aumento de su radio interior es $dr = r\epsilon_1 = pr^2(1 - \frac{1}{2}\nu)/Et$ y el aumento de su longitud es $\Delta L = pLr(\frac{1}{2} - \nu)/Et$. Con estos resultados muestre que el cambio del volumen interno se convierte en $dV = \pi r^2(1 + \epsilon_1)^2(1 + \epsilon_2)L - \pi r^2 L$. Como ϵ_1 y ϵ_2 son cantidades pequeñas, muestre también que el cambio de volumen por unidad de volumen, llamada *deformación volumétrica*, puede escribirse como $dV/V = pr(2.5 - 2\nu)/Et$.

10-57. El bloque de goma se confina dentro del bloque rígido liso en forma de U. Si la goma tiene un módulo de elasticidad E y una razón de Poisson ν, determine el módulo efectivo de elasticidad de la goma en esta condición de confinación.



Prob. 10-57

10-58. Un material blando se coloca dentro de los confines de un cilindro rígido, que descansa sobre un soporte rígido. Suponiendo que $\epsilon_x = 0$ y $\epsilon_y = 0$, determine el factor en el que se incrementa el módulo de elasticidad al aplicar una carga si este material tiene $\nu = 0.3$.



Prob. 10-58

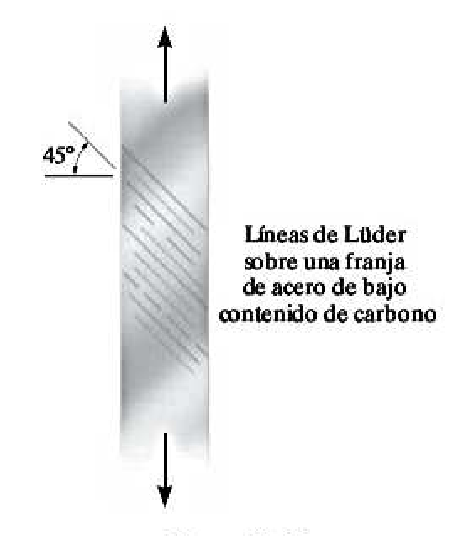
*10.7 Teorías de falla

Cuando un ingeniero se enfrenta a un problema de diseño usando un material específico, es importante establecer un *límite* superior en el estado de esfuerzo que defina la falla del material. Si el material es *dúctil*, la falla suele especificarse mediante el inicio de la *cedencia*, mientras que si el material es *frágil*, se especifica por la *fractura*. Estos modos de falla pueden definirse con facilidad si el elemento está sometido a un estado de esfuerzo uniaxial, como en el caso de la tensión simple; sin embargo, si el elemento está sometido a esfuerzos biaxiales o triaxiales, el criterio para la falla se vuelve más difícil de establecer.

En esta sección se analizarán cuatro teorías que suelen utilizarse en la práctica de la ingeniería para predecir la falla de un material sometido a un estado *multiaxial* de esfuerzo. Sin embargo, no hay ninguna teoría de falla que pueda aplicarse a un determinado material en *todos los casos*, ya que un material puede comportarse de manera dúctil o frágil dependiendo de la temperatura, la razón de carga, el entorno químico o la manera en que el material se forma o se fabrica. Cuando se utiliza una teoría particular de falla, primero es necesario determinar los puntos donde los esfuerzos normal y cortante son más grandes en el elemento. Después de haber establecido este estado de esfuerzo, se determinan los *esfuerzos principales* en los puntos críticos, puesto que cada una de las teorías siguientes se basa en el conocimiento del esfuerzo principal.

Materiales dúctiles

Teoría del esfuerzo cortante máximo. El tipo más común de *cedencia de un material dúctil* como el acero es causado por *deslizamiento*, el cual ocurre a lo largo de los planos de contacto de los cristales ordenados aleatoriamente que componen el material. Si se hace una probeta con una franja delgada altamente pulida y se somete a una prueba de tensión simple, en realidad es posible ver cómo este deslizamiento hace que el material *ceda*, figura 10-26. Los bordes de los planos de deslizamiento que aparecen en la superficie de la tira se conocen como *líneas de Lüder*. Estas líneas indican claramente los planos de deslizamiento en la franja, los cuales se producen a unos 45° respecto al eje de la franja.



Líneas de Lüder sobre una franja de acero de bajo contenido de carbono

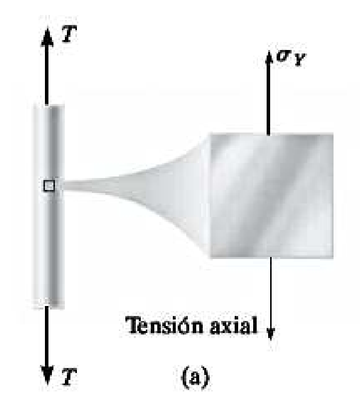
Figura 10-26

El deslizamiento que se produce es causado por el esfuerzo cortante. Para mostrar esto, considere un elemento del material tomado de una probeta en tensión, cuando ésta se somete al esfuerzo de cedencia σ_Y, figura 10-27*a*. El esfuerzo cortante máximo puede determinarse mediante la elaboración del círculo de Mohr para el elemento, figura 10-27*b*. Los resultados indican que

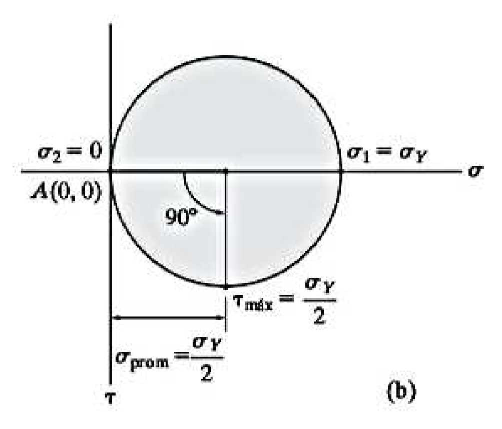


$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_Y}{2} \qquad (10\text{-}26)$$

Además, este esfuerzo cortante actúa sobre los planos que están a 45° de los planos de esfuerzo principal, figura 10-27*c*, y estos planos *coinciden* con la dirección de las líneas de Lüder que aparecen sobre la probeta, lo que efectivamente indica que la falla ocurre por una fuerza cortante.



A partir de la idea de que los materiales dúctiles fallan por cortante, en 1868 Henri Tresca propuso la ***teoría del esfuerzo cortante máximo*** o ***criterio de Tresca para la cedencia.*** Esta teoría puede utilizarse para predecir el esfuerzo de falla de un material dúctil sometido a cualquier tipo de carga. La teoría establece que la cedencia del material se inicia cuando el esfuerzo cortante máximo absoluto en el material alcanza el esfuerzo cortante que causa la cedencia del mismo material cuando está sometido *sólo* a esfuerzo axial. Por lo tanto, para evitar la falla se requiere que $\tau_{\substack{máx\\abs}}$ en el material sea menor o igual a $\sigma_Y/2$, donde σ_Y se determina a partir de una prueba de tensión simple.



Para la aplicación se expresará el esfuerzo cortante máximo absoluto en términos de los *esfuerzos principales.* El procedimiento para hacer esto se analizó en la sección 9.5 con referencia a una condición de *esfuerzo plano*, es decir, en el punto donde el esfuerzo principal fuera del plano sea cero. Si los dos esfuerzos principales en el plano tienen el *mismo signo*, es decir, ambos son de tensión o de compresión, entonces la falla ocurrirá *fuera del plano* y, con base en la ecuación 9-13,

$$\tau_{\substack{máx\\abs}} = \frac{\sigma_1}{2}$$

Si en vez de esto, los esfuerzos principales en el plano tienen *signos opuestos*, entonces la falla se produce en el plano y, con base en la ecuación 9-14,

$$\tau_{\substack{máx\\abs}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

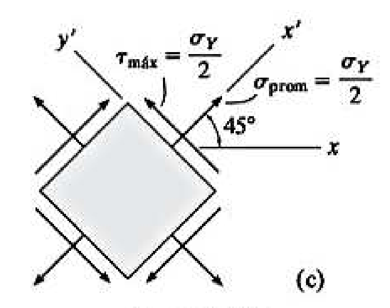
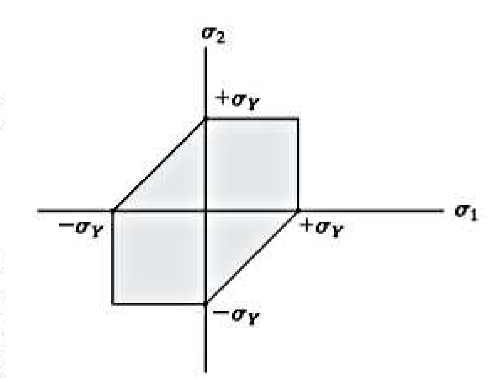


Figura 10-27

Al usar estas ecuaciones y la ecuación 10-26, la teoría del esfuerzo cortante máximo para el *esfuerzo plano* puede expresarse para cualquiera de los dos esfuerzos principales en el plano σ_1 y σ_2, mediante los siguientes criterios:

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_Y \\ |\sigma_2| &= \sigma_Y \end{aligned}\right\} \quad \sigma_1, \sigma_2 \text{ tienen los mismos signos}$$
$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_Y\} \quad \sigma_1, \sigma_2 \text{ tienen signos opuestos} \qquad (10\text{-}27)$$

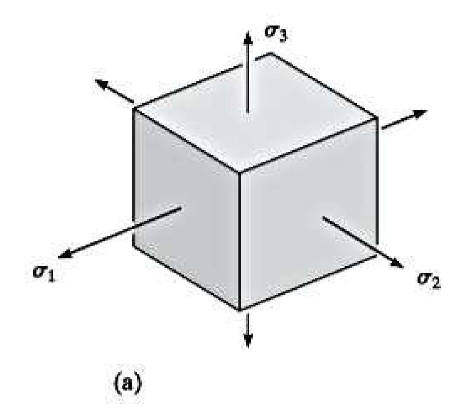


Teoría del esfuerzo cortante máximo

Figura 10-28

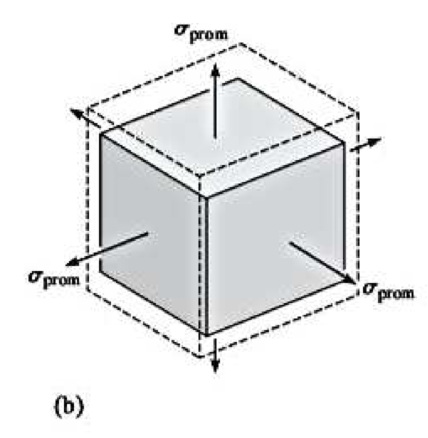
En la figura 10-28 se muestra una gráfica de estas ecuaciones. Resulta claro que si cualquier punto del material se somete a esfuerzo plano, y sus esfuerzos principales en el plano están representados por una coordenada (σ_1, σ_2) trazada en el *límite* o *fuera* del área gris hexagonal que se muestra en esta figura, el material cederá en el punto y se dirá que ocurrió una falla.

10



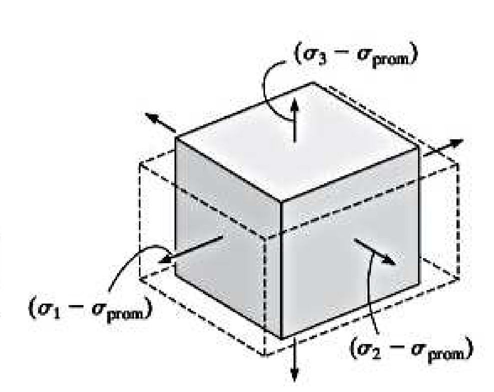
(a)

=



(b)

+



(c)

Figura 10-29

Teoría de la energía de distorsión máxima. En la sección 3.5 se estableció que una carga externa deformará un material, provocando que almacene energía *internamente* a través de su volumen. La energía por unidad de volumen de material se denomina ***densidad de la energía de deformación***, y si el material está sometido a un esfuerzo uniaxial, la densidad de la energía de deformación, definida por la ecuación 3-6, se convierte en

$$u = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \qquad (10\text{-}28)$$

Si el material se somete a un esfuerzo triaxial, figura 10-29*a*, entonces cada esfuerzo principal aporta una parte de la densidad de energía de deformación total, de modo que

$$u = \frac{1}{2}\sigma_1\epsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\epsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\epsilon_3$$

Por otra parte, si el material se comporta de manera elástico lineal, entonces se aplica la ley de Hooke. Por lo tanto, al sustituir la ecuación 10-18 en la ecuación anterior y al simplificar, se obtiene

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)\right] \qquad (10\text{-}29)$$

Esta densidad de energía de deformación puede considerarse como la suma de dos partes, una que representa la energía necesaria para causar un *cambio de volumen* en el elemento sin cambio en su forma, y la otra que representa la energía necesaria para *distorsionar* el elemento. En específico, la energía almacenada en el elemento como consecuencia del cambio de su volumen es causada por la aplicación del esfuerzo principal promedio, $\sigma_{prom} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, puesto que el esfuerzo causa deformaciones principales iguales en el material, figura 10-29*b*. La porción restante de esfuerzo $(\sigma_1 - \sigma_{prom})$, $(\sigma_2 - \sigma_{prom})$, $(\sigma_3 - \sigma_{prom})$, ocasiona la energía de distorsión, figura 10-29*c*.

La evidencia experimental ha demostrado que los materiales no ceden cuando están sometidos a un esfuerzo uniforme (hidrostático), como el σ_{prom} analizado anteriormente. Como resultado, en 1904 M. Huber propuso que la cedencia de un material dúctil se produce cuando la *energía de distorsión* por unidad de volumen del material es igual o superior a la energía de distorsión por unidad de volumen del mismo material cuando se somete a la cedencia en una prueba de tensión simple. Esta teoría se llama ***teoría de la máxima energía de distorsión***, y como después fue redefinida en forma independiente por R. von Mises y H. Hencky, en ocasiones también adopta sus nombres.

Para obtener la energía de distorsión por unidad de volumen, los esfuerzos σ_1, σ_2, σ_3 de la ecuación 10-29 se sustituyen por $(\sigma_1 - \sigma_{prom})$, $(\sigma_2 - \sigma_{prom})$ y $(\sigma_3 - \sigma_{prom})$ respectivamente, teniendo en cuenta que $\sigma_{prom} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$. Al expandir y simplificar, se obtiene

$$u_d = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

En el caso de *esfuerzo plano*, $\sigma_3 = 0$ y esta ecuación se reduce a

$$u_d = \frac{1 + \nu}{3E}\left(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)$$

Para una prueba de tensión *uniaxial*, $\sigma_1 = \sigma_Y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ y así

$$(u_d)_Y = \frac{1 + \nu}{3E}\sigma_Y^2$$

Como la teoría de la máxima energía de distorsión requiere que $u_d = (u_d)_Y$, entonces para el caso de esfuerzo plano o biaxial, se tiene

$$\boxed{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_Y^2} \qquad (10\text{-}30)$$

Teoría de la máxima energía de distorsión

Figura 10-30

Ésta es la ecuación de una elipse, figura 10-30. Por lo tanto, si un punto en el material se esfuerza de modo que (σ_1, σ_2) está representado en el límite o fuera del área en gris, se dice que el material falla.

En la figura 10-31 se muestra una comparación de estos dos criterios de falla. Tenga en cuenta que ambas teorías dan los mismos resultados cuando los esfuerzos principales son iguales, es decir, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_Y$, o cuando uno de los esfuerzos principales es cero y el otro tiene una magnitud de σ_Y. Si el material está sometido a cortante puro, τ, entonces las teorías tienen la mayor discrepancia posible en la predicción de la falla. Las coordenadas de esfuerzo de estos puntos sobre las curvas pueden determinarse al considerar el elemento mostrado en la figura 10-32*a*. A partir del círculo de Mohr asociado para este estado de esfuerzo, figura 10-32*b*, se obtienen los esfuerzos principales $\sigma_1 = \tau$ y $\sigma_2 = -\tau$. Así, con $\sigma_1 = -\sigma_2$ y a partir de la ecuación 10-27, la teoría del esfuerzo cortante máximo da $(\sigma_Y/2, -\sigma_Y/2)$, y a partir de la ecuación 10-30, la teoría de la máxima energía de distorsión da $(\sigma_Y/\sqrt{3},\ -\sigma_Y/\sqrt{3})$, figura 10-31.

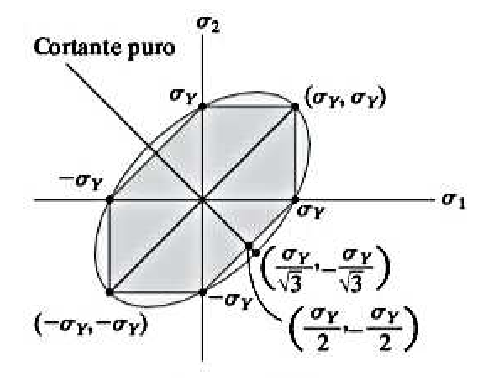


Figura 10-31

Las pruebas reales de torsión, usadas para desarrollar una condición de cortante puro en una probeta dúctil, han demostrado que la teoría de la máxima energía de distorsión da resultados más exactos para la falla por cortante puro que la teoría del esfuerzo cortante máximo. De hecho, como $(\sigma_Y/\sqrt{3})/(\sigma_Y/2) = 1.15$, el esfuerzo cortante para la cedencia del material, según la teoría de máxima energía de distorsión, es 15% más preciso que el dado por la teoría del esfuerzo cortante máximo.

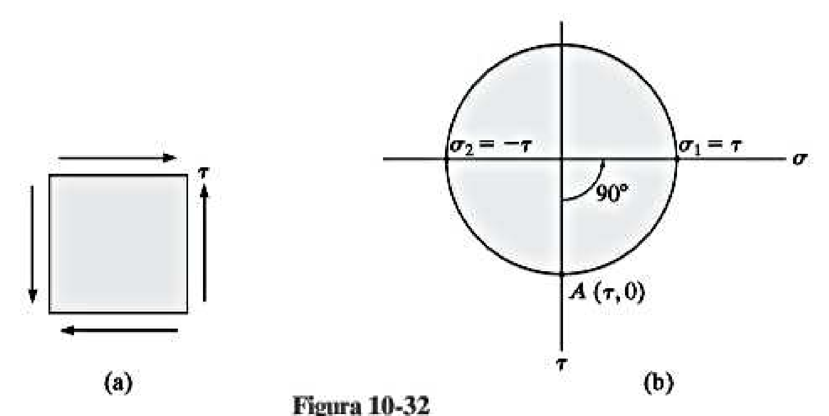


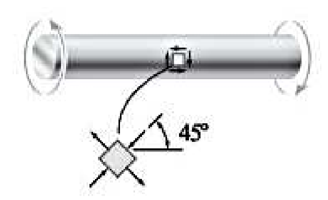
Figura 10-32

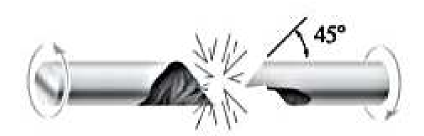
10



Falla de un material frágil en tensión

(a)





Falla de un material frágil en torsión

(b)

Figura 10-33

Materiales frágiles

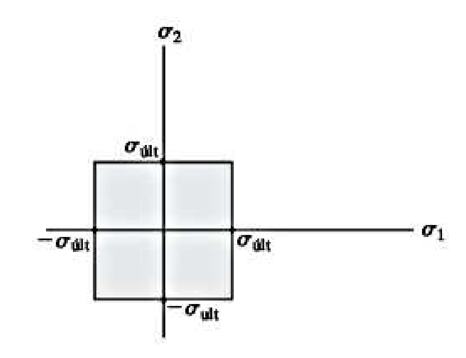
Teoría del esfuerzo normal máximo. Se estableció anteriormente que los materiales frágiles, como el hierro fundido gris, tienden a fallar de manera súbita mediante una *fractura* sin cedencia aparente. En una *prueba de tensión*, la fractura se produce cuando el esfuerzo normal alcanza el esfuerzo último $\sigma_{\text{últ}}$, figura 10-33*a*. Además, la fractura frágil ocurre en una prueba de torsión debido a la tensión ya que el plano de la fractura de un elemento está a 45° de la dirección cortante, figura 10-33*b*. Por lo tanto, la superficie de la fractura es helicoidal como se muestra.* Por otra parte, los experimentos han demostrado que durante la torsión, la resistencia del material *no se ve afectada* por la presencia del esfuerzo principal de compresión asociado que está en ángulo recto con el esfuerzo principal de tensión. En consecuencia, el esfuerzo de tensión necesario para fracturar una probeta durante una prueba de torsión es aproximadamente la misma que la necesaria para fracturar una probeta en tensión simple. Debido a esto, la ***teoría del esfuerzo normal máximo*** establece que un material frágil fallará cuando el esfuerzo máximo de tensión, σ_1, en el material alcance un valor igual al esfuerzo normal último que el material puede soportar cuando se somete a tensión simple.

Si el material está sometido a *esfuerzo plano*, se requiere que

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_{\text{últ}} \\ |\sigma_2| &= \sigma_{\text{últ}} \end{aligned} \qquad (10\text{-}31)$$

Estas ecuaciones se muestran gráficamente en la figura 10-34. Por lo tanto, si las coordenadas de esfuerzo (σ_1, σ_2) en un punto sobre el material caen en el límite o fuera del área gris, se dice que el material se fractura. Esta teoría se atribuye a W. Rankine, quien la propuso a mediados del siglo XIX. De manera experimental se ha encontrado que está en estrecha concordancia con el comportamiento de materiales frágiles que tienen diagramas de esfuerzo-deformación *semejantes*, tanto en tensión como en compresión.

Criterio de falla de Mohr. En algunos materiales frágiles, las propiedades en tensión y en compresión son *diferentes*. Cuando esto ocurre, puede usarse un criterio basado en el uso del círculo de Mohr para predecir la falla. Este método fue desarrollado por Otto Mohr y en ocasiones se conoce como el ***criterio de falla de Mohr***. Para aplicarlo, primero se realizan *tres pruebas* sobre el material. Se hace una prueba de tensión uniaxial y otra de compresión uniaxial con el fin de determinar los esfuerzos últimos de tensión y compresión $(\sigma_{\text{últ}})_t$ y $(\sigma_{\text{últ}})_c$, respectivamente. Además, se realiza una prueba de torsión para determinar el esfuerzo cortante último del material $\tau_{\text{últ}}$. Después, se grafica el círculo de Mohr para cada una de es-



Teoría del esfuerzo normal máximo

Figura 10-34

*Una barra de tiza para pizarrón falla de este modo cuando sus extremos se tuercen con los dedos.

10

tas condiciones de esfuerzo como se muestra en la figura 10-35. Estos tres círculos están contenidos en una "envolvente de falla" indicada por la curva extrapolada sombreada que es tangente a los tres círculos. Si una condición de esfuerzo plano en un punto se representa mediante un círculo que tiene un punto de tangencia con la envolvente, o si se extiende más allá de los límites de la envolvente, entonces se dice que ocurre la falla.

El criterio también puede representarse mediante una gráfica de esfuerzos principales σ_1 y σ_2. Esto se muestra en la figura 10-36. Aquí la falla se produce cuando el valor absoluto de cualquiera de los esfuerzos principales alcanza un valor igual o mayor que $(\sigma_{\text{últ}})_t$ o $(\sigma_{\text{últ}})_c$ o en general, si el estado de esfuerzo en un punto definido por las coordenadas de esfuerzo (σ_1, σ_2) se representa en el límite o fuera del área gris.

En la práctica, puede usarse la teoría del esfuerzo normal máximo o el criterio de falla de Mohr para predecir la falla de un material frágil. Sin embargo, debe observarse que su utilidad es bastante limitada. Una fractura por tensión ocurre de manera súbita, y su inicio depende generalmente de las concentraciones de esfuerzo desarrolladas en las imperfecciones microscópicas del material, como inclusiones o huecos, hendiduras superficiales y pequeñas grietas. Como cada una de estas irregularidades varía de una probeta a otra, es difícil especificar una fractura con base en una sola prueba.

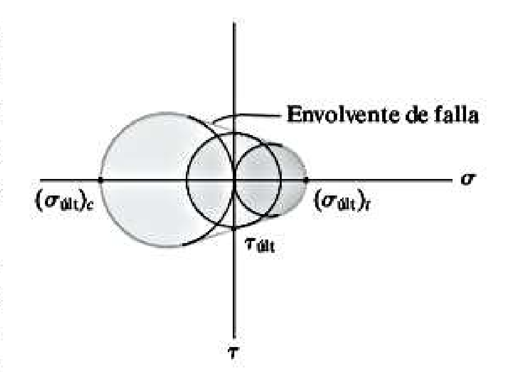


Figura 10-35

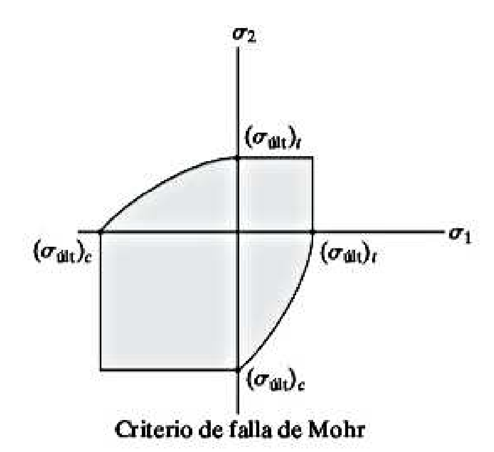


Figura 10-36

Puntos importantes

- Si un material es *dúctil*, la falla se especifica mediante el inicio de la *cedencia*, y si es *frágil*, se especifica por medio de la *fractura*.
- La *falla dúctil* puede definirse cuando se produce *deslizamiento* entre los cristales que componen el material. Este deslizamiento se debe al *esfuerzo cortante* y la *teoría del esfuerzo cortante máximo* se basa en esta idea.
- La *energía de deformación* se almacena en un material cuando éste se somete a esfuerzo normal. La *teoría de la máxima energía de distorsión* depende de la *energía de deformación* que *distorsiona* el material, y no de la parte que aumenta su volumen.
- La fractura de un *material frágil* es causada sólo por el *esfuerzo de tensión máximo* en el material, y no por el esfuerzo de compresión. Ésta es la base de la *teoría del esfuerzo normal máximo* y puede aplicarse si el diagrama de esfuerzo-deformación es *semejante* en tensión y en compresión.
- Si un *material frágil* tiene un diagrama de esfuerzo-deformación que es *diferente* en tensión y en compresión, entonces puede usarse el *criterio de falla de Mohr* para predecir la falla.
- Debido a las imperfecciones del material, la *fractura por tensión* de un material frágil es *difícil de predecir*, por lo que debe tenerse precaución al usar las teorías de falla para materiales frágiles.

EJEMPLO 10.12

El eje sólido de hierro fundido que se muestra en la figura 10-37*a* está sometido a un par de torsión $T = 400$ lb · pie. Determine su radio más pequeño de modo que no falle según la teoría del esfuerzo normal máximo. Una probeta de hierro fundido, probada en tensión, tiene un esfuerzo último de $(\sigma_{\text{últ}})_t = 20$ ksi.

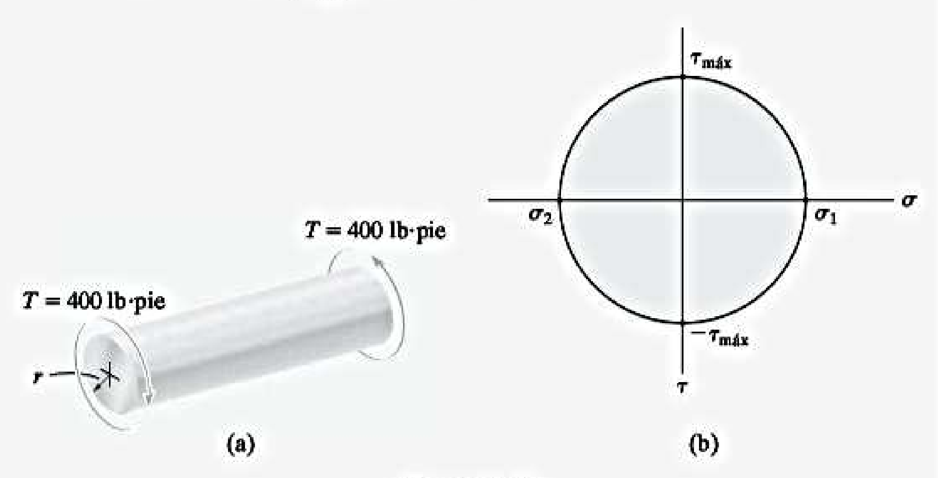


Figura 10-37

SOLUCIÓN

El esfuerzo máximo o crítico ocurre en un punto situado sobre la superficie del eje. Si se supone que el eje tiene un radio r, el esfuerzo cortante es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(400 \text{ lb} \cdot \text{pie})(12 \text{ pulg/pie})r}{(\pi/2)r^4} = \frac{3055.8 \text{ lb} \cdot \text{pulg}}{r^3}$$

El círculo de Mohr para este estado de esfuerzo (cortante puro) se muestra en la figura 10-37*b*. Como $R = \tau_{\text{máx}}$, entonces,

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\text{máx}} = \frac{3055.8 \text{ lb} \cdot \text{pulg}}{r^3}$$

La teoría del esfuerzo normal máximo, ecuación 10-31, requiere que

$$|\sigma_1| \leq \sigma_{\text{últ}}$$

$$\frac{3055.8 \text{ lb} \cdot \text{pulg}}{r^3} \leq 20\,000 \text{ lb/pulg}^2$$

Así, el radio más pequeño del eje se determina a partir de

$$\frac{3055.8 \text{ lb} \cdot \text{pulg}}{r^3} = 20\,000 \text{ lb/pulg}^2$$

$$r = 0.535 \text{ pulg}$$ *Resp.*

10

EJEMPLO 10.13

El eje sólido que se muestra en la figura 10-38*a* tiene un radio de 0.5 pulg y está fabricado de un acero con esfuerzo de cedencia $\sigma_Y = 36$ ksi. Determine si las cargas ocasionan que el eje falle según la teoría del esfuerzo cortante máximo y la teoría de la energía de distorsión máxima.

SOLUCIÓN

El estado de esfuerzo en el eje es causado tanto por la fuerza axial como por el par de torsión. Como el esfuerzo cortante máximo causado por el par de torsión se produce en la superficie externa del material, se tiene

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-15\text{ kip}}{\pi(0.5\text{ pulg})^2} = -19.10\text{ ksi}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{3.25\text{ kip}\cdot\text{pulg }(0.5\text{ pulg})}{\frac{\pi}{2}(0.5\text{ pulg})^4} = 16.55\text{ ksi}$$

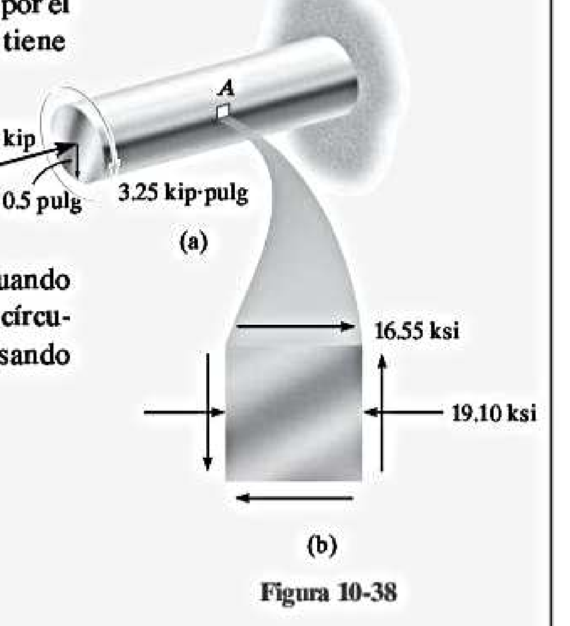


Figura 10-38

En la figura 10-38*b* se muestran las componentes de esfuerzo actuando sobre un elemento de material en el punto *A*. En vez de utilizar el círculo de Mohr, los esfuerzos principales también pueden obtenerse usando la ecuación 9-5 para la transformación de esfuerzos.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-19.10 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-19.10 - 0}{2}\right)^2 + (16.55)^2}$$

$$= -9.55 \pm 19.11$$

$$\sigma_1 = 9.56\text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = -28.66\text{ ksi}$$

Teoría del esfuerzo cortante máximo. Como los esfuerzos principales tienen *signos opuestos*, con base en la sección 9.5 el esfuerzo cortante máximo absoluto se produce en el plano y, por lo tanto, al aplicar la segunda de las ecuaciones 10-27, se tiene

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \le \sigma_Y$$

$$|9.56 - (-28.66)| \overset{?}{\le} 36$$

$$38.2 > 36$$

Así que, de acuerdo con esta teoría, ocurrirá una falla cortante.

Teoría de la energía de distorsión máxima. Si se aplica la ecuación 10-30, resulta

$$\left(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) \le \sigma_Y^2$$

$$\left[(9.56)^2 - (9.56)(-28.66) + (-28.66)^2\right] \overset{?}{\le} (36)^2$$

$$1187 \le 1296$$

Según esta teoría, no se producirá ninguna falla.

10

PROBLEMAS

10-59. Un material está sometido a esfuerzo plano. Exprese la teoría de falla de la energía de distorsión en términos de σ_x, σ_y y τ_{xy}.

***10-60.** Un material está sometido a esfuerzo plano. Exprese la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo en términos de σ_x, σ_y y τ_{xy}. Suponga que los esfuerzos principales tienen signos algebraicos diferentes.

•10-61. Se usará una aleación de aluminio 6061-T6 para fabricar un eje de transmisión sólido de modo que transmita 40 hp a 2400 rev/min. Use un factor de seguridad de 2 con respecto a la cedencia y determine el menor diámetro que puede elegirse para el eje con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo.

10-62. Resuelva el problema 10-61, usando la teoría de la energía de distorsión máxima.

10-63. Se usará una aleación de aluminio para fabricar un eje de transmisión de modo que transmita 25 hp a 1500 rev/min. Use un factor de seguridad de 2.5 con respecto a la cedencia y determine el menor diámetro que puede seleccionarse para el eje con base en la teoría de la energía de distorsión máxima. $\sigma_Y = 3.5$ ksi.

***10-64.** Una barra con área transversal cuadrada está fabricada de un material que tiene un esfuerzo de cedencia $\sigma_y = 120$ ksi. Si la barra está sometida a un momento flexionante de 75 kip·pulg, determine el tamaño requerido de la barra según la teoría de la energía de distorsión máxima. Use un factor de seguridad de 1.5 con respecto a la cedencia.

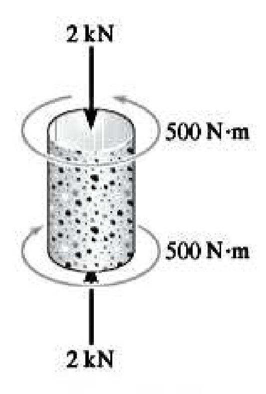
•10-65. Resuelva el problema 10-64 usando la teoría del esfuerzo cortante máximo.

10-66. Obtenga una expresión para un par de torsión equivalente T_e que, al aplicarlo de manera aislada sobre una barra sólida de sección circular, cause la misma energía de distorsión que al aplicar una combinación de un momento flexionante M y un par de torsión T.

10

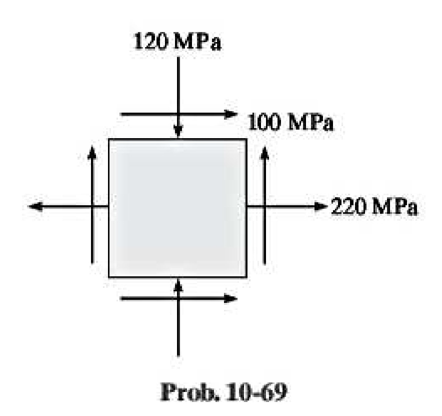
10-67. Obtenga una expresión para un momento flexionante equivalente M_e que, al aplicarlo de manera aislada sobre una barra sólida de sección circular, cause la misma energía de distorsión que al aplicar una combinación de un momento flexionante M y un par de torsión T.

***10-68.** El cilindro corto de concreto, que tiene un diámetro de 50 mm, se somete a un par de torsión de 500 N·m y a una fuerza axial de compresión de 2 kN. Determine si habrá falla según la teoría del esfuerzo normal máximo. El esfuerzo último del concreto es $\sigma_{\text{últ}} = 28$ MPa.



Prob. 10-68

•10-69. Cuando el hierro fundido se prueba a tensión y a compresión tiene una resistencia última de $(\sigma_{\text{últ}})_t = 280$ MPa y $(\sigma_{\text{últ}})_c = 420$ MPa, respectivamente. Además, cuando se somete a torsión pura puede sostener un esfuerzo cortante último de $\tau_{\text{últ}} = 168$ MPa. Grafique los círculos de Mohr para cada caso y establezca la envolvente de falla. Si una parte fabricada de este material se somete al estado de esfuerzo plano mostrado en la figura, determine si ocurrirá alguna falla según el criterio de falla de Mohr.

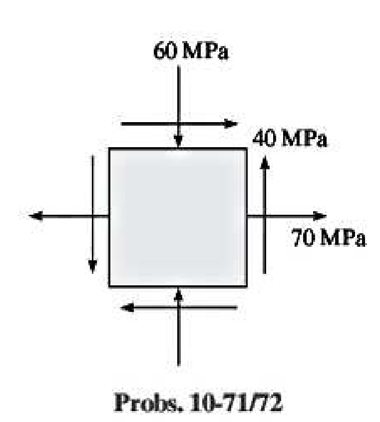


Prob. 10-69

10-70. Obtenga una expresión para un momento flexionante equivalente M_e que, al aplicarlo de manera aislada sobre una barra sólida de sección circular, cause el mismo esfuerzo cortante máximo que al aplicar una combinación de un momento flexionante M y un par de torsión T. Suponga que los esfuerzos principales tienen signos algebraicos opuestos.

10-71. En la figura se muestran las componentes de esfuerzo plano en un punto crítico de una coraza de acero A-36. Determine si ha ocurrido falla (cedencia) con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo.

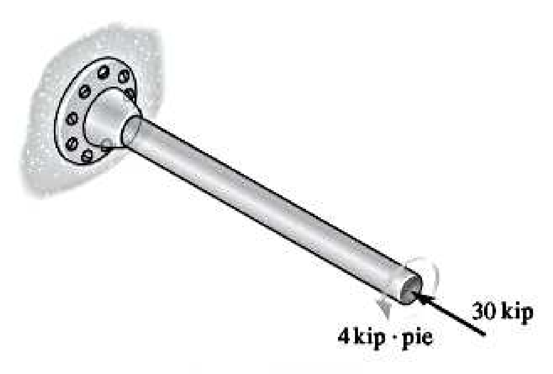
***10-72.** En la figura se muestran las componentes de esfuerzo plano en un punto crítico de una coraza de acero A-36. Determine si ha ocurrido falla (cedencia) con base en la teoría de la energía de distorsión máxima.



Probs. 10-71/72

•10-73. Si el eje de 2 pulg de diámetro está fabricado con un material frágil que tiene una resistencia última de $\sigma_{\text{últ}} = 50$ ksi tanto en tensión como en compresión, determine si el eje fallará de acuerdo con la teoría del esfuerzo normal máximo. Use un factor de seguridad de 1.5 contra la ruptura.

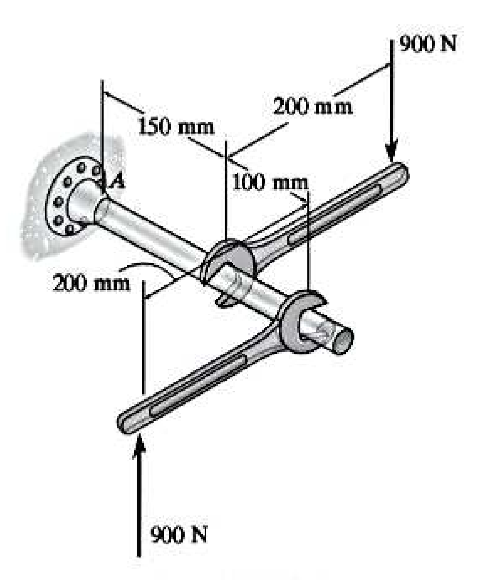
10-74. Si el eje de 2 pulg de diámetro está fabricado con hierro fundido, el cual tiene resistencias últimas en tensión y en compresión de $(\sigma_{\text{últ}})_t = 50$ ksi y $(\sigma_{\text{últ}})_c = 75$ ksi, respectivamente, determine si el eje fallará de acuerdo con el criterio de falla de Mohr.



Probs. 10-73/74

10-75. Si el tubo de acero A-36 tiene diámetros exterior e interior de 30 y 20 mm, respectivamente, determine el factor de seguridad contra la cedencia del material en el punto A, de acuerdo con la teoría del esfuerzo cortante máximo.

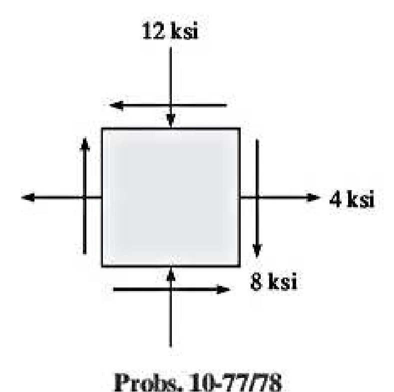
***10-76.** Si el tubo de acero A-36 tiene diámetros exterior e interior de 30 y 20 mm, respectivamente, determine el factor de seguridad contra la cedencia del material en el punto A, de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión máxima.



Probs. 10-75/76

•10-77. El elemento está sometido a los esfuerzos mostrados. Si $\sigma_Y = 36$ ksi, determine el factor de seguridad para la carga con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo.

10-78. Resuelva el problema 10-77, usando la teoría de la energía de distorsión máxima.

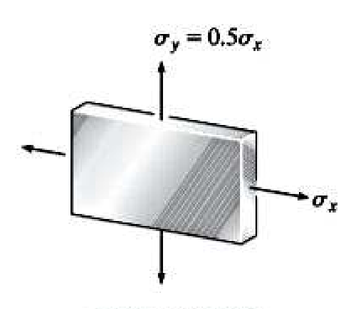


Probs. 10-77/78

10-79. El esfuerzo de cedencia para el cobre aleado con berilio tratado térmicamente es $\sigma_Y = 130$ ksi. Si este material se somete a esfuerzo plano y se produce una falla elástica cuando uno de los esfuerzos principales es de 145 ksi, ¿cuál es la menor magnitud del otro esfuerzo principal? Use la teoría de la energía de distorsión máxima.

***10-80.** La placa está fabricada de cobre duro, que cede en $\sigma_Y = 105$ ksi. Use la teoría del esfuerzo cortante máximo para determinar el esfuerzo de tensión σ_x que puede aplicarse a la placa si también se aplica un esfuerzo de tensión $\sigma_y = 0.5\sigma_x$.

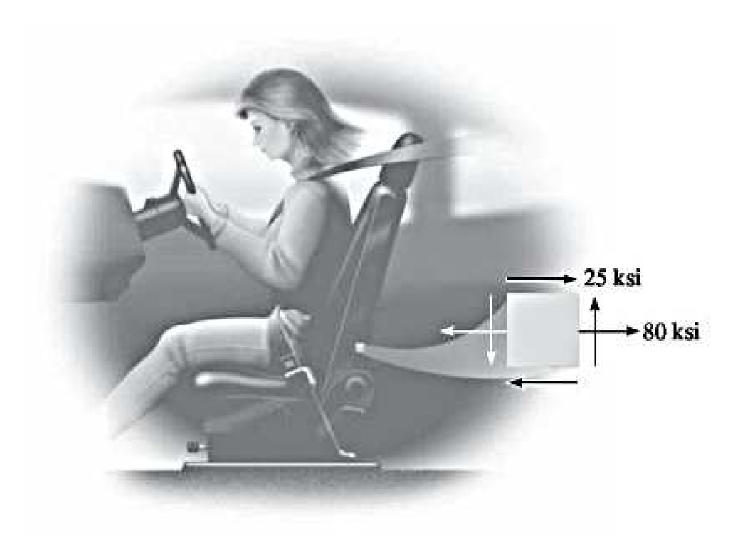
•10-81. Resuelva el problema 10-80 usando la teoría de la energía de distorsión máxima.



Probs. 10-80/81

10-82. En la figura se muestra el estado de esfuerzo que actúa en un punto crítico sobre el bastidor del asiento de un automóvil durante una colisión. Determine el menor esfuerzo de cedencia de un acero que puede elegirse para el elemento, con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo.

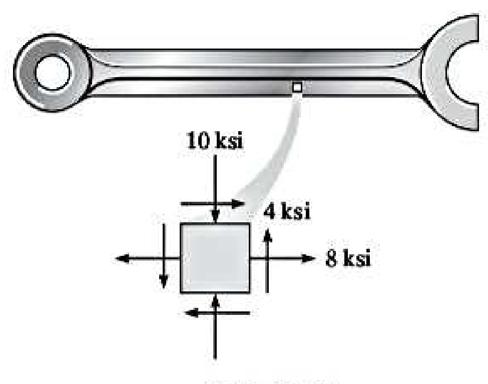
10-83. Resuelva el problema 10-82 usando la teoría de la energía de distorsión máxima.



Probs. 10-82/83

***10-84.** Una barra con una sección transversal circular está fabricada de acero al carbono SAE 1045 con un esfuerzo de cedencia $\sigma_Y = 150$ ksi. Si la barra se somete a una torsión de 30 kip·pulg y a un momento flexionante de 56 kip·pulg, determine el diámetro requerido para la barra de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión máxima. Use un factor de seguridad de 2 con respecto a la cedencia.

•10-85. En la figura se muestra el estado de esfuerzo que actúa en un punto crítico de un elemento de máquina. Determine el menor esfuerzo de cedencia de un acero que puede seleccionarse para la parte de máquina con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo.

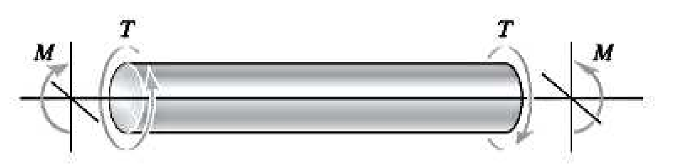


Prob. 10-85

10-86. Los esfuerzos principales que actúan en un punto sobre un recipiente cilíndrico a presión de pared delgada son $\sigma_1 = pr/t$, $\sigma_2 = pr/2t$ y $\sigma_3 = 0$. Si el esfuerzo de cedencia es σ_Y, determine el valor máximo de p con base en (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo y (b) la teoría de la energía de distorsión máxima.

10-87. Si un eje sólido que tiene un diámetro d está sometido al par de torsión **T** y al momento **M**, muestre que por la teoría del esfuerzo cortante máximo, el esfuerzo cortante máximo permisible es $\tau_{\text{perm}} = (16/\pi d^3)\sqrt{M^2 + T^2}$. Suponga que los esfuerzos principales tienen signos algebraicos opuestos.

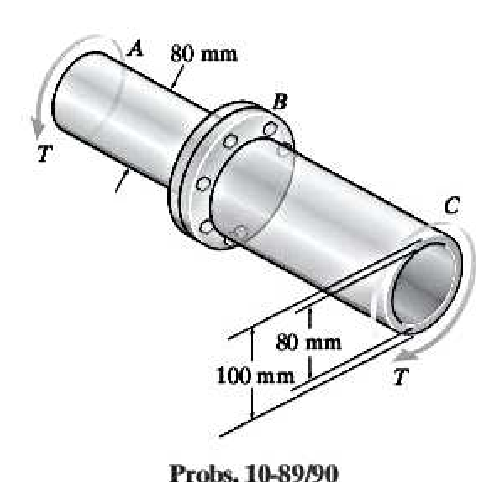
***10-88.** Si un eje sólido que tiene un diámetro d está sometido al par de torsión **T** y al momento **M**, muestre que por la teoría del esfuerzo normal máximo, el esfuerzo principal máximo permisible es $\sigma_{\text{perm}} = (16/\pi d^3)(M + \sqrt{M^2 + T^2})$.



Probs. 10-87/88

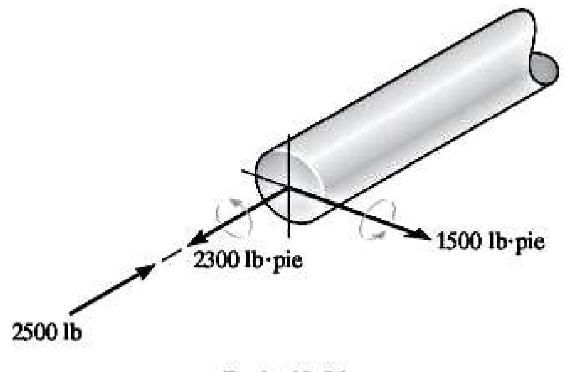
•**10-89.** El eje se compone de un segmento sólido AB y un segmento hueco BC, los cuales están rígidamente unidos mediante el acoplamiento en B. Si el eje está fabricado de acero A-36, determine el par de torsión máximo T que puede aplicarse de acuerdo con la teoría del esfuerzo cortante máximo. Use un factor de seguridad de 1.5 contra la cedencia.

10-90. El eje se compone de un segmento sólido AB y un segmento hueco BC, los cuales están rígidamente unidos mediante el acoplamiento en B. Si el eje está fabricado de acero A-36, determine el par de torsión máximo T que puede aplicarse de acuerdo con la teoría de la energía de distorsión máxima. Use un factor de seguridad de 1.5 contra la cedencia.



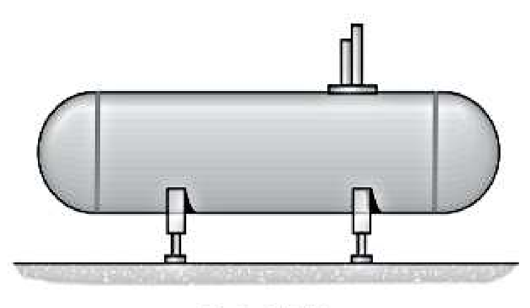
Probs. 10-89/90

10-91. El eje de propulsión de un barco está hecho de acero. Se calcula que las cargas internas en una sección crítica a lo largo del eje son un par de torsión de 2300 lb·pie, un momento flexionante de 1500 lb·pie y un empuje axial de 2500 lb. Si los puntos de cedencia para la tensión y cortante son $\sigma_Y = 100$ ksi y $\tau_Y = 50$ ksi, respectivamente, determine el diámetro requerido para el eje usando la teoría del esfuerzo cortante máximo.



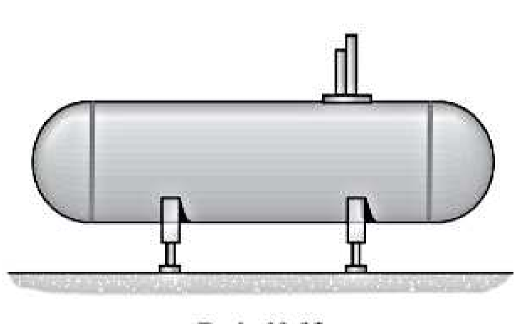
Prob. 10-91

*__10-92.__ El tanque de gas tiene un diámetro interior de 1.50 m y un grosor de pared de 25 mm. Si está fabricado de acero A-36 y el tanque experimenta una presión de 5 MPa, determine el factor de seguridad contra la cedencia usando (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo, y (b) la teoría de la energía de distorsión máxima.



Prob. 10-92

•**10-93.** El tanque de gas está fabricado de acero A-36 y tiene un diámetro interior de 1.50 m. Si el tanque está diseñado para soportar una presión de 5 MPa, determine el grosor de pared mínimo requerido usando una precisión de 1 mm y (a) la teoría del esfuerzo cortante máximo, (b) la teoría de la energía de distorsión máxima. Aplique un factor de seguridad de 1.5 contra la cedencia.



Prob. 10-93

REPASO DE CAPÍTULO

Cuando un elemento de material está sometido a deformaciones que sólo ocurren en un plano único, el elemento experimenta deformación plana. Si se conocen las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} para una orientación específica del elemento, entonces las deformaciones que actúan en alguna otra orientación del elemento pueden determinarse mediante las ecuaciones de transformación de la deformación plana. Del mismo modo, las deformaciones normales principales y la deformación cortante máxima en el plano pueden determinarse usando las ecuaciones de transformación.

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen } 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen } 2\theta$$

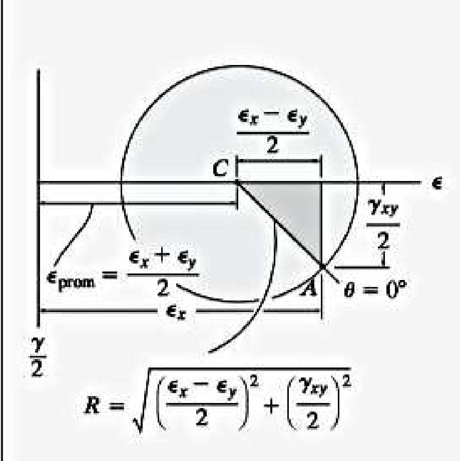
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\text{sen } 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\frac{\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

Los problemas que involucran la transformación de deformaciones también pueden resolverse de manera semigráfica usando el círculo de Mohr. Para dibujar el círculo, se establecen los ejes ϵ y $\gamma/2$, y se grafican en el centro del círculo $C[(\epsilon_x + \epsilon_y)/2, 0]$ y el "punto de referencia" $A(\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$. El radio del círculo se extiende entre estos dos puntos y se determina mediante la trigonometría.



Si ϵ_1 y ϵ_2 tienen el mismo signo, entonces la deformación cortante máxima absoluta estará fuera del plano.

$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = \epsilon_1$$

$$\gamma_{\substack{\text{en el plano}\\ \text{máx}}} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

En el caso de deformación plana, la deformación cortante máxima absoluta será igual a la deformación cortante máxima en el plano siempre que las deformaciones principales ϵ_1 y ϵ_2 tengan signos opuestos.

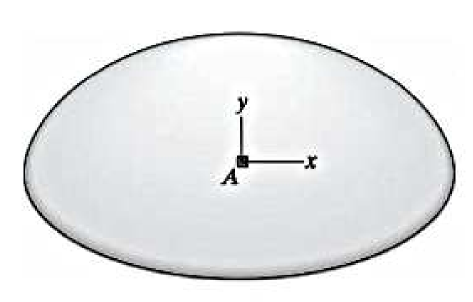
$$\gamma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

Si un material está sometido a esfuerzo triaxial, entonces la deformación en cada dirección está influenciada por la deformación que producen los tres esfuerzos. Por consiguiente, la ley de Hooke involucra las propiedades E y ν del material.	$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$ $\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$	
Si E y ν son conocidos, entonces es posible determinar G.	$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	
La dilatación es una medida de la deformación volumétrica. El módulo de volumen se utiliza para medir la rigidez de un volumen de material.	$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ $k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	
Si se conocen los esfuerzos principales en un punto crítico del material, entonces puede usarse una teoría de falla como base para el diseño. Los *materiales dúctiles fallan en cortante*, y en este caso puede emplearse la teoría del esfuerzo cortante máximo o la teoría de la energía de distorsión máxima para predecir la falla. Ambas teorías hacen una comparación con el esfuerzo de cedencia para una probeta sometida a un esfuerzo de tensión uniaxial. Los *materiales frágiles fallan en tensión*, por lo que aquí puede usarse la teoría del esfuerzo normal máximo o el criterio de falla de Mohr para predecir la falla. En este caso se hacen comparaciones con el esfuerzo de tensión último desarrollado en una probeta.		

PROBLEMAS DE REPASO

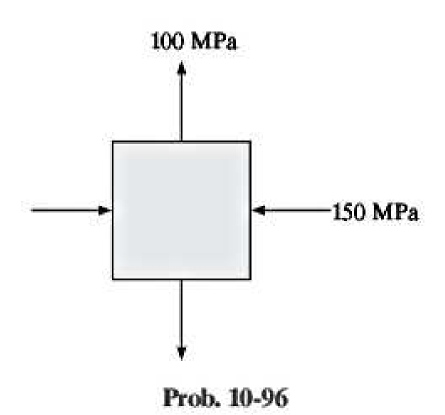
10-94. Un recipiente esférico a presión con pared delgada tiene un radio interior r, un grosor t y se encuentra sometido a una presión interna p. Si las constantes del material son E y ν, determine la deformación en la dirección circunferencial en términos de los parámetros establecidos.

10-95. La deformación en el punto A de la coraza tiene componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = 400(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 275(10^{-6})$, $\epsilon_z = 0$. Determine (a) las deformaciones principales en A, (b) la deformación cortante máxima en el plano x-y y (c) la deformación cortante máxima absoluta.



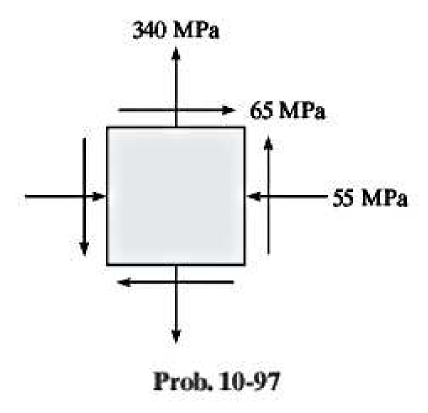
Prob. 10-95

***10-96.** En la figura se muestran los esfuerzos planos principales que actúan en un punto. Si el material es acero de máquina con un esfuerzo de cedencia $\sigma_Y = 500$ MPa, determine el factor de seguridad con respecto a la cedencia, si se considera la teoría del esfuerzo cortante máximo.



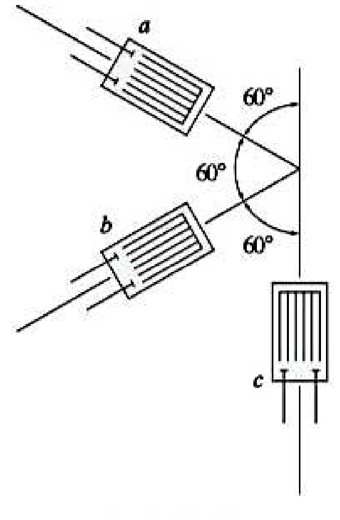
Prob. 10-96

•10-97. En la figura se muestran las componentes de esfuerzo plano en un punto crítico sobre una coraza delgada de acero. Determine si se produce una falla (cedencia) con base en la teoría de la energía de distorsión máxima. El esfuerzo de cedencia para el acero es $\sigma_Y = 650$ MPa.



Prob. 10-97

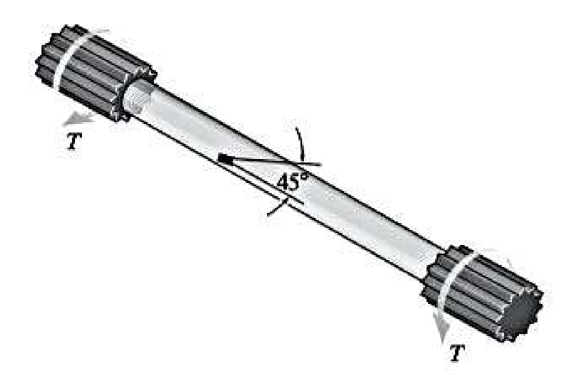
10-98. La roseta de deformación a 60° se monta sobre una viga. Se obtienen las siguientes lecturas para cada medidor: $\epsilon_a = 600(10^{-6})$, $\epsilon_b = -700(10^{-6})$ y $\epsilon_c = 350(10^{-6})$. Determine (a) las deformaciones principales en el plano y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación normal promedio. En cada caso muestre el elemento distorsionado debido a estas transformaciones.



Prob. 10-98

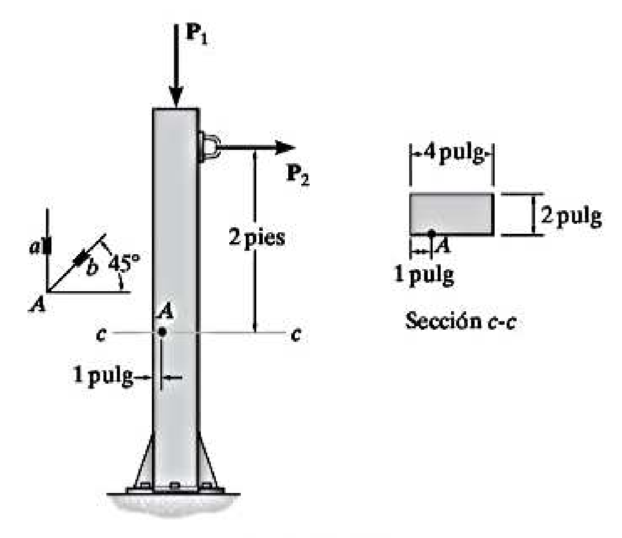
10

10-99. Un medidor de deformación está a un ángulo de 45° respecto a la línea central del eje que tiene un diámetro de 50 mm. Si se obtiene una lectura de $\epsilon = -200(10^{-6})$ cuando se aplica el par de torsión **T** sobre el eje, determine la magnitud de **T**. El eje está fabricado de acero A-36.



Prob. 10-99

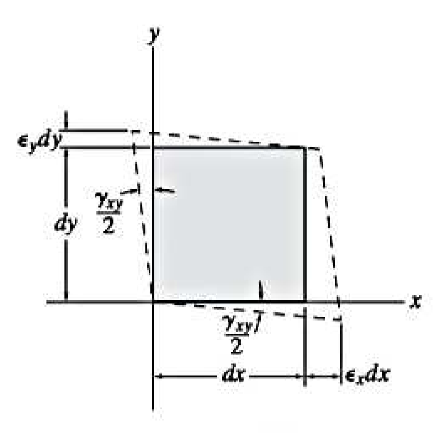
***10-100.** El poste de acero A-36 está sometido a las fuerzas que se muestran en la figura. Si los medidores de deformación a y b en el punto A dan lecturas de $\epsilon_a = 300(10^{-6})$ y $\epsilon_b = 175(10^{-6})$, determine las magnitudes de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.



Prob. 10-100

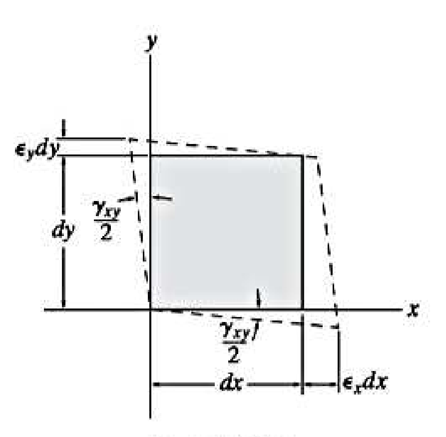
10-101. Un elemento diferencial está sometido a una deformación plana que tiene las siguientes componentes: $\epsilon_x = 950(10^{-6})$, $\epsilon_y = 420(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -325(10^{-6})$. Use las ecuaciones para la transformación de deformaciones y determine (a) las deformaciones principales y (b) la deformación cortante máxima en el plano y la deformación promedio asociada. En cada caso especifique la orientación del elemento y muestre las forma en que estas deformaciones distorsionan al elemento.

10-102. El estado de deformación plana sobre un elemento es $\epsilon_x = 400(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -300(10^{-6})$. Determine el estado de deformación equivalente sobre un elemento en el mismo punto orientado a 30° en sentido horario con respecto al elemento original. Grafique los resultados sobre el elemento.



Prob. 10-102

10-103. El estado de deformación plana sobre un elemento es $\epsilon_x = 400(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$ y $\gamma_{xy} = -300(10^{-6})$. Determine el estado de deformación equivalente que representa (a) las deformaciones principales y (b) la deformación cortante máxima en el plano y el esfuerzo normal promedio asociado. Especifique la orientación del elemento correspondiente en el punto con respecto al elemento original. Grafique los resultados sobre el elemento.



Prob. 10-103



Las vigas son elementos estructurales importantes que se usan para soportar cargas en techos y pisos.

Diseño de vigas y ejes

11

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se estudiará cómo diseñar una viga para que sea capaz de resistir tanto cargas flexionantes como cortantes. En específico, se desarrollarán los métodos usados para el diseño de vigas prismáticas y la determinación de los perfiles para vigas completamente esforzadas. Al final del capítulo, se considerará el diseño de ejes con base en la resistencia a momentos flexionantes y de torsión.

11.1 Fundamentos para el diseño de vigas

Se dice que las vigas están diseñadas con base en la resistencia, de modo que puedan soportar la fuerza cortante interna y el momento interno desarrollados en toda su longitud. Para diseñar una viga de esta manera es necesario aplicar las fórmulas de la fuerza cortante y la flexión siempre que el material sea homogéneo y tenga un comportamiento elástico lineal. Aunque algunas vigas también pueden estar sometidas a una fuerza axial, los efectos de esta fuerza suelen no tomarse en cuenta durante el diseño porque el esfuerzo axial es en general mucho menor que el esfuerzo desarrollado por cortante y flexión.

Como se muestra en la figura. 11-1, las cargas externas sobre una viga crearán esfuerzos adicionales en la viga *justo debajo de la carga*. En particular, se desarrollará un esfuerzo de compresión σ_y, además del esfuerzo flexionante σ_x y el esfuerzo cortante τ_{xy} que se analizaron anteriormente. Mediante el uso de métodos avanzados de análisis, como los que se tratan en la teoría de la elasticidad, es posible demostrar que σ_y disminuye rápidamente a través del peralte de la viga, y para la *mayoría* de las relaciones claro-peralte de las vigas utilizadas en la práctica de la ingeniería, el valor máximo de σ_y en general, representa sólo un pequeño porcentaje en comparación con el esfuerzo flexionante σ_x, es decir, $\sigma_x >> \sigma_y$. Por otra parte, en el diseño de vigas suele evitarse la aplicación directa de cargas concentradas. En su lugar, se usan *placas de soporte* para distribuir este tipo de cargas de manera más uniforme sobre la superficie de la viga.

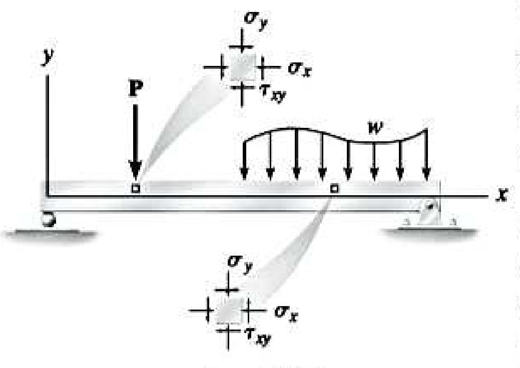


Figura 11-1

Aunque las vigas están diseñadas principalmente para la resistencia, también deberán tener un soporte adecuado a lo largo de sus costados, de modo que no se presente pandeo o se vuelvan inestables de manera repentina. Además, en algunos casos las vigas deben diseñarse para resistir una cantidad limitada de *deflexión*, como cuando soportan techos de materiales frágiles como el yeso. Los métodos para determinar deflexiones en las vigas se analizarán en el capítulo 12, y las limitaciones impuestas al pandeo de la viga suelen desarrollarse en los códigos relacionados con el diseño estructural o mecánico.

Como las fórmulas de la fuerza cortante y la flexión se utilizan para el diseño de vigas, se analizarán los resultados generales obtenidos cuando estas ecuaciones se apliquen a varios puntos sobre una viga en voladizo que tiene una sección transversal rectangular y soporta una carga **P** en su extremo, figura 11-2a.

En general, en una sección arbitraria *a-a* a lo largo del eje de la viga, figura 11-2*b*, la fuerza cortante **V** y el momento **M** internos se desarrollan a partir de una distribución *parabólica* del esfuerzo cortante, y una distribución *lineal* del esfuerzo normal, figura 11-2*c*. Como resultado, los esfuerzos que actúan sobre los elementos situados en los puntos 1 a 5 de la sección serán como se muestran en la figura 11-2*d*. Observe que los elementos 1 y 5 están sometidos sólo al esfuerzo normal máximo, mientras que el elemento 3, que está en el eje neutro, se somete sólo al esfuerzo cortante máximo. Los elementos intermedios 2 y 4 resisten *tanto* esfuerzo normal *como* cortante.

En cada caso, el estado de esfuerzo puede transformarse en *esfuerzos principales*, usando las ecuaciones para la transformación de esfuerzos o el círculo de Mohr. Los resultados se muestran en la figura 11-2*e*. Aquí cada elemento del 1 al 5 se somete a una orientación en sentido antihorario. De manera específica, en relación con el elemento 1, que se considera en la posición 0°, el elemento 3 está orientado a 45° y el elemento 5 a 90°.



Siempre que se producen grandes cargas cortantes en una viga, es importante usar refuerzos del tipo mostrado en *A*, a fin de evitar cualquier falla localizada como el plegado de las alas de la viga.

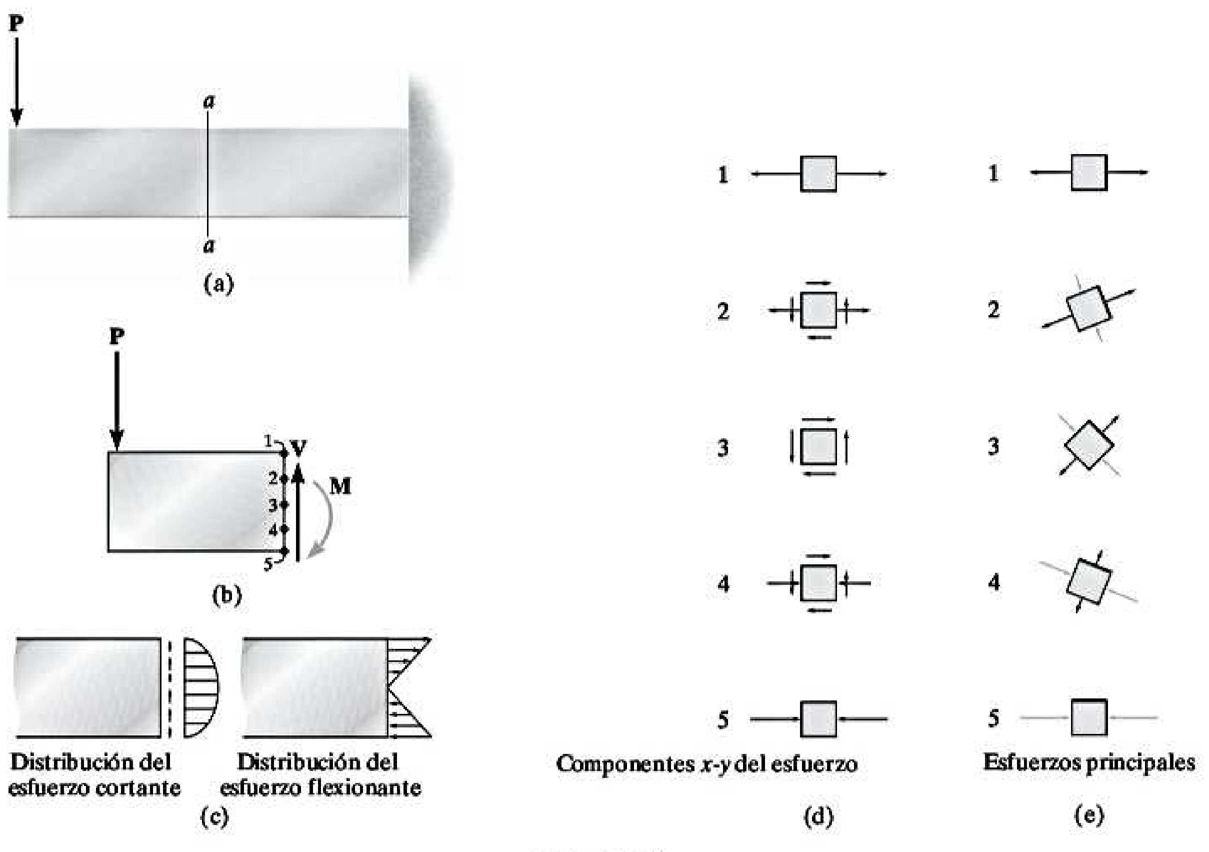
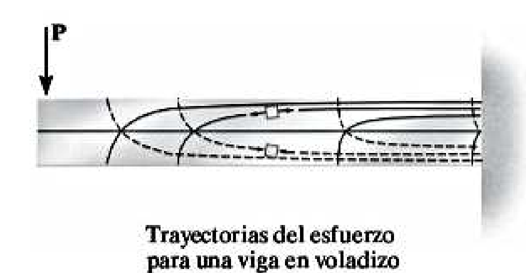


Figura 11-2



Trayectorias del esfuerzo para una viga en voladizo

Figura 11-3

Si el análisis se extiende a muchas secciones verticales a lo largo de la viga distintas de *a-a*, un perfil de los resultados puede representarse mediante curvas llamadas *trayectorias de esfuerzo*. Cada una de estas curvas indica la *dirección* de un esfuerzo principal que tiene una magnitud constante. Algunas de estas trayectorias se muestran para la viga en voladizo de la figura 11-3. Aquí las líneas continuas representan la dirección de los esfuerzos principales de tensión y las líneas discontinuas representan la dirección de los esfuerzos principales de compresión. Como era de esperarse, las líneas intersecan al eje neutro en ángulos de 45° (como el elemento 3) y las líneas continuas y discontinuas lo intersecan a 90°, ya que los esfuerzos principales están siempre separados por 90°. Conocer la dirección de estas líneas puede ayudar a los ingenieros a decidir dónde reforzar una viga fabricada de un material frágil para que no se agriete o se vuelva inestable.

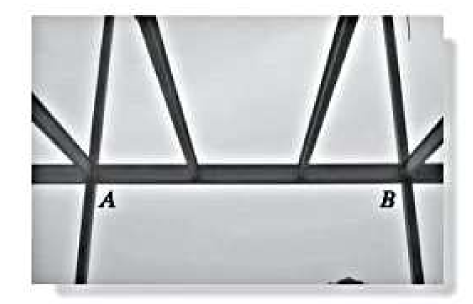
11.2 Diseño de una viga prismática

La mayoría de las vigas están fabricadas de materiales dúctiles y cuando éste es el caso, generalmente no es necesario trazar las trayectorias de esfuerzo para la viga. En cambio, sólo hay que asegurarse que el esfuerzo flexionante y el esfuerzo cortante reales en la viga no excedan los esfuerzos flexionante y cortante permisibles para el material, tal como lo definen los códigos estructurales o mecánicos. En la mayoría de los casos el claro suspendido de la viga será relativamente largo, de modo que los momentos internos se vuelven grandes. Cuando esto ocurre, el ingeniero deberá considerar primero un diseño basado en la flexión y después comprobar la resistencia al cortante. Un diseño por flexión requiere la determinación del ***módulo de sección*** de la viga, una propiedad geométrica que es el cociente de I sobre c, es decir, $S = I/c$. Si se usa la fórmula de la flexión, $\sigma = Mc/I$, se tiene

$$S_{\text{req}} = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{perm}}} \qquad (11\text{-}1)$$

Aquí M se determina a partir del diagrama de momento de la viga, y el esfuerzo flexionante permisible, σ_{perm}, se especifica en un código de diseño. En muchos casos el peso aún desconocido de la viga será pequeño en comparación con las cargas que la viga debe soportar, y puede no tomarse en cuenta. Sin embargo, si el momento adicional causado por el peso debe incluirse en el diseño, se hace una selección de S para que *exceda* ligeramente a S_{req}.

Una vez que se conoce S_{req}, si la viga tiene una forma simple en su sección transversal como un cuadrado, un círculo o un rectángulo de proporciones conocidas, sus *dimensiones* pueden determinarse directamente de S_{req}, puesto que $S_{\text{req}} = I/c$. Sin embargo, si la sección transversal está hecha de varios elementos, como en el caso de una sección en I de ala ancha, entonces puede determinarse un número infinito de dimensiones para el alma y las alas que satisfagan el valor de S_{req}. No obstante, en la práctica los ingenieros eligen una viga particular que cumpla con el requisito de $S > S_{\text{req}}$ de un manual que enlista los perfiles estándar de los fabricantes. Con frecuencia, en estas tablas pueden seleccionarse varias vigas que tienen el mismo módulo de sección. Si las deflexiones no están restringidas, por lo general se elige la viga que tenga la menor área en su sección transversal, puesto que requiere menos material para su fabricación y, por consiguiente, es más ligera y más económica que las demás.



Las dos vigas del piso están conectadas a la viga AB, que transmite la carga a las columnas en esta estructura de un edificio. Para el diseño, puede considerarse que todas las conexiones actúan como pasadores.

11

Una vez que se ha seleccionado la viga, puede usarse la fórmula del esfuerzo cortante $\tau_{perm} \geq VQ/It$ para verificar si no se excede el esfuerzo cortante permisible. A menudo, este requisito no presentará un problema. Sin embargo, si la viga es "corta" y soporta grandes cargas concentradas, la limitación del esfuerzo cortante puede imponer el tamaño de la viga. Esta limitación es muy importante en el diseño de las vigas de madera, porque la madera tiende a rajarse a lo largo de sus fibras debido al cortante (vea la figura 7-10*e*).

Vigas fabricadas. Como las vigas suelen estar fabricadas de acero o madera, ahora se analizarán algunas de las propiedades tabuladas de las vigas fabricadas con estos materiales.

Secciones de acero. La mayoría de las vigas fabricadas con acero se producen mediante el laminado en caliente de un lingote de acero, hasta obtener la forma deseada. Estos *perfiles laminados* tienen propiedades que están tabuladas en el manual del Instituto Estadounidense de Construcción en Acero (AISC, por sus siglas en inglés). En el apéndice B se proporciona una lista representativa de vigas I de ala ancha tomadas de este manual. Como se señala en dicho apéndice, los perfiles de vigas I de ala ancha se designan por su peralte y su peso por unidad de longitud: por ejemplo, W18×46 indica una sección transversal de I de ala ancha (W) con un peralte de 18 pulg y un peso de 46 lb/pie, figura 11-4. Para cualquier sección dada se reporta el peso por unidad de longitud, las dimensiones, el área de la sección transversal, el momento de inercia y el módulo de sección. Además se incluye el radio de giro r, que es una propiedad geométrica relacionada con la resistencia al pandeo de la sección. Esto se analizará en el capítulo 13. El apéndice B y el *Manual de la AISC* también presentan datos de otros elementos, como canales y ángulos.

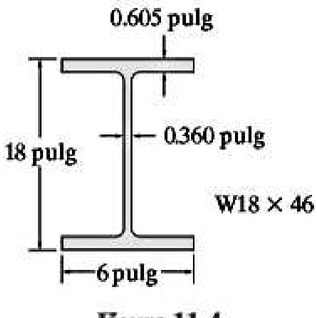
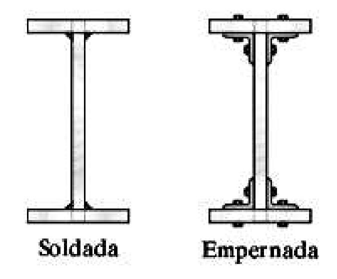


Figura 11-4


Vista de perfil típica de una viga de acero I de ala ancha.

Secciones de madera. La mayoría de las vigas hechas de madera tienen una sección transversal rectangular, porque son fáciles de fabricar y manejar. Algunos manuales, como el de la Asociación Nacional de Productos Forestales (de Estados Unidos), presentan las dimensiones de las tablas que se usan con frecuencia en el diseño de las vigas de madera. A menudo, se reportan las dimensiones nominales y reales. La viga se identifica por sus dimensiones *nominales*, como 2×4 (2 por 4 pulg), sin embargo, sus dimensiones reales o "cepillada" son más pequeñas, de 1.5 por 3.5 pulg. La reducción de dimensiones se realiza con el fin de obtener una superficie lisa de la madera aserrada en bruto. Obviamente, cada vez que se realicen cálculos de esfuerzo en vigas de madera, deben usarse las *dimensiones reales*.



Largueros de placas de acero

Figura 11-5



Viga de caja de madera

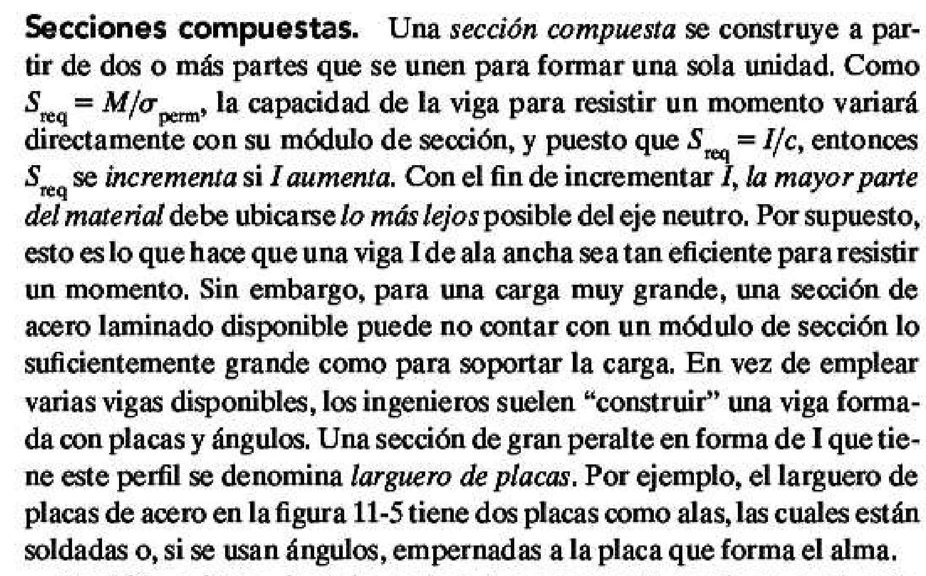
(a)



Viga glulam (laminada)

(b)

Figura 11-6



Secciones compuestas. Una *sección compuesta* se construye a partir de dos o más partes que se unen para formar una sola unidad. Como $S_{req} = M/\sigma_{perm}$, la capacidad de la viga para resistir un momento variará directamente con su módulo de sección, y puesto que $S_{req} = I/c$, entonces S_{req} se *incrementa* si *I aumenta*. Con el fin de incrementar *I*, *la mayor parte del material* debe ubicarse *lo más lejos* posible del eje neutro. Por supuesto, esto es lo que hace que una viga I de ala ancha sea tan eficiente para resistir un momento. Sin embargo, para una carga muy grande, una sección de acero laminado disponible puede no contar con un módulo de sección lo suficientemente grande como para soportar la carga. En vez de emplear varias vigas disponibles, los ingenieros suelen "construir" una viga formada con placas y ángulos. Una sección de gran peralte en forma de I que tiene este perfil se denomina *larguero de placas*. Por ejemplo, el larguero de placas de acero en la figura 11-5 tiene dos placas como alas, las cuales están soldadas o, si se usan ángulos, empernadas a la placa que forma el alma.

También existen vigas de madera "compuestas", por lo general en la forma de una viga con sección de caja, figura 11-6*a*. Pueden hacerse con madera contrachapada para las almas y tablas más grandes para las alas. En claros muy grandes, se emplean *vigas glulam*. Estos elementos se hacen de varias tablas laminadas pegadas entre sí para formar una sola unidad, figura 11.6*b*.

Al igual que en el caso de las secciones laminadas o vigas hechas de una sola pieza, para el diseño de las secciones compuestas se requiere revisar los esfuerzos flexionantes y cortantes. Además, se debe verificar el esfuerzo cortante en los sujetadores tales como soldadura, pegamento, clavos, etcétera, a fin de asegurarse que la viga actúa como una sola unidad. Los principios para hacer esto se describen en la sección 7.4.

Puntos importantes

- Las vigas soportan cargas que se aplican en forma perpendicular a sus ejes. Si se diseñan con base en la resistencia, deben soportar esfuerzos cortantes y flexionantes permisibles.
- Se supone que el esfuerzo flexionante máximo en la viga es mucho mayor que los esfuerzos localizados causados por la aplicación de cargas en la superficie de la viga.

Procedimiento de análisis

A partir del análisis anterior, el siguiente procedimiento proporciona un método racional para el diseño de una viga con base en la resistencia.

Diagramas de fuerza cortante y de momento.

- Determine la fuerza cortante y el momento máximos en la viga. A menudo esto se hace al construir los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga.
- Para las vigas compuestas, los diagramas de fuerza cortante y de momento son útiles para identificar las *regiones* donde la fuerza cortante y el momento son excesivamente grandes y pueden requerir refuerzos estructurales adicionales o sujetadores.

Esfuerzo flexionante.

- Si la viga es relativamente larga, se diseña mediante la determinación de su módulo de sección empleando la fórmula de la flexión, $S_{req} = M_{máx}/\sigma_{perm}$.
- Una vez que se ha determinado S_{req}, pueden calcularse las dimensiones de la sección transversal para perfiles simples, puesto que $S_{req} = I/c$.
- Si deben usarse secciones de acero laminado, pueden elegirse varios de los valores posibles para S en las tablas del apéndice B. De éstos, escoja el que tenga la menor área en su sección transversal, ya que esta viga tendrá el menor peso y por lo tanto será la más económica.
- Asegúrese que el módulo S de la sección seleccionada sea *ligeramente mayor* que S_{req}, a fin de tomar en cuenta el momento adicional creado por el peso de la viga.

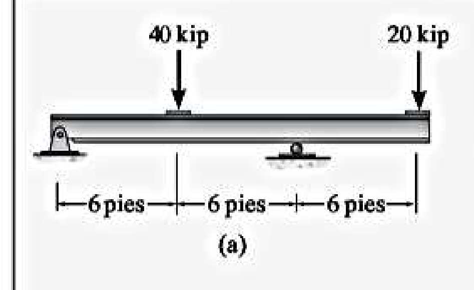
Esfuerzo cortante.

- Por lo general las vigas que son cortas y soportan grandes cargas, especialmente las hechas de madera, se diseñan primero para resistir el esfuerzo cortante y después se verifica su cumplimiento del requisito relativo al esfuerzo flexionante permisible.
- Se emplea la fórmula del esfuerzo cortante para verificar que el esfuerzo cortante permisible no sea superado; es decir, use $\tau_{perm} \geq V_{máx}\, Q/It$.
- Si la viga tiene una sección transversal *rectangular* sólida, la fórmula de la fuerza cortante se convierte en $\tau_{perm} \geq 1.5(V_{máx}/A)$ (vea la ecuación 2 del ejemplo 7.2), y si la sección transversal es *I de ala ancha*, por lo general es adecuado suponer que el esfuerzo cortante es *constante* en toda el área de la sección transversal del alma de la viga, de modo que $\tau_{perm} \geq V_{máx}/A_{alma}$, donde A_{alma} se determina mediante el producto del peralte de la viga por el grosor del alma. (Vea la nota al final del ejemplo 7.3.)

Conveniencia de los sujetadores.

- La conveniencia de los elementos de sujeción utilizados en las vigas compuestas depende del esfuerzo cortante que pueden resistir estos sujetadores. En específico, el espaciamiento requerido entre clavos o tornillos de un tamaño particular se determina a partir del flujo cortante permisible, $q_{perm} = VQ/I$, el cual se calcula en los puntos sobre la sección transversal donde se ubican los sujetadores. (Vea la sección 7.3.)

EJEMPLO 11.1



Una viga debe hacerse de acero que tiene un esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 24$ ksi y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 14.5$ ksi. Seleccione un perfil W adecuado que soporte la carga mostrada en la figura 11-7*a*.

SOLUCIÓN

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Se han calculado las reacciones en los soportes y, en la figura 11-7*b*, se muestran los diagramas de fuerza cortante y de momento. A partir de estos diagramas, $V_{máx} = 30$ kip y $M_{máx} = 120$ kip·pie.

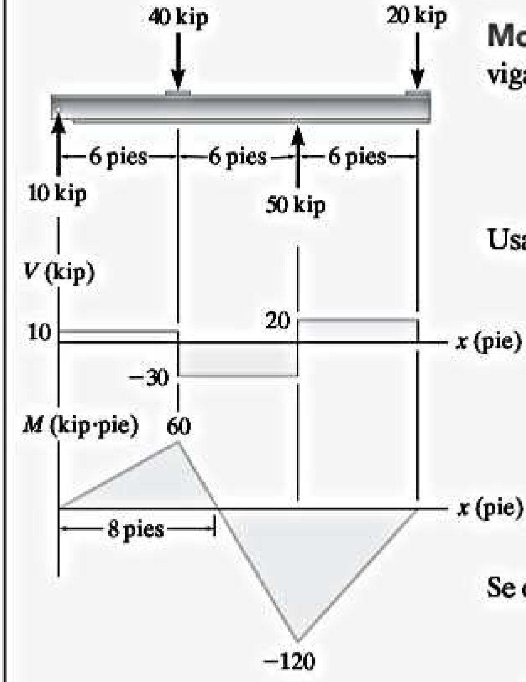


Figura 11-7

Momento flexionante. El módulo de sección requerido para la viga se determina a partir de la fórmula de la flexión,

$$S_{req} = \frac{M_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{120 \text{ kip} \cdot \text{pie} \, (12 \text{ pulg/pie})}{24 \text{ kip/pulg}^2} = 60 \text{ pulg}^3$$

Usando la tabla del apéndice B, las siguientes vigas son adecuadas:

W18 × 40	$S = 68.4$ pulg^3
W16 × 45	$S = 72.7$ pulg^3
W14 × 43	$S = 62.7$ pulg^3
W12 × 50	$S = 64.7$ pulg^3
W10 × 54	$S = 60.0$ pulg^3
W8 × 67	$S = 60.4$ pulg^3

Se elige la viga que tiene el menor peso por pie, es decir,

W18 × 40

Ahora puede calcularse el momento máximo *real* $M_{máx}$, que incluye el peso de la viga, y puede verificarse la conveniencia de la viga seleccionada. No obstante, en comparación con las cargas aplicadas, el peso de la viga, (0.040 kip/pie)(18 pies) = 0.720 kip, sólo *incrementará ligeramente* a S_{req}. A pesar de ello,

$$S_{req} = 60 \text{ pulg}^3 < 68.4 \text{ pulg}^3 \qquad \text{Verificado}$$

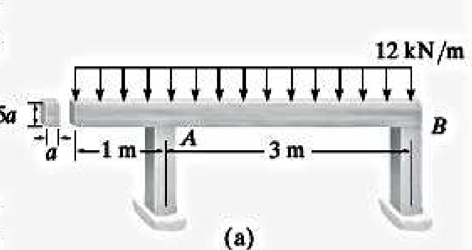
Esfuerzo cortante. Como la viga tiene una *sección I de ala ancha*, se considerará el *esfuerzo cortante promedio* dentro del alma. (Vea el ejemplo 7.3.) Aquí se supone que el alma se extiende desde la parte superior de la viga hasta su parte más baja. A partir del Apéndice B, para una W18 × 40, $d = 17.90$ pulg, $t_w = 0.315$ pulg. Por lo tanto,

$$\tau_{prom} = \frac{V_{máx}}{A_w} = \frac{30 \text{ kip}}{(17.90 \text{ pulg})(0.315 \text{ pulg})} = 5.32 \text{ ksi} < 14.5 \text{ ksi} \qquad \text{Verificado}$$

Use una W18 × 40. *Resp.*

EJEMPLO 11.2

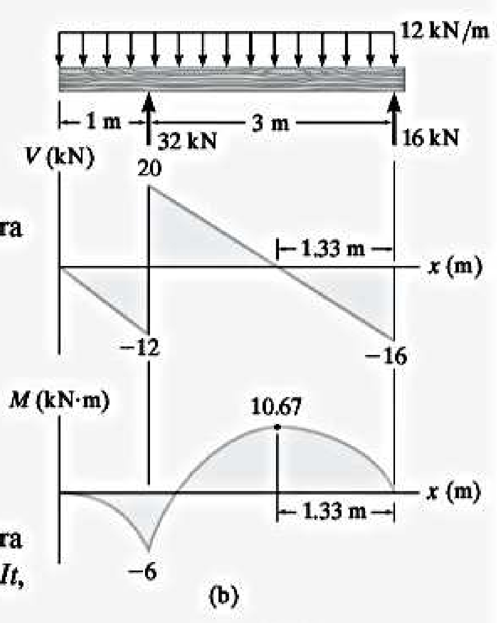
La viga de madera laminada que se muestra en la figura 11-8*a* soporta una carga uniforme distribuida de 12 kN/m. Si la viga tiene una relación altura-anchura de 1.5, determine su anchura mínima. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 9$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 0.6$ MPa. No tome en cuenta el peso de la viga.



(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de fuerza cortante y de momento. Se han calculado las reacciones en los soportes *A* y *B* y, en la figura 11-8*b*, se muestran los diagramas de fuerza cortante y de momento. Aquí $V_{máx} = 20$ kN, $M_{máx} = 10.67$ kN·m.



(b)

Figura 11-8

Esfuerzo flexionante. Al aplicar la fórmula de la flexión,

$$S_{req} = \frac{M_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{10.67(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m}}{9(10^6)\ \text{N/m}^2} = 0.00119\ \text{m}^3$$

Si se supone que la anchura es *a*, entonces la altura es de 1.5*a*, figura 11-8*a*. Por lo tanto,

$$S_{req} = \frac{I}{c} = 0.00119\ \text{m}^3 = \frac{\frac{1}{12}(a)(1.5a)^3}{(0.75a)}$$

$$a^3 = 0.003160\ \text{m}^3$$

$$a = 0.147\ \text{m}$$

Esfuerzo cortante. Al aplicar la fórmula del esfuerzo cortante para las secciones rectangulares (que es un caso especial de $\tau_{máx} = VQ/It$, ejemplo 7.2), se tiene

$$\tau_{máx} = 1.5\frac{V_{máx}}{A} = (1.5)\frac{20(10^3)\ \text{N}}{(0.147\ \text{m})(1.5)(0.147\ \text{m})}$$

$$= 0.929\ \text{MPa} > 0.6\ \text{MPa}$$

ECUACIÓN

Como el diseño falla para el criterio cortante, la viga debe rediseñarse sobre la base del esfuerzo cortante.

$$\tau_{perm} = 1.5\frac{V_{máx}}{A}$$

$$600\ \text{kN/m}^2 = 1.5\frac{20(10^3)\ \text{N}}{(a)(1.5a)}$$

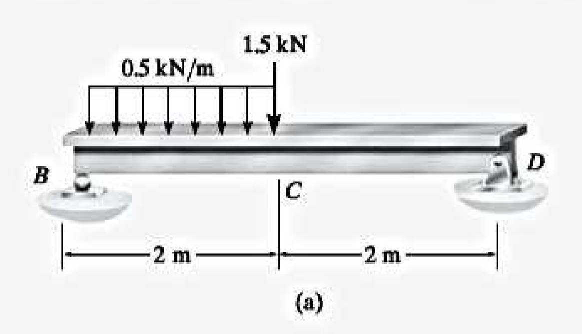
$$a = 0.183\ \text{m} = 183\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Esta sección más grande también resistirá adecuadamente el esfuerzo normal.

EJEMPLO 11.3

La viga de madera en T que se muestra en la figura 11-9*a* está hecha a partir de dos tablas de 200 mm × 30 mm. Si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 12$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 0.8$ MPa, determine si la viga puede soportar con seguridad la carga mostrada. Además, especifique el espaciamiento máximo entre los clavos requeridos para mantener unidas las dos tablas. Considere que cada clavo puede resistir con seguridad 1.50 kN en cortante.





(a)

SOLUCIÓN

Diagramas de fuerza cortante y de momento. En la figura 11-9*b* se muestran las reacciones sobre la viga y se dibujan los diagramas de fuerza cortante y de momento. Aquí, $V_{máx} = 1.5$ kN, $M_{máx} = 2$ kN·m.

Esfuerzo flexionante. El eje neutro (centroide) se localizará desde la parte inferior de la viga. Si se emplean unidades de metros, resulta

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{(0.1\text{ m})(0.03\text{ m})(0.2\text{ m}) + 0.215\text{ m}(0.03\text{ m})(0.2\text{ m})}{0.03\text{ m}(0.2\text{ m}) + 0.03\text{ m}(0.2\text{ m})} = 0.1575\text{ m}$$

Por lo tanto,

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.03\text{ m})(0.2\text{ m})^3 + (0.03\text{ m})(0.2\text{ m})(0.1575\text{ m} - 0.1\text{ m})^2\right]$$

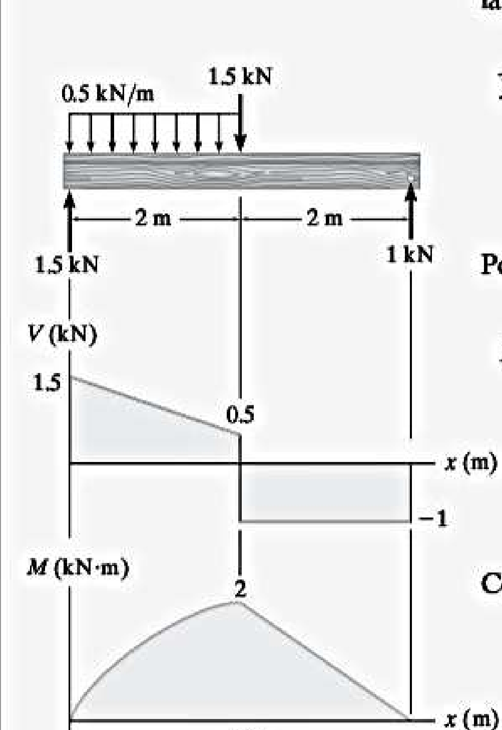
$$+ \left[\frac{1}{12}(0.2\text{ m})(0.03\text{ m})^3 + (0.03\text{ m})(0.2\text{ m})(0.215\text{ m} - 0.1575\text{ m})^2\right]$$

$$= 60.125(10^{-6})\text{ m}^4$$

Como $c = 0.1575$ m (no 0.230 m − 0.1575 m = 0.0725 m), se requiere

$$\sigma_{perm} \geq \frac{M_{máx} c}{I}$$

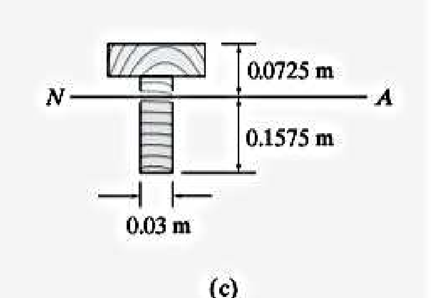
$$12(10^6)\text{ Pa} \geq \frac{2(10^3)\text{ N}\cdot\text{m}(0.1575\text{ m})}{60.125(10^{-6})\text{ m}^4} = 5.24(10^6)\text{ Pa} \quad \text{Verificado}$$



(b)

Figura 11-9

Esfuerzo cortante. El esfuerzo cortante máximo en la viga depende de la magnitud de Q y t. Esto ocurre en el eje neutro, puesto que ahí Q es un máximo y el eje neutro se encuentra en el alma, donde el grosor $t = 0.03$ m es el menor en la sección transversal. Por simplicidad, se usará el área rectangular por debajo del eje neutro para calcular Q, en vez de un área formada por dos partes que están encima de este eje, figura 11-9*c*. Se tiene



(c)

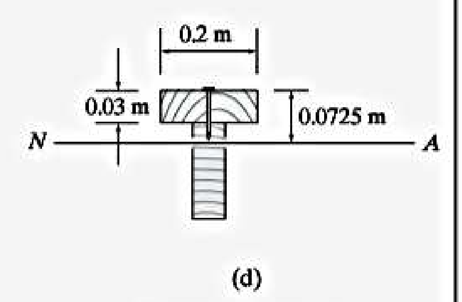
$$Q = \bar{y}'A' = \left(\frac{0.1575 \text{ m}}{2}\right)[(0.1575 \text{ m})(0.03 \text{ m})] = 0.372(10^{-3}) \text{ m}^3$$

de modo que

$$\tau_{\text{perm}} \geq \frac{V_{\text{máx}}Q}{It}$$

$$800(10^3) \text{ Pa} \geq \frac{1.5(10^3) \text{ N}[0.372(10^{-3})] \text{ m}^3}{60.125(10^{-6}) \text{ m}^4 \, (0.03 \text{ m})} = 309(10^3) \text{ Pa} \quad \text{Verificado}$$

Espaciamiento entre clavos. A partir del diagrama de fuerza cortante se observa que esa fuerza varía en todo el espaciamiento. Como la separación entre los clavos depende de la magnitud de la fuerza cortante en la viga, por simplicidad (y para tener un criterio conservador), se diseñará el espaciamiento con base en $V = 1.5$ kN para la región BC y $V = 1$ kN para la región CD. Como los clavos unen a las alas con el alma, figura 11-9*d*, se tiene



(d)

Figura 11-9 (cont.)

$$Q = \bar{y}'A' = (0.0725 \text{ m} - 0.015 \text{ m})[(0.2 \text{ m})(0.03 \text{ m})] = 0.345(10^{-3}) \text{ m}^3$$

Por lo tanto, el flujo cortante para cada región es

$$q_{BC} = \frac{V_{BC}Q}{I} = \frac{1.5(10^3) \text{ N}[0.345(10^{-3}) \text{ m}^3]}{60.125(10^{-6}) \text{ m}^4} = 8.61 \text{ kN/m}$$

$$q_{CD} = \frac{V_{CD}Q}{I} = \frac{1(10^3) \text{ N}[0.345(10^{-3}) \text{ m}^3]}{60.125(10^{-6}) \text{ m}^4} = 5.74 \text{ kN/m}$$

Un clavo puede resistir 1.50 kN en cortante, por lo que el espaciamiento máximo resulta ser

$$s_{BC} = \frac{1.50 \text{ kN}}{8.61 \text{ kN/m}} = 0.174 \text{ m}$$

$$s_{CD} = \frac{1.50 \text{ kN}}{5.74 \text{ kN/m}} = 0.261 \text{ m}$$

Para facilitar la medición se usa

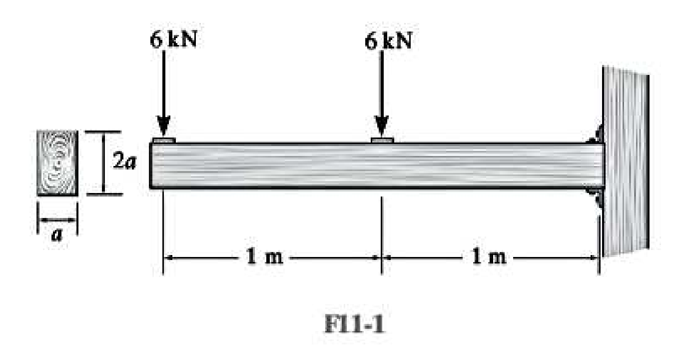
$$s_{BC} = 150 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$s_{CD} = 250 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

11

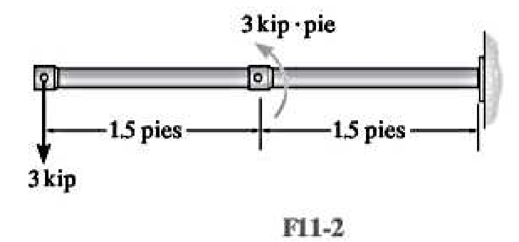
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F11-1. Determine, con una precisión de 1 mm, la dimensión mínima a de la sección transversal de la viga para soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. La madera tiene un esfuerzo normal permisible de $\sigma_{perm} = 10$ MPa y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 1$ MPa.



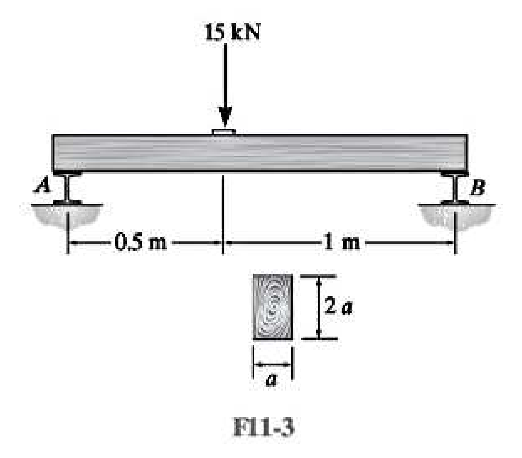
F11-1

F11-2. Determine, con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg, el diámetro mínimo d de la barra para soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. La barra está fabricada de un material que tiene un esfuerzo normal permisible de σ_{perm} = 20 ksi y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 10$ ksi.



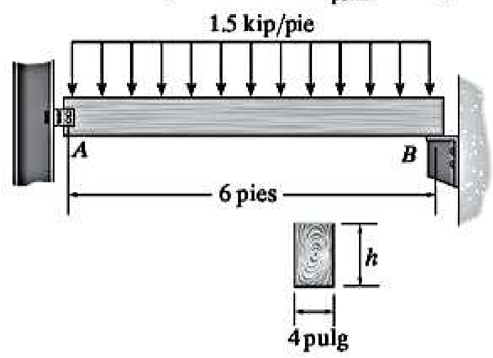
F11-2

F11-3. Determine, con una precisión de 1 mm, la dimensión mínima a de la sección transversal de la viga para soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. La madera tiene un esfuerzo normal permisible de $\sigma_{perm} = 12$ MPa y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 1.5$ MPa.



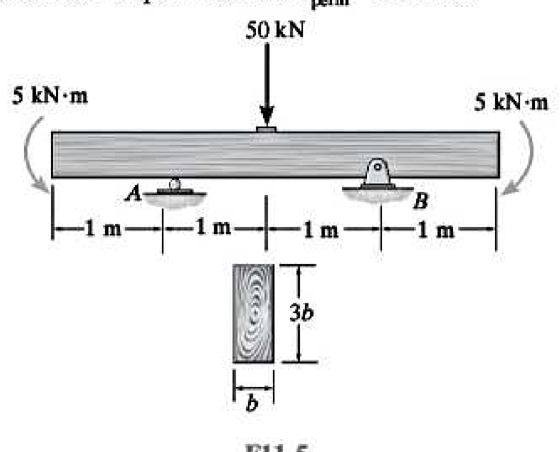
F11-3

F11-4. Determine, con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg, la dimensión mínima h de la sección transversal de la viga para soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. La madera tiene un esfuerzo normal permisible de $\sigma_{perm} = 2$ ksi y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 200$ psi.



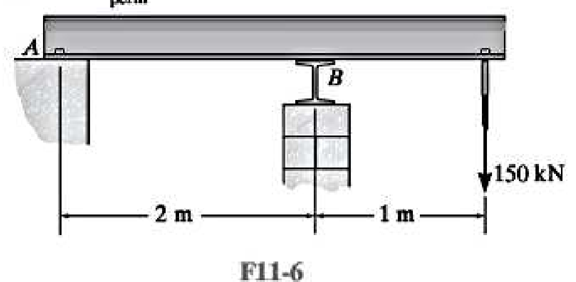
F11-4

F11-5. Determine, con una precisión de 1 mm, la dimensión mínima b de la sección transversal de la viga para soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. La madera tiene un esfuerzo normal permisible de $\sigma_{perm} = 12$ MPa y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 1.5$ MPa.



F11-5

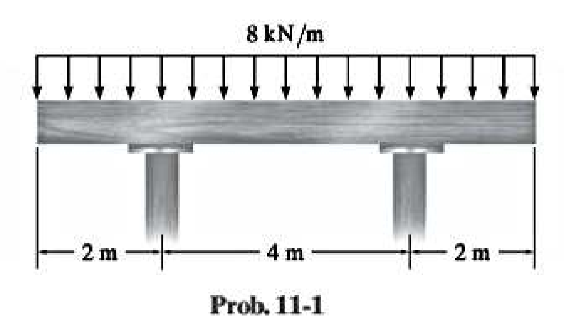
F11-6. Escoja la sección más ligera con un perfil W410 que puede soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. La viga está fabricada de un acero que tiene un esfuerzo normal permisible de $\sigma_{perm} = 150$ MPa y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 75$ MPa.



F11-6

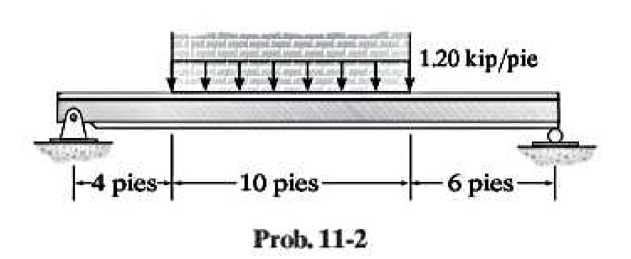
PROBLEMAS

11-1. La viga simplemente apoyada está fabricada de una madera que tiene un esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 6.5$ MPa y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 500$ kPa. Determine sus dimensiones si debe ser rectangular y tener una relación altura-anchura de 1.25.



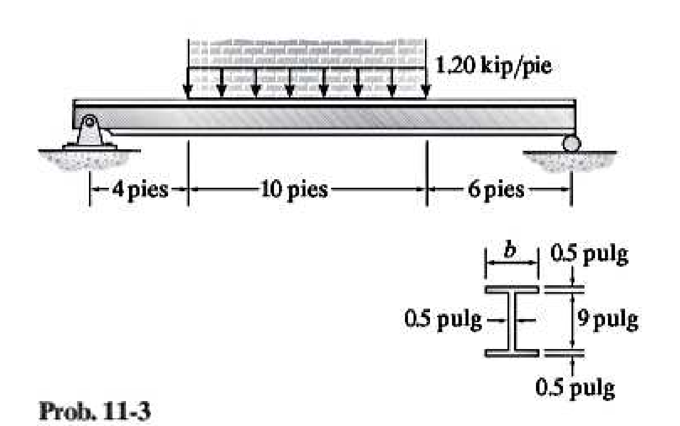
Prob. 11-1

11-2. La pared de ladrillo ejerce una carga uniforme distribuida de 1.20 kip/pie sobre la viga. Si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 12$ ksi, escoja del apéndice B la sección I de ala ancha más ligera y con el menor peralte que pueda soportar con seguridad la carga mostrada en la figura.



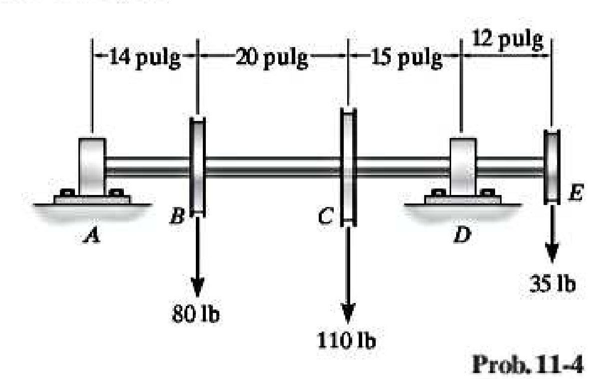
Prob. 11-2

11-3. La pared de ladrillo ejerce una carga uniforme distribuida de 1.20 kip/pie sobre la viga. Si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi, determine la anchura b requerida para el ala con una aproximación de $\frac{1}{4}$ de pulg.



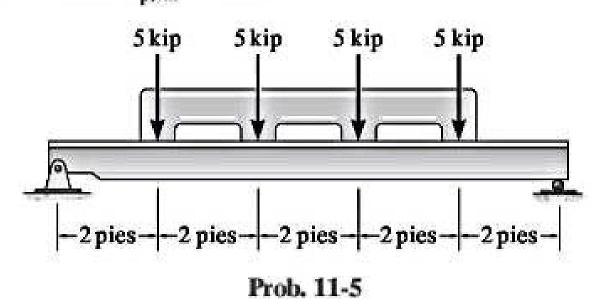
Prob. 11-3

***11-4.** Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el eje, asimismo determine su diámetro requerido con una precisión de $\frac{1}{4}$ de pulg. Considere que $\sigma_{perm} = 7$ ksi y $\tau_{perm} = 3$ ksi y que los cojinetes en A y D ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje. La carga se aplica a las poleas en B, C y E.



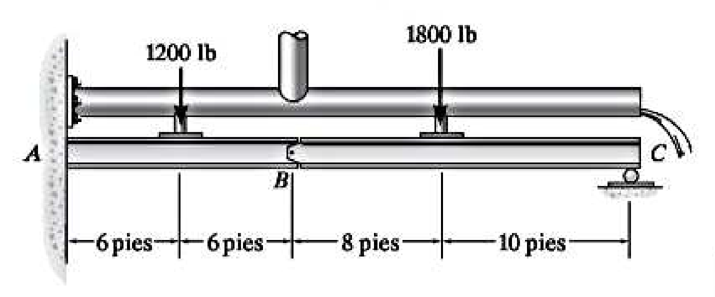
Prob. 11-4

•11-5. Seleccione del apéndice B la viga de acero I de ala ancha con menor peso que pueda soportar con seguridad la carga de la máquina mostrada en la figura. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 24$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 14$ ksi.



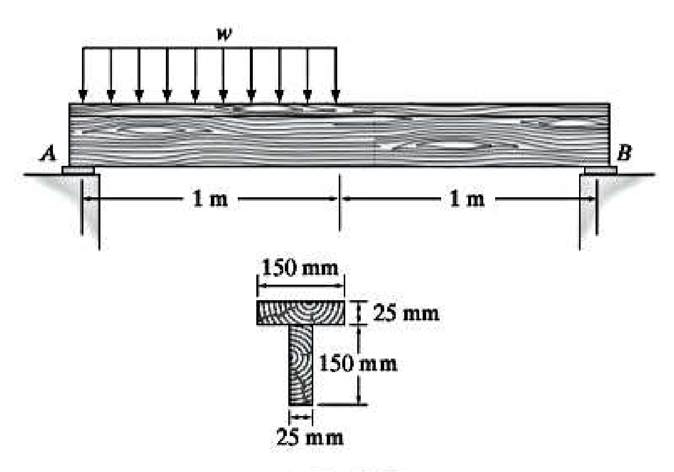
Prob. 11-5

11-6. La viga compuesta está formada por dos secciones, que se unen entre sí mediante un perno en B. Use el apéndice B y seleccione la viga I de ala ancha más ligera que podría ser segura en cada sección si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 24$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 14$ ksi. La tubería ejerce sobre la viga cargas de 1200 lb y 1800 lb como se muestra en la figura.



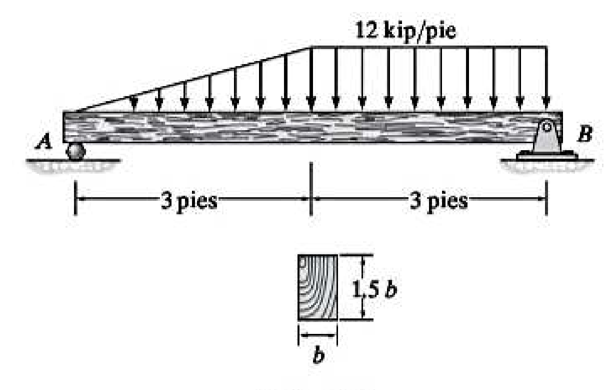
Prob. 11-6

11-7. Si los cojinetes en A y B sólo soportan fuerzas verticales, determine la mayor magnitud de la carga uniforme distribuida w que puede aplicarse a la viga. $\sigma_{perm} = 15$ MPa, $\tau_{perm} = 1.5$ MPa.



Prob. 11-7

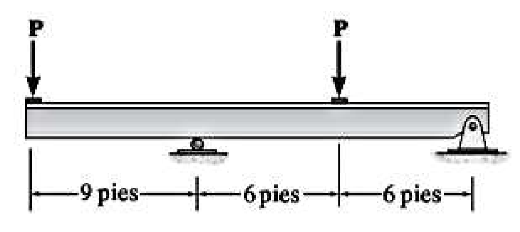
***11-8.** La viga simplemente apoyada está hecha de una madera que tiene un esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 1.20$ ksi y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} =$ 100 psi. Determine sus dimensiones más pequeñas con una aproximación de $\frac{1}{8}$ de pulg si es rectangular y tiene una relación altura-anchura de 1.5.



Prob. 11-8

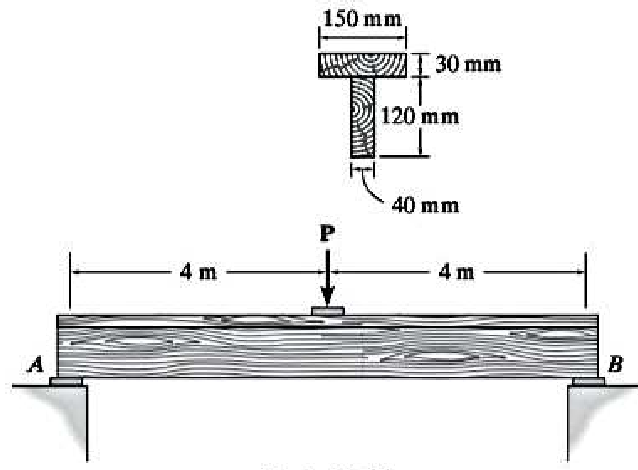
•**11-9.** Seleccione del apéndice B la viga W12 I de ala ancha de acero con el peso más ligero que puede soportar con seguridad la carga mostrada en la figura, donde $P = 6$ kip. El esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 12$ ksi.

11-10. Seleccione del apéndice B la viga W14 I de ala ancha de acero con el peso más ligero y con la menor altura que puede soportar con seguridad la carga mostrada en la figura, donde $P = 12$ kip. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} =$ 12 ksi.



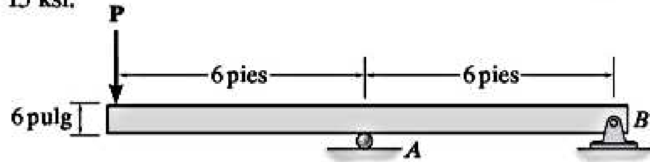
Probs. 11-9/10

11-11. La viga de madera se carga como se muestra en la figura. Si los extremos soportan sólo fuerzas verticales, determine la mayor magnitud de **P** que puede aplicarse, $\sigma_{perm} = 25$ MPa, $\tau_{perm} = 700$ kPa.



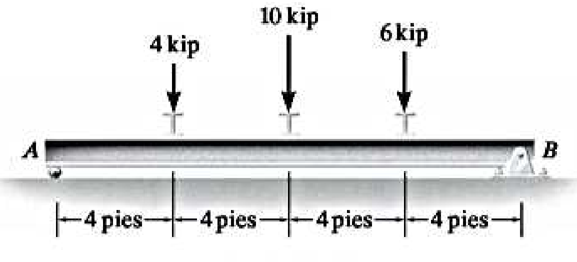
Prob. 11-11

***11-12.** Determine la anchura mínima de la viga con una precisión de $\frac{1}{4}$ de pulg, que puede soportar con seguridad la carga de $P = 8$ kip. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 24$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} =$ 15 ksi.



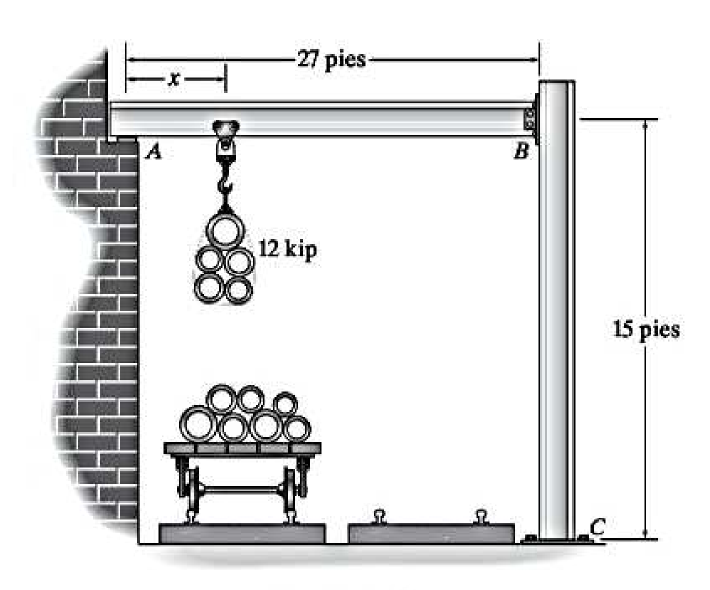
Prob. 11-12

•**11-13.** Seleccione del apéndice B la viga I de ala ancha de acero de menor peralte y con el menor peso que puede soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 12$ ksi.



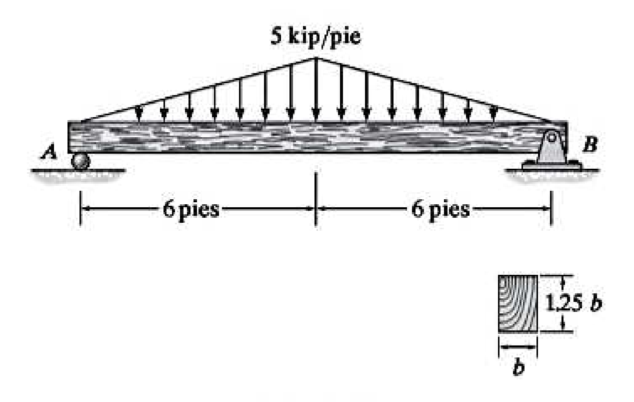
Prob. 11-13

11-14. La viga se usa en un patio de ferrocarriles para cargar y descargar los vagones. Si la carga de elevación máxima prevista es de 12 kip, seleccione del apéndice B la sección I de ala ancha de acero con el menor peso que puede soportar con seguridad la carga. El polipasto viaja a lo largo del reborde inferior de la viga, 1 pie $\leq x \leq$ 25 pies, y tiene un tamaño insignificante. Suponga que la viga está articulada a la columna en B y en A, apoyada en un rodillo. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{\text{perm}} = 24$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{perm}} = 12$ ksi.



Prob. 11-14

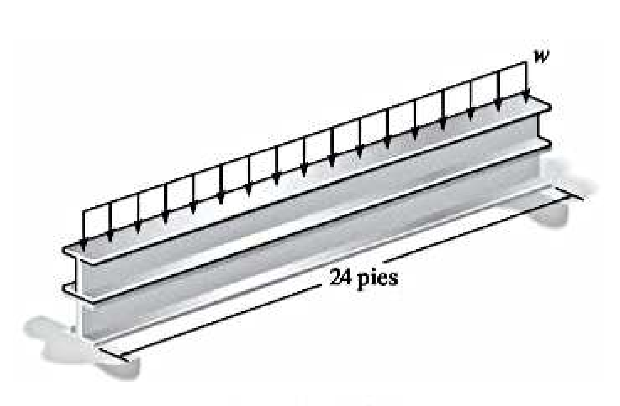
11-15. La viga simplemente apoyada está fabricada de una madera que tiene un esfuerzo flexionante permisible $\sigma_{\text{perm}} = 960$ psi y un esfuerzo cortante permisible $\tau_{\text{perm}} = 75$ psi. Determine sus dimensiones si debe ser rectangular y tener una relación altura-anchura de 1.25.



Prob. 11-15

***11-16.** La viga simplemente apoyada se compone de dos secciones W12 × 22 que están sobrepuestas como se muestra en la figura. Determine la carga uniforme w máxima que puede soportar la viga si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{\text{perm}} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{perm}} = 14$ ksi.

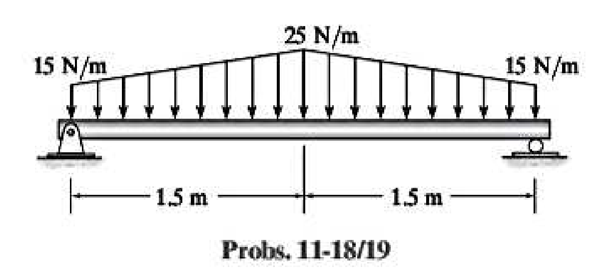
•**11-17.** La viga simplemente apoyada se compone de dos secciones W12 × 22 que están sobrepuestas como se muestra en la figura. Determine si la viga puede soportar con seguridad una carga de $w = 2$ kip/pie. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{\text{perm}} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{perm}} = 14$ ksi.



Probs. 11-16/17

11-18. Determine el diámetro más pequeño de la barra que puede soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{\text{perm}} = 167$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{perm}} = 97$ MPa.

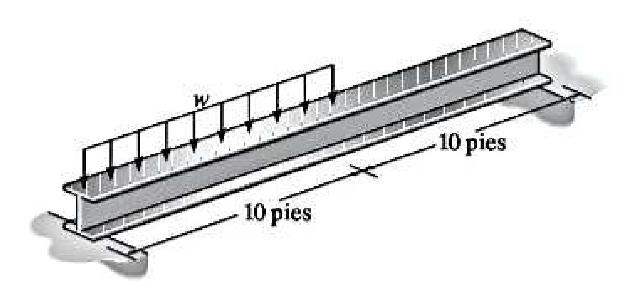
11-19. El tubo tiene un diámetro exterior de 15 mm. Determine el diámetro interior mínimo de modo que pueda soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{\text{perm}} = 167$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{perm}} = 97$ MPa.



Probs. 11-18/19

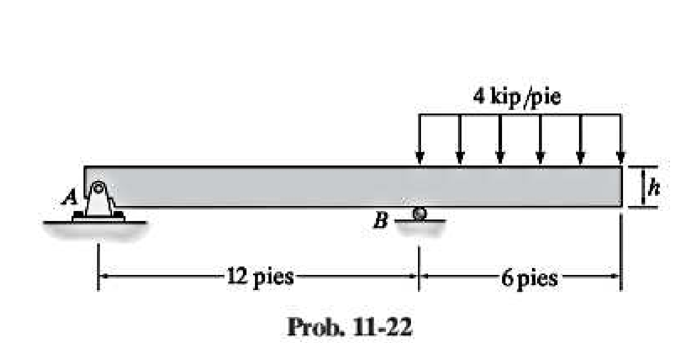
***11-20.** Determine la carga uniforme w máxima que puede soportar la viga W12 × 14 si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 12$ ksi.

•**11-21.** Determine si la viga W14 ×22 puede soportar con seguridad una carga de $w = 1.5$ kip/pie. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 12$ ksi.



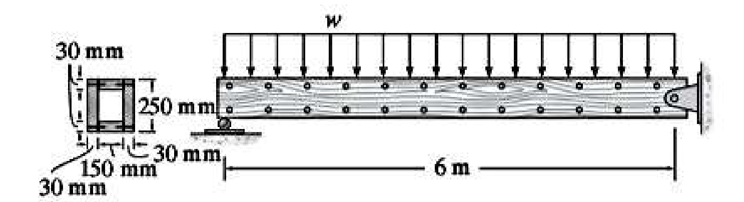
Probs. 11-20/21

11-22. Determine, con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg, el peralte h mínimo de la viga que puede soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 21$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 10$ ksi. La viga tiene un grosor uniforme de 3 pulg.



Prob. 11-22

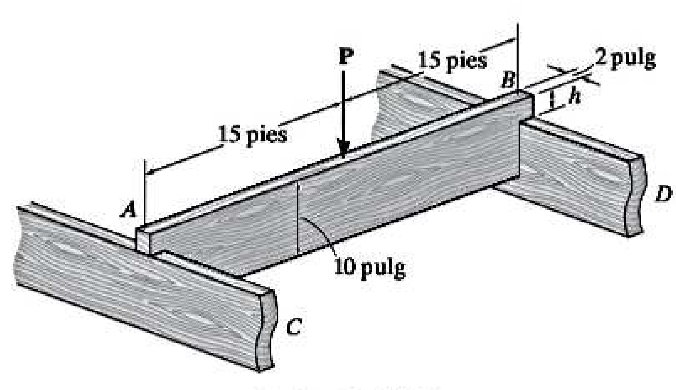
11-23. La viga de caja tiene un esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 10$ MPa y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 775$ kPa. Determine la intensidad w máxima de la carga distribuida que la viga puede soportar en forma segura. Además, determine el espaciamiento máximo de los clavos para cada tercio de la longitud de la viga. Cada clavo puede resistir una fuerza cortante de 200 N.



Prob. 11-23

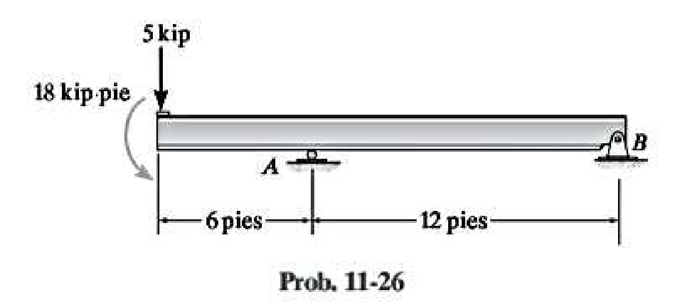
***11-24.** La vigueta simplemente apoyada se utiliza en la construcción de un piso para un edificio. Con el fin de mantener el piso bajo con respecto al umbral de las vigas C y D, en los extremos de las viguetas se hacen muescas como se observa en la figura. Si el esfuerzo cortante permisible para la madera es $\tau_{perm} = 350$ psi y el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 1500$ psi, determine la altura h que hará que la viga llegue a ambos esfuerzos permisibles al mismo tiempo. Además, ¿qué carga P hará que esto suceda? No tome en cuenta la concentración de esfuerzos en la muesca.

11-25. La vigueta simplemente apoyada se utiliza en la construcción de un piso para un edificio. Con el fin de mantener el piso bajo con respecto al umbral de las vigas C y D, en los extremos de las viguetas se hacen muescas como se observa en la figura. Si el esfuerzo cortante permisible para la madera es $\tau_{perm} = 350$ psi y el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 1700$ psi, determine la menor altura h de modo que la viga soporte una carga de $P = 600$ lb. Además, ¿toda la vigueta soportará de manera segura la carga? No tome en cuenta la concentración de esfuerzos en la muesca.



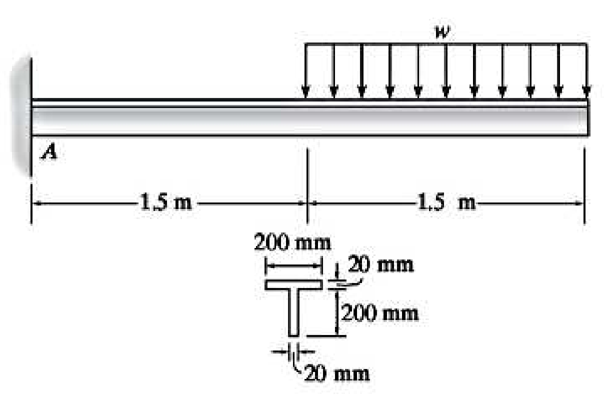
Probs. 11-24/25

11-26. Seleccione del apéndice B la viga de acero I de ala ancha con el menor peso que soportará con seguridad la carga mostrada en la figura. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 22$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 12$ ksi.



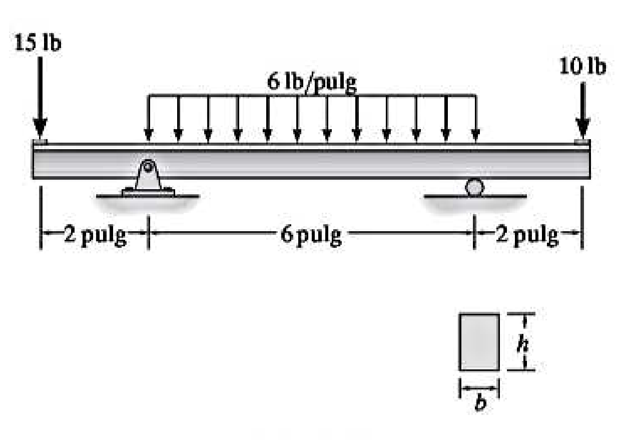
Prob. 11-26

11-27. La viga en T se formó con dos placas soldadas entre sí, como se muestra en la figura. Determine la máxima carga w uniformemente distribuida que la viga puede soportar con seguridad si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 150$ MPa y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 70$ MPa.



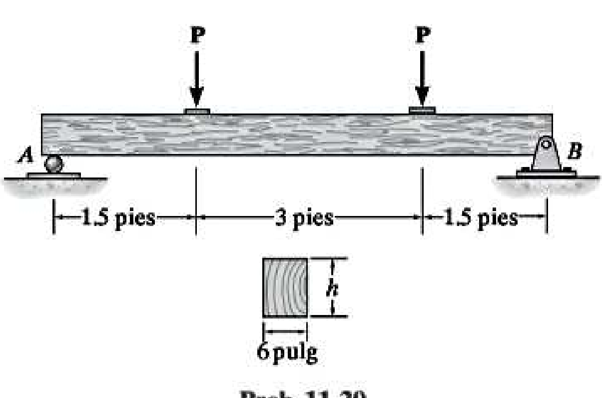
Prob. 11-27

***11-28.** La viga está fabricada de un material cerámico que tiene un esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 735$ psi y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 400$ psi. Determine el ancho b de la viga si la altura $h = 2b$.



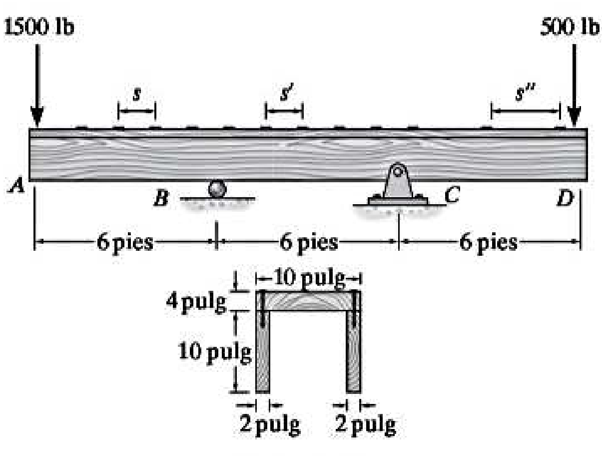
Prob. 11-28

•11-29. La viga de madera tiene una sección transversal rectangular. Determine su altura h de modo que alcance al mismo tiempo su esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 1.50$ ksi y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 150$ psi. Además, ¿cuál es la máxima carga P que puede soportar la viga?



Prob. 11-29

11-30. La viga está construida con tres tablones como se muestra en la figura. Si cada clavo puede soportar una fuerza de 300 lb, determine el espaciamiento máximo permisible s, s' y s'' entre los clavos para las regiones AB, BC y CD, respectivamente. Además, si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 1.5$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 150$ psi, determine si puede soportar con seguridad la carga.



Prob. 11-30



(a)

Viga de concreto con ménsula

(b)

Viga I de ala ancha con placas de refuerzo

(c)

Figura 11-10

*11.3 Vigas completamente esforzadas

Como el momento en una viga suele *variar* en toda su longitud, por lo general la elección de una viga prismática es poco eficiente, ya que nunca está completamente esforzada en los puntos donde el momento interno es menor que el momento máximo de la viga. Con el fin de reducir el peso de la viga, en ocasiones los ingenieros la eligen con una sección transversal *variable*, de tal manera que en cada sección transversal a lo largo de la viga, el esfuerzo flexionante alcanza su valor máximo permisible. Las vigas que tienen un área variable en su sección transversal se denominan *vigas no prismáticas*. Con frecuencia se emplean en máquinas, puesto que pueden fabricarse fácilmente mediante fundición. En la figura 11-10*a* se muestran dos ejemplos. En estructuras como las vigas pueden incluirse "ménsulas" en sus extremos como se muestra en la figura 11-10*b*. Además, las vigas pueden "construirse" o fabricarse en un taller usando placas. Un ejemplo de esto es un larguero fabricado a partir de una viga I de ala ancha laminada, con placas soldadas a la viga en la región donde el momento es máximo, figura 11-10*c*.

El análisis de esfuerzos en una viga no prismática suele ser muy difícil de realizar y se encuentra fuera del alcance de este libro. Con mucha frecuencia, estos perfiles se analizan mediante una computadora o a través de la teoría de la elasticidad. Sin embargo, los resultados obtenidos de este análisis, indican que los supuestos empleados en la obtención de la fórmula de la flexión son aproximadamente correctos para predecir los esfuerzos flexionantes en las secciones no prismáticas, siempre que el ahusamiento o la pendiente de la frontera superior o inferior de la viga no sea muy grande. Por otra parte, la fórmula del esfuerzo cortante no puede usarse para el diseño de vigas no prismáticas, puesto que los resultados obtenidos a partir de ésta son poco confiables.

Aunque se recomienda tener precaución al aplicar la fórmula de la flexión en el diseño de vigas prismáticas, aquí se mostrará, en principio, cómo puede emplearse esta fórmula como un medio aproximado para la obtención de un perfil general de la viga. En este sentido, el *tamaño* de la sección transversal de una viga no prismática que soporta una carga dada puede determinarse mediante la fórmula de la flexión escrita como

$$S = \frac{M}{\sigma_{\text{perm}}}$$



La viga de este puente elevado tiene un momento de inercia variable. Este diseño reduce el peso del material y ahorra costos.

Si se expresa el momento interno M en función de su posición x a lo largo de la viga, entonces como σ_{perm} es una constante conocida, el módulo de sección S o las dimensiones de la viga se convierten en una función de x. Una viga diseñada de esta manera se denomina ***viga completamente esforzada.*** Aunque en la derivación de su forma final *sólo* se han considerado esfuerzos flexionantes, también debe prestarse atención al hecho de que la viga resista el esfuerzo cortante, especialmente en los puntos donde se aplican cargas concentradas.

EJEMPLO 11.4

Determine la forma de una viga totalmente esforzada y simplemente apoyada que soporta una fuerza concentrada en su centro, figura 11-11*a*. La viga tiene una sección transversal rectangular de anchura constante *b*, y el esfuerzo permisible es σ_{perm}.

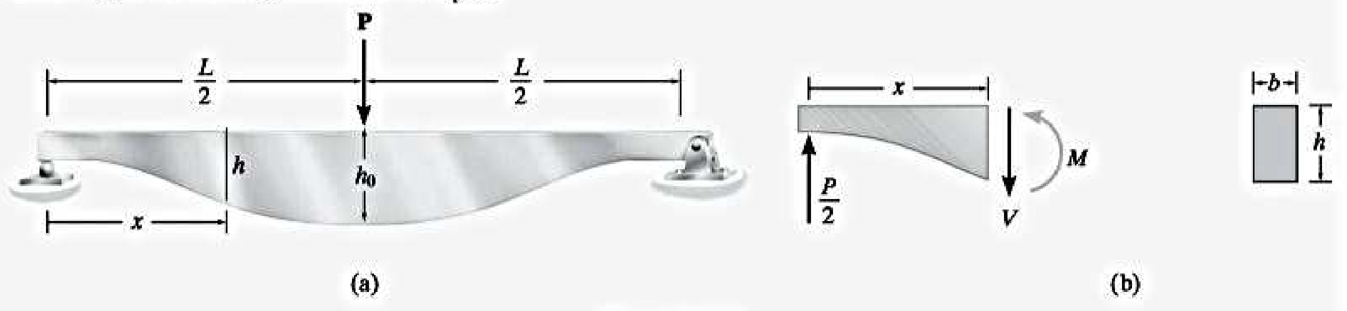


Figura 11-11

SOLUCIÓN

El momento interno en la viga, figura 11-11*b*, expresado como una función de la posición, $0 \leq x < L/2$, es

$$M = \frac{P}{2}x$$

Por lo tanto, el módulo de sección requerido es

$$S = \frac{M}{\sigma_{perm}} = \frac{P}{2\sigma_{perm}}x$$

Como $S = I/c$, entonces para un área transversal de h por b se tiene

$$\frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{P}{2\sigma_{perm}}x$$

$$h^2 = \frac{3P}{\sigma_{perm}b}x$$

Si $h = h_0$ en $x = L/2$, entonces

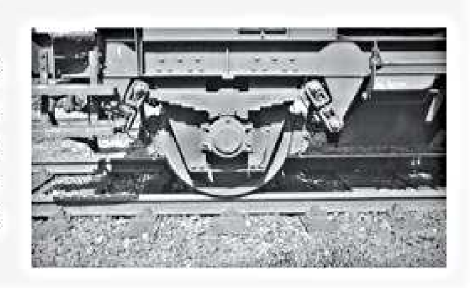
$$h_0^2 = \frac{3PL}{2\sigma_{perm}b}$$

de modo que

$$h^2 = \left(\frac{2h_0^2}{L}\right)x \qquad \textit{Resp.}$$

Por inspección, el peralte h debe entonces variar de manera *parabólica* con la distancia x.

NOTA: En la práctica esta *forma* es la base del diseño de las muelles usadas para sostener los ejes traseros de la mayoría de los camiones pesados o vagones de ferrocarril, como el mostrado en la foto adyacente. Observe que aunque este resultado indica que $h = 0$ en $x = 0$, es necesario que la viga resista esfuerzo cortante en los apoyos y, en un sentido práctico, se debe exigir que $h > 0$ en los soportes, figura 11-11*a*.



EJEMPLO 11.5

La viga en voladizo que se muestra en la figura 11-12*a* tiene una forma trapezoidal, con un peralte h_0 en A y uno de $3h_0$ en B. Si soporta una carga **P** en su extremo, determine el esfuerzo normal máximo en la viga. Ésta tiene una sección transversal rectangular de anchura constante b.

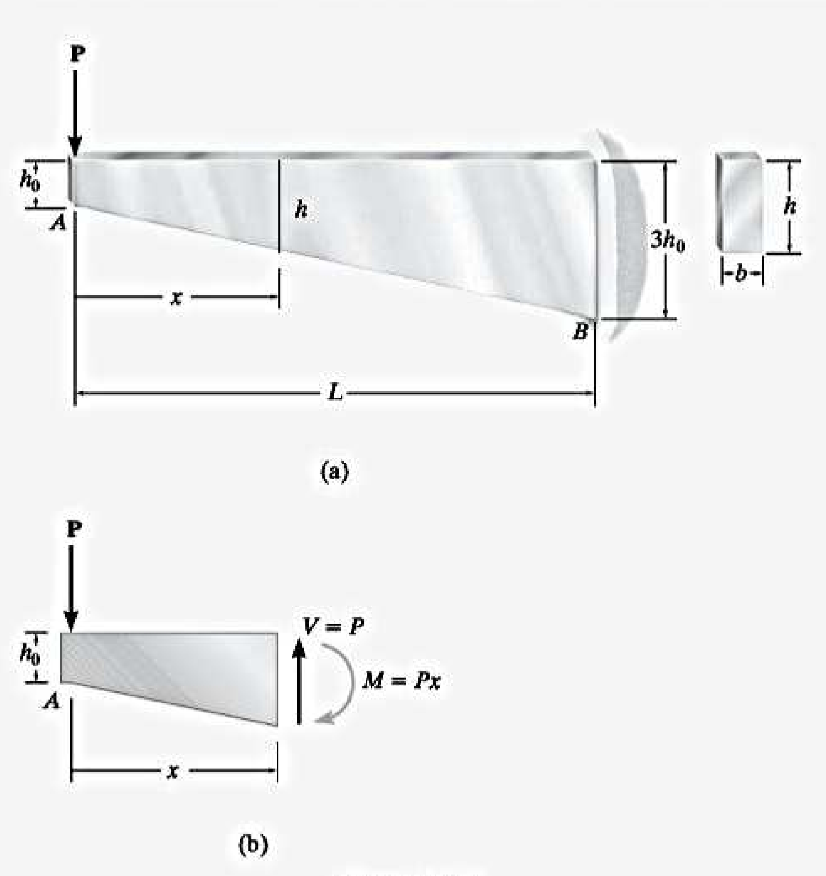


Figura 11-12

SOLUCIÓN

En cualquier sección transversal, el esfuerzo normal máximo se produce en la superficie superior e inferior de la viga. Sin embargo, como $\sigma_{\text{máx}} = M/S$ y el módulo de sección S se incrementa a medida que aumenta x, el esfuerzo normal máximo absoluto *no* necesariamente ocurre en la pared B, donde el momento es máximo. Si se usa la fórmula de la flexión, es posible expresar el esfuerzo normal máximo en una sección arbitraria en términos de su posición x, figura 11-12*b*. Aquí el momento interno tiene una magnitud de $M = Px$. Como la pendiente de la parte inferior de la viga es $2h_0/L$, figura 11-12*a*, el peralte de la viga en la posición x es

$$h = \frac{2h_0}{L}x + h_0 = \frac{h_0}{L}(2x + L)$$

Al aplicar la fórmula de la flexión, se tiene

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{Px(h/2)}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)} = \frac{6PL^2x}{bh_0^{\,2}(2x + L)^2} \qquad (1)$$

Para determinar la posición x donde se produce el esfuerzo normal máximo absoluto, es necesario obtener la derivada de σ con respecto a x e igualarla a cero. De esto se obtiene

$$\frac{d\sigma}{dx} = \left(\frac{6PL^2}{bh_0^{\,2}}\right)\frac{1(2x + L)^2 - x(2)(2x + L)(2)}{(2x + L)^4} = 0$$

Por lo tanto,

$$4x^2 + 4xL + L^2 - 8x^2 - 4xL = 0$$
$$L^2 - 4x^2 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}L$$

Si se sustituye en la ecuación 1 y después se simplifica, el esfuerzo normal máximo absoluto es

$$\sigma_{\substack{\text{máx}\\\text{abs}}} = \frac{3}{4}\frac{PL}{bh_0^{\,2}} \qquad \textit{Resp.}$$

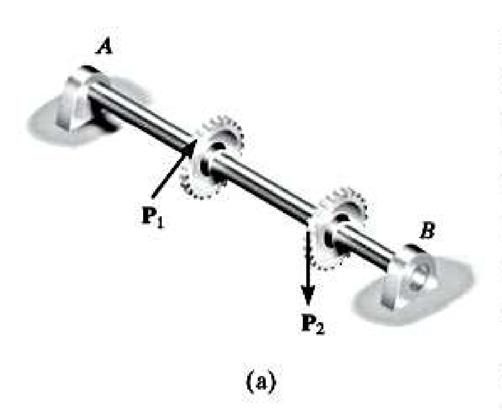
Observe que en la pared, B, el esfuerzo normal máximo es

$$(\sigma_{\text{máx}})_B = \frac{Mc}{I} = \frac{PL(1.5h_0)}{\left[\frac{1}{12}b(3h_0)^3\right]} = \frac{2}{3}\frac{PL}{bh_0^{\,2}}$$

que es 11.1 por ciento más pequeño que $\sigma_{\substack{\text{abs}\\\text{máx}}}$.

NOTA: Recuerde que la fórmula de la flexión se obtuvo con base en el supuesto de que la viga es *prismática*. Como esto no ocurre en el presente caso, se espera un error en el desarrollo de este problema y en el del ejemplo 11.4. Un análisis matemático más exacto, utilizando la teoría de la elasticidad, revela que la aplicación de la fórmula de la flexión como en el ejemplo anterior sólo resulta en pequeños errores en el esfuerzo normal si el ángulo de ahusamiento de la viga es pequeño. Por ejemplo, si este ángulo es de 15°, el esfuerzo calculado con la fórmula de la flexión será alrededor de 5 por ciento superior al que se calcula mediante el análisis más exacto. También vale la pena señalar que el cálculo de $(\sigma_{\text{máx}})_B$ se llevó a cabo sólo con propósitos ilustrativos, ya que por el principio de Saint-Venant, la distribución del esfuerzo real en el soporte (pared) es bastante irregular.

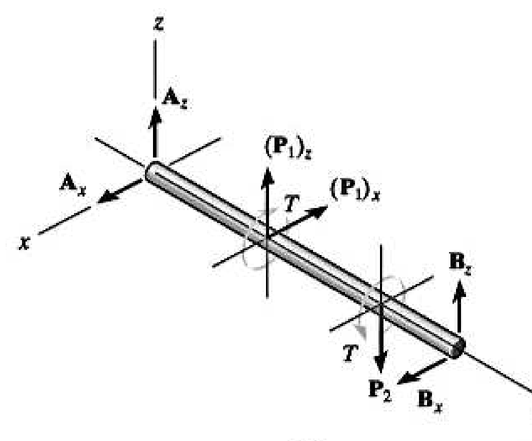
*11.4 Diseño de ejes



(a)

Los ejes que tienen secciones circulares se utilizan a menudo en el diseño de equipos mecánicos y maquinaria. Por ello, pueden estar sometidos a un esfuerzo o fatiga cíclica, la cual es causada por la flexión combinada y las cargas de torsión que deben transmitir o resistir. Además de estas cargas, en un eje pueden existir concentraciones de esfuerzo debido a las cuñas, acoplamientos y transiciones súbitas en el área de su sección transversal (sección 5.8). Por lo tanto, si se desea diseñar un eje de manera adecuada, es necesario tener todos estos efectos en cuenta.

En esta sección se analizarán algunos de los aspectos más importantes en el diseño de ejes, los cuales se requieren para transmitir potencia. Con frecuencia, estos ejes están sometidos a cargas aplicadas sobre las poleas y los engranajes a los que están unidos, como se muestra en la figura 11-13*a*. Como las cargas se pueden aplicar al eje en varios ángulos, la flexión interna y los momentos de torsión pueden determinarse en cualquier sección transversal, en primer lugar al sustituir las cargas por sus contrapartes estáticamente equivalentes y, después, al descomponer estas cargas en sus componentes pertenecientes a dos planos perpendiculares, figura 11-13*b*. Entonces, es posible trazar los diagramas de momento flexionante para las cargas *en cada plano* y se puede determinar el momento interno resultante en cualquier sección a lo largo del eje mediante una suma vectorial, $M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2}$, figura 11-13*c*. Además de este momento, los segmentos del eje también están sometidos a diferentes pares de torsión internos, figura 11-13*b*. Para tomar en cuenta esta variación general del par de torsión a lo largo del eje, también se puede dibujar un ***diagrama de par de torsión***, figura 11-13*d*.



(b)



Diagrama de momento causado por las cargas en el plano *y*-*z*

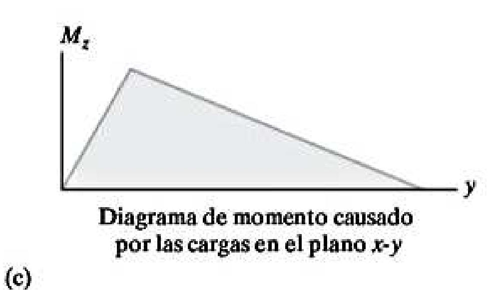


Diagrama de momento causado por las cargas en el plano *x*-*y*

(c)

T_y

T

y

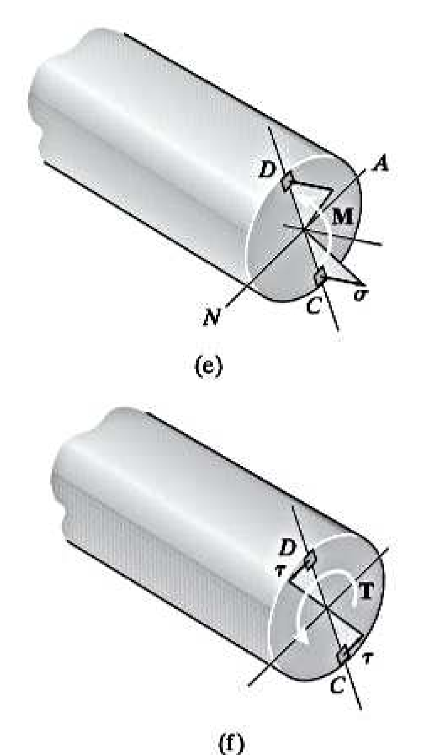
Diagrama de par de torsión causado por los pares aplicados alrededor de la línea central del eje

(d)

Figura 11-13

Una vez que se han establecido los diagramas de momento y de par de torsión, es posible investigar ciertas secciones críticas a lo largo del eje donde la *combinación* de un momento resultante **M** y un par de torsión **T** crea la peor situación de esfuerzo. Como el momento de inercia del eje es el *mismo* respecto a *cualquier* eje diametral, se puede aplicar la fórmula de la flexión con el *momento resultante* para obtener el esfuerzo flexionante máximo. Como se muestra en la figura 11-13*e*, este esfuerzo se producirá en dos elementos, C y D, cada uno situado en la frontera exterior del eje. Si en esta sección también se resiste un par de torsión **T**, entonces se desarrolla un esfuerzo cortante máximo en los elementos, figura 11-13*f*. Además, las fuerzas externas también crearán un esfuerzo cortante en el eje, determinado a partir de $\tau = VQ/It$; sin embargo, usualmente este esfuerzo contribuirá con una distribución de esfuerzo mucho menor sobre la sección transversal que la desarrollada por la flexión y la torsión. En algunos casos debe investigarse este efecto, pero por simplicidad no se tomará en cuenta en el siguiente análisis. Por lo tanto, en general, el elemento crítico D (o C) sobre el eje está sometido a *esfuerzo plano*, como se muestra en la figura 11-13*g*, donde

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \qquad \text{y} \qquad \tau = \frac{Tc}{J}$$



(e)

(f)

Si se conoce el esfuerzo normal o cortante permisible para el material, el tamaño del eje se basa en el uso de estas ecuaciones y la selección de una teoría de falla adecuada. Por ejemplo, si se sabe que el material es dúctil, entonces puede ser adecuada la teoría del esfuerzo máximo cortante. Como se indica en la sección 10.7, esta teoría requiere que el esfuerzo cortante permisible, que se determina a partir de los resultados de un ensayo de tensión simple, debe ser igual al esfuerzo cortante máximo en el elemento. Si se usa la ecuación para la transformación de esfuerzos, ecuación 9-7, en el estado de esfuerzo de la figura 11-13*g*, se tiene

$$\tau_{\text{perm}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$

(g)

Figura 11-13 (cont.)

Como $I = \pi c^4/4$ y $J = \pi c^4/2$, esta ecuación se convierte en

$$\tau_{\text{perm}} = \frac{2}{\pi c^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Al despejar el radio del eje, se obtiene

$$c = \left(\frac{2}{\pi \tau_{\text{perm}}}\sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3} \qquad (11\text{-}2)$$

Por supuesto, la aplicación de cualquier otra teoría de falla conduce a una formulación diferente de c. Sin embargo, en todos los casos puede ser necesario aplicar esta fórmula para varias "secciones críticas" a lo largo del eje con el fin de determinar la combinación particular de M y T que proporciona el mayor valor de c.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento en forma numérica.

EJEMPLO 11.6

El eje de la figura 11-14*a* se sostiene mediante chumaceras lisas en *A* y *B*. Debido a la transmisión de potencia desde y hacia el eje, las bandas en las poleas están sometidas a las tensiones mostradas en la figura. Determine el menor diámetro posible del eje con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo, con $\tau_{\text{perm}} = 50$ MPa.

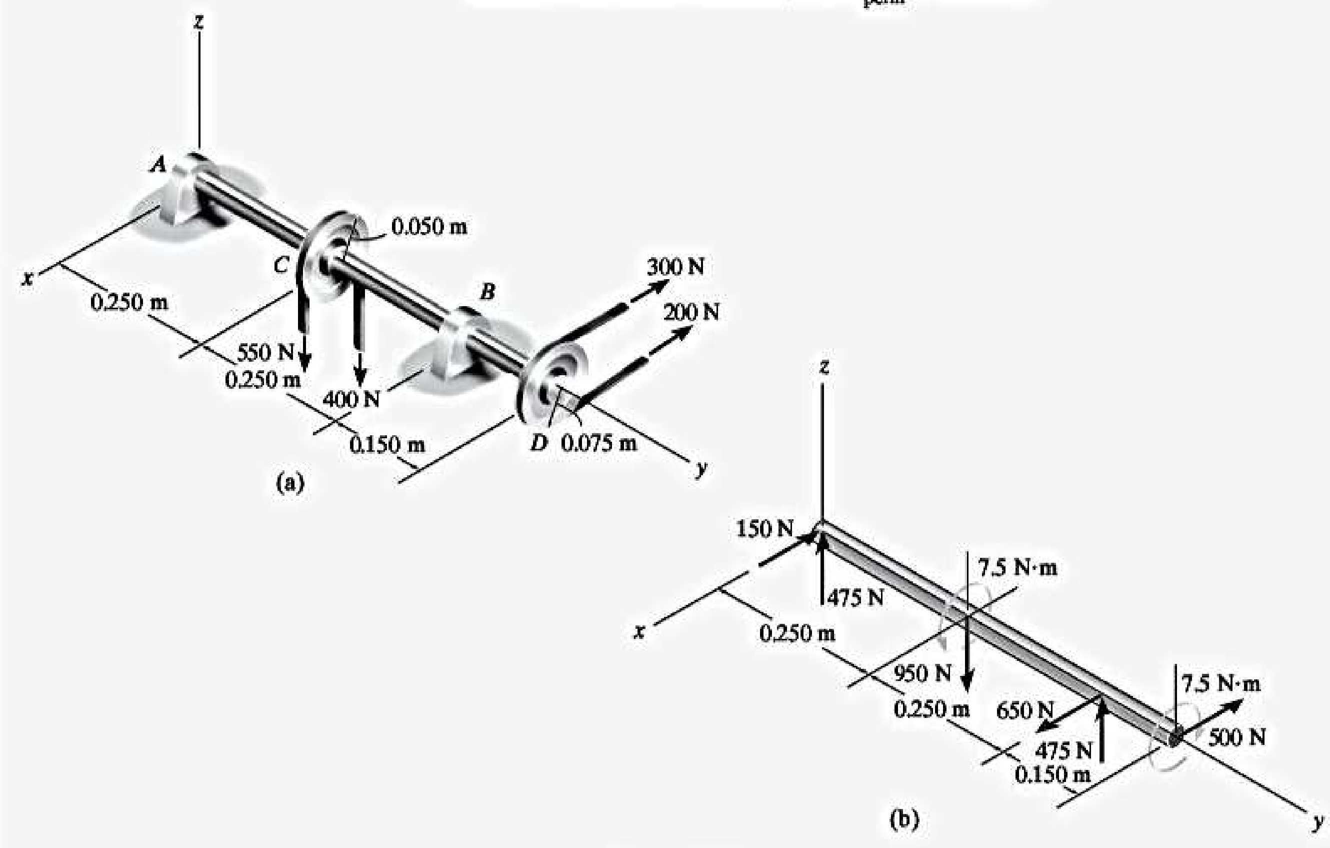


Figura 11-14

SOLUCIÓN

Se han calculado las reacciones en los apoyos que se muestran en el diagrama de cuerpo libre del eje, figura 11-14*b*. Los diagramas de momento flexionante para M_x y M_z se muestran en las figuras 11-14*c* y 11-14*d*, respectivamente. El diagrama de par de torsión se muestra en la figura 11-14*e*. Por inspección, los puntos críticos para el momento flexionante ocurren, ya sea en *C*, o en *B*. Además, justo a la derecha de *C* y en *B* el momento de torsión es 7.5 N · m. En *C*, el momento resultante es

$$M_C = \sqrt{(118.75\ \text{N}\cdot\text{m})^2 + (37.5\ \text{N}\cdot\text{m})^2} = 124.5\ \text{N}\cdot\text{m}$$

mientras que en *B* es más pequeño, a saber,

$$M_B = 75\ \text{N}\cdot\text{m}$$

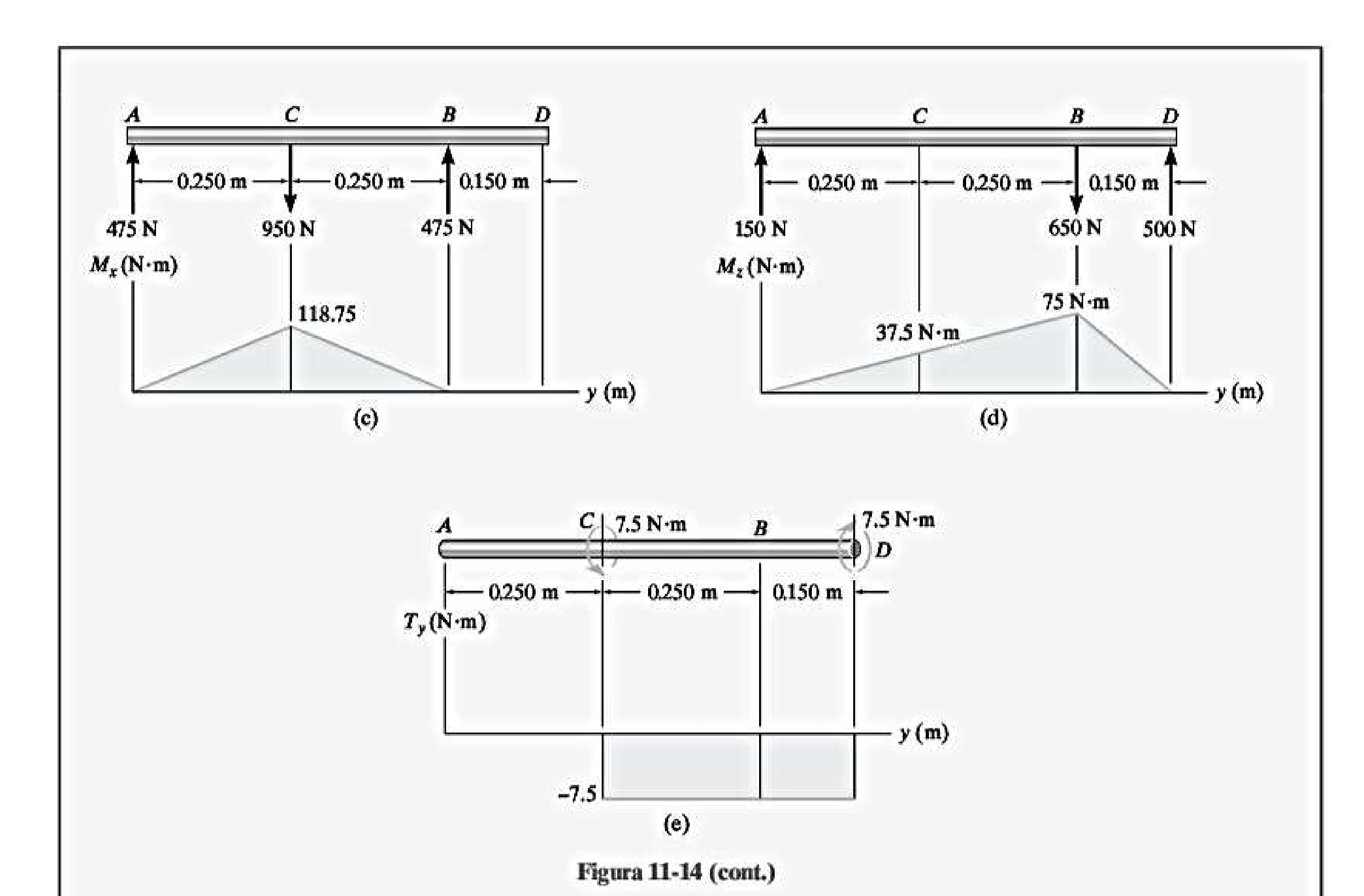


Figura 11-14 (cont.)

Como el diseño se basa en la teoría del esfuerzo cortante máximo, se aplica la ecuación 11-2. El radical $\sqrt{M^2 + T^2}$ será el más grande en la sección justo a la derecha de C. Se tiene

$$c = \left(\frac{2}{\pi \tau_{\text{perm}}} \sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi(50)(10^6)\ \text{N/m}^2} \sqrt{(124.5\ \text{N}\cdot\text{m})^2 + (7.5\ \text{N}\cdot\text{m})^2}\right)^{1/3}$$

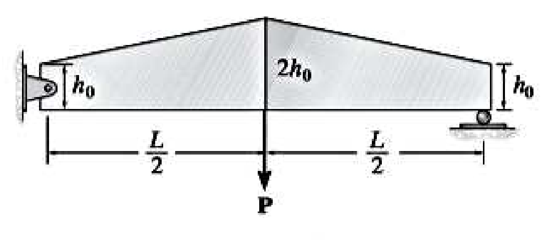
$$= 0.0117\ \text{m}$$

Así, el menor diámetro permisible es

$$d = 2(0.0117\ \text{m}) = 23.3\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

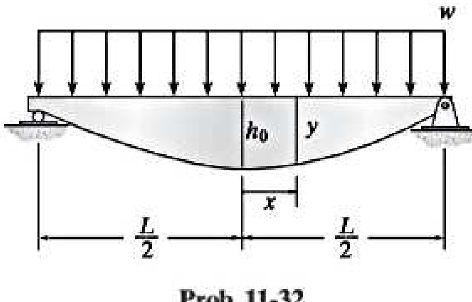
PROBLEMAS

11-31. La viga ahusada soporta una fuerza concentrada **P** en su centro. Si está hecha con una placa que tiene una anchura b constante, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.



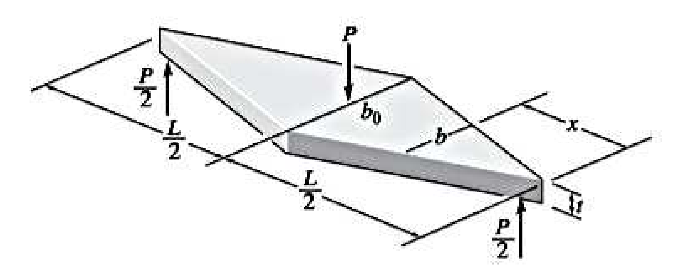
Prob. 11-31

***11-32.** La viga está fabricada de una placa que tiene un grosor b constante. Si está simplemente apoyada y resiste una carga uniforme w, determine la variación de su peralte en función de x, de modo que mantenga un esfuerzo flexionante máximo constante σ_{perm} en toda su longitud.



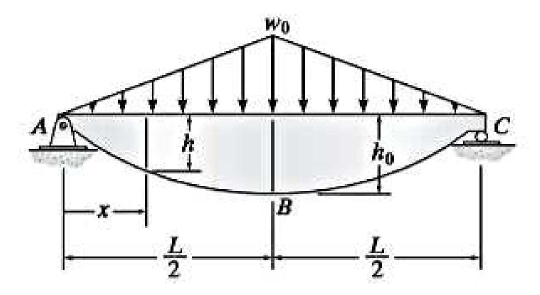
Prob. 11-32

•**11-33.** La viga está fabricada de una placa con un grosor t constante y una anchura que varía como se muestra en la figura. Si soporta una fuerza concentrada **P** en su centro, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga y especifique su ubicación x, $0 < x < L/2$.



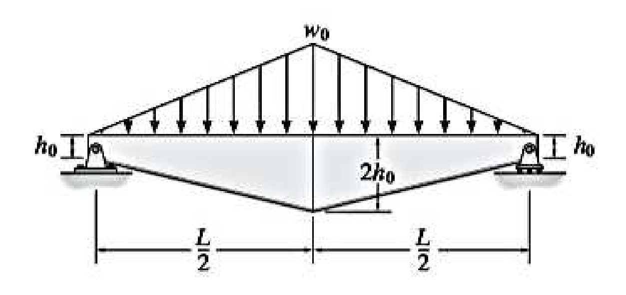
Prob. 11-33

11-34. La viga está fabricada de una placa que tiene un grosor b constante. Si está simplemente apoyada y resiste la carga distribuida que se muestra en la figura, determine la variación de su peralte en función de x, de modo que mantenga un esfuerzo flexionante máximo constante σ_{perm} en toda su longitud.



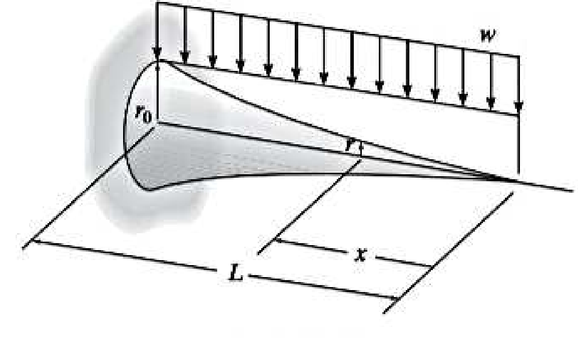
Prob. 11-34

11-35. La viga está hecha de una placa que tiene un grosor b constante. Si está simplemente apoyada y resiste la carga distribuida que se muestra en la figura, determine el esfuerzo flexionante máximo en la viga.



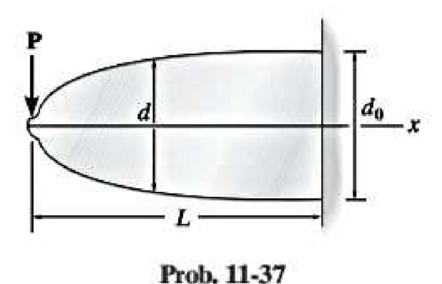
Prob. 11-35

***11-36.** Determine la variación del radio r de la viga en voladizo que soporta la carga uniforme distribuida, de modo que tenga un esfuerzo flexionante máximo constante $\sigma_{máx}$ en toda su longitud.



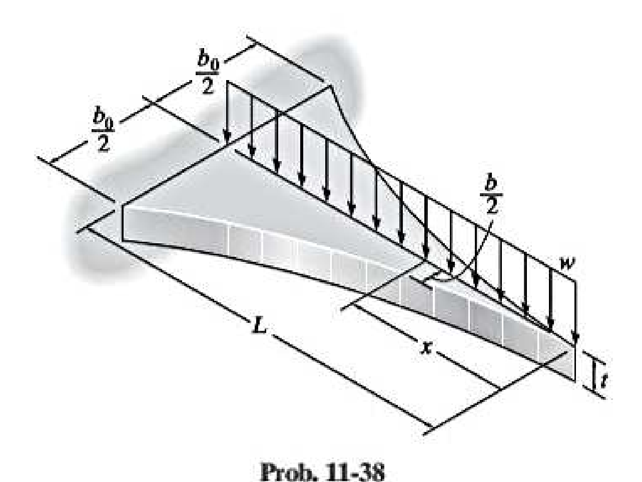
Prob. 11-36

•**11-37.** Determine la variación del peralte d de una viga en voladizo que soporta una fuerza concentrada **P** en su extremo, de modo que tiene un esfuerzo flexionante máximo constante σ_{perm} en toda su longitud. La viga tiene una anchura constante b_0.



Prob. 11-37

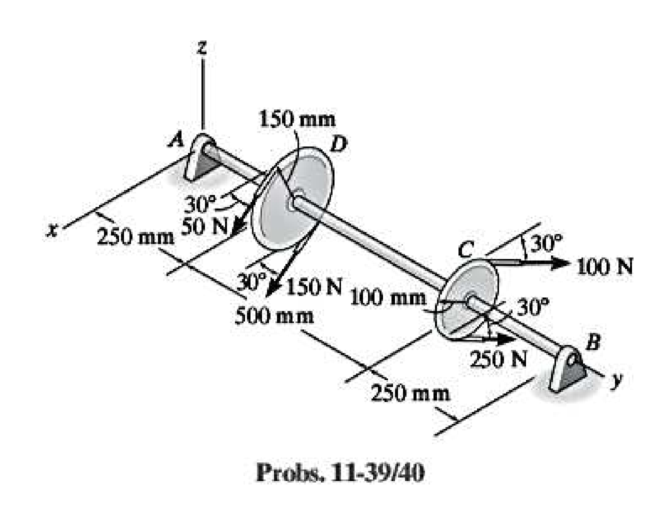
11-38. Determine la variación en la anchura b como una función de x para la viga en voladizo que soporta una carga uniforme distribuida a lo largo de su línea central, de modo que tiene el mismo esfuerzo flexionante máximo σ_{perm} en toda su longitud. La viga tiene un peralte constante t.



Prob. 11-38

11-39. El eje se apoya en las chumaceras que no ofrecen resistencia a la carga axial. Si el esfuerzo normal permisible para el eje es σ_{perm} = 80 MPa, determine con precisión de 1 mm el menor diámetro del eje que soportará la carga. Use la teoría de falla de la energía de distorsión máxima.

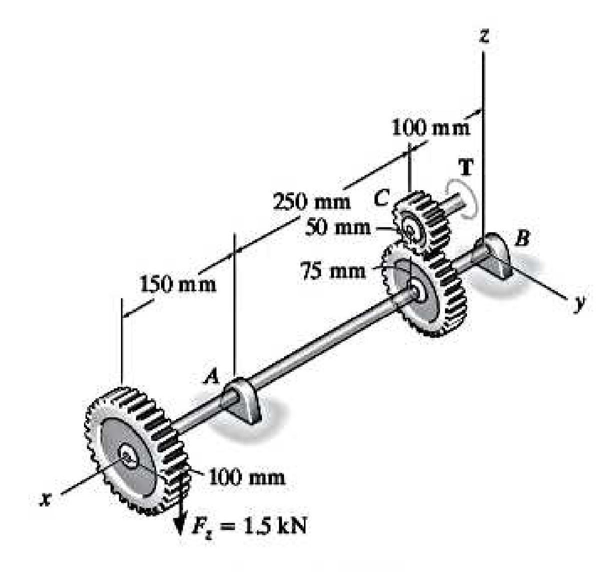
***11-40.** El eje se apoya en las chumaceras que no ofrecen resistencia a la carga axial. Si el esfuerzo cortante permisible para el eje es τ_{perm} = 35 MPa, determine con precisión de 1 mm el menor diámetro del eje que soportará la carga. Use la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo.



Probs. 11-39/40

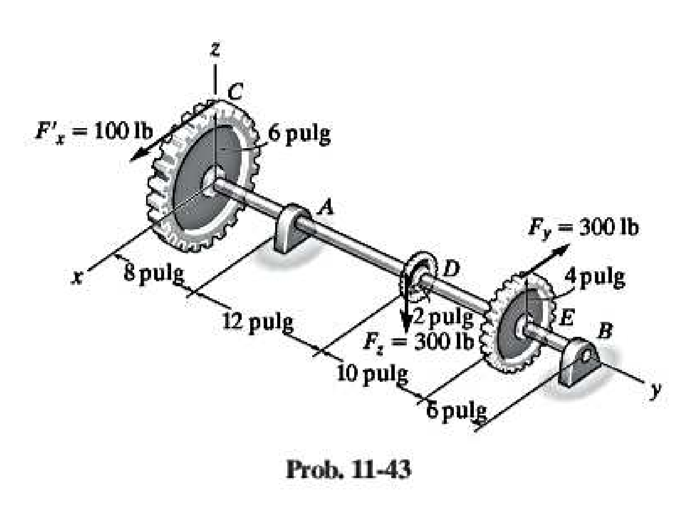
•**11-41.** El engranaje conectado al eje se somete a las cargas mostradas en la figura. Si los cojinetes en A y B sólo ejercen componentes de fuerza en y y z sobre el eje, determine el par de torsión de equilibrio T en el engrane C y después determine, con precisión de 1 mm, el menor diámetro del eje que soportará las cargas. Use la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo con τ_{perm} = 60 MPa.

11-42. El engranaje conectado al eje se somete a las cargas mostradas en la figura. Si los cojinetes en A y B sólo ejercen componentes de fuerza en y y z sobre el eje, determine el par de torsión de equilibrio T en el engrane C y después determine, con precisión de 1 mm, el menor diámetro del eje que soportará las cargas. Use la teoría de falla de la energía de distorsión máxima con σ_{perm} = 80 MPa.



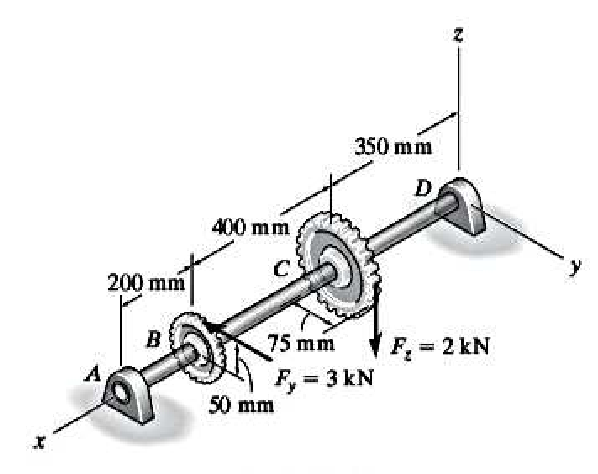
Probs. 11-41/42

11-43. El eje está soportado por los cojinetes en A y B que ejercen componentes de fuerza sobre éste, sólo en las direcciones x y z. Si el esfuerzo normal permisible para el eje es $\sigma_{perm} = 15$ ksi, determine con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg el menor diámetro del eje que soportará la carga. Use la teoría de falla de la energía de distorsión máxima.



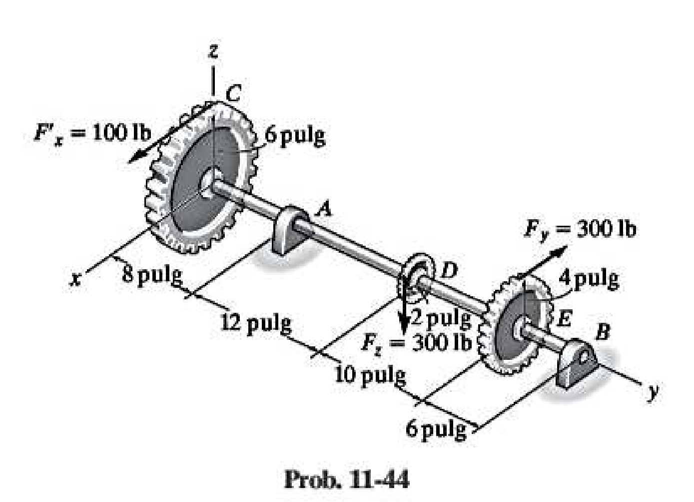
Prob. 11-43

•11-45. Los cojinetes en A y D ejercen componentes de fuerza sobre el eje sólo en y y z. Si $\tau_{perm} = 60$ MPa, determine con precisión de 1 mm el menor diámetro del eje que soportará la carga. Use la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo.



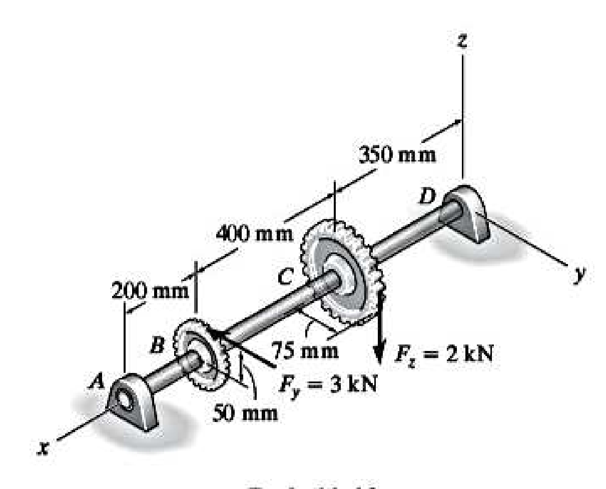
Prob. 11-45

***11-44.** El eje está soportado por los cojinetes en A y B que ejercen componentes de fuerza sobre el eje, sólo en las direcciones x y z. Si el esfuerzo normal permisible para el eje es $\sigma_{perm} = 15$ ksi, determine con una precisión de $\frac{1}{8}$ de pulg el menor diámetro del eje que soportará la carga. Use la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo. Tome $\tau_{perm} = 6$ ksi.



Prob. 11-44

11-46. Los cojinetes en A y D ejercen componentes de fuerza sobre el eje sólo en y y z. Si $\tau_{perm} = 60$ MPa, determine con precisión de 1 mm el menor diámetro del eje que soportará la carga. Use la teoría de falla de la energía de distorsión máxima. $\sigma_{perm} = 130$ MPa.



Prob. 11-46

REPASO DE CAPÍTULO

La falla de una viga se produce cuando la fuerza cortante o el momento interno en la viga son máximos. Por lo tanto, para resistir estas cargas es necesario que los esfuerzos máximos asociados, cortante y flexionante, no superen los valores permisibles que se establecen en los códigos. Normalmente, la sección transversal de una viga primero se diseña para resistir el esfuerzo flexionante permisible.

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{M_{\text{máx}} c}{I}$$

Después se verifica el esfuerzo cortante permisible. Para las secciones rectangulares, $\tau_{\text{perm}} \geq 1.5(V_{\text{máx}}/A)$, y para las secciones I de ala ancha es apropiado utilizar $\tau_{\text{perm}} \geq V_{\text{máx}}/A_{\text{alma}}$. En general, use

$$\tau_{\text{perm}} = \frac{VQ}{It}$$

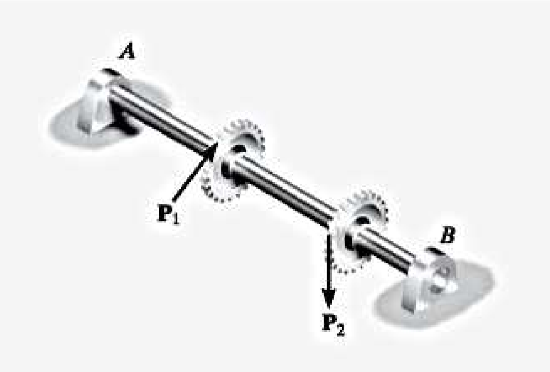
Para las vigas compuestas, el espaciamiento entre los elementos de sujeción o la resistencia del pegamento o soldadura se determina mediante un flujo cortante permisible

$$q_{\text{perm}} = \frac{VQ}{I}$$

Las vigas totalmente esforzadas son no prismáticas y se diseñan de tal manera que cada sección transversal a lo largo de la viga resista el esfuerzo flexionante permisible. Esto define la forma de la viga.

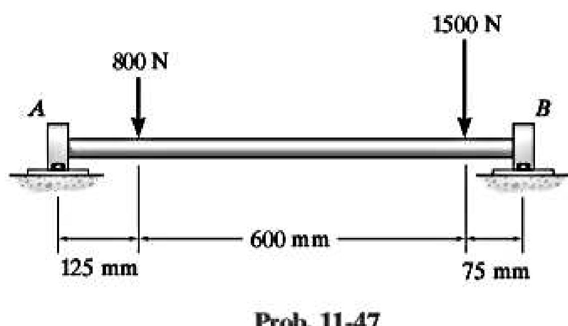


Por lo general, un eje mecánico se diseña para resistir tanto la torsión como la flexión. Normalmente, el momento flexionante interno puede descomponerse en dos planos, por lo que es necesario establecer los diagramas de momento para cada componente del momento flexionante y después seleccionar el momento máximo con base en la suma de vectores. Una vez que se determinan los esfuerzos flexionante y cortante máximos, dependiendo del tipo de material, se usa una teoría de falla adecuada para comparar el esfuerzo permisible con lo que se requiere.



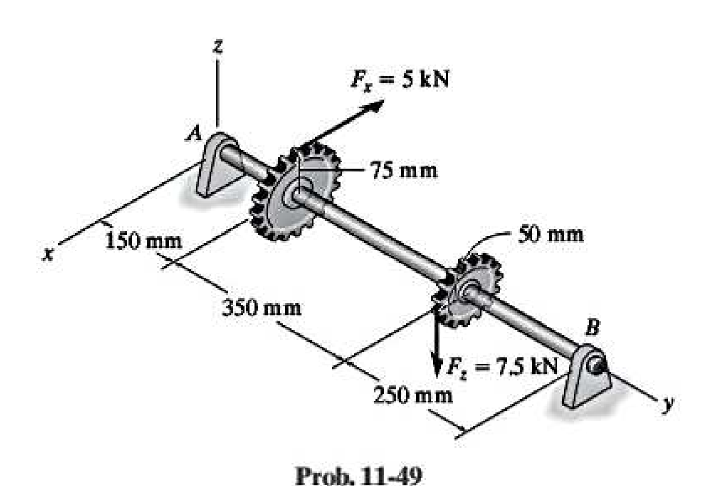
PROBLEMAS DE REPASO

11-47. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para el eje y luego determine el diámetro requerido con una precisión de 1 mm si $\sigma_{perm} = 140$ MPa y $\tau_{perm} = 80$ MPa. Los cojinetes en A y B sólo ejercen reacciones verticales sobre el eje.



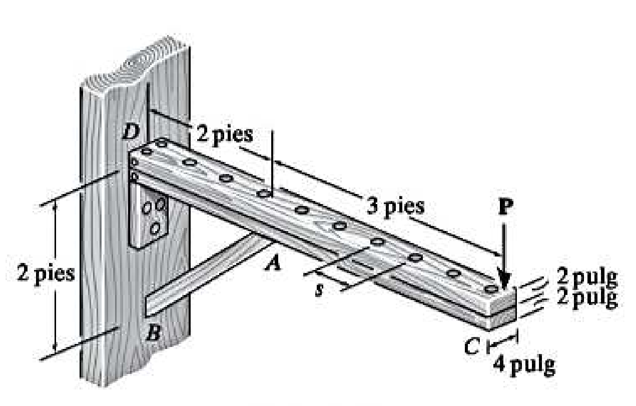
Prob. 11-47

•11-49. Los cojinetes en A y B sólo ejercen componentes de fuerza x y z sobre el eje de acero. Determine el diámetro del eje con una precisión de un milímetro, de modo que pueda resistir las cargas de los engranes sin exceder un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 80$ MPa. Use la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo.



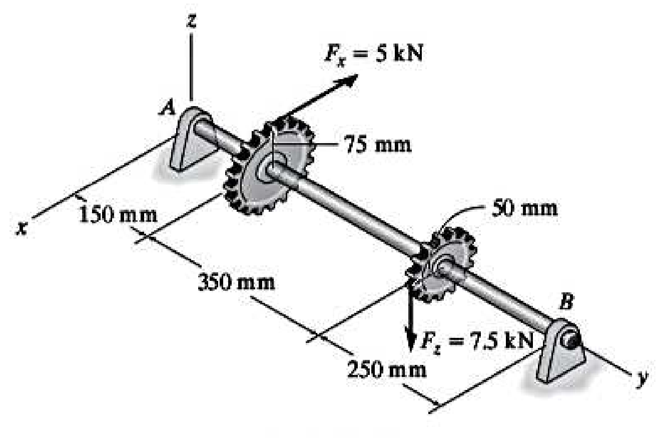
Prob. 11-49

***11-48.** La viga en voladizo se construye con dos piezas de madera de 2 por 4 pulg soportadas como se muestra en la figura. Si el esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 600$ psi, determine la mayor carga P que puede aplicarse. Además, determine el máximo espaciamiento asociado, s, entre los clavos a lo largo de la sección AC de la viga si cada clavo puede resistir una fuerza cortante de 800 lb. Suponga que la viga está articulada en A, B y D. No tome en cuenta la fuerza axial desarrollada en la viga a lo largo de DA.



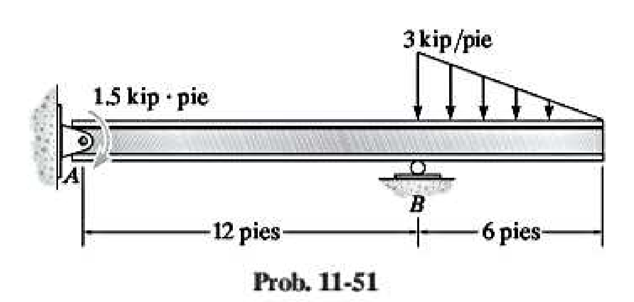
Prob. 11-48

11-50. Los cojinetes en A y B ejercen sólo componentes de fuerza x y z sobre el eje de acero. Determine el diámetro del eje con una precisión de 1 mm, de modo que pueda resistir las cargas de los engranes sin exceder un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 80$ MPa. Use la teoría de falla de la energía de distorsión máxima con $\sigma_{perm} = 200$ MPa.



Prob. 11-50

11-51. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento para la viga. Después, seleccione del apéndice B la viga I de ala ancha de acero con menor peso que pueda soportar la carga con seguridad. Considere $\sigma_{perm} = 22$ ksi y $\tau_{perm} = 12$ ksi.



Prob. 11-51

•11-53. La viga ahusada soporta una carga uniforme distribuida w. Si está hecha a partir de una placa y tiene una anchura b constante, determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto en la viga.

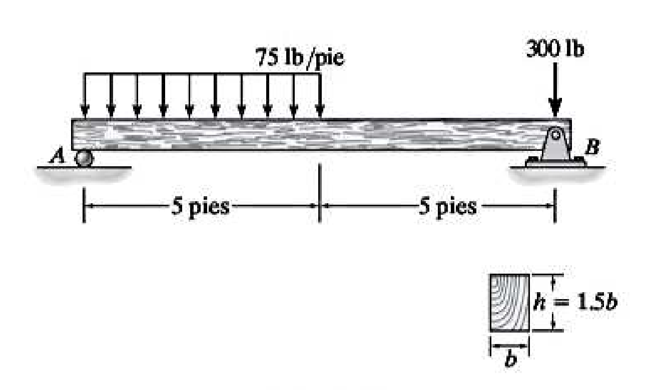
w, h_0, $2h_0$, h_0, $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{2}$

Prob. 11-53

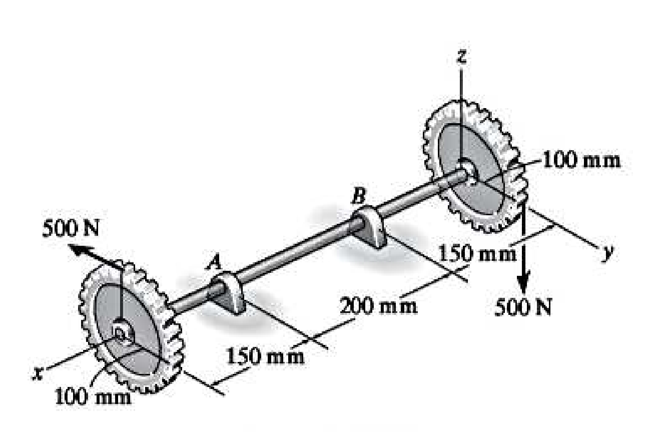
11-54. El eje tubular tiene un diámetro interior de 15 mm. Determine con una precisión de 1 mm su diámetro exterior si está sometido a la carga de los engranes. Los cojinetes en A y B sólo ejercen componentes de fuerza sobre el eje en las direcciones y y z. Use un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 70$ MPa y base el diseño en la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo.

11-55. Determine con una precisión de 1 mm el diámetro del eje sólido si está sometido a la carga de los engranes. Los cojinetes en A y B sólo ejercen componentes de fuerza sobre el eje en las direcciones y y z. Base el diseño en la teoría de falla de la energía de distorsión máxima con $\sigma_{perm} = 150$ MPa.

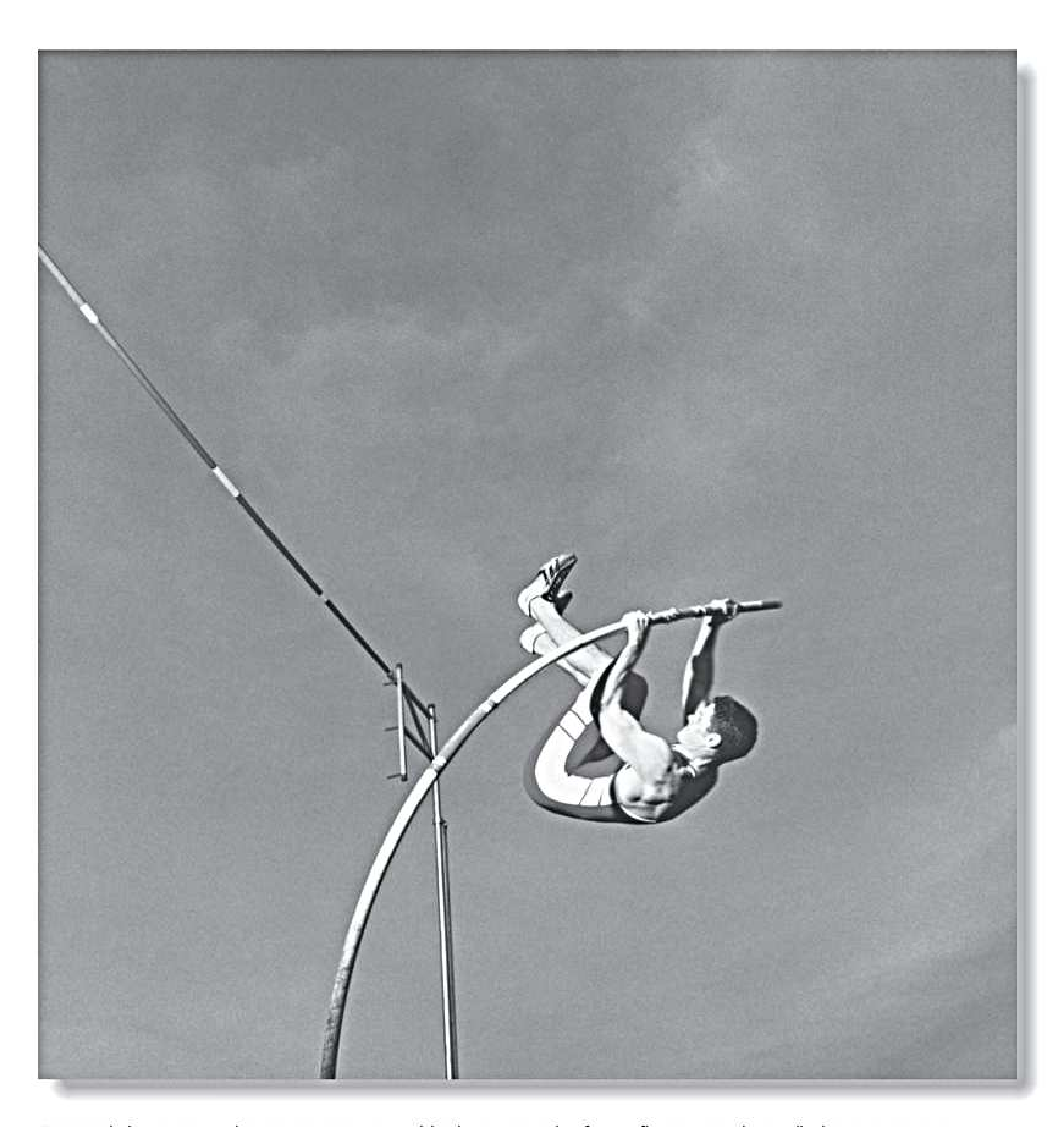
***11-52.** La viga está hecha de ciprés con un esfuerzo flexionante permisible de $\sigma_{perm} = 850$ psi y un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 80$ psi. Determine la anchura b de la viga si la altura $h = 1.5b$.



Prob. 11-52



Probs. 11-54/55



Si se mide la curvatura de esta pértiga, es posible determinar el esfuerzo flexionante desarrollado en su interior.

Deflexión de vigas y ejes

12

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

A menudo es necesario fijar límites sobre la cantidad de deflexión que puede experimentar una barra o un eje cuando están sometidos a una carga, por ello en este capítulo se analizarán diferentes métodos para determinar la deflexión y la pendiente en puntos específicos de vigas y ejes. Los métodos analíticos incluyen el método de integración, el uso de funciones de discontinuidad y el método de superposición. Además, se presentará una técnica semigráfica llamada método del momento de área. Al final del capítulo se usarán estos métodos para determinar las reacciones en los soportes de una viga o un eje estáticamente indeterminado.

12.1 La curva elástica

Con frecuencia, debe limitarse la deflexión de una viga o eje con el fin de proporcionar integridad y estabilidad a una estructura o máquina, y así evitar el agrietamiento de cualquier material frágil unido a la viga como el concreto o el vidrio. Además, las restricciones de código suelen exigir que estos elementos no vibren o se desvíen de manera importante a fin de poder soportar con seguridad las operaciones de carga previstas. Si se analiza un elemento estáticamente indeterminado, resulta importante encontrar las deflexiones en puntos específicos de una viga o eje.

Antes de determinar la pendiente o el desplazamiento en un punto de una viga (o eje), a menudo es útil trazar la forma flexionada de la viga cuando ésta soporta una carga para "visualizar" cualquier resultado calculado y por tanto verificar parcialmente estos resultados. La curva de deflexión del eje longitudinal que pasa por el centroide de cada área de sección transversal de una viga se denomina *curva elástica*. Para la mayoría de las vigas, la curva elástica puede trazarse sin mucha dificultad. Sin embargo, al hacerlo es necesario conocer la manera en que la pendiente o el desplazamiento están restringidos en diferentes tipos de soportes. En general, los soportes que se resisten a una *fuerza*, como un pasador, restringen el *desplazamiento* y aquellos que se resisten a un *momento*, como una pared fija, restringen la *rotación* o la *pendiente*, así como el desplazamiento. Considerando esto, en la figura 12-1 se muestran dos ejemplos típicos de las curvas elásticas para vigas cargadas (o ejes cargados), los cuales se dibujan a una escala exagerada.

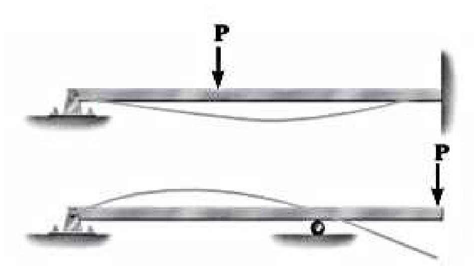


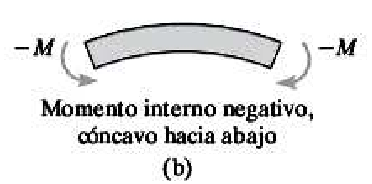
Figura 12-1

12



Momento interno positivo, cóncavo hacia arriba

(a)



Momento interno negativo, cóncavo hacia abajo

(b)

Figura 12-2

Si la curva elástica de una viga parece difícil de establecer, se sugiere primero dibujar el diagrama de momentos para la viga. Si se usa la convención de signos para una viga que se estableció en la sección 6.1, un momento interno positivo tiende a doblar la viga de manera cóncava hacia arriba, figura 12-2*a*. Del mismo modo, un momento negativo tiende a doblar la viga de forma cóncava hacia abajo, figura 12-2*b*. Por lo tanto, si *se conoce* el diagrama de momentos resultará fácil construir la curva elástica. Por ejemplo, la viga de la figura 12-3*a* se muestra en la figura 3.12*b* junto con su diagrama de momentos asociado. Debido a los soportes de rodillo y pasador, el desplazamiento en *B* y *D* debe ser cero. Dentro de la región de momento negativo, *AC*, figura 12-3*b*, la curva elástica debe ser cóncava hacia abajo y dentro de la región de momento positivo, *CD*, la curva elástica debe ser cóncava hacia arriba. Por consiguiente debe haber un *punto de inflexión* en el punto *C*, donde la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, puesto que éste es un punto de momento nulo. Si se emplean estos hechos, es posible dibujar la curva elástica de la viga como se muestra en la figura 12-3*c*. También debe tenerse en cuenta que los desplazamientos Δ_A y Δ_E son especialmente críticos. En el punto *E* la *pendiente* de la curva elástica es *cero* y la *deflexión* de la viga puede ser un *máximo*. El hecho de que Δ_E sea en realidad mayor que Δ_A, depende de las magnitudes relativas de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, y la ubicación del rodillo en *B*.

Con base en estos mismos principios, observe cómo se construyó la curva elástica de la figura 12-4. Aquí, la viga está en voladizo con un soporte fijo en *A* y, por lo tanto, la curva elástica debe tener desplazamiento y pendiente con valor de cero en este punto. Además, el mayor desplazamiento se producirá en *D*, donde la pendiente es cero, o en *C*.

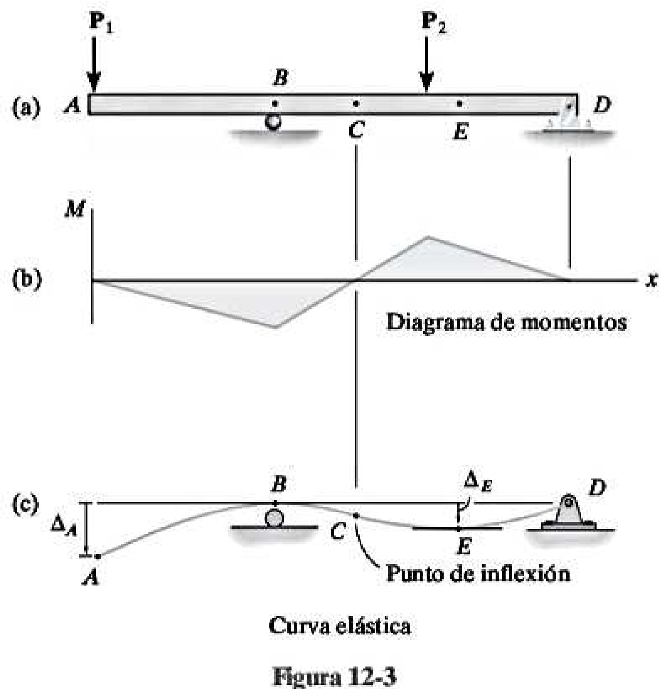


Figura 12-3

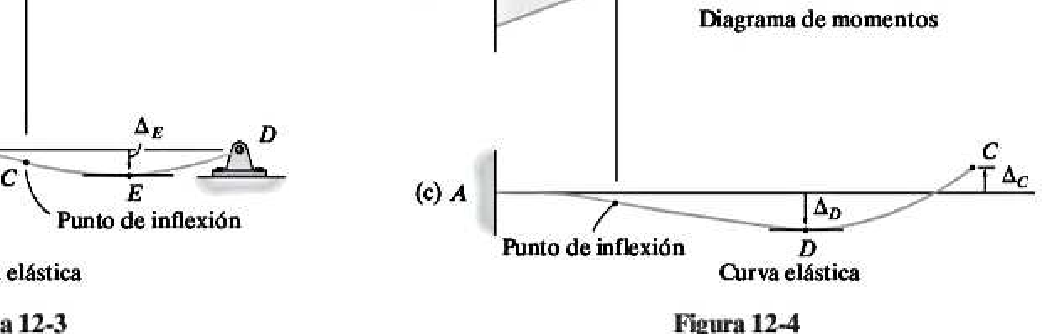


Figura 12-4

Relación momento-curvatura. Ahora se desarrollará una relación importante entre el momento interno y el radio de curvatura ρ (rho) de la curva elástica en un punto. La ecuación resultante se utilizará para establecer cada uno de los métodos presentados en el capítulo para encontrar la pendiente y el desplazamiento en puntos sobre la curva elástica.

El siguiente análisis requerirá el uso de tres coordenadas en esta sección y en la siguiente. Como se muestra en la figura 12-5*a*, el eje x positivo se extiende a la derecha, a lo largo del eje longitudinal inicialmente recto de la viga. Se usa para localizar el elemento diferencial, que tiene una anchura no deformada dx. El eje v se extiende *positivo hacia arriba* del eje x. Mide el *desplazamiento* de la curva elástica. Por último, una coordenada y "localizada" se emplea para especificar la posición de una fibra en el elemento de viga. Se mide *positivo hacia arriba* desde el eje neutro (o curva elástica) como se muestra en la figura 12-5*b*. Recuerde que esta misma convención de signos para x y y se utilizó en la obtención de la fórmula de la flexión.

Para deducir la relación entre el momento interno y ρ, se limitará el análisis al caso más común de una viga en un principio recta, la cual se deforma elásticamente por las cargas aplicadas perpendicularmente al eje x de la viga, y se encuentra en el plano x-v de simetría para la sección transversal de la viga. Debido a las cargas, la deformación de la viga es causada tanto por la fuerza cortante interna como por el momento flexionante. Si la viga tiene una longitud que es mucho mayor que su peralte, la mayor deformación será causada por la flexión y, por lo tanto, hay que prestar atención a sus efectos. Las deflexiones causadas por la fuerza cortante se analizarán en el capítulo 14.

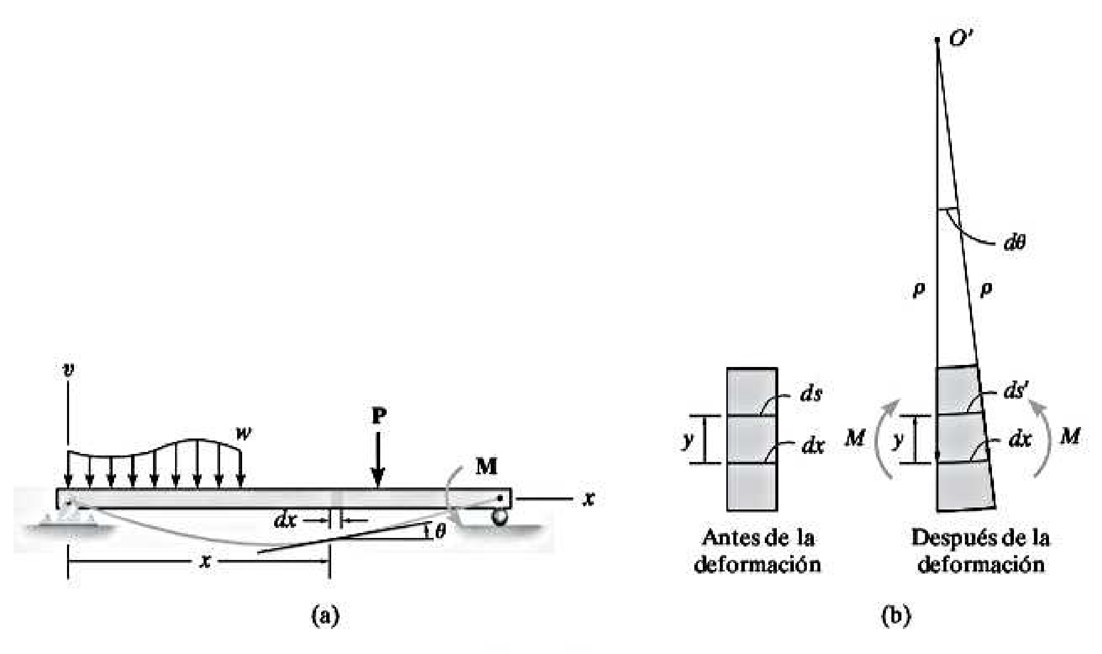


Figura 12-5

12

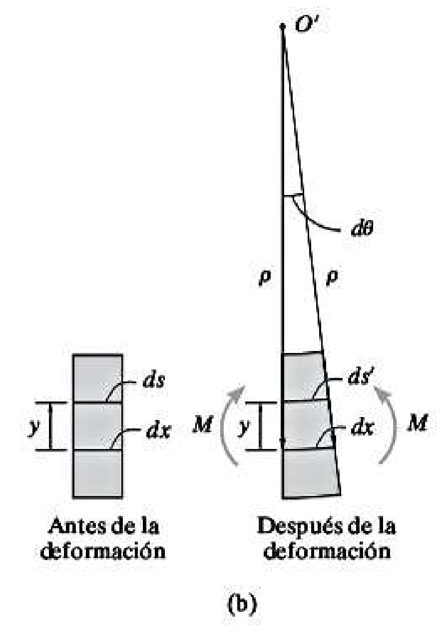


Figura 12-5 (cont.)

Cuando el momento interno M deforma al elemento de la viga, el ángulo entre las secciones transversales se convierte en $d\theta$, figura 12-5b. El arco dx representa una porción de la curva elástica que cruza el eje neutro para cada sección transversal. El *radio de curvatura* para este arco se define como la distancia ρ, que se mide desde el *centro de curvatura* O' hasta dx. Cualquier arco distinto a dx en el elemento está sometido a una deformación normal. Por ejemplo, la deformación en el arco ds, localizado en una posición y desde el eje neutro es $\epsilon = (ds' - ds)/ds$. Sin embargo, $ds = dx = \rho\, d\theta$ y $ds' = (\rho - y)\, d\theta$, por lo que $\epsilon = [(\rho - y)\, d\theta - \rho\, d\theta]/\rho\, d\theta$ o bien

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y} \tag{12-1}$$

Si el material es homogéneo y se comporta de una manera elástico lineal, entonces aplica la ley de Hooke, $\epsilon = \sigma/E$. Además, como aplica la fórmula de la flexión, $\sigma = -My/I$. Al combinar estas dos ecuaciones y sustituirlas en la ecuación anterior, se tiene

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}} \tag{12-2}$$

donde

$\rho =$ el radio de curvatura en el punto sobre la curva elástica ($1/\rho$ se conoce como la *curvatura*)
$M =$ el momento interno en la viga en el punto
$E =$ el módulo de elasticidad del material
$I =$ el momento de inercia de la viga respecto al eje neutro

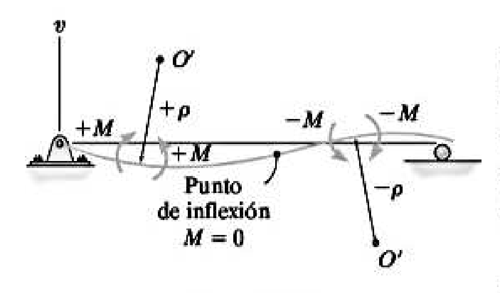


Figura 12-6

El producto EI de esta ecuación se conoce como la *rigidez a la flexión*, y siempre es una cantidad positiva. Por lo tanto, el signo de ρ depende de la dirección del momento. Como se muestra en la figura 12-6, cuando M es *positivo*, v se extiende *por encima* de la viga, es decir, en la dirección v positiva; cuando M es *negativo*, ρ se extiende *por debajo* de la viga, o en la dirección v negativa.

Si se usa la fórmula de la flexión, $\sigma = -My/I$, también es posible expresar la curvatura en términos del esfuerzo en la viga, a saber,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sigma}{Ey} \tag{12-3}$$

Las ecuaciones 12-2 y 12-3 son válidas para radios de curvatura pequeños o grandes. Sin embargo, el valor de ρ casi siempre se calcula como una *cantidad muy grande*. Por ejemplo, considere una viga de acero A-36 fabricada con base en un perfil W14 × 53 (apéndice B), donde $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi y $\sigma_Y = 36$ ksi. Cuando el material en las fibras exteriores, $y = \pm 7$ pulg, está a punto de *ceder*, entonces $\rho = \pm 5639$ pulg de acuerdo con la ecuación 12-3. Los valores de σ calculados en otros puntos a lo largo de la curva elástica de la viga pueden ser aún *mayores*, puesto que σ no puede ser superior a σ_Y en las fibras exteriores.

12.2 Pendiente y desplazamiento por integración

La ecuación de la curva elástica de una viga puede expresarse matemáticamente como $v = f(x)$. Para obtener esta ecuación, primero es necesario representar la curvatura $(1/\rho)$ en términos de v y x. En la mayoría de los libros de cálculo se demuestra que esta relación es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}}$$

Sustituyendo en la ecuación 12-2, hemos

$$\frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \tag{12-4}$$

Esta ecuación representa una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. Su solución, que se denomina *elástica*, da la forma exacta de la curva elástica, suponiendo que las deflexiones de la viga se producen sólo debido a la flexión. Mediante el uso de matemáticas superiores, las soluciones elásticas se han obtenido sólo para casos simples de la geometría y la carga de una viga.

La ecuación 12-4 puede modificarse con el fin de facilitar la solución de un mayor número de problemas de deflexión. La mayoría de los códigos de diseño de ingeniería especifican *limitaciones* sobre las deflexiones por tolerancia o por fines estéticos, y como resultado las deflexiones elásticas para la mayoría de las vigas y ejes forman curvas poco pronunciadas. En consecuencia, la *pendiente* de la curva elástica, que se determina a partir de dv/dx será *muy pequeña*, y su cuadrado será insignificante comparado con la unidad.* Por lo tanto, la curvatura definida como se hizo anteriormente puede *aproximarse* mediante $1/\rho = d^2v/dx^2$. Con esta simplificación, la ecuación 12.4 puede escribirse como

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{12-5}$$

También es posible escribir esta ecuación en dos formas alternativas. Si se diferencia cada lado con respecto a x y se sustituye $V = dM/dx$ (ecuación 6-2), se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = V(x) \tag{12-6}$$

Al diferenciar de nuevo, y usar $w = dV/dx$ (ecuación 6-1), se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = w(x) \tag{12-7}$$

*Vea el ejemplo 12.1.

12

Para la mayoría de los problemas, la rigidez a la flexión (*EI*) será constante en toda la longitud de la viga. Si se supone que éste es el caso, los resultados anteriores pueden reordenarse en el siguiente conjunto de tres ecuaciones:

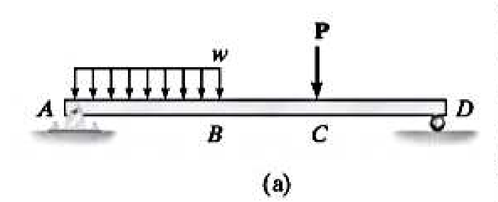
$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = w(x) \tag{12-8}$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \tag{12-9}$$

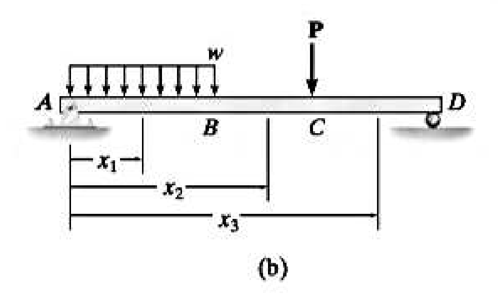
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \tag{12-10}$$

La solución de cualquiera de estas ecuaciones requiere integraciones sucesivas para obtener la deflexión v de la curva elástica. Para cada integración, es necesario introducir una "constante de integración" y luego despejar todas las constantes para obtener una solución única para un problema particular. Por ejemplo, si la carga distribuida w se expresa como una función de x y se usa la ecuación 12-8, entonces deben evaluarse cuatro constantes de integración; sin embargo, si se determina el momento interno M y se usa la ecuación 12-10, sólo deben encontrarse dos constantes de integración. La elección de la ecuación con la que se empezará depende del problema. Sin embargo, por lo general resulta más fácil determinar el momento interno M en función de x, integrar dos veces y evaluar sólo dos constantes de integración.

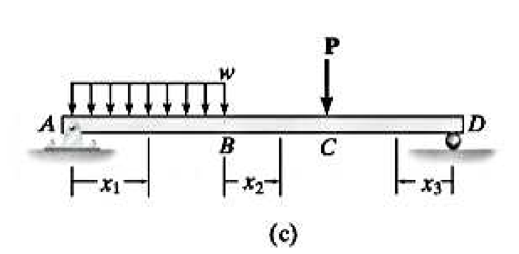
Recuerde de la sección 6.1 que si la carga sobre una viga es discontinua, es decir, que consiste en varias cargas diferentes concentradas y distribuidas, entonces deben escribirse varias funciones para el momento interno, cada una con validez dentro de la región entre las discontinuidades. Además, para mayor comodidad en la escritura de cada expresión de momento, *el origen* para cada coordenada x puede *seleccionarse de manera arbitraria.* Por ejemplo, considere la viga mostrada en la figura 12-7*a*. El momento interno en las regiones *AB*, *BC* y *CD* puede escribirse en términos de las coordenadas x_1, x_2 y x_3 seleccionadas, como se muestra en la figura 12-7*b* o la figura 12-7*c*, o de hecho en cualquier forma que produzca $M = f(x)$ de una manera tan simple como sea posible. Una vez que estas funciones se integran dos veces usando la ecuación 12-10 y las constantes de integración determinadas, las funciones proporcionarán la pendiente y la deflexión (curva elástica) para cada región de la viga en la que son válidas.



(a)



(b)



(c)

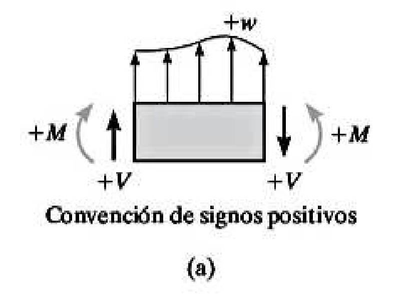
Figura 12-7

Convención de signos y coordenadas. Cuando se aplican las ecuaciones 12-8 a 12-10, es importante emplear los signos adecuados para M, V o w según lo establecido por la convención de signos que se usó en la obtención de estas ecuaciones. Para su revisión, en la figura 12-8*a* se muestran estos términos en sus *direcciones positivas*. Por otra parte, recuerde que la *deflexión positiva* v es *hacia arriba* y, como resultado, *el ángulo* θ *de la pendiente positiva* se medirá *en sentido antihorario* desde el eje x cuando x es *positivo hacia la derecha*. La razón de esto se muestra en la figura 12-8*b*. Aquí los incrementos positivos dx y dv en x y v crean un θ aumentado con un sentido antihorario. Sin embargo, si x *positivo* está dirigido a la *izquierda*, entonces v tendrá un *sentido horario positivo*, figura 12-8*c*.

Observe que si se supone que dv/dx es muy pequeña, la longitud original horizontal del eje de la viga y el arco de su curva elástica serán aproximadamente iguales. En otras palabras, ds en la figura 12-8*b* y 12-8*c* es aproximadamente igual a dx, puesto que $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dv)^2} = \sqrt{1 + (dv/dx)^2}\, dx \approx dx$. Como resultado de esto, se supone que los puntos sobre la curva elástica se *desplazan verticalmente* y no horizontalmente. Además, como al *ángulo* θ *de la pendiente* será *muy pequeño*, su valor en radianes puede determinarse *directamente* de $\theta \approx \tan\theta = dv/dx$.

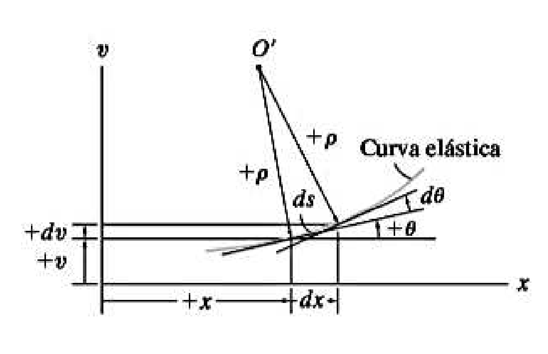


El diseño de un sistema de techado requiere considerar con cuidado la deflexión. Por ejemplo, en ciertas áreas del techo puede acumularse lluvia, lo que ocasiona un encharcamiento y después una deflexión. Luego ocurre un encharcamiento mayor y hasta una posible falla del techo.



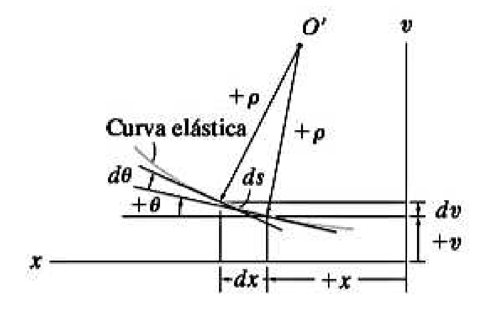
Convención de signos positivos

(a)



Convención de signos positivos

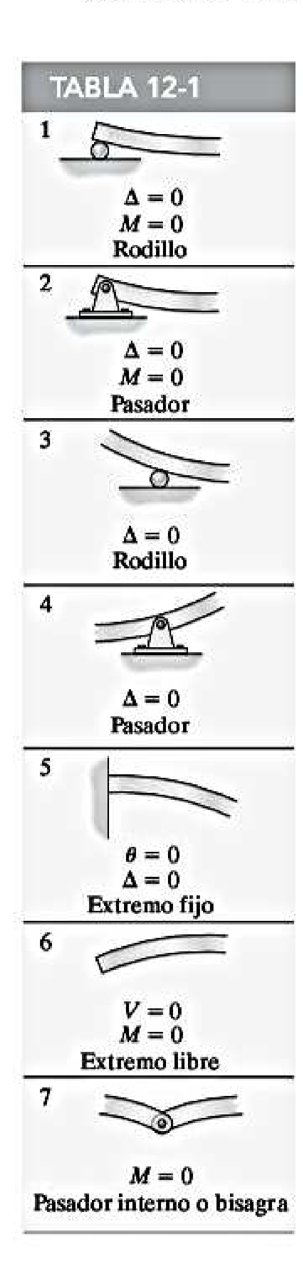
(b)



Convención de signos positivos

(c)

Figura 12-8



Condiciones de frontera y de continuidad. Cuando se resuelven las ecuaciones 12-8, 12-9 o 12-10, las constantes de integración se determinan mediante la evaluación de las funciones para la fuerza cortante, el momento, la pendiente o el desplazamiento en un punto determinado de la viga donde se conoce el valor de la función. Estos valores se denominan ***condiciones de frontera***. En la tabla 12-1 se presentan varias condiciones de frontera que suelen utilizarse para resolver problemas de deflexión en vigas (o ejes). Por ejemplo, si la viga se sostiene mediante un rodillo o pasador (1, 2, 3, 4), es necesario que el desplazamiento sea *cero* en estos puntos. Además, si estos apoyos se encuentran en los *extremos de la viga* (1, 2), el momento interno en la viga también debe ser cero. En el soporte fijo (5) la pendiente y el desplazamiento son ambos cero, mientras que la viga con un extremo libre (6) tiene tanto momento como fuerza cortante iguales a cero. Por último, si dos segmentos de una viga están conectados mediante un pasador "interno" o bisagra (7), el momento debe ser cero en esta conexión.

Si la curva elástica no puede expresarse con una sola coordenada, entonces se deben usar ***condiciones de continuidad*** para evaluar algunas de las constantes de integración. Por ejemplo, considere la viga de la figura 12-9a. Aquí se eligen dos coordenadas x con orígenes en A. Cada una es válida dentro de las regiones $0 \leq x_1 \leq a$ y $a \leq x_2 \leq (a + b)$. Una vez que se obtienen las funciones para la pendiente y la deflexión, se deben dar los *mismos valores* para la pendiente y la deflexión en el punto B para que físicamente la curva elástica sea *continua*. Expresado de manera matemática, esto requiere que $\theta_1(a) = \theta_2(a)$ y $v_1(a) = v_2(a)$. Estas condiciones pueden utilizarse para evaluar dos constantes de integración. Si en lugar de lo anterior la curva elástica se expresa en términos de las coordenadas $0 \leq x_1 \leq a$ y $0 \leq x_2 \leq b$, que se muestran en la figura 12-9b, entonces la continuidad de la pendiente y la deflexión en B requiere que $\theta_1(a) = -\theta_2(b)$ y $v_1(a) = v_2(b)$. En este caso particular, es necesario un signo *negativo* para que las pendientes en B coincidan puesto que x_1 se extiende positivo hacia la derecha, mientras que x_2 se extiende positivo a la izquierda. En consecuencia, θ_1 es positivo en sentido antihorario y θ_2 es positivo en sentido horario. Vea las figuras 12-8b y 12-8c.

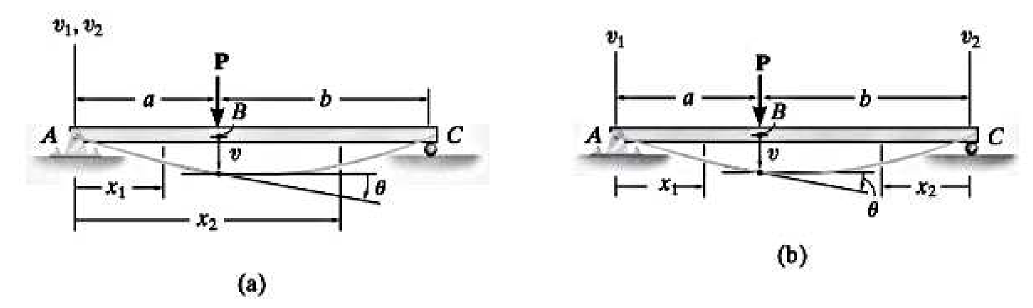


Figura 12-9

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método para determinar la pendiente y la deflexión de una viga (o eje) usando el método de integración.

Curva elástica.

- Dibuje una vista exagerada de la curva elástica de la viga. Recuerde que en todos los soportes fijos se produce pendiente cero y desplazamiento cero, y que en todos los soportes de pasador y de rodillo ocurre desplazamiento cero.
- Establezca los ejes de coordenadas x y v. El eje x debe ser paralelo a la viga sin deflexión y puede tener su origen en cualquier punto a lo largo de la viga, con una dirección positiva ya sea a la derecha o a la izquierda.
- Si existen varias cargas discontinuas presentes, establezca las coordenadas x que son válidas para cada región de la viga entre las discontinuidades. Elija estas coordenadas de modo que simplifiquen el trabajo algebraico posterior.
- En todos los casos, el eje positivo v asociado debe estar dirigido hacia arriba.

Función de carga o de momento.

- Para cada región en la que hay una coordenada x, exprese la carga w o el momento interno M como una función de x. En particular, *siempre* suponga que M actúa en la *dirección positiva* cuando se aplica la ecuación de equilibrio de momentos para determinar $M = f(x)$.

Pendiente y curva elástica.

- Siempre que EI sea constante, aplique la ecuación de carga $EI\, d^4v/dx^4 = w(x)$, que requiere cuatro integraciones para obtener $v = v(x)$, o la ecuación de momentos $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$, que requiere sólo dos integraciones. Para cada integración, es importante incluir una constante de integración.
- Las constantes se evalúan usando las condiciones de frontera para los soportes (tabla 12-1) y las condiciones de continuidad que se aplican a la pendiente y el desplazamiento en los puntos donde coinciden dos funciones. Una vez que las constantes se evalúan y se sustituyen de nuevo en las ecuaciones de pendiente y deflexión, es posible determinar la pendiente y el desplazamiento en *puntos específicos* de la curva elástica.
- Los valores numéricos obtenidos pueden verificarse de manera gráfica al compararlos con el dibujo de la curva elástica. Observe que los valores *positivos* para la *pendiente* tienen *sentido antihorario* si el eje *x positivo* se extiende a la *derecha*, y *sentido horario* si el eje *x positivo* se extiende hacia la *izquierda*. En cualquiera de estos casos, el *desplazamiento positivo* es *hacia arriba*.

EJEMPLO 12.1

La viga en voladizo de la figura 12.10*a* se somete a una carga vertical **P** en su extremo. Determine la ecuación de la curva elástica. *EI* es constante.

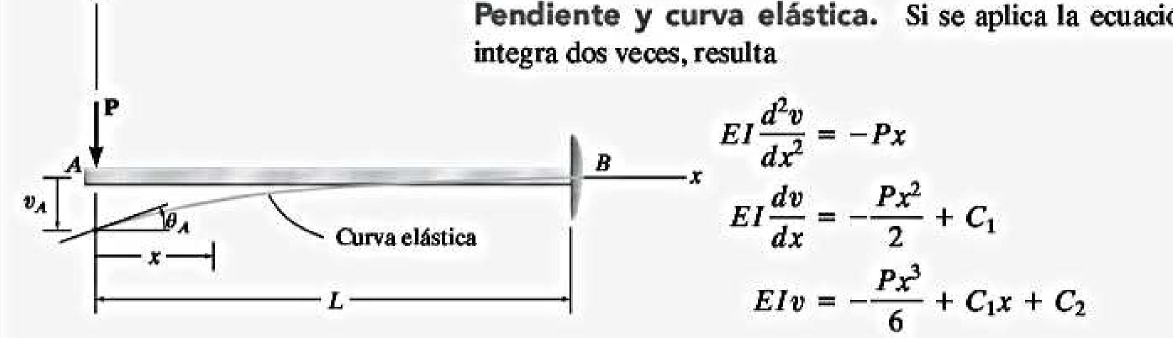
SOLUCIÓN I

Curva elástica. La carga tiende a provocar deflexión en la viga como se muestra en la figura 12-10*a*. Por inspección, el momento interno puede representarse a través de la viga usando una sola coordenada *x*.

Función de momento. A partir del diagrama de cuerpo libre, con **M** actuando en la *dirección positiva*, figura 12-10*b*, se tiene

$$M = -Px$$

Pendiente y curva elástica. Si se aplica la ecuación 12-10 y se integra dos veces, resulta



(a)

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px \tag{1}$$

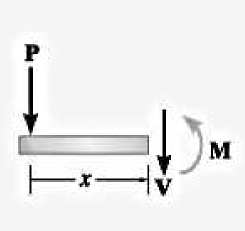
$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1 \tag{2}$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

Mediante el uso de las condiciones de frontera $dv/dx = 0$ en $x = L$ y $v = 0$ en $x = L$, las ecuaciones 2 y 3 se convierten en

$$0 = -\frac{PL^2}{2} + C_1$$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + C_1L + C_2$$



(b)

Figura 12-10

Por lo tanto, $C_1 = PL^2/2$ y $C_2 = -PL^3/3$. Si se sustituyen estos resultados en las ecuaciones 2 y 3 con $\theta = dv/dx$, se obtiene

$$\theta = \frac{P}{2EI}(L^2 - x^2)$$

$$v = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \qquad \textit{Resp.}$$

En $A(x = 0)$ se producen la pendiente y el desplazamiento máximos, para los cuales

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI} \tag{4}$$

$$v_A = -\frac{PL^3}{3EI} \tag{5}$$

El resultado *positivo* para θ_A indica una rotación *antihoraria* y el resultado *negativo* para v_A indica que v_A es dirigida *hacia abajo*. Esto concuerda con los resultados trazados en la figura 12-10*a*.

Con el fin de obtener una idea de la *magnitud* real de la pendiente y del desplazamiento en el extremo A, considere que la viga mostrada en la figura 12-10*a* tiene una longitud de 15 pies, soporta una carga de $P = 6$ kip y está hecha con acero A-36 que tiene $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi. Usando los métodos de la sección 11.2, si esta viga se diseñó sin un factor de seguridad suponiendo que el esfuerzo normal permisible es igual al esfuerzo de cedencia $\sigma_{perm} = 36$ ksi; entonces puede considerarse adecuado un perfil W12 × 26 ($I = 204$ pulg^4). A partir de las ecuaciones 4 y 5 se obtiene

$$\theta_A = \frac{6 \text{ kip}(15 \text{ pies})^2(12 \text{ pulg/pie})^2}{2[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](204 \text{ pulg}^4)} = 0.0164 \text{ rad}$$

$$v_A = -\frac{6 \text{ kip}(15 \text{ pies})^3(12 \text{ pulg/pie})^3}{3[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](204 \text{ pulg}^4)} = -1.97 \text{ pulg}$$

Como $\theta_A^2 = (dv/dx)^2 = 0.000270 \text{ rad}^2 \ll 1$, se justifica el uso de la ecuación 12-10, en lugar de aplicar la ecuación 12-4 que es más exacta, para el cálculo de la deflexión de las vigas. Además, puesto que esta aplicación numérica es para una *viga en voladizo*, se han obtenido *valores más grandes* de θ y v de los que se hubieran obtenido si la viga se sostuviera mediante pasadores, rodillos u otros soportes fijos.

SOLUCIÓN II

Este problema también puede resolverse mediante la ecuación 12-8, $EI\, d^4v/dx^4 = w(x)$. Aquí $w(x) = 0$ para $0 \leq x \leq L$, figura 12-10*a*, de manera que al integrarse una vez se obtiene la forma de la ecuación 12-9, es decir,

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = C_1' = V$$

La fuerza cortante constante C_1' puede evaluarse en $x = 0$, puesto que $V_A = -P$ (negativo de acuerdo con la convención de signos para una viga, figura 12-8*a*). Así, $C_1' = -P$. Al integrar de nuevo se obtiene la forma de la ecuación 12-10, es decir,

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -P$$

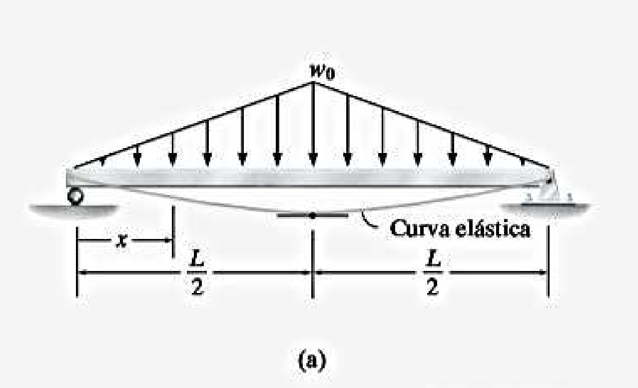
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px + C_2' = M$$

Aquí $M = 0$ en $x = 0$, por lo que $C_2' = 0$, y como resultado se obtiene la ecuación 1 y la solución procede de la misma forma que antes.

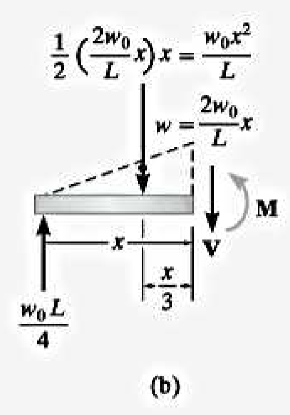
12

EJEMPLO 12.2

La viga simplemente apoyada que se muestra en la figura 12-11*a* soporta la carga triangular distribuida. Determine su deflexión máxima. *EI* es constante.



(a)



(b)

Figura 12-11

SOLUCIÓN I

Curva elástica. Debido a la simetría, sólo se necesita una coordenada x para obtener la solución, en este caso $0 \leq x \leq L/2$. La viga experimenta la deflexión mostrada en la figura 12-11*a*. La deflexión máxima se produce en el centro ya que en ese punto la pendiente es cero.

Función de momento. En la figura 12-11*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de la izquierda. La ecuación para la carga distribuida es

$$w = \frac{2w_0}{L}x \qquad (1)$$

Por lo tanto,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M + \frac{w_0x^2}{L}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{w_0L}{4}(x) = 0$$

$$M = -\frac{w_0x^3}{3L} + \frac{w_0L}{4}x$$

Pendiente y curva elástica. Si se usa la ecuación 12-10 y se integra dos veces, resulta

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0L}{4}x \qquad (2)$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 + C_1x + C_2$$

Las constantes de integración se obtienen al aplicar la condición de frontera $v = 0$ en $x = 0$ y la condición de simetría $dv/dx = 0$ en $x = L/2$. Esto conduce a

$$C_1 = -\frac{5w_0L^3}{192} \qquad C_2 = 0$$

Por lo tanto,

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{5w_0L^3}{192}$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{5w_0L^3}{192}x$$

Al determinar la deflexión máxima en $x = L/2$, se tiene

$$v_{máx} = -\frac{w_0L^4}{120EI} \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

Como la carga distribuida actúa hacia abajo, es negativa de acuerdo con la convención de signos. Si se usa la ecuación 1 y se aplica la ecuación 12-8, se tiene

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{2w_0}{L}x$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L}x^2 + C_1'$$

Como $V = +w_0L/4$ en $x = 0$, entonces $C_1' = w_0L/4$. Al integrar de nuevo resulta

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L}x^2 + \frac{w_0L}{4}$$

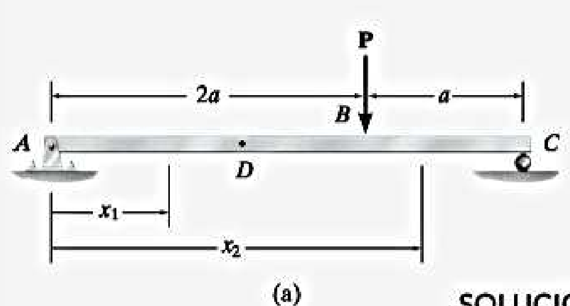
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0L}{4}x + C_2'$$

Aquí $M = 0$ en $x = 0$, por lo que $C_2' = 0$. De este modo se obtiene la ecuación 2 y la solución procede de la misma forma que antes.

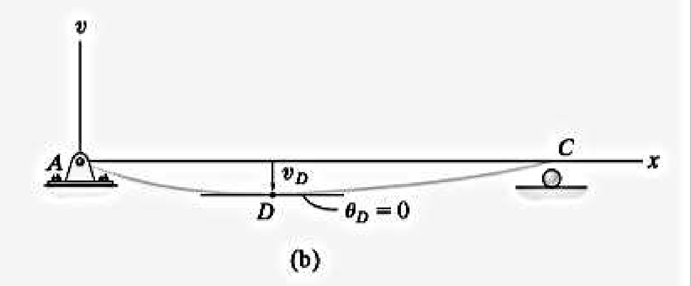
12

EJEMPLO 12.3

La viga simplemente apoyada que se muestra en la figura 12-12*a* está sometida a la fuerza concentrada **P**. Determine la deflexión máxima de la viga. *EI* es constante.



(a)

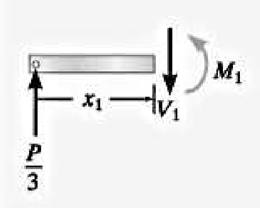


(b)

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga experimenta la deflexión mostrada en la figura 12-12*b*. Deben usarse dos coordenadas, puesto que la función de momentos cambiará en *P*. Aquí se tomará x_1 y x_2, con el *mismo origen* en *A*.

Función de momentos. A partir de los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 12-12*c*,



$$M_1 = \frac{P}{3}x_1$$

$$M_2 = \frac{P}{3}x_2 - P(x_2 - 2a) = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

Pendiente y curva elástica. Al aplicar la ecuación 12-10 para M_1, con $0 \leq x_1 < 2a$, y al integrar dos veces se obtiene

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = \frac{P}{3}x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6}x_1^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIv_1 = \frac{P}{18}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad (2)$$

(c)

Figura 12-12

De la misma manera, para M_2, con $2a < x_2 \leq 3a$,

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2P}{3}\left(3ax_2 - \frac{x_2^2}{2}\right) + C_3 \qquad (3)$$

$$EIv_2 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}ax_2^2 - \frac{x_2^3}{6}\right) + C_3x_2 + C_4 \qquad (4)$$

Los cuatro constantes se evalúan usando *dos* condiciones de frontera, a saber, $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ y $x_2 = 3a$, $v_2 = 0$. Además, deben aplicarse *dos* condiciones de continuidad en B, es decir, $dv_1/dx_1 = dv_2/dx_2$ en $x_1 = x_2 = 2a$ y $v_1 = v_2$ en $x_1 = x_2 = 2a$. La sustitución especificada resulta en las siguientes cuatro ecuaciones:

$$v_1 = 0 \text{ en } x_1 = 0; \qquad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ en } x_2 = 3a; \qquad 0 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}a(3a)^2 - \frac{(3a)^3}{6}\right) + C_3(3a) + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(2a)}{dx_2}; \qquad \frac{P}{6}(2a)^2 + C_1 = \frac{2P}{3}\left(3a(2a) - \frac{(2a)^2}{2}\right) + C_3$$

$$v_1(2a) = v_2(2a); \qquad \frac{P}{18}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{6}\right) + C_3(2a) + C_4$$

Al resolver, se obtiene

$$C_1 = -\frac{4}{9}Pa^2 \qquad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{22}{9}Pa^2 \qquad C_4 = \frac{4}{3}Pa^3$$

Así, las ecuaciones 1-4 se convierten en

$$\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6EI}x_1^2 - \frac{4Pa^2}{9EI} \qquad (5)$$

$$v_1 = \frac{P}{18EI}x_1^3 - \frac{4Pa^2}{9EI}x_1 \qquad (6)$$

$$\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2Pa}{EI}x_2 - \frac{P}{3EI}x_2^2 - \frac{22Pa^2}{9EI} \qquad (7)$$

$$v_2 = \frac{Pa}{EI}x_2^2 - \frac{P}{9EI}x_2^3 - \frac{22Pa^2}{9EI}x_2 + \frac{4Pa^3}{3EI} \qquad (8)$$

Por inspección de la curva elástica, figura 12-12*b*, la deflexión máxima ocurre en D, en algún lugar dentro de la región AB. Aquí la pendiente debe ser cero. De la ecuación 5,

$$\frac{1}{6}x_1^2 - \frac{4}{9}a^2 = 0$$

$$x_1 = 1.633a$$

Sustituyendo en la ecuación 6,

$$v_{máx} = -0.484\frac{Pa^3}{EI} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo.

EJEMPLO 12.4

La viga de la figura 12-13*a* está sometida a la carga **P** en su extremo. Determine el desplazamiento en *C*. *EI* es constante.

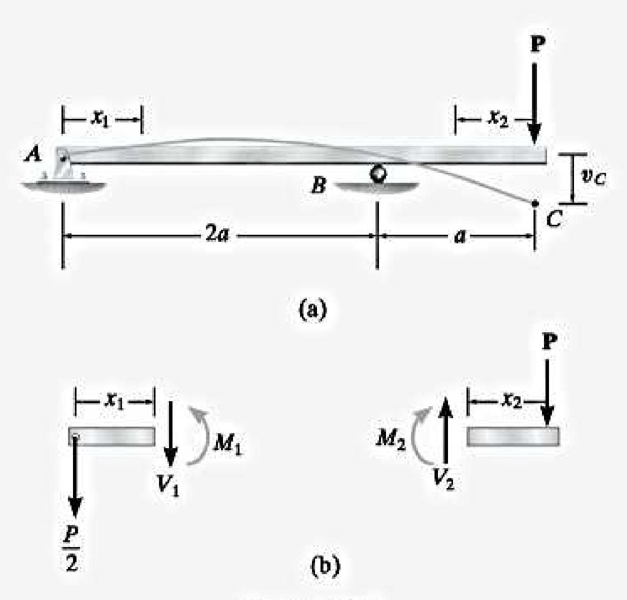


Figura 12-13

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga experimenta deflexión en la forma mostrada en la figura 12-13*a*. Debido a la carga, se considerarán dos coordenadas *x*, a saber, $0 \leq x_1 < 2a$ y $0 \leq x_2 < a$, donde x_2 está dirigida hacia la izquierda desde *C*, puesto que el momento interno es fácil de formular.

Funciones de momento. Mediante el uso de los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura 12-13*b*, se tiene

$$M_1 = -\frac{P}{2}x_1 \qquad M_2 = -Px_2$$

Pendiente y curva elástica. Al aplicar la ecuación 12-10,

Para $0 \leq x_1 \leq 2a$: $$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -\frac{P}{2}x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{P}{4}x_1^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIv_1 = -\frac{P}{12}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad (2)$$

Para $0 \leq x_2 \leq a$: $$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = -Px_2$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{P}{2}x_2^2 + C_3 \qquad (3)$$

$$EIv_2 = -\frac{P}{6}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \qquad (4)$$

Las *cuatro* constantes de integración se determinan mediante *tres* condiciones de frontera, a saber, $v_1 = 0$ en $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ en $x_1 = 2a$ y $v_2 = 0$ en $x_2 = a$, así como *una* ecuación de continuidad. Aquí la continuidad de la pendiente en el rodillo requiere que $dv_1/dx_1 = -dv_2/dx_2$ en $x_1 = 2a$ y $x_2 = a$. ¿Por qué hay un signo negativo en esta ecuación? (Observe que la continuidad del desplazamiento en B se ha considerado de manera indirecta en las condiciones de frontera, ya que $v_1 = v_2 = 0$ en $x_1 = 2a$ y $x_2 = a$.)
Al aplicar estas cuatro condiciones se obtiene

$$v_1 = 0 \text{ en } x_1 = 0; \qquad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_1 = 0 \text{ en } x_1 = 2a; \qquad 0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ en } x_2 = a; \qquad 0 = -\frac{P}{6}a^3 + C_3a + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = -\frac{dv_2(a)}{dx_2}; \qquad -\frac{P}{4}(2a)^2 + C_1 = -\left(-\frac{P}{2}(a)^2 + C_3\right)$$

Resolviendo, se obtiene

$$C_1 = \frac{Pa^2}{3} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{7}{6}Pa^2 \qquad C_4 = -Pa^3$$

Al sustituir C_3 y C_4 en la ecuación 4 se obtiene

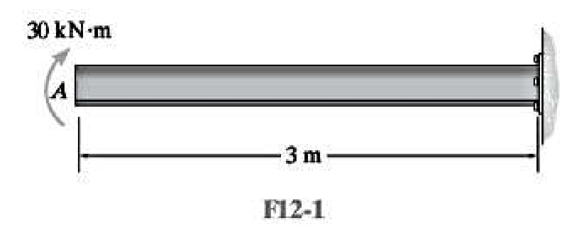
$$v_2 = -\frac{P}{6EI}x_2^3 + \frac{7Pa^2}{6EI}x_2 - \frac{Pa^3}{EI}$$

El desplazamiento en C se determina tomando $x_2 = 0$. Resulta

$$v_C = -\frac{Pa^3}{EI} \qquad \textit{Resp.}$$

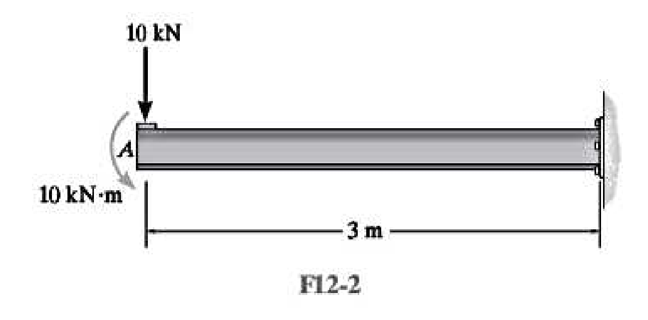
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-1. Determine la pendiente y la deflexión del extremo A de la viga en voladizo. $E = 200$ GPa e $I = 65.0(10^6)$ mm^4.



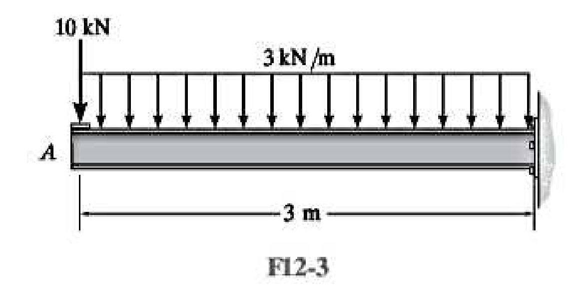
F12-1

F12-2. Determine la pendiente y la deflexión del extremo A de la viga en voladizo. $E = 200$ GPa e $I = 65.0(10^6)$ mm^4.

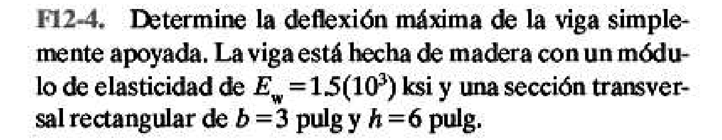


F12-2

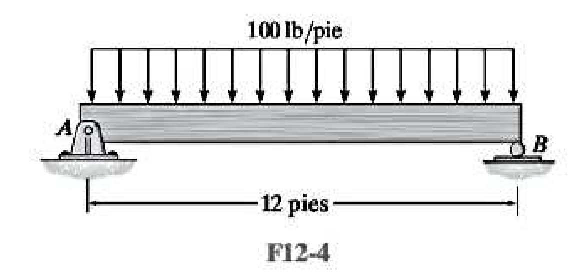
F12-3. Determine la pendiente del extremo A de la viga en voladizo. $E = 200$ GPa e $I = 65.0(10^6)$ mm^4.



F12-3

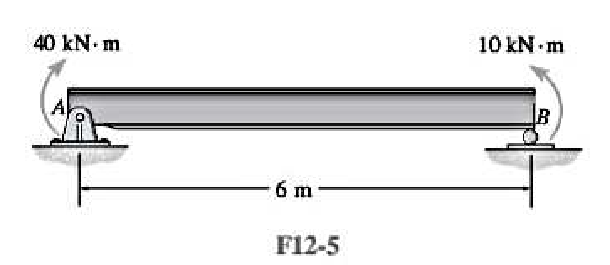


F12-4. Determine la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada. La viga está hecha de madera con un módulo de elasticidad de $E_w = 1.5(10^3)$ ksi y una sección transversal rectangular de $b = 3$ pulg y $h = 6$ pulg.



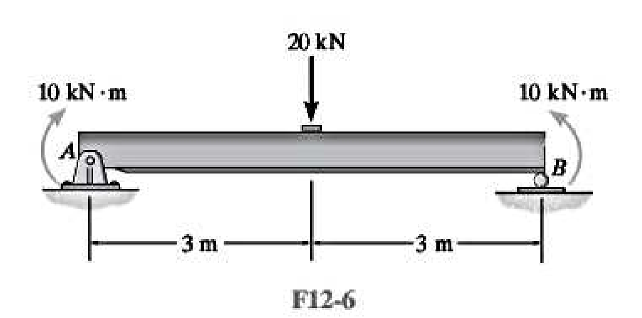
F12-4

F12-5. Determine la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada. $E = 200$ GPa e $I = 39.9(10^{-6})$ m^4.



F12-5

F12-6. Determine la pendiente en A de la viga simplemente apoyada, $E = 200$ GPa e $I = 39.9(10^{-6})$ m^4.

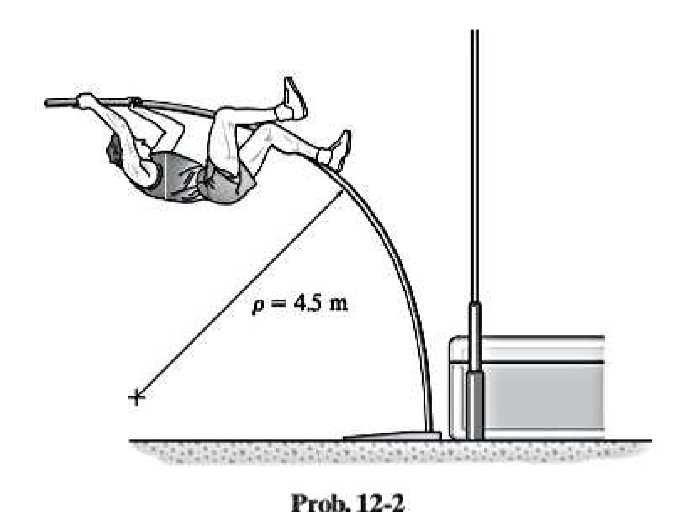


F12-6

PROBLEMAS

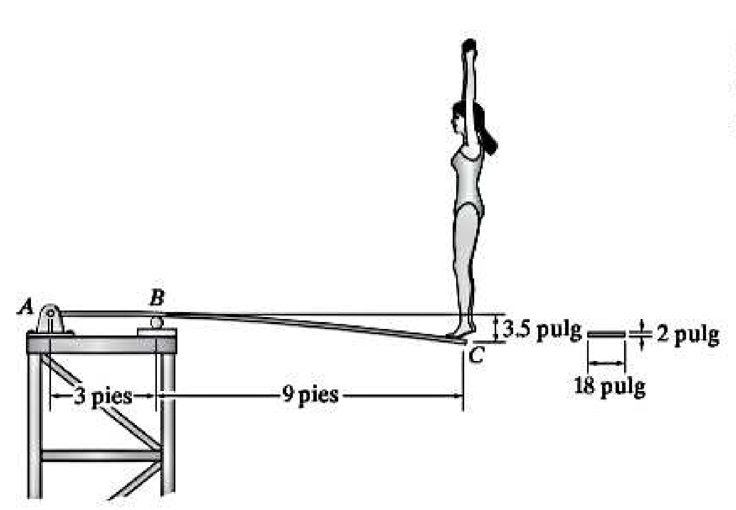
•**12-1.** Una solera de acero A-36, con un grosor de 10 mm y una anchura de 20 mm se dobla en forma de arco circular con radio $\rho = 10$ m. Determine el esfuerzo flexionante máximo de la solera.

12-2. Se toma una fotografía de un hombre que realiza un salto con pértiga y se estima que el radio mínimo de curvatura de la garrocha es de 4.5 m. Si la pértiga tiene 40 mm de diámetro y está fabricada de un plástico reforzado con vidrio para el cual $E_g = 131$ GPa, determine el esfuerzo flexionante máximo en la garrocha.



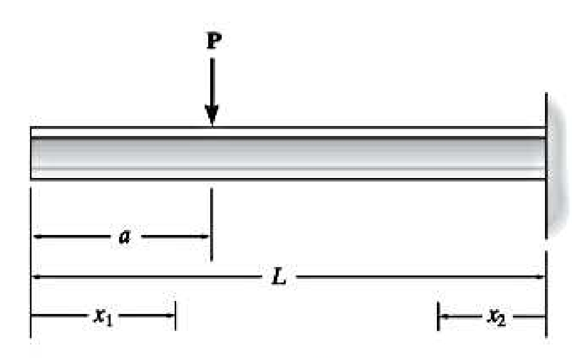
Prob. 12-2

12-3. Cuando la clavadista se coloca en el extremo C del trampolín, provoca una deflexión hacia abajo de 3.5 pulg. Determine el peso de la clavadista. El trampolín está fabricado de un material que tiene un módulo de elasticidad de $E = 1.5(10^3)$ ksi.



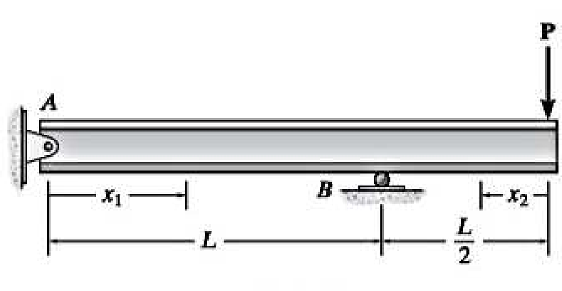
Prob. 12-3

*__12-4.__ Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2. EI es constante.



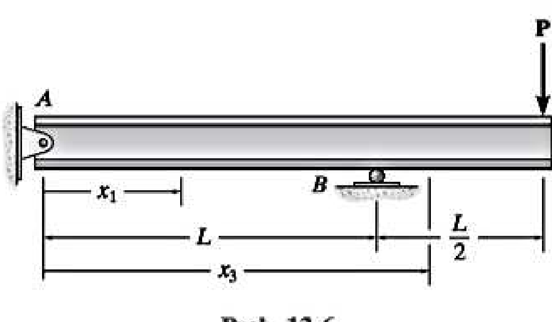
Prob. 12-4

•**12-5.** Determine las ecuaciones de la curva elástica para la viga usando las coordenadas x_1 y x_2. EI es constante.



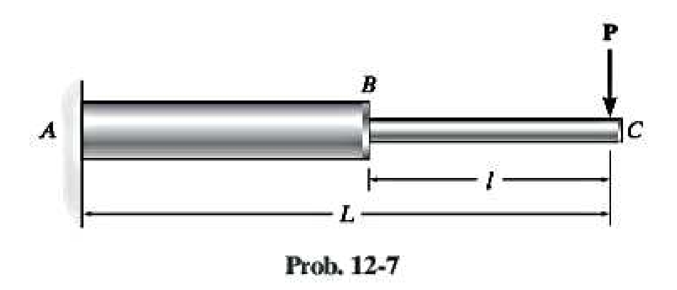
Prob. 12-5

12-6. Determine las ecuaciones de la curva elástica para la viga usando las coordenadas x_1 y x_2. Especifique la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



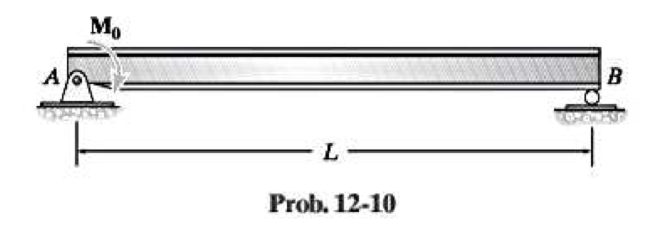
Prob. 12-6

12-7. La viga está fabricada con dos barras y se somete a la carga concentrada **P**. Determine la deflexión máxima de la viga si los momentos de inercia de las barras son I_{AB} e I_{BC}, y el módulo de elasticidad es E.



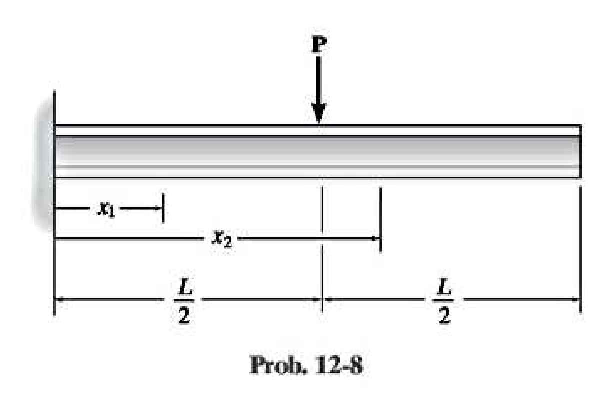
Prob. 12-7

12-10. Determine la pendiente máxima y la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada, la cual está sometida al momento de par $\mathbf{M}_0$. EI es constante.



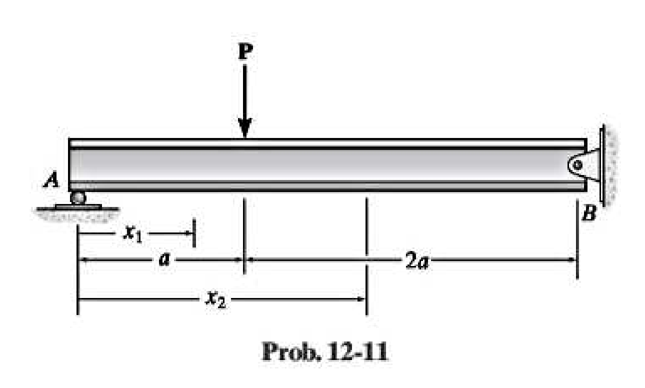
Prob. 12-10

***12-8.** Determine las ecuaciones de la curva elástica para la viga usando las coordenadas x_1 y x_2. EI es constante.



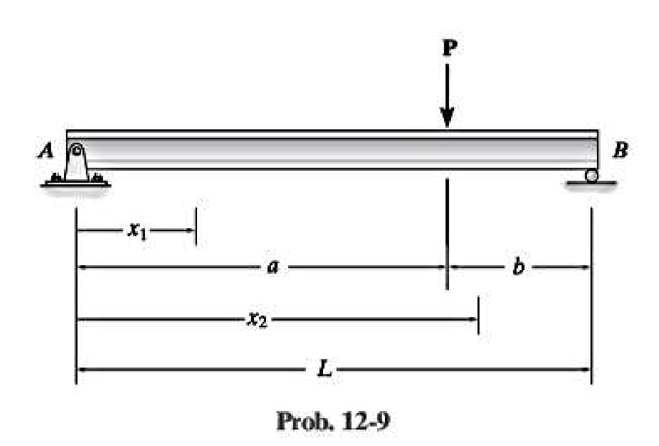
Prob. 12-8

12-11. Determine las ecuaciones de la curva elástica para la viga usando las coordenadas x_1 y x_2. Especifique la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



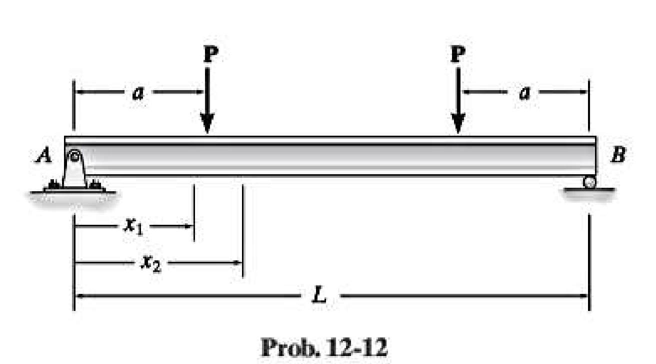
Prob. 12-11

•12-9. Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2. EI es constante.



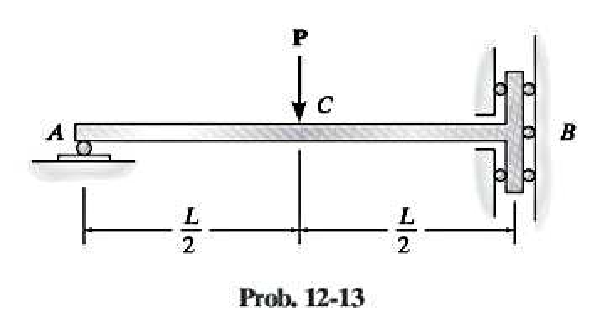
Prob. 12-9

***12-12.** Determine las ecuaciones de la curva elástica para la viga usando las coordenadas x_1 y x_2. Especifique la pendiente en A y el desplazamiento máximo de la viga. EI es constante.



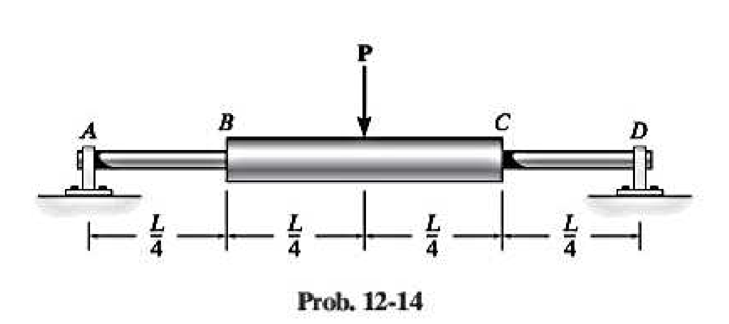
Prob. 12-12

12-13. La barra se sostiene mediante un apoyo de rodillos en B, el cual permite un desplazamiento vertical pero resiste la carga axial y el momento. Si la barra se somete a la carga mostrada, determine la pendiente en A y la deflexión en C. EI es constante.



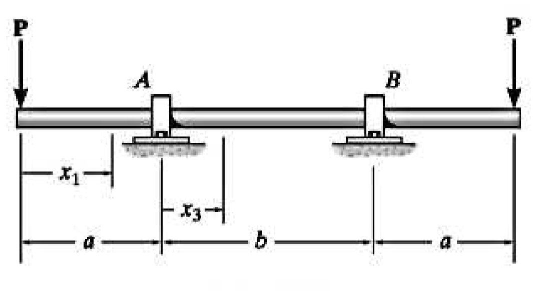
Prob. 12-13

12-14. El eje simplemente apoyado tiene un momento de inercia de $2I$ para la región BC y un momento de inercia I para las regiones AB y CD. Determine la deflexión máxima de la viga debido a la carga **P**.



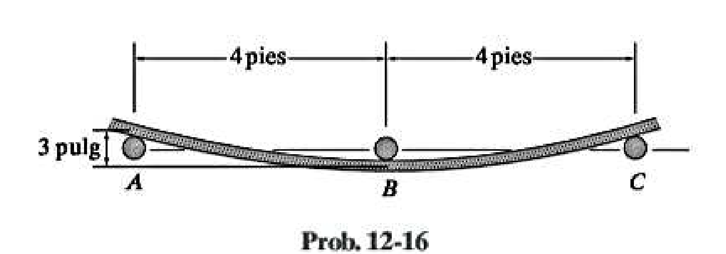
Prob. 12-14

12-15. Determine las ecuaciones de la curva elástica para el eje usando las coordenadas x_1 y x_3. Especifique la pendiente en A y la deflexión en el centro del eje. EI es constante.



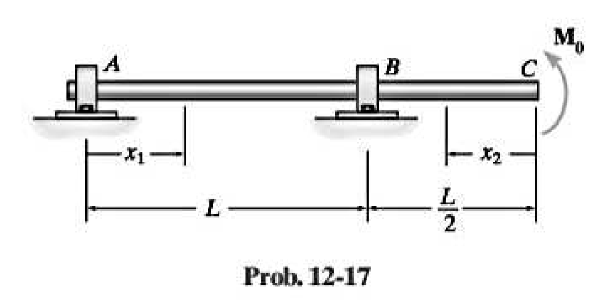
Prob. 12-15

***12-16.** La tabla para cerca se coloca entre los tres postes lisos fijos. Si los postes permanecen sobre la misma línea, determine el esfuerzo flexionante máximo en la tabla. Ésta tiene una anchura de 6 pulg y un grosor de 0.5 pulg. $E = 1.60 (10^3)$ ksi. Suponga que el desplazamiento de cada extremo de la tabla en relación con su centro es de 3 pulg.



Prob. 12-16

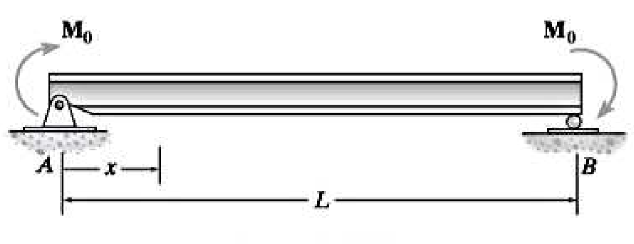
•12-17. Determine las ecuaciones de la curva elástica para el eje usando las coordenadas x_1 y x_2. Especifique la pendiente en A y la deflexión en C. EI es constante.



Prob. 12-17

12-18. Determine la ecuación de la curva elástica para la viga usando la coordenada x. Especifique la pendiente en A y la deflexión máxima. EI es constante.

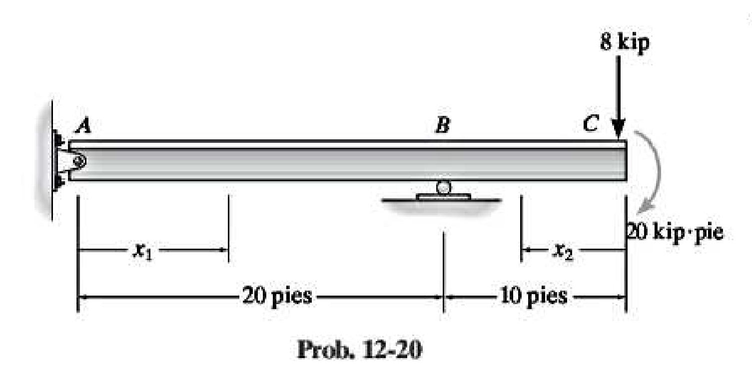
12-19. Determine la deflexión en el centro de la viga y la pendiente en B. EI es constante.



Probs. 12-18/19

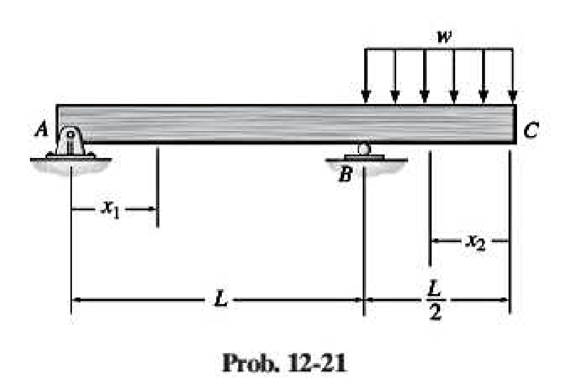
12

*12-20. Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2, y especifique la pendiente en A y la deflexión en C. EI es constante.



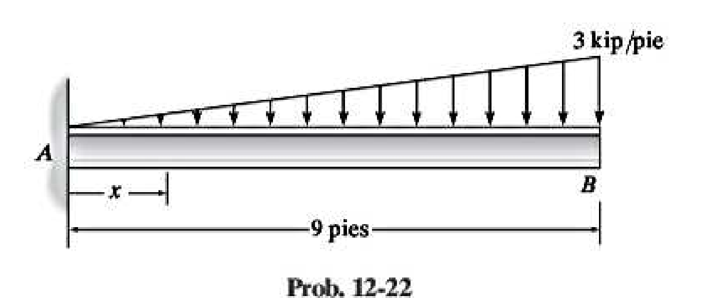
Prob. 12-20

•12-21. Determine la curva elástica en términos de las coordenadas x_1 y x_2, y la desviación del extremo C de la viga con voladizo. EI es constante.



Prob. 12-21

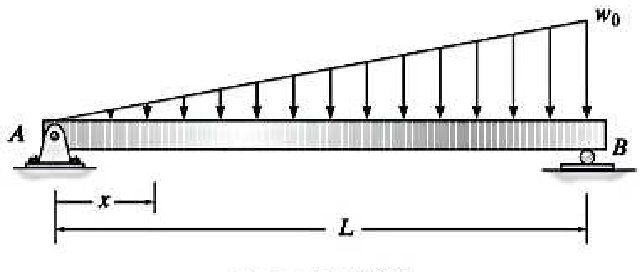
12-22. Determine la curva elástica para la viga en voladizo W14 × 30 usando la coordenada x. Especifique la pendiente máxima y la deflexión máxima. $E = 29(10^3)$ ksi.



Prob. 12-22

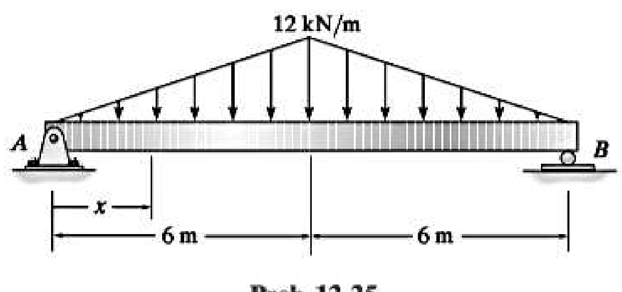
12-23. La viga está sometida a la carga distribuida variante linealmente. Determine la deflexión máxima de la viga. EI es constante.

*12-24. La viga está sometida a la carga distribuida variante linealmente. Determine la deflexión máxima de la viga. EI es constante.



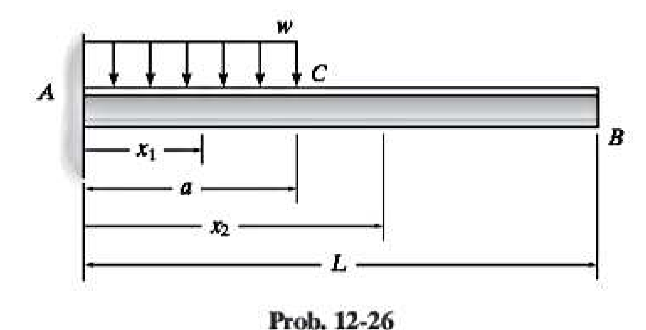
Probs. 12-23/24

•12-25. Determine la ecuación de la curva elástica para la viga simplemente apoyada usando la coordenada x. Determine la pendiente en A y la deflexión máxima. EI es constante.



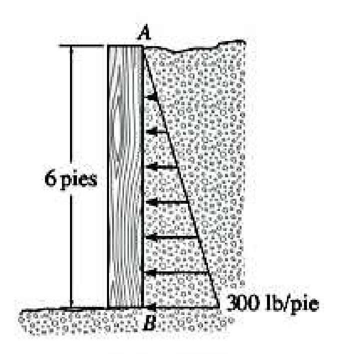
Prob. 12-25

12-26. Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2, y especifique la pendiente y la deflexión en B. EI es constante.



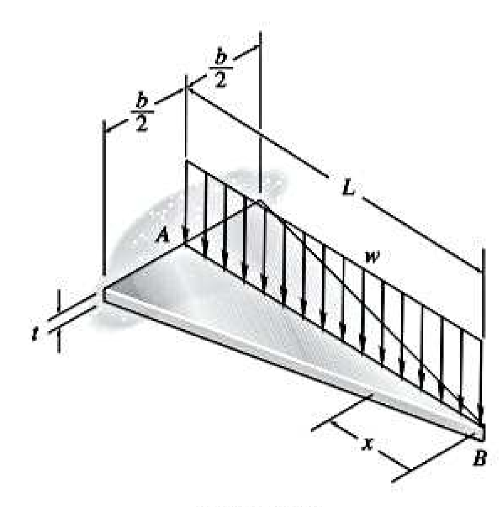
Prob. 12-26

12-27. Los postes de madera utilizados para retener un muro de contención tienen un diámetro de 3 pulg. Si la presión del suelo a lo largo de un poste varía uniformemente desde cero en la parte superior A hasta un máximo de 300 lb/pie en la parte inferior B, determine la pendiente y el desplazamiento de la parte superior del poste. $E_w = 1.6(10^3)$ ksi.



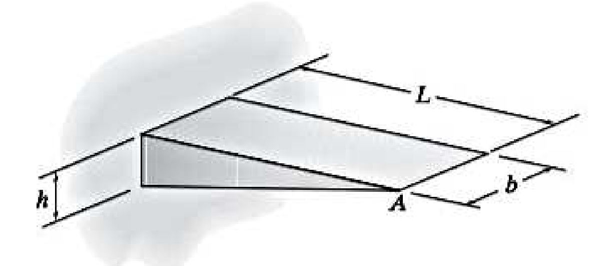
Prob. 12-27

***12-28.** Determine la pendiente en el extremo B y la deflexión máxima de la placa triangular en voladizo que tiene un grosor constante t. La placa está fabricada de un material con un módulo de elasticidad E.



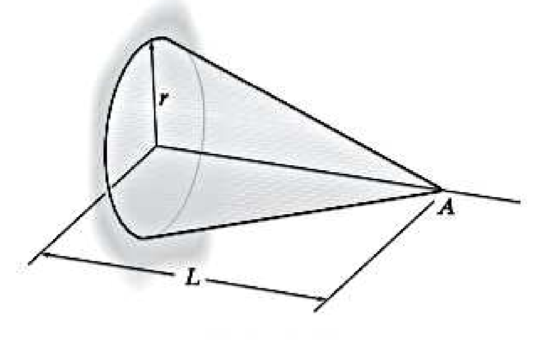
Prob. 12-28

•12-29. La viga está fabricada de un material que tiene un peso específico γ. Determine el desplazamiento y la pendiente en su extremo A debidos a su peso. El módulo de elasticidad del material es E.



Prob. 12-29

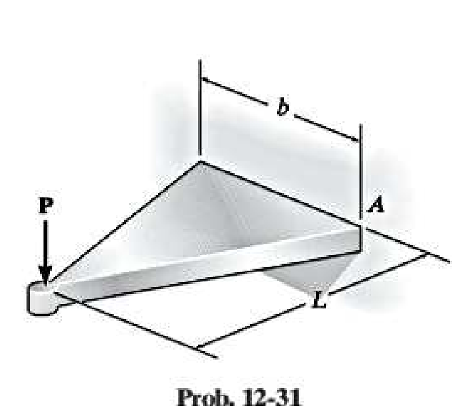
12-30. La viga está fabricada de un material que tiene un peso específico γ. Determine el desplazamiento y la pendiente en su extremo A debidos a su peso. El módulo de elasticidad del material es E.



Prob. 12-30

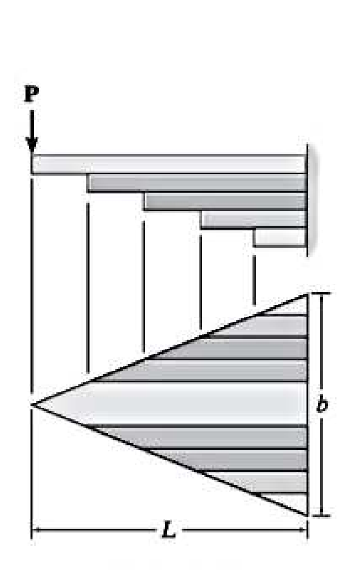
12

12-31. La viga ahusada tiene una sección transversal rectangular. Determine la deflexión de su extremo libre en términos de la carga P, la longitud L, el módulo de elasticidad E y el momento de inercia I_0 de su extremo fijo.



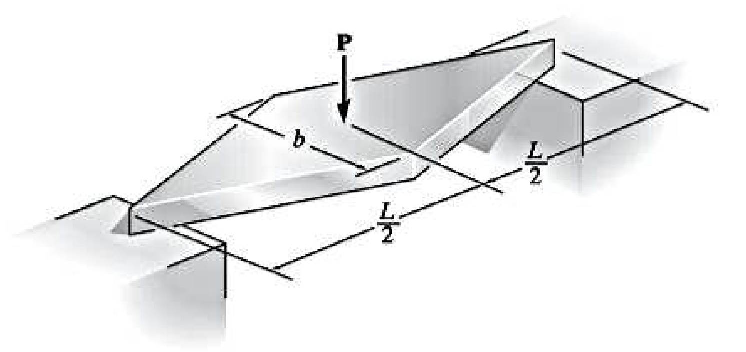

Prob. 12-31

***12-32.** La viga está fabricada de una placa que tiene un grosor t constante y una anchura que varía linealmente. La placa se corta en tiras para formar una serie de hojas que se apilan para hacer un resorte de hojas consistente en n hojas. Determine la deflexión en el extremo de la viga cuando está cargada. No tome en cuenta la fricción entre las hojas.



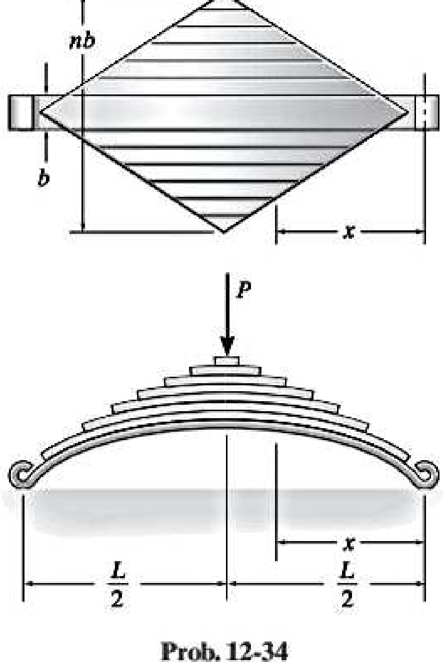
Prob. 12-32

•12-33. La viga ahusada tiene una sección transversal rectangular. Determine la deflexión de su centro en términos de la carga P, la longitud L, el módulo de elasticidad E y el momento de inercia I_c de su centro.



Prob. 12-33

12-34. El ensamble de resortes de hoja está diseñado para someterse al mismo esfuerzo máximo en toda su longitud. Si las placas de cada hoja tienen un grosor t y pueden deslizarse libremente entre sí, demuestre que el resorte debe tener la forma de un arco circular a fin de que pueda volverse plano cuando se aplique una carga **P** suficientemente grande. ¿Cuál es el esfuerzo normal máximo en el resorte? Considere que el resorte se hace al cortar las n tiras de una placa que tiene forma de diamante con un grosor t y una anchura b. El módulo de elasticidad del material es E. *Sugerencia*: Demuestre que el radio de curvatura del resorte es constante.



Prob. 12-34

*12.3 Funciones de discontinuidad

El uso del método de integración para encontrar la ecuación de la curva elástica de una viga o eje resulta conveniente si la carga o momento interno puede expresarse como una función continua a lo largo de toda la longitud de la viga. Sin embargo, si sobre la viga actúan varias cargas diferentes, la aplicación del método se hace más tediosa porque deben escribirse funciones de carga o de momento independientes para cada región de la viga. Además, la integración de estas funciones requiere la evaluación de las constantes de integración, utilizando tanto las condiciones de frontera como de continuidad. Por ejemplo, para la viga de la figura 12-14 es necesario escribir cuatro funciones de momento. En ellas se describe el momento en las regiones *AB*, *BC*, *CD* y *DE*. Al aplicar la relación de momento-curvatura, $EI\, d^2v/dx^2 = M$, e integrar dos veces cada ecuación de momentos, deben evaluarse ocho constantes de integración. Lo anterior implica dos condiciones de frontera que requieren desplazamiento cero en los puntos *A* y *E*, y seis condiciones de continuidad tanto para la pendiente como para el desplazamiento en los puntos *B*, *C* y *D*.



Por motivos de seguridad, estas vigas en voladizo que soportan hojas de madera contrachapada deben diseñarse tanto para la resistencia como para una cantidad restringida de deflexión.

En esta sección se analizará un método para encontrar la ecuación de la curva elástica de una *viga con múltiples cargas* usando *una sola expresión*, ya sea formulada a partir de la carga sobre la viga, $w = w(x)$, o del momento interno de la viga, $M = M(x)$. Si la expresión para w se sustituye en $EI\, d^4v/dx^4 = w(x)$ y se integra cuatro veces, o si la expresión para M se sustituye en $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$ y se integra dos veces, las constantes de integración se determinarán sólo a partir de las condiciones de frontera. Como las ecuaciones de continuidad no están involucradas, el análisis se simplifica en gran medida.

Funciones de discontinuidad. Con el fin de expresar la carga sobre la viga o el momento interno dentro de ésta usando una sola expresión, se emplearán dos tipos de operadores matemáticos conocidos como *funciones de discontinuidad*.

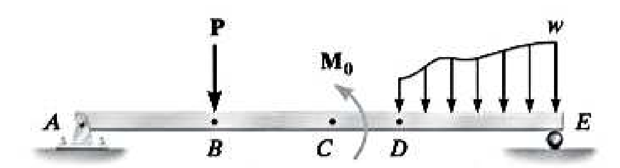


Figura 12-14

TABLA 12-2

Carga	Función de carga $w = w(x)$	Cortante $V = \int w(x)dx$	Momento $M = \int V dx$
(1) $\mathbf{M}_0$	$w = M_0\langle x-a\rangle^{-2}$	$V = M_0\langle x-a\rangle^{-1}$	$M = M_0\langle x-a\rangle^{0}$
(2) $\mathbf{P}$	$w = P\langle x-a\rangle^{-1}$	$V = P\langle x-a\rangle^{0}$	$M = P\langle x-a\rangle^{1}$
(3) w_0	$w = w_0\langle x-a\rangle^{0}$	$V = w_0\langle x-a\rangle^{1}$	$M = \frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^{2}$
(4) pendiente = m	$w = m\langle x-a\rangle^{1}$	$V = \frac{m}{2}\langle x-a\rangle^{2}$	$M = \frac{m}{6}\langle x-a\rangle^{3}$

Funciones de Macaulay. A fin de determinar la deflexión de una viga o un eje, pueden usarse las funciones de Macaulay, llamadas así en honor al matemático W. H. Macaulay, para describir las ***cargas distribuidas***. Estas funciones pueden expresarse en forma general como

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ (x-a)^n & \text{para } x \geq a \end{cases} \quad n \geq 0 \tag{12-11}$$

Aquí x representa la coordenada de posición de un punto a lo largo de la viga y a es la ubicación sobre la viga donde ocurre una "discontinuidad"; es decir, el punto donde *comienza* una carga distribuida. Observe que la función de Macaulay $\langle x-\mathrm{a}\rangle^n$ se escribe con paréntesis angulares para distinguirla de la función ordinaria $(x-a)^n$, escrita entre paréntesis. Según lo establecido por la ecuación, $\langle x-a\rangle^n = (x-a)^n$ sólo cuando $x \geq a$, de lo contrario su valor es cero. Por otra parte, estas funciones son válidas sólo para valores exponenciales de $n \geq 0$. La integración de las funciones de Macaulay sigue las mismas reglas que para las funciones habituales, es decir,

$$\int \langle x - a\rangle^n\,dx = \frac{\langle x - a\rangle^{n+1}}{n+1} + C \tag{12-12}$$

Observe que las funciones de Macaulay describen tanto la *carga uniforme* $w_0 (n = 0)$ como la *carga triangular* $(n = 1)$, que se muestran en la tabla 12-2 en las filas 3 y 4. Por supuesto, este tipo de descripción puede extenderse para cargas distribuidas que tienen otras formas. Además, es posible emplear la superposición de las cargas uniforme y triangular a fin de crear

la función de Macaulay para una carga trapezoidal. En la tabla también se muestra el uso de la integración en las funciones de Macaulay para el cortante, $V = \int w(x)\,dx$, y el momento, $M = \int V\,dx$.

Funciones de singularidad. Estas funciones sólo se utilizan para describir la ubicación de las fuerzas concentradas o momentos de par que actúan sobre una viga o eje. En específico, una fuerza concentrada **P** puede considerarse como un caso especial de una carga distribuida, donde la intensidad de la carga es $w = P/\epsilon$ de tal manera que su longitud sea ϵ, donde $\epsilon \rightarrow 0$, figura 12-15. El área bajo este diagrama de carga es equivalente a P, *positiva hacia arriba*, por lo que se usará la función de singularidad

$$w = P\langle x - a\rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq a \\ P & \text{para } x = a \end{cases} \tag{12-13}$$

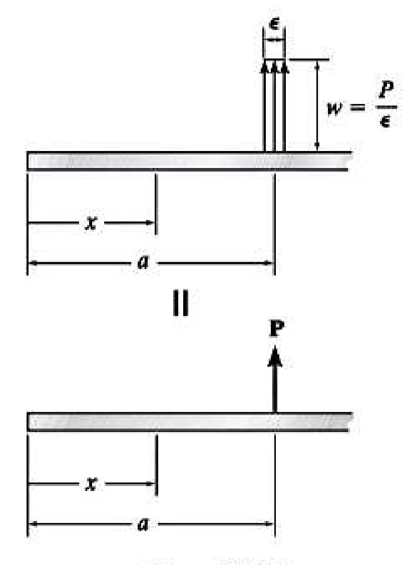


Figura 12-15

para describir la fuerza P. Aquí $n = -1$ de modo que las unidades de w son de fuerza por longitud, como debían ser. Además, la función toma el valor de **P** sólo en el punto $x = a$ donde se produce la carga, de lo contrario su valor es cero.

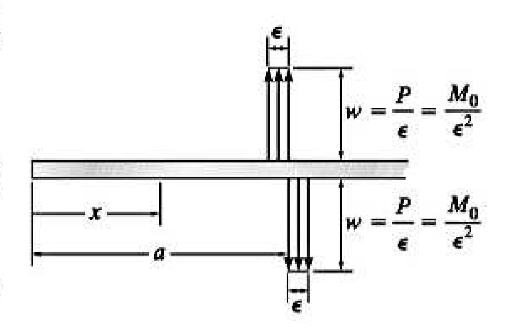
De manera similar, un momento de par $\mathbf{M}_0$, considerado *positivo en sentido horario*, es un límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de dos cargas distribuidas como las mostradas en la figura 12-16. Aquí, la siguiente función describe su valor.

$$w = M_0\langle x - a\rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq a \\ M_0 & \text{para } x = a \end{cases} \tag{12-14}$$

El exponente $n = -2$, tiene la finalidad de garantizar que se mantengan las unidades de w, fuerza por longitud.

La integración de las dos funciones de singularidad anteriores sigue las reglas del cálculo operacional y produce resultados *diferentes* a los obtenidos mediante las funciones de Macaulay. En específico,

$$\int \langle x - a\rangle^{n} dx = \langle x - a\rangle^{n+1}, n = -1, -2 \tag{12-15}$$



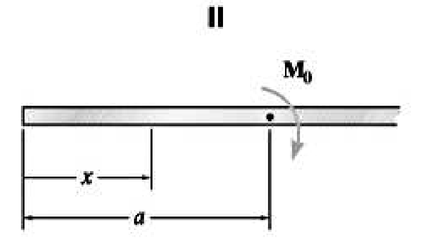


Figura 12-16

Usando esta fórmula, observe cómo M_0 y P, que se describen en la tabla 12-2 en las filas 1 y 2, se integran una vez y luego dos veces para obtener la fuerza cortante y el momento interno en la viga.

La aplicación de las ecuaciones 12-11 a 12-15 proporciona un medio más directo para expresar la carga o el momento interno en una viga como función de x. Al hacer esto, debe prestarse atención especial a los signos de las cargas externas. Como se indicó anteriormente, y como se muestra en la tabla 12-2, *las fuerzas concentradas y las cargas distribuidas son positivas hacia arriba, y los momentos de par son positivos en sentido horario.* Si se sigue esta convención de signos, entonces la fuerza cortante y el momento interno estarán en concordancia con la convención de signos para una viga establecida en la sección 6.1.

12

Como un ejemplo de la manera en que se aplican las funciones de discontinuidad para describir la carga o el momento interno, considere la viga cargada que se muestra en la figura 12-17*a*. Aquí la fuerza de reacción de 2.75 kN creada por el rodillo, figura 12-17*b*, es positiva ya que actúa hacia arriba, y el momento de par de 1.5 kN · m también es positivo puesto que actúa en sentido horario. Por último, la carga trapezoidal es negativa y se ha separado en cargas triangular y uniforme. Por lo tanto, en la tabla 12-2 la carga en cualquier punto x sobre la viga es

$$w = 2.75\text{ kN}\langle x - 0\rangle^{-1} + 1.5\text{ kN}\cdot\text{m}\langle x - 3\text{ m}\rangle^{-2} - 3\text{ kN/m}\langle x - 3\text{ m}\rangle^{0} - 1\text{ kN/m}^2\langle x - 3\text{ m}\rangle^{1}$$

La fuerza reactiva en B no se incluye aquí porque x nunca es superior a 6 m y, además, este valor no tiene ninguna consecuencia en el cálculo de la pendiente o la deflexión. Ahora es posible determinar la expresión del momento directamente de la tabla 12-2, en vez de integrar esta expresión en dos ocasiones. En cualquier caso,

$$\begin{aligned} M &= 2.75\text{ kN}\langle x - 0\rangle^{1} + 1.5\text{ kN}\cdot\text{m}\langle x - 3\text{ m}\rangle^{0} - \frac{3\text{ kN/m}}{2}\langle x - 3\text{ m}\rangle^{2} - \frac{1\text{ kN/m}^2}{6}\langle x - 3\text{ m}\rangle^{3} \\ &= 2.75x + 1.5\langle x - 3\rangle^{0} - 1.5\langle x - 3\rangle^{2} - \frac{1}{6}\langle x - 3\rangle^{3} \end{aligned}$$

La deflexión de la viga puede determinarse después de que esta ecuación se haya integrado dos veces sucesivas y las constantes de integración se hayan evaluado empleando las condiciones de frontera de desplazamiento cero en A y B.

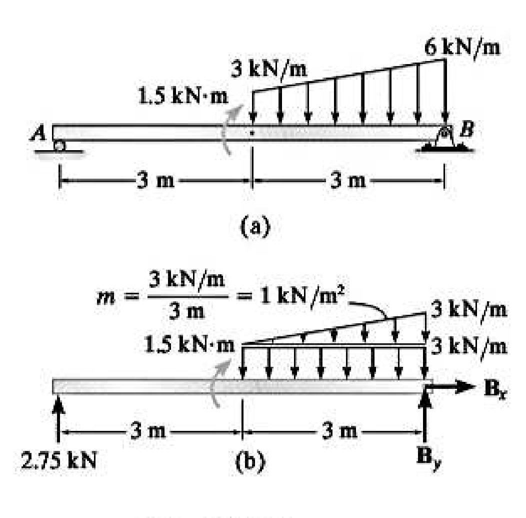


Figura 12-17

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método mediante el cual se emplean funciones de discontinuidad para determinar la curva elástica de la viga. Este método es particularmente ventajoso para resolver los problemas de las vigas o ejes sometidos a *varias cargas*, puesto que las constantes de integración pueden evaluarse usando *sólo* las condiciones de frontera, mientras que las condiciones de compatibilidad se satisfacen de manera automática.

Curva elástica.

- Dibuje la curva elástica de la viga y determine las condiciones de frontera en los soportes.
- En todos los soportes de pasador y rodillo ocurre desplazamiento cero mientras que en los soportes fijos se produce pendiente cero y desplazamiento cero.
- Establezca el eje x de modo que se extienda hacia la derecha y tenga su origen en el extremo izquierdo de la viga.

Función de carga o momento.

- Calcule las reacciones en los soportes en $x = 0$ y luego use las funciones de discontinuidad en la tabla 12-2 para expresar la carga w o bien el momento interno M como una función de x. Asegúrese de seguir la convención de signos para cada carga que se aplica en esta ecuación.
- Observe que para ser válidas las cargas distribuidas deben extenderse en toda la viga hasta su extremo derecho. Si esto no ocurre, use el método de superposición, que se ilustra en el ejemplo 12.6.

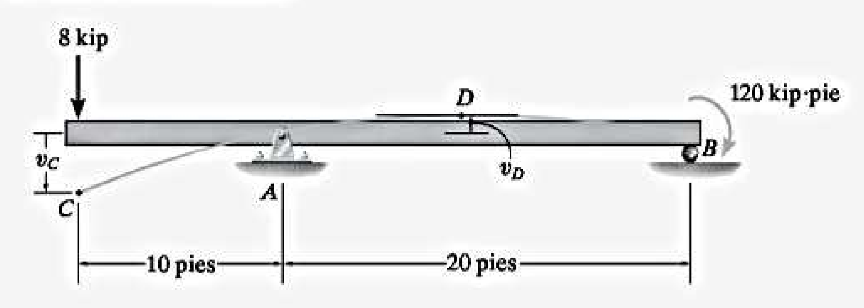
Pendiente y curva elástica.

- Sustituya w en $EI\, d^4v/dx^4 = w(x)$, o M en la relación de curvatura-momento $EI\, d^2v/dx^2 = M$, e integre para obtener las ecuaciones de la pendiente y la deflexión de la viga.
- Evalúe las constantes de integración usando las condiciones de frontera y sustituya estas constantes en las ecuaciones de la pendiente y la deflexión para obtener los resultados finales.
- Cuando las ecuaciones de la pendiente y la deflexión se evalúan en cualquier punto de la viga, una *pendiente positiva* tiene un *sentido antihorario* y un *desplazamiento positivo* es *hacia arriba*.

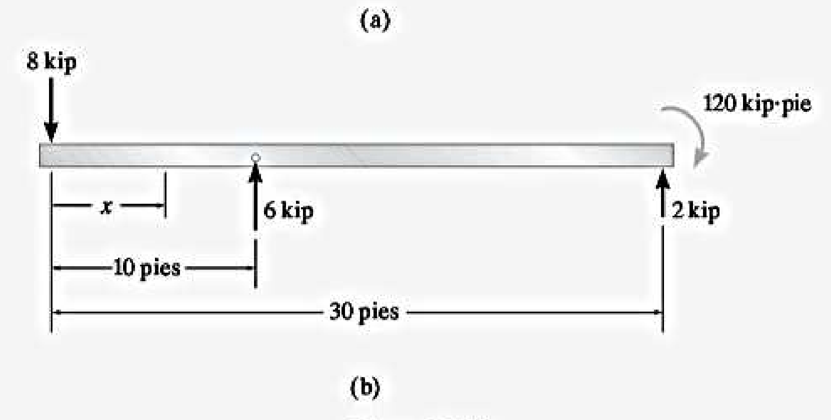
12

EJEMPLO 12.5

Determine la deflexión máxima de la viga que se muestra en la figura 12-18*a*. EI es constante.



(a)



(b)

Figura 12-18

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga experimenta deflexión como se muestra en la figura 12-18*a*. Las condiciones de frontera requieren desplazamiento cero en A y B.

Función de carga. Se han calculado las reacciones que se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 12-18*b*. La función de carga para la viga puede escribirse como

$$w = -8 \text{ kip } \langle x - 0 \rangle^{-1} + 6 \text{ kip } \langle x - 10 \text{ pies} \rangle^{-1}$$

El momento de par y la fuerza en B no se incluyen aquí porque están situados en el extremo derecho de la viga y x no puede ser mayor a 30 pies. Al integrar $dV/dx = w(x)$, se obtiene

$$V = -8\langle x - 0 \rangle^{0} + 6\langle x - 10 \rangle^{0}$$

De manera similar, de $dM/dx = V$ resulta

$$M = -8\langle x - 0 \rangle^{1} + 6\langle x - 10 \rangle^{1}$$
$$= (-8x + 6\langle x - 10 \rangle^{1}) \text{ kip} \cdot \text{pie}$$

Observe cómo esta ecuación también puede establecerse *directamente* usando los resultados de la tabla 12-2 para el momento.

Pendiente y curva elástica. Al integrar dos veces se obtiene

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -8x + 6\langle x - 10\rangle^1$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -4x^2 + 3\langle x - 10\rangle^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{4}{3}x^3 + \langle x - 10\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad (1)$$

A partir de la ecuación 1, la condición de frontera $v = 0$ en $x = 10$ pies y $v = 0$ en $x = 30$ pies da

$$0 = -1333 + (10 - 10)^3 + C_1(10) + C_2$$

$$0 = -36\,000 + (30 - 10)^3 + C_1(30) + C_2$$

Si se resuelven estas ecuaciones de manera simultánea para C_1 y C_2, se obtiene $C_1 = 1333$ y $C_2 = -12000$. Así,

$$EI\frac{dv}{dx} = -4x^2 + 3\langle x - 10\rangle^2 + 1333 \qquad (2)$$

$$EIv = -\frac{4}{3}x^3 + \langle x - 10\rangle^3 + 1333x - 12\,000 \qquad (3)$$

De la figura 12-18*a*, el desplazamiento máximo puede ocurrir en C o en D, donde la pendiente $dv/dx = 0$. Para obtener el desplazamiento de C, establezca $x = 0$ en la ecuación 3. Resulta

$$v_C = -\frac{12\,000 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo *negativo* indica que el desplazamiento es *hacia abajo* como se muestra en la figura 12-18*a*. Para localizar el punto D, use la ecuación 2 con $x > 10$ pies y $dv/dx = 0$. Se obtiene

$$0 = -4x_D^2 + 3(x_D - 10)^2 + 1333$$

$$x_D^2 + 60x_D - 1633 = 0$$

Si se despeja la raíz positiva,

$$x_D = 20.3 \text{ pies}$$

Por lo tanto, de la ecuación 3,

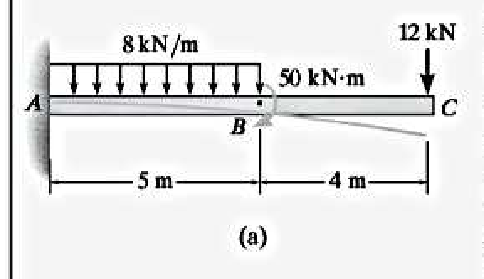
$$EIv_D = -\frac{4}{3}(20.3)^3 + (20.3 - 10)^3 + 1333(20.3) - 12\,000$$

$$v_D = \frac{5006 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI}$$

Al comparar este valor con v_C, se observa que $v_{máx} = v_C$.

12

EJEMPLO 12.6



Determine la ecuación de la curva elástica para la viga en voladizo que se muestra en la figura 12-19*a*. *EI* es constante.

SOLUCIÓN

Curva elástica. Las cargas hacen que la viga presente deflexión como se muestra en la figura 12-19*a*. Las condiciones de frontera requieren que la pendiente y el desplazamiento sean iguales a cero en *A*.

Función de carga. Se han calculado las reacciones en el soporte *A*, las cuales se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 12-19*b*. Dado que la carga distribuida en la figura 12-19*b* no se extiende hasta *C* como se requiere, se puede usar la superposición de cargas mostrada en la figura 12-19*b* para representar el mismo efecto. Por lo tanto, considerando la convención de signos, la carga de la viga es

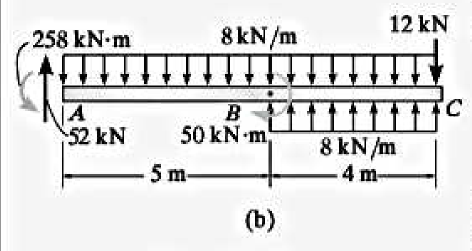


Figura 12-19

$$w = 52\text{ kN}\langle x-0\rangle^{-1} - 258\text{ kN}\cdot\text{m}\langle x-0\rangle^{-2} - 8\text{ kN/m}\langle x-0\rangle^{0}$$
$$+ 50\text{ kN}\cdot\text{m}\langle x-5\text{ m}\rangle^{-2} + 8\text{ kN/m}\langle x-5\text{ m}\rangle^{0}$$

La carga de 12 kN *no se incluye* aquí, puesto que x no puede ser superior a 9 m. Como $dV/dx = w(x)$ por integración, y sin tomar en cuenta la constante de integración porque las reacciones se incluyen en la función de carga, se tiene

$$V = 52\langle x-0\rangle^{0} - 258\langle x-0\rangle^{-1} - 8\langle x-0\rangle^{1} + 50\langle x-5\rangle^{-1} + 8\langle x-5\rangle^{1}$$

Además, $dM/dx = V$, por lo que al integrar de nuevo se obtiene

$$M = -258\langle x-0\rangle^{0} + 52\langle x-0\rangle^{1} - \frac{1}{2}(8)\langle x-0\rangle^{2} + 50\langle x-5\rangle^{0} + \frac{1}{2}(8)\langle x-5\rangle^{2}$$
$$= (-258 + 52x - 4x^2 + 50\langle x-5\rangle^{0} + 4\langle x-5\rangle^{2})\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Este mismo resultado puede obtenerse *directamente* de la tabla 12-2.

Pendiente y curva elástica. Si se aplica la ecuación 12-10 y se integra dos veces, resulta

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -258 + 52x - 4x^2 + 50\langle x-5\rangle^{0} + 4\langle x-5\rangle^{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -258x + 26x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 50\langle x-5\rangle^{1} + \frac{4}{3}\langle x-5\rangle^{3} + C_1$$

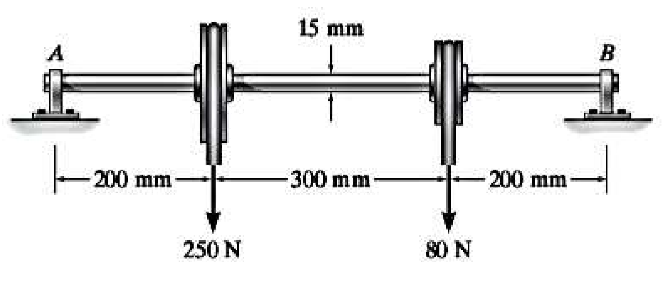
$$EIv = -129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + 25\langle x-5\rangle^{2} + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^{4} + C_1x + C_2$$

Como $dv/dx = 0$ en $x = 0$, $C_1 = 0$; y $v = 0$ en $x = 0$, de manera que $C_2 = 0$. Por lo tanto,

$$v = \frac{1}{EI}\left(-129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + 25\langle x-5\rangle^{2} + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^{4}\right)\text{ m} \quad \textit{Resp.}$$

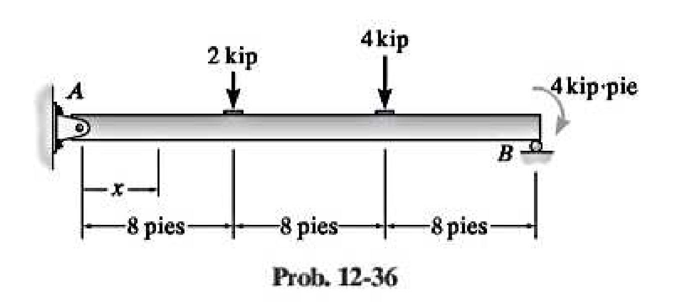
PROBLEMAS

12-35. El eje está fabricado de acero y tiene un diámetro de 15 mm. Determine su deflexión máxima. Los cojinetes en *A* y *B* ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje. E_{ac} =200 GPa.



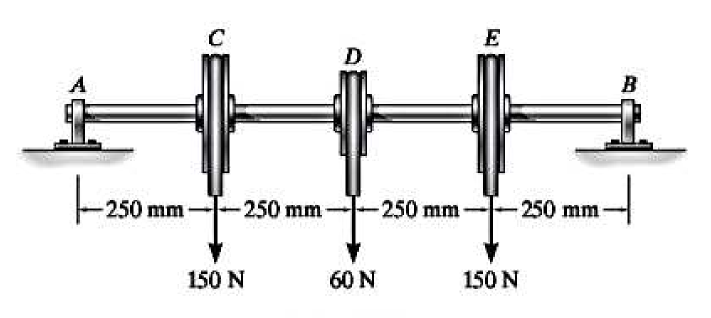
Prob. 12-35

***12-36.** La viga está sometida a las cargas mostradas. Determine la ecuación de la curva elástica. *EI* es constante.



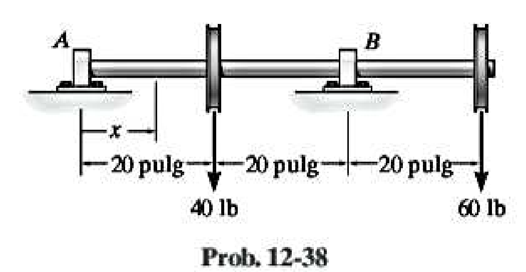
Prob. 12-36

•**12-37.** Determine la deflexión en cada una de las poleas *C*, *D* y *E*. El eje es de acero y tiene un diámetro de 30 mm. Los cojinetes en *A* y *B* ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje. E_{ac} =200 GPa.



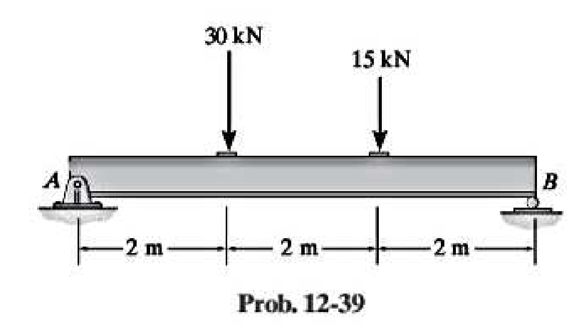
Prob. 12-37

12-38. El eje soporta las dos cargas de las poleas que se muestran en la figura. Determine la ecuación de la curva elástica. Los cojinetes en *A* y *B* ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje. *EI* es constante.



Prob. 12-38

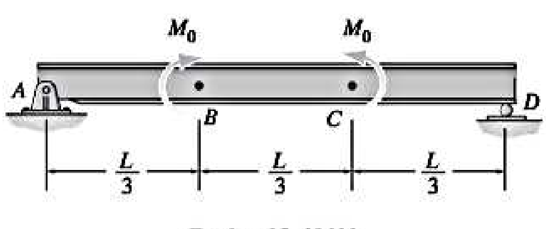
12-39. Determine la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada. $E = 200$ GPa e $I = 65.0(10^6)$ mm^4.



Prob. 12-39

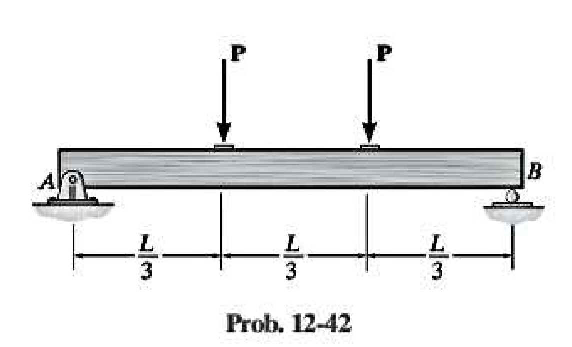
***12-40.** Determine la ecuación de la curva elástica, la pendiente en *A* y la deflexión en *B* de la viga simplemente apoyada. *EI* es constante.

•**12-41.** Determine la ecuación de la curva elástica y la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada. *EI* es constante.



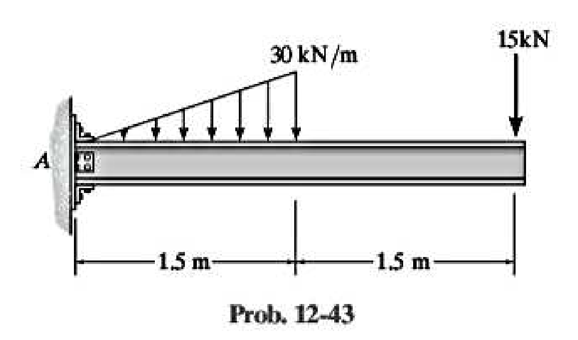
Probs. 12-40/41

12-42. Determine la ecuación de la curva elástica, la pendiente en A y la deformación máxima de la viga simplemente apoyada. EI es constante.



Prob. 12-42

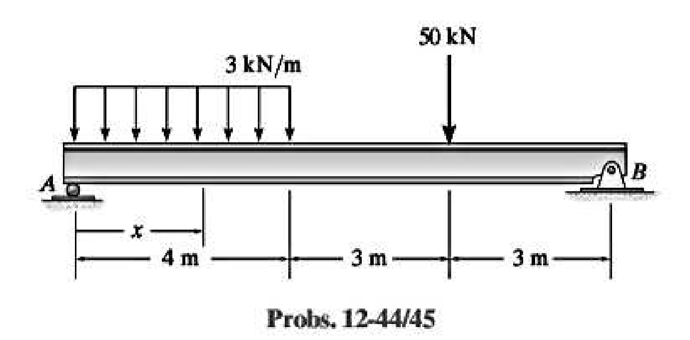
12-43. Determine la deflexión máxima de la viga en voladizo. La viga es de un material que tiene $E = 200$ GPa e $I = 65.0(10^6)$ mm^6.



Prob. 12-43

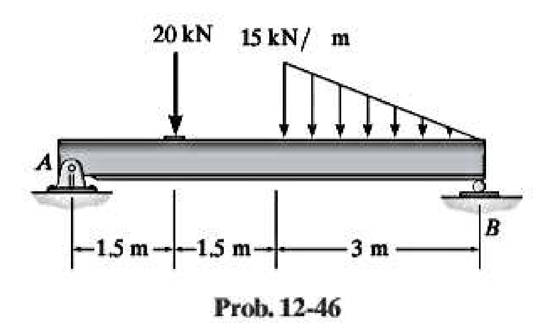
***12-44.** La viga está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine la ecuación de la curva elástica. EI es constante.

•**12-45.** La viga está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine el desplazamiento en $x = 7$ m y la pendiente en A. EI es constante.



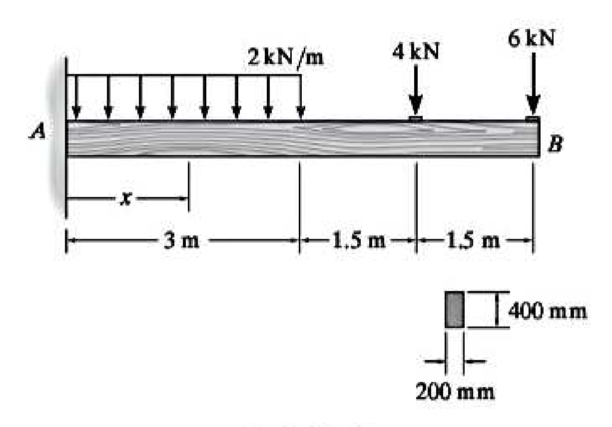
Probs. 12-44/45

12-46. Determine la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada. $E = 200$ GPa e $I = 65.0(10^6)$ mm^4.



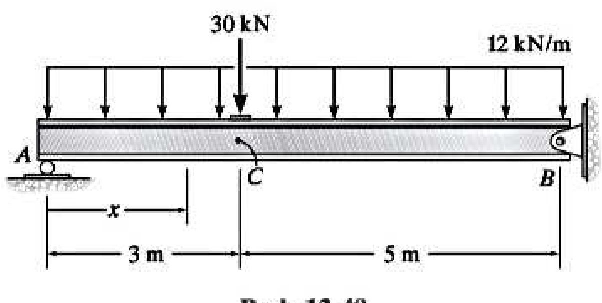
Prob. 12-46

12-47. La viga de madera está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine la ecuación de la curva elástica. Si $E_w = 12$ GPa, determine la deflexión y la pendiente en el extremo B.



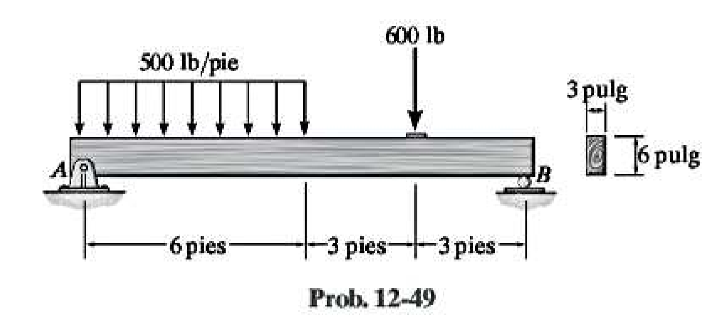
Prob. 12-47

***12-48.** La viga está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine las pendientes en A y B y el desplazamiento en C. EI es constante.



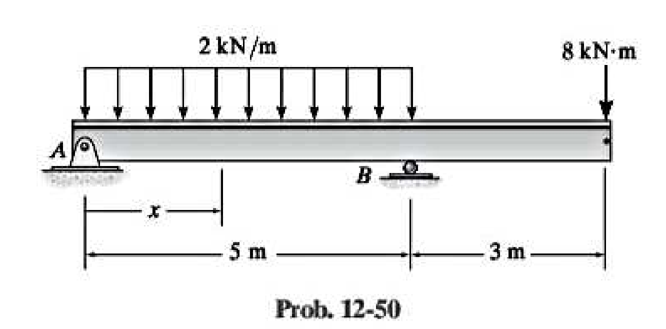
Prob. 12-48

•**12-49.** Determine la ecuación de la curva elástica de la viga simplemente apoyada y después encuentre la deflexión máxima. La viga es de madera con una módulo de elasticidad $E = 1.5(10^3)$ ksi.



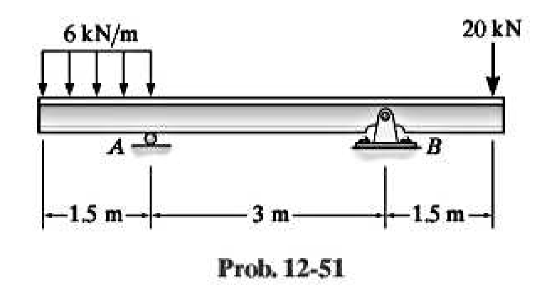
Prob. 12-49

12-50. La viga está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine las ecuaciones de la pendiente y la curva elástica. *EI* es constante.



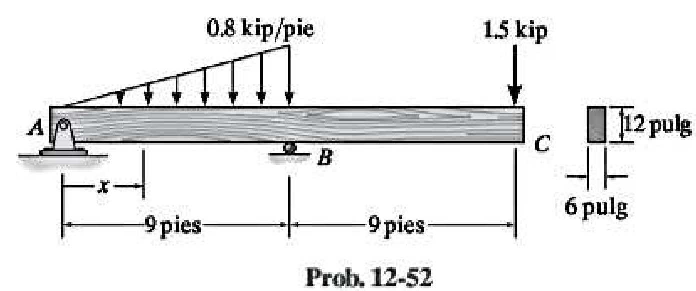
Prob. 12-50

12-51. La viga está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine la ecuación de la curva elástica. *EI* es constante.



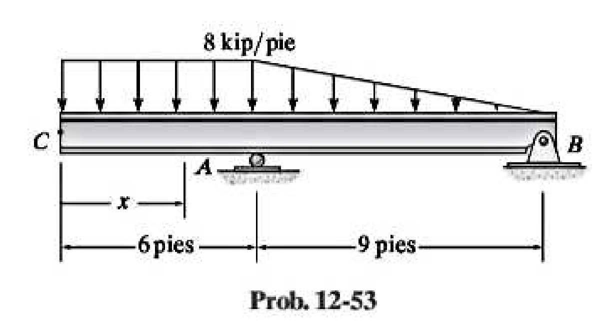
Prob. 12-51

***12-52.** La viga de madera está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine la ecuación de la curva elástica. Especifique la deflexión en el extremo *C*. $E_w = 1.6(10^3)$ ksi.



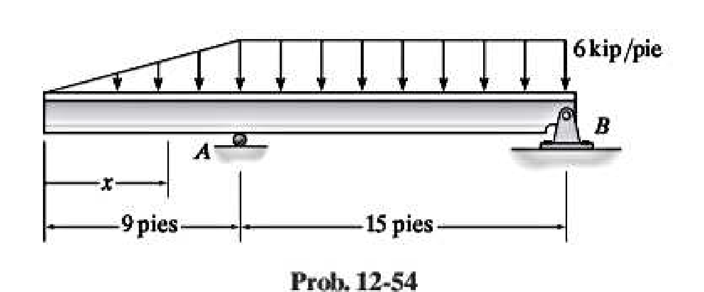
Prob. 12-52

12-53. Para la viga mostrada en la figura, determine el desplazamiento en *C* y la pendiente en *A*.



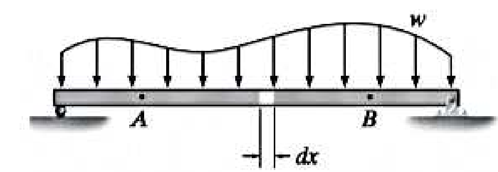
Prob. 12-53

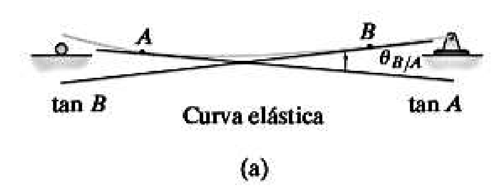
12-54. La viga está sometida a la carga que se muestra en la figura. Determine la ecuación de la curva elástica. *EI* es constante.



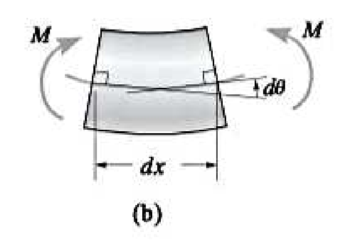
Prob. 12-54

*12.4 Pendiente y desplazamiento por el método del momento de área

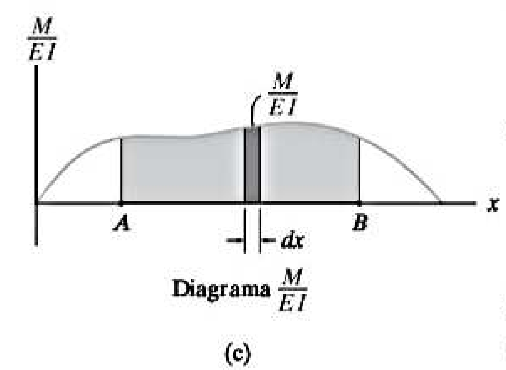




(a)



(b)



(c)

Figura 12-20

El método del momento de área proporciona una técnica semigráfica para encontrar la pendiente y el desplazamiento en puntos específicos sobre la curva elástica de una viga o eje. La aplicación del método requiere el cálculo de áreas asociadas con el diagrama de momentos de la viga; entonces, si este diagrama se compone de formas simples, el uso del método es muy conveniente. Por lo general, esto es así cuando la viga se carga con fuerzas concentradas y momentos de par.

Para desarrollar el método del momento de área se harán los mismos supuestos que se usaron en el método de integración: la viga está inicialmente recta, se deforma elásticamente debido a las cargas, de manera que la pendiente y la deflexión de la curva elástica son muy pequeñas, y las deformaciones sólo son causadas por la flexión. El método del momento de área se basa en dos teoremas, uno se usa para determinar la pendiente y el otro para encontrar el desplazamiento en un punto sobre la curva elástica.

Teorema 1. Considere la viga simplemente apoyada con su curva elástica asociada, que se muestra en la figura 12-20*a*. Un segmento diferencial dx de la viga se aísla en la figura 12-20*b*. Aquí, el momento interno M de la viga deforma el elemento de modo que las *tangentes* a la curva elástica a cada lado del elemento se intersecan a un ángulo $d\theta$. Este ángulo puede determinarse a partir de la ecuación 12-10, escrita como

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = M$$

Como la *pendiente* es *pequeña*, $\theta = dv/dx$ y, por lo tanto,

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \qquad \text{(12-16)}$$

Si se construye el diagrama de momentos para la viga y se divide entre la rigidez a la flexión, EI, figura 12-20*c*, entonces esta ecuación indica que $d\theta$ es igual al *área* bajo el "diagrama M/EI" para el segmento dx de la viga. Al integrar desde un punto A seleccionado sobre la curva elástica hasta otro punto B, se tiene

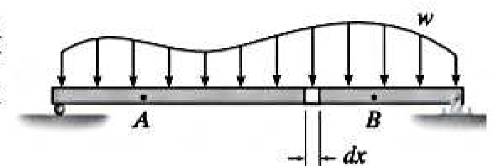
$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI}dx \qquad \text{(12-17)}$$

Esta ecuación es la base para el teorema del primer momento de área.

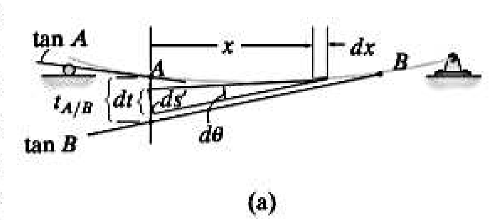
Teorema 1: *El ángulo entre las tangentes en dos puntos cualesquiera sobre la curva elástica es igual al área bajo el diagrama M/EI entre estos dos puntos.*

La notación $\theta_{B/A}$ se conoce como el ángulo de la tangente en B medido *con respecto a* la tangente en A. De la comprobación resulta evidente que este ángulo se mide *en sentido antihorario*, desde la tangente A hasta la tangente B, si el área bajo el diagrama M/EI es *positiva*. Por el contrario,

si el área es *negativa*, o se encuentra por debajo del eje x, el ángulo $\theta_{B/A}$ se mide en sentido horario desde la tangente A hasta la tangente B. Por otra parte, con base en las dimensiones de la ecuación 12-17, $\theta_{B/A}$ estará en *radianes*.

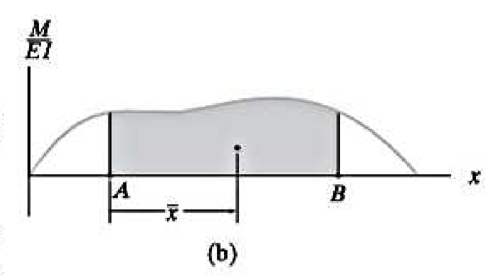


Teorema 2. El segundo teorema del momento de área se basa en la desviación relativa de las tangentes a la curva elástica. En la figura 12-21*a* se muestra una vista muy exagerada de la desviación vertical dt de las tangentes a cada lado del elemento diferencial dx. Esta desviación se debe a la curvatura del elemento y se ha medido a lo largo de una línea vertical que pasa por el punto A de la curva elástica. Como se supone que la pendiente de la curva elástica y su deflexión son muy pequeñas, resulta satisfactorio aproximar la longitud de cada línea tangente mediante x y el arco ds' por medio de dt. Si se usa la fórmula de arco circular $s = \theta r$, donde r es la longitud x y s es dt, puede escribirse $dt = x\, d\theta$. Al sustituir la ecuación 12-16 en esta ecuación y al integrar desde A hasta B, puede determinarse la desviación vertical de la tangente en A *con respecto a* la tangente en B; es decir,



(a)

$$t_{A/B} = \int_A^B x \frac{M}{EI} dx \qquad (12\text{-}18)$$



(b)

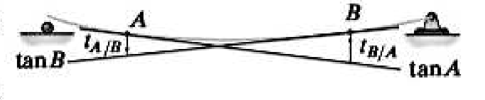
Como el centroide de un área se encuentra a partir de $\bar{x} \int dA = \int x\, dA$ y $\int (M/EI)\, dx$ representa el área bajo el diagrama M/EI, también se puede escribir

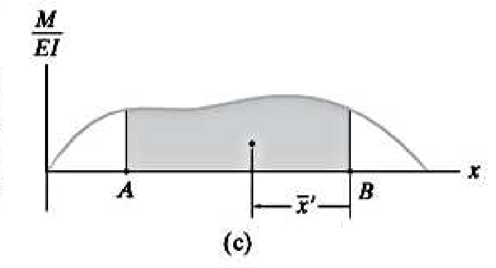
$$t_{A/B} = \bar{x} \int_A^B \frac{M}{EI} dx \qquad (12\text{-}19)$$

Aquí $\bar{x}$ es la distancia desde A hasta el *centroide* del área bajo el diagrama M/EI entre A y B, figura 12-21*b*.

Ahora el segundo teorema del momento de área puede enunciarse con referencia a la figura 12-21*a* de la manera siguiente:

Teorema 2: *La distancia vertical entre la tangente en un punto (A) sobre la curva elástica y la tangente extendida desde otro punto (B) es igual al momento del área bajo el diagrama M/EI entre estos dos puntos (A y B). Este momento se calcula respecto al punto (A) donde debe determinarse la distancia vertical* ($t_{A/B}$).





(c)

Figura 12-21

Observe que $t_{A/B}$ no es igual a $t_{B/A}$, lo cual se muestra en la figura 12.21*c*. En específico, el momento del área bajo el diagrama M/EI entre A y B se calcula respecto al punto A para determinar $t_{A/B}$, figura 12-21*b*, y se calcula respecto al punto B a fin de determinar $t_{B/A}$, figura 12-21*c*.

Si se encuentra el momento de un área *positiva* M/EI entre A y B para $t_{A/B}$, esto indica que el punto A está *por encima* de la tangente extendida desde el punto B, figura 12-21*a*. Del mismo modo, las áreas M/EI *negativas* indican que el punto A está *por debajo* de la tangente extendida desde el punto B. Esta misma regla es válida para $t_{B/A}$.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para aplicar los dos teoremas del momento de área.

Diagrama M/EI.

- Determine las reacciones en los soportes y dibuje el diagrama M/EI de la viga. Si la viga se carga con fuerzas concentradas, el diagrama M/EI consistirá en una serie de segmentos de línea recta y las áreas y sus momentos requeridos por los teoremas de momento de área serán relativamente fáciles de calcular. Si la carga consiste en una serie de cargas distribuidas, el diagrama M/EI consistirá en curvas parabólicas o tal vez curvas de orden superior, y se sugiere el uso de la tabla ubicada en la página final de este libro (al reverso de la contraportada) para localizar el área y el centroide bajo cada curva.

Curva elástica.

- Dibuje una vista exagerada de la curva elástica de la viga. Recuerde que en un soporte fijo siempre ocurren puntos de pendiente cero y desplazamiento cero, y que en todos los soportes de pasador y de rodillo se produce desplazamiento cero.
- Si le resulta difícil dibujar la forma general de la curva elástica, utilice el diagrama de momento (o M/EI). Tenga en cuenta que cuando la viga está sometida a un *momento positivo*, ésta se curvará *cóncava hacia arriba*, mientras que los *momentos negativos* curvan a la viga *cóncava hacia abajo*. Por otra parte, cuando el momento en la viga (o M/EI) es igual a cero se produce un punto de inflexión o cambio en la curvatura.
- El desplazamiento desconocido y la pendiente que va a determinarse deben indicarse en la curva.
- Como los teoremas del momento de área se aplican *sólo entre dos tangentes*, es necesario prestar atención a la manera en que se construyen las tangentes para que los ángulos o la distancia vertical entre ellos conduzcan a la solución del problema. En este sentido, *deben considerarse las tangentes en los apoyos*, puesto que en esos puntos la viga tiene desplazamiento y pendiente cero.

Teoremas del momento de área.

- Aplique el teorema 1 para determinar el *ángulo* entre dos tangentes cualesquiera sobre la curva elástica y el teorema 2 para determinar la distancia vertical entre las tangentes.
- El signo algebraico de la respuesta puede comprobarse con base en el ángulo o la distancia vertical indicada en la curva elástica.
- Un $\theta_{B/A}$ *positivo* representa una rotación *antihoraria* de la tangente en B con respecto a la tangente en A, y un $t_{B/A}$ *positivo* indica que el punto B sobre la curva elástica se encuentra *por encima* de la tangente extendida desde el punto A.

EJEMPLO 12.7

Determine la pendiente de la viga mostrada en la figura 12-22*a* en el punto *B*. *EI* es constante.

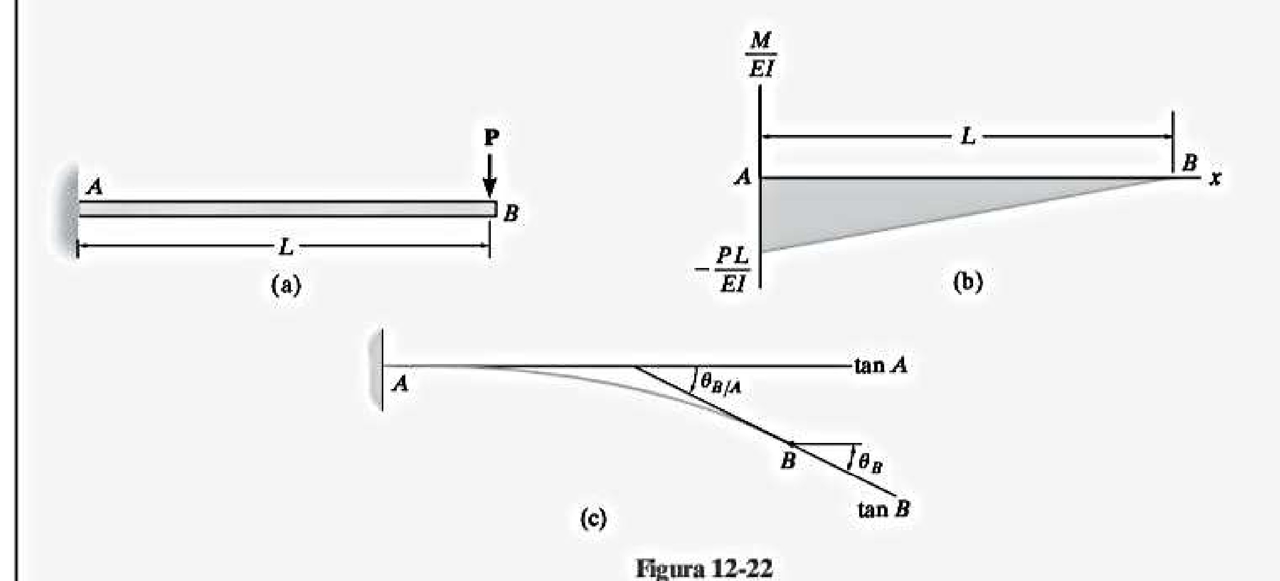


Figura 12-22

SOLUCIÓN

Diagrama *M*/*EI*. Vea la figura 12-22*b*.

Curva elástica. La fuerza **P** hace que la viga experimente deflexión como se muestra en la figura 12-22*c*. (La curva elástica es cóncava hacia abajo, puesto que M/EI es negativo.) Se indica la tangente en *B* ya que se desea encontrar θ_B. Además, se muestra la tangente en el soporte (*A*). Esta tangente tiene una pendiente cero *conocida*. Mediante la construcción, el ángulo entre tan *A* y tan *B*, es decir $\theta_{B/A}$, es equivalente a θ_B, o bien

$$\theta_B = \theta_{B/A}$$

Teorema del momento de área. Al aplicar el teorema 1, $\theta_{B/A}$ es igual al área bajo el diagrama M/EI entre los puntos *A* y *B*; es decir,

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)L$$

$$= -\frac{PL^2}{2EI} \qquad \textit{Resp.}$$

El *signo negativo* indica que el ángulo medido desde la tangente en *A* hasta la tangente en *B* tiene un sentido *horario*. Con esto se verifica la solución, ya que la viga tiene una pendiente hacia abajo en *B*.

EJEMPLO 12.8

Determine el desplazamiento de los puntos B y C de la viga mostrada en la figura 12-23*a*. EI es constante.

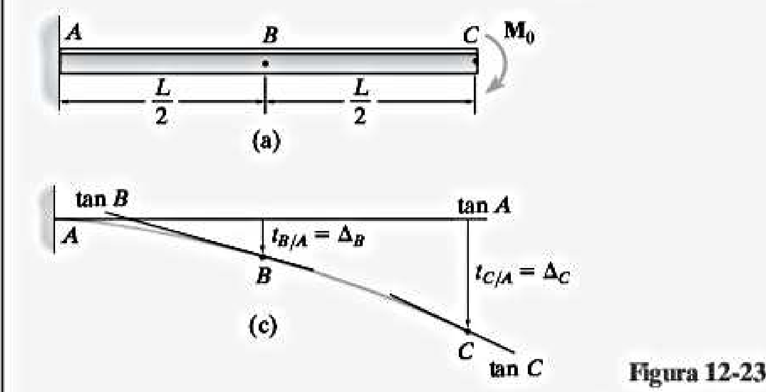


Figura 12-23

SOLUCIÓN

Diagrama *M*/*EI*. Vea la figura 12-23b.

Curva elástica. El momento de par en C hace que la viga sufra deflexión, como se muestra en la figura 12-23*c*. Se indican las tangentes en B y C, ya que es necesario encontrar Δ_B y Δ_C. Además, se muestra la tangente en el soporte (A) puesto que es horizontal. Ahora, los desplazamientos requeridos pueden relacionarse de manera directa con la distancia vertical entre las tangentes en B y A y C y A. En específico,

$$\Delta_B = t_{B/A}$$

$$\Delta_C = t_{C/A}$$

Teorema del momento de área. Al aplicar el teorema 2, $t_{B/A}$ es igual al momento del área en gris oscuro bajo el diagrama M/EI entre A y B calculado con respecto al punto B (el punto sobre la curva elástica), ya que es el punto donde debe determinarse la distancia vertical. Por lo tanto, a partir de la figura 12-23*b*,

$$\Delta_B = t_{B/A} = \left(\frac{L}{4}\right)\left[\left(-\frac{M_0}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] = -\frac{M_0L^2}{8EI} \qquad \textit{Resp.}$$

Del mismo modo, para $t_{C/A}$ se debe determinar el momento del área bajo *todo* el diagrama M/EI desde A hasta C con respecto al punto C (el punto de la curva elástica). Se tiene

$$\Delta_C = t_{C/A} = \left(\frac{L}{2}\right)\left[\left(-\frac{M_0}{EI}\right)(L)\right] = -\frac{M_0L^2}{2EI} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Como ambas respuestas son *negativas*, los puntos B y C se encuentran *por debajo* de la tangente en A. Esto concuerda con la figura 12-23*c*.

EJEMPLO 12.9

Determine la pendiente en el punto C del eje en la figura 12-24*a*. EI es constante.

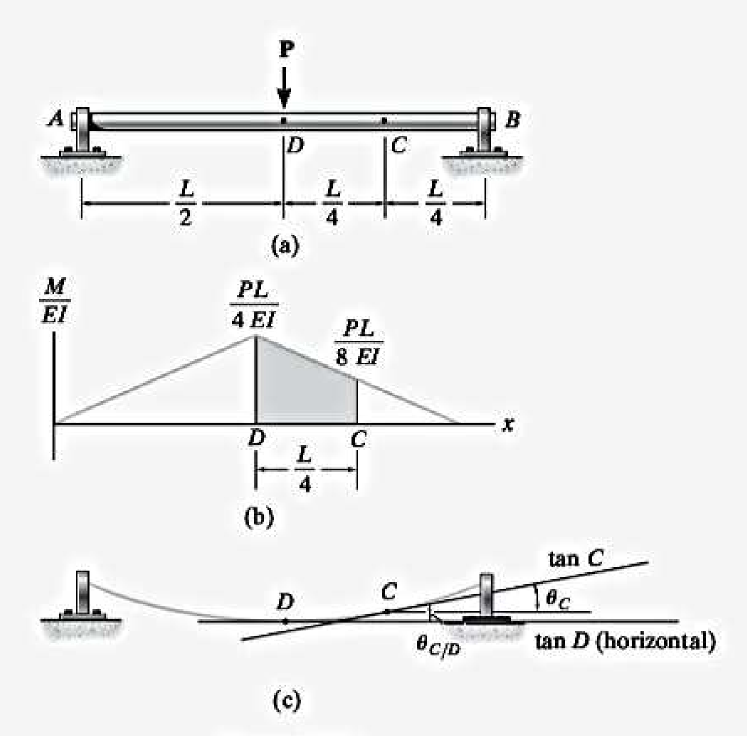


Figura 12-24

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI. Vea la figura 12-24*b*.

Curva elástica. Como la carga se aplica simétricamente en la viga, la curva elástica es simétrica y la tangente en D es horizontal, figura 12-24*c*. Además, se dibuja la tangente en C porque se desea encontrar la pendiente θ_C. Mediante la construcción, el ángulo $\theta_{C/D}$ entre las tangentes en tan D y C es igual a θ_C; es decir,

$$\theta_C = \theta_{C/D}$$

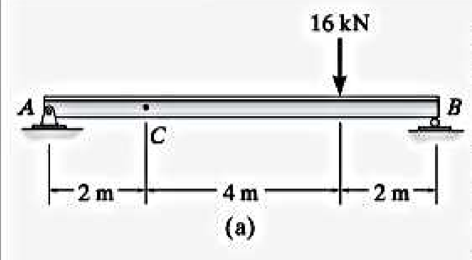
Teorema del momento de área. Si se usa el teorema 1, $\theta_{C/D}$ es igual al área en gris bajo el diagrama M/EI entre los puntos D y C. Se tiene

$$\theta_C = \theta_{C/D} = \left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI} - \frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{3PL^2}{64EI} \qquad \textit{Resp.}$$

¿Qué indica el resultado positivo?

12

EJEMPLO 12.10

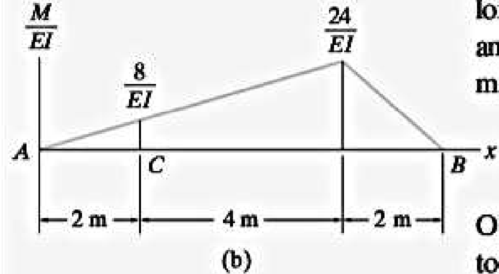


Determine la pendiente en el punto C para la viga de acero mostrada en la figura 12-25a. Considere $E_{ac} = 200$ GPa, $I = 17(10^6)$ mm^4.

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI. Vea la figura 12-25b.

Curva elástica. La curva elástica se muestra en la figura 12-25c. Se indica la tangente en C porque se desea encontrar θ_C. También se construyen las tangentes en los *soportes*, A y B, como se muestra en la figura. El ángulo $\theta_{C/A}$ es el ángulo entre las tangentes en A y C. La pendiente en A, θ_A, en la figura 12-25c puede encontrarse usando $|\theta_A| = |t_{B/A}|/L_{AB}$. Esta ecuación es válida puesto que $t_{B/A}$ es realmente muy pequeña, de modo que el valor de $t_{B/A}$ en metros puede aproximarse mediante la longitud de un arco circular definido por un radio de $L_{AB} = 8$ m y una amplitud de θ_A en radianes. (Recuerde que $s = \theta r$.) A partir de la geometría de la figura 12-25c, se tiene



$$|\theta_C| = |\theta_A| - |\theta_{C/A}| = \left|\frac{t_{B/A}}{8}\right| - |\theta_{C/A}| \qquad (1)$$

Observe que el ejemplo 12.9 también podría resolverse usando este método.

Teoremas del momento de área. Si se usa el teorema 1, $\theta_{C/A}$ es equivalente al área bajo el diagrama M/EI entre los puntos A y C; es decir,

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2}(2\text{ m})\left(\frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right) = \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

Si se aplica el teorema 2, $t_{B/A}$ es equivalente al momento del área bajo el diagrama M/EI entre B y A respecto al punto B (el punto sobre la curva elástica), ya que este es el punto donde debe determinarse la distancia vertical. Se tiene,

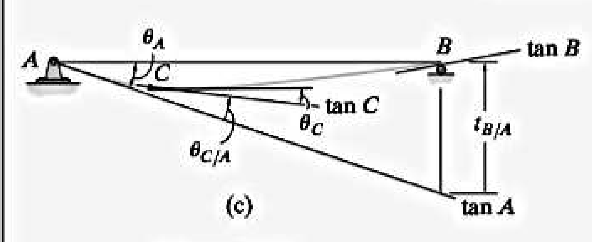


Figura 12-25

$$t_{B/A} = \left(2\text{ m} + \frac{1}{3}(6\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(6\text{ m})\left(\frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] + \left(\frac{2}{3}(2\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(2\text{ m})\left(\frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] = \frac{320\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación 1, se obtiene

$$\theta_C = \frac{320\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{(8\text{ m})EI} - \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

Este resultado se calculó en unidades de kN y m, por lo que al convertir EI a estas unidades resulta

$$\theta_C = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{[200(10^6)\text{ kN/m}^2][17(10^{-6})\text{ m}^4]} = 0.00941\text{ rad} \curvearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 12.11

Determine el desplazamiento en C para la viga mostrada en la figura 12-26*a*. EI es constante.

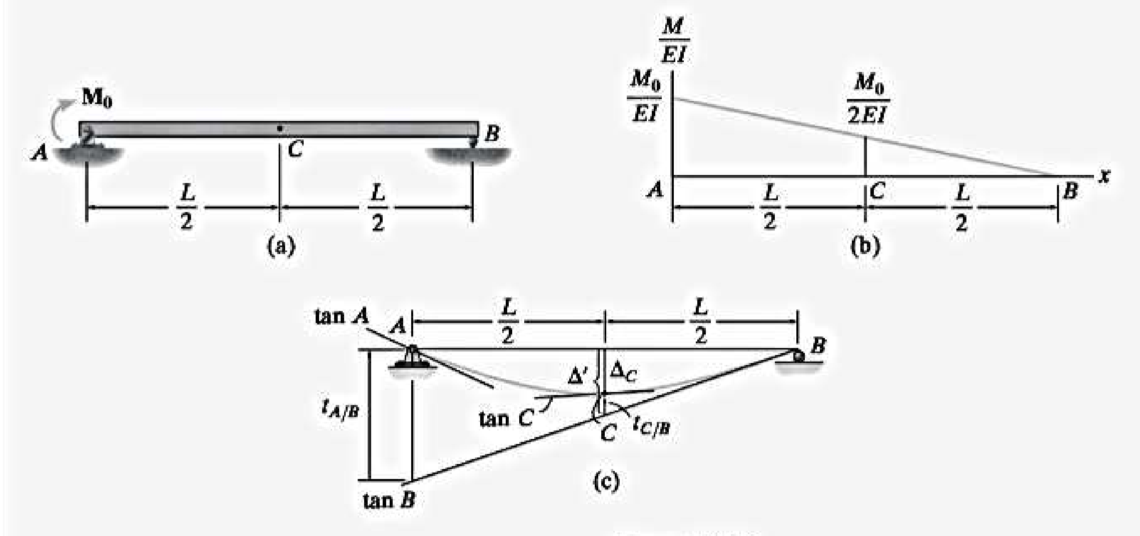


Figura 12-26

SOLUCIÓN

Diagrama M/EI. Vea la figura 12-26*b*.

Curva elástica. Se dibuja la tangente en C sobre la curva elástica ya que se desea encontrar Δ_C, figura 12-26*c*. (Observe que C *no* es la ubicación de la deflexión máxima de la viga, debido a que la carga y por ende la curva elástica *no son simétricas.*) En la figura 12-26*c* también se indican las tangentes en los soportes A y B. Se observa que $\Delta_C = \Delta' - t_{C/B}$. Si se determina $t_{A/B}$, entonces Δ' puede encontrarse mediante triángulos semejantes, es decir, $\Delta'/(L/2) = t_{A/B}/L$ o bien $\Delta' = t_{A/B}/2$. Por lo tanto,

$$\Delta_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} \qquad (1)$$

Teorema del momento de área. Al aplicar el teorema 2 para determinar $t_{A/B}$ y $t_{C/B}$, se tiene

$$t_{A/B} = \left(\frac{1}{3}(L)\right)\left[\frac{1}{2}(L)\left(\frac{M_0}{EI}\right)\right] = \frac{M_0L^2}{6EI}$$

$$t_{C/B} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{M_0}{2EI}\right)\right] = \frac{M_0L^2}{48EI}$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación 1 resulta

$$\Delta_C = \frac{1}{2}\left(\frac{M_0L^2}{6EI}\right) - \left(\frac{M_0L^2}{48EI}\right)$$

$$= \frac{M_0L^2}{16EI} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

12

EJEMPLO 12.12

Determine el desplazamiento en el punto C para la viga con voladizo de acero que se muestra en la figura 12-27a. Considere $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $I = 125$ pulg^4.

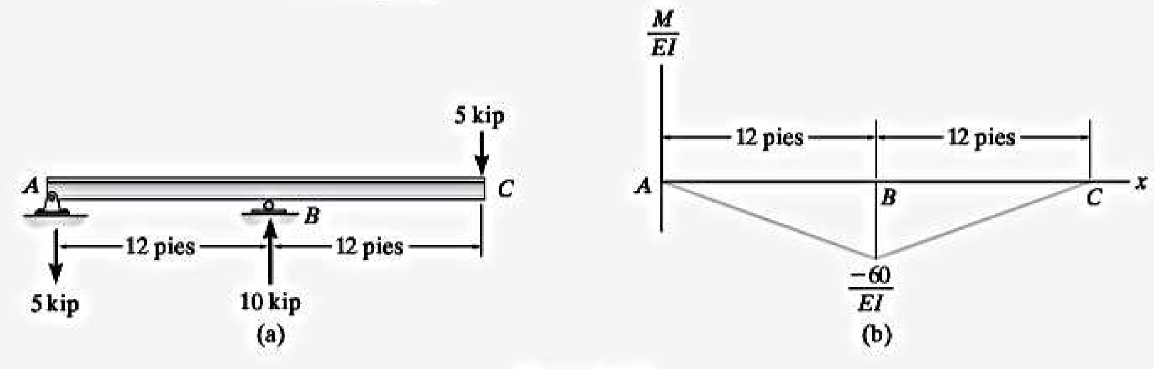


Figura 12-27

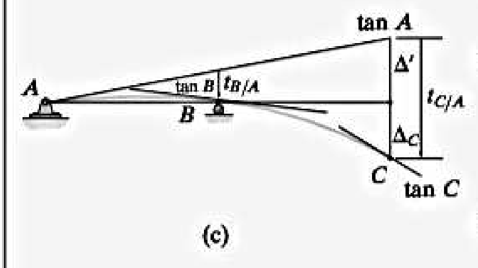
SOLUCIÓN

Diagrama *M/EI*. Vea la figura 12-27b.

Curva elástica. La carga hace que la viga sufra deflexión, como se muestra en la figura 12-27c. Se debe encontrar Δ_C. Al construir tangentes en C y en los soportes A y B, se observa que $\Delta_C = |t_{C/A}| - \Delta'$. Sin embargo, Δ' puede relacionarse con $t_{B/A}$ mediante triángulos semejantes, esto es, $\Delta'/24 = |t_{B/A}|/12$ o bien $\Delta' = 2|t_{B/A}|$. Por lo tanto,

$$\Delta_C = |t_{C/A}| - 2|t_{B/A}| \qquad (1)$$

Teorema del momento de área. Si se aplica el teorema 2 para determinar $t_{C/A}$ y $t_{B/A}$, se tiene



$$t_{C/A} = (12 \text{ pies})\left(\frac{1}{2}(24 \text{ pies})\left(-\frac{60 \text{ kip}\cdot\text{pie}}{EI}\right)\right)$$

$$= -\frac{8640 \text{ kip}\cdot\text{pie}^3}{EI}$$

$$t_{B/A} = \left(\frac{1}{3}(12 \text{ pies})\right)\left[\frac{1}{2}(12 \text{ pies})\left(-\frac{60 \text{ kip}\cdot\text{pie}}{EI}\right)\right] = -\frac{1440 \text{ kip}\cdot\text{pie}^3}{EI}$$

¿Por qué estos términos son negativos? Al sustituir los resultados en la ecuación 1 se obtiene

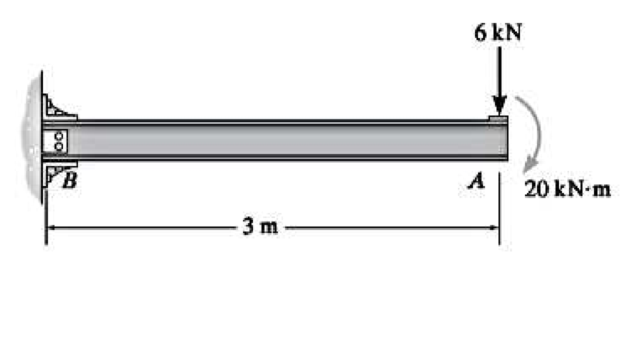
$$\Delta_C = \frac{8640 \text{ kip}\cdot\text{pie}^3}{EI} - 2\left(\frac{1440 \text{ kip}\cdot\text{pie}^3}{EI}\right) = \frac{5760 \text{ kip}\cdot\text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

Tomando en cuenta que los cálculos se realizaron en unidades de kip y pies, se tiene

$$\Delta_C = \frac{5760 \text{ kip}\cdot\text{pie}^3(1728 \text{ pulg}^3/\text{pie}^3)}{[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](125 \text{ pulg}^4)} = 2.75 \text{ pulg} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

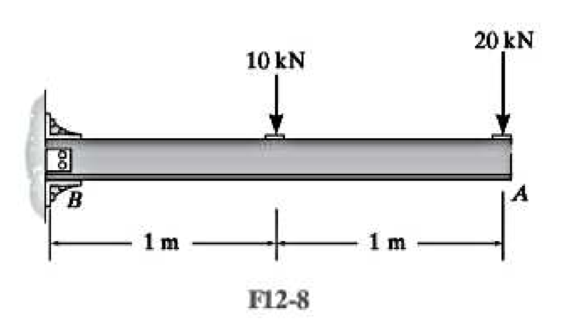
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-7. Determine la pendiente y la deflexión del extremo A de la viga en voladizo. $E = 200$ GPa e $I = 65.0(10^{-6})\text{m}^4$.



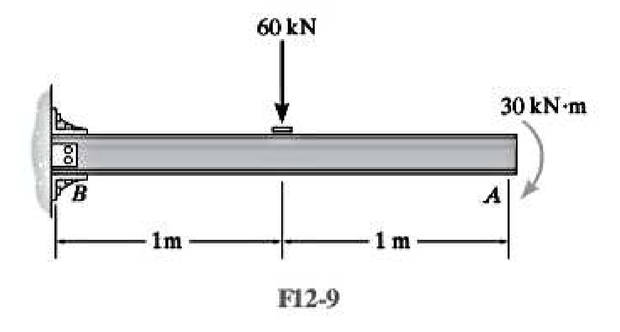
F12-7

F12-8. Determine la pendiente y la deflexión del extremo A de la viga en voladizo. $E = 200$ GPa e $I = 126(10^{-6})$ m^4.



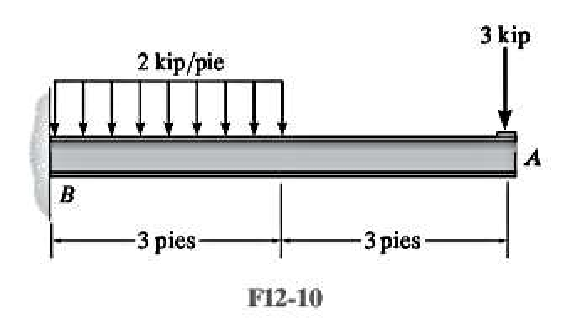
F12-8

F12-9. Determine la pendiente y la deflexión del extremo A de la viga en voladizo. $E = 200$ GPa e $I = 121(10^{-6})$ m^4.



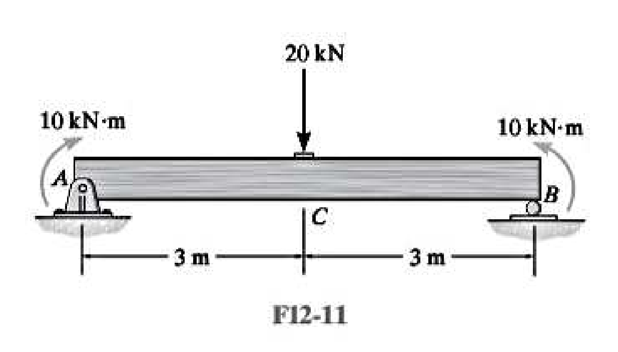
F12-9

F12-10. Determine la pendiente y la deflexión en el punto A de la viga en voladizo. $E = 29(10^3)$ ksi, $I = 24.5$ pulg^4.



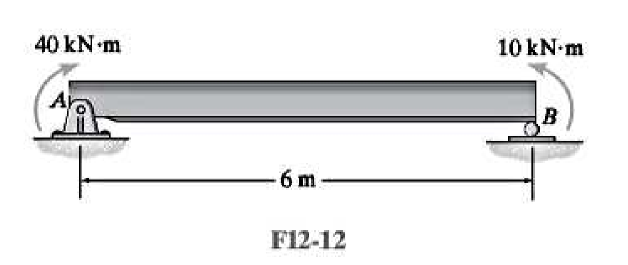
F12-10

F12-11. Determine la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada. $E = 200$ GPa e $I = 42.8(10^{-6})$ m^4.



F12-11

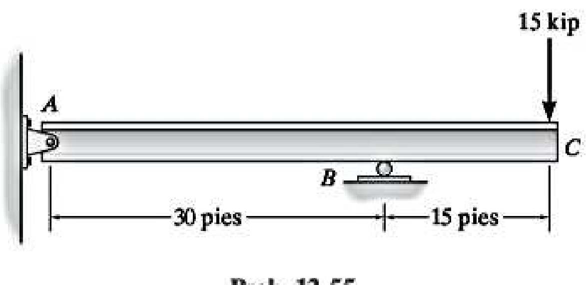
F12-12. Determine la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada. $E = 200$ GPa e $I = 39.9(10^{-6})$ m^4.



F12-12

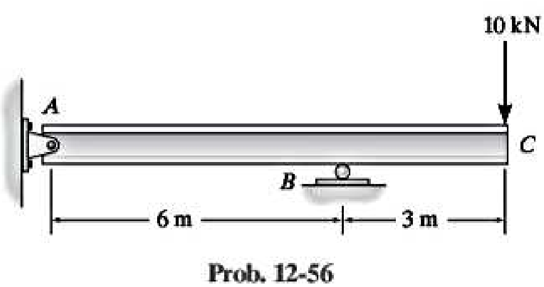
PROBLEMAS

12-55. Determine la pendiente y la deflexión en *C*. *EI* es constante.



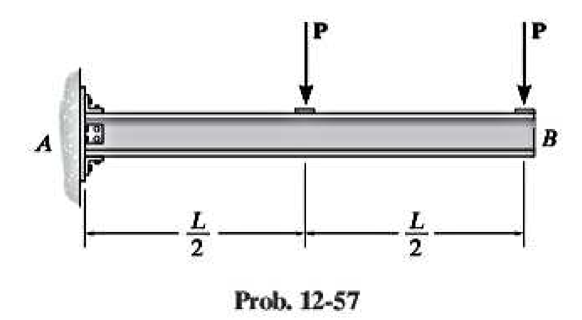
Prob. 12-55

***12-56.** Determine la pendiente y la deflexión en *C*. *EI* es constante.



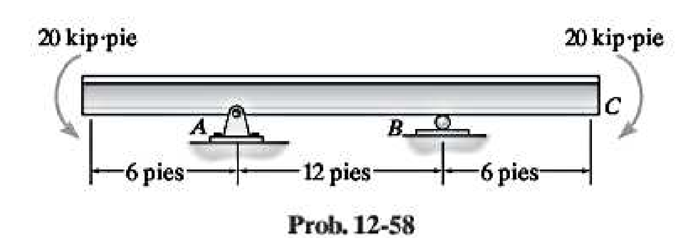
Prob. 12-56

•12-57. Determine la deflexión del extremo *B* de la viga en voladizo. *EI* es constante.



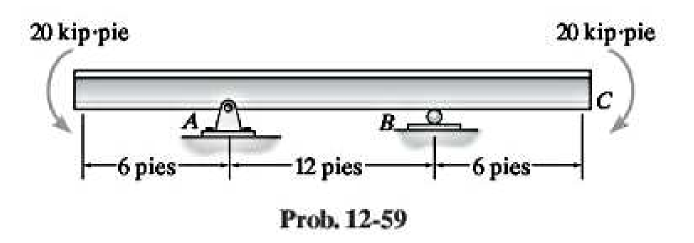
Prob. 12-57

12-58. Determine la pendiente en *A* y la deflexión máxima. *EI* es constante.



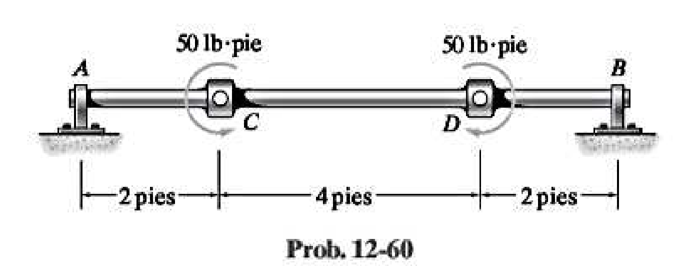
Prob. 12-58

12-59. Determine la pendiente y la deflexión en *C*. *EI* es constante.



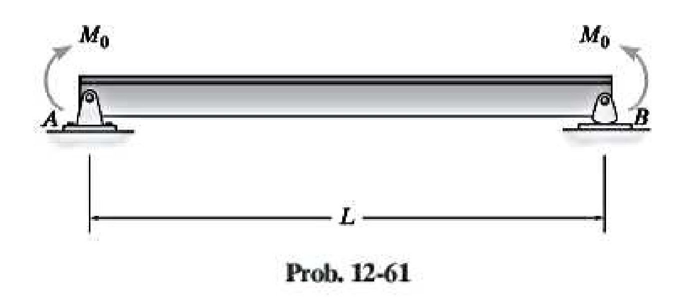
Prob. 12-59

***12-60.** Si los cojinetes en *A* y *B* sólo ejercen reacciones verticales sobre el eje, determine la pendiente en *A* y la deflexión máxima del eje. *EI* es constante.



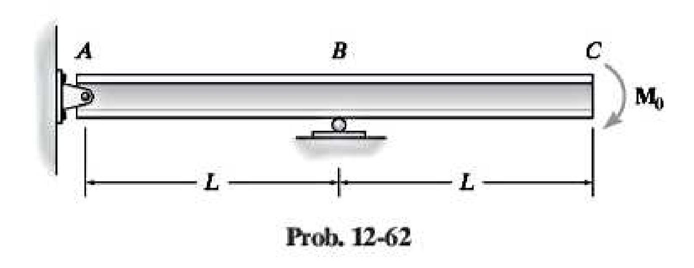
Prob. 12-60

•**12-61.** Determine la pendiente máxima y la deflexión máxima de la viga. *EI* es constante.



Prob. 12-61

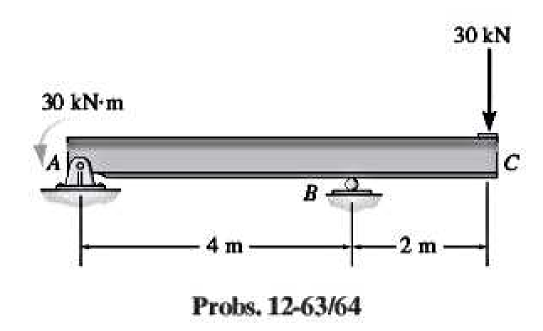
12-62. Determine la deflexión y la pendiente en *C*. *EI* es constante.



Prob. 12-62

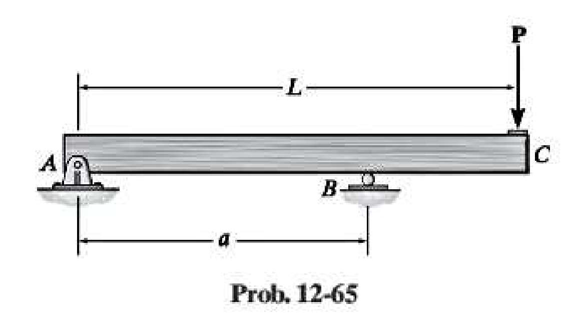
12-63. Determine la pendiente en el punto *A* de la viga con voladizo. $E = 200$ GPa e $I = 45.5(10^6)$ mm^4.

***12-64.** Determine la deflexión en el punto *C* de la viga con voladizo. $E = 200$ GPa e $I = 45.5(10^6)$ mm^4.



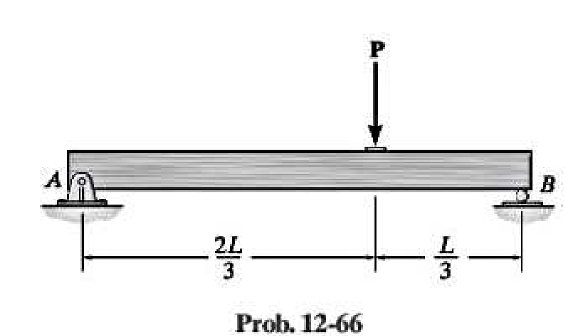
Probs. 12-63/64

•**12-65.** Determine la posición *a* del soporte de rodillo *B* en términos de *L*, para que la deflexión en el extremo *C* sea igual a la deflexión máxima de la región *AB* en la viga con voladizo. *EI* es constante.



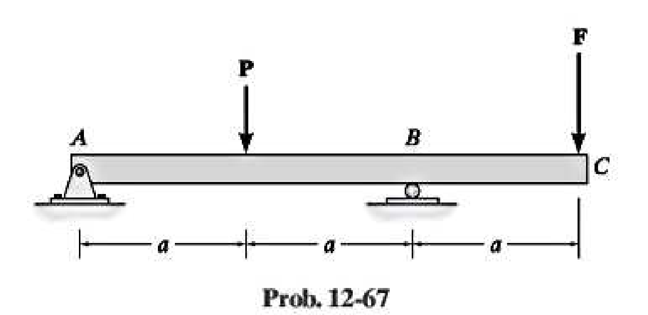
Prob. 12-65

12-66. Determine la pendiente en el punto *A* de la viga simplemente apoyada. *EI* es constante.



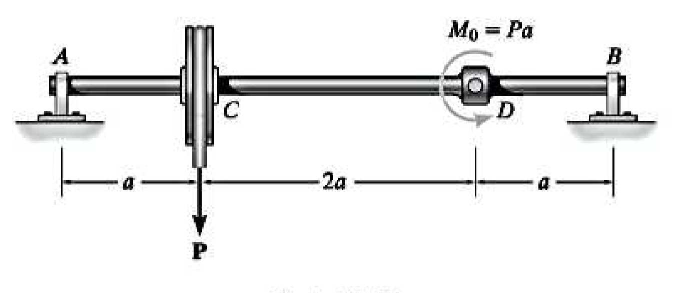
Prob. 12-66

12-67. La viga está sometida a una carga **P**, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de la fuerza **F** que debe aplicarse al extremo *C* del voladizo para que la deflexión en *C* sea cero. *EI* es constante.



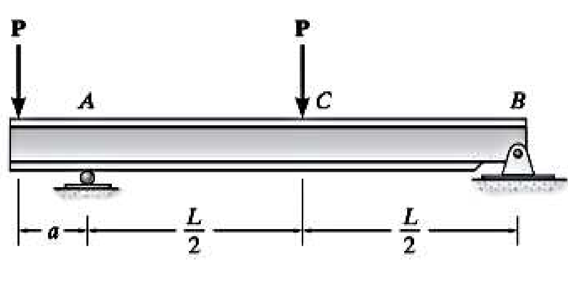
Prob. 12-67

*12-68. Si los cojinetes en A y B ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje, determine la pendiente en A y la deflexión máxima.



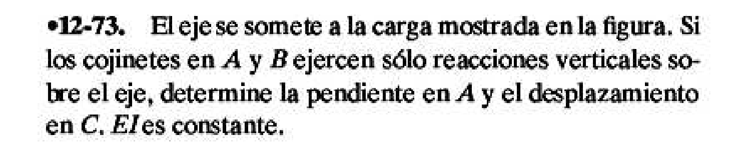
Prob. 12-68

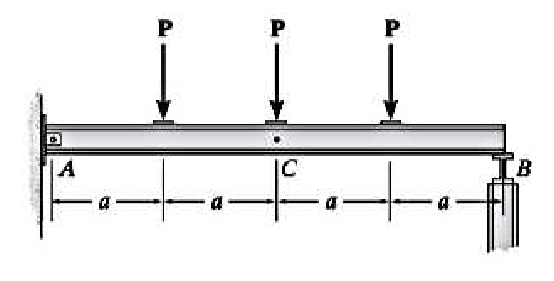
*12-72. Determine el valor de a para que el desplazamiento en C sea igual a cero. EI es constante.



Prob. 12-72

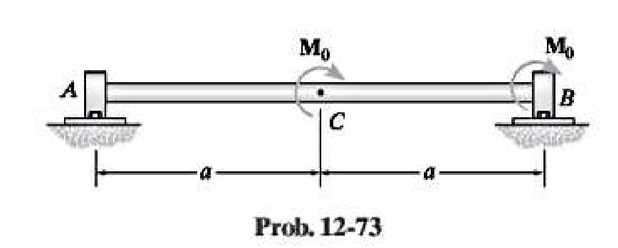
•12-69. La viga se somete a la carga mostrada. Determine la pendiente en A y el desplazamiento en C. Suponga que el soporte en A es un pasador y en B es un rodillo. EI es constante.





Prob. 12-69

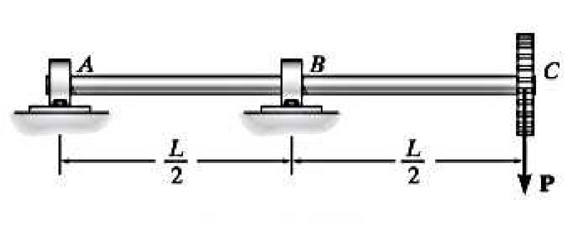
•12-73. El eje se somete a la carga mostrada en la figura. Si los cojinetes en A y B ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje, determine la pendiente en A y el desplazamiento en C. EI es constante.



Prob. 12-73

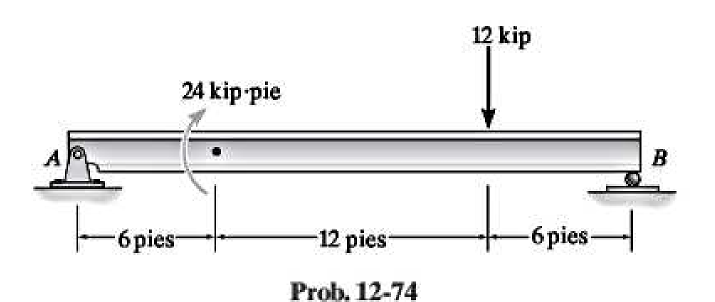
12-70. El eje sostiene un engrane en su extremo C. Determine la deflexión en C y las pendientes en los cojinetes A y B. EI es constante.

12-71. El eje sostiene un engrane en su extremo C. Determine su deflexión máxima dentro de la región AB. EI es constante. Los cojinetes ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje.



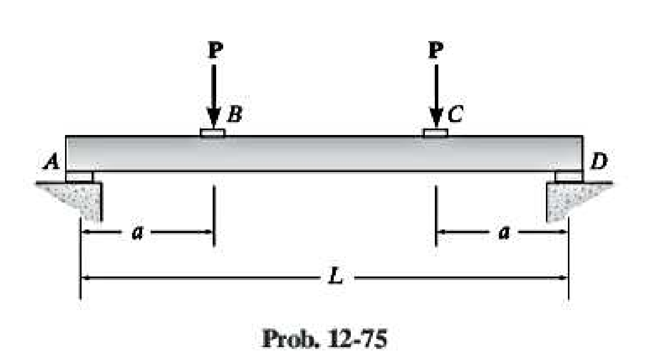
Probs. 12-70/71

12-74. Determine la pendiente en A y la deflexión máxima en la viga. EI es constante.



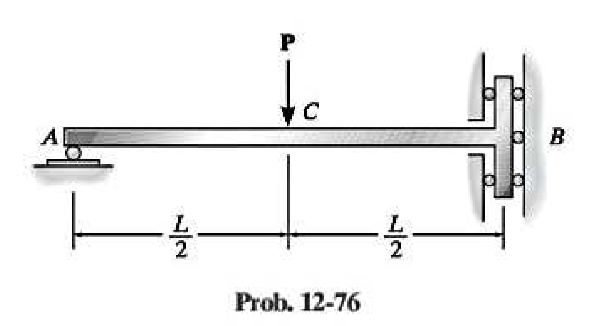
Prob. 12-74

12-75. La viga está fabricada de un material cerámico. Con el fin de obtener su módulo de elasticidad, se somete a la carga elástica mostrada en la figura. Si el momento de inercia es I y la viga tiene una desviación máxima medida Δ, determine E. Los soportes en A y D ejercen sólo reacciones verticales sobre la viga.



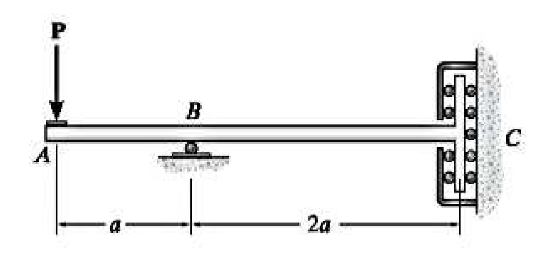
Prob. 12-75

***12-76.** La barra se sostiene mediante un apoyo de rodillos en B, el cual permite el desplazamiento vertical pero resiste la carga axial y el momento. Si la barra se somete a la carga mostrada, determine la pendiente en A y la deflexión en C. EI es constante.



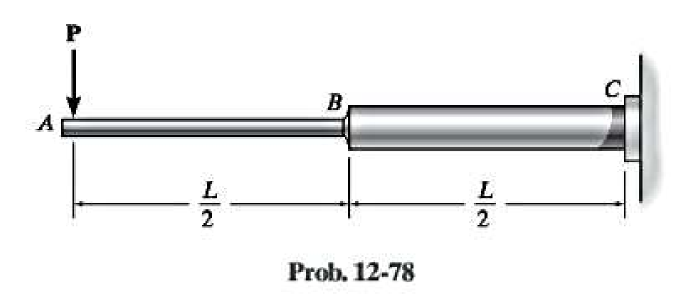
Prob. 12-76

•12-77. La barra se sostiene mediante el apoyo de rodillos en C, el cual permite el desplazamiento vertical pero resiste la carga axial y el momento. Si la barra se somete a la carga mostrada, determine la pendiente y el desplazamiento en A. EI es constante.



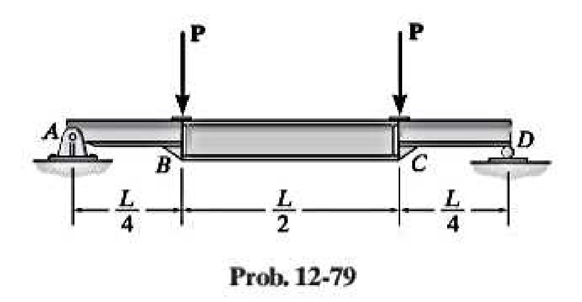
Prob. 12-77

12-78. La barra se construye a partir de dos ejes para los cuales el momento de inercia de AB es I y el de BC es $2I$. Determine la pendiente y la deflexión máximas de la varilla debido a la carga. El módulo de elasticidad es E.



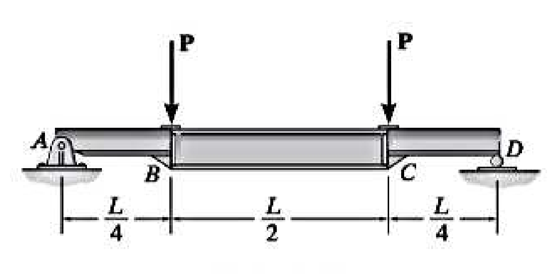
Prob. 12-78

12-79. Determine la pendiente en el punto D y la deflexión en el punto C de la viga simplemente apoyada. La viga es de un material que tiene un módulo de elasticidad E. El momento de inercia de los segmentos AB y CD en la viga es I, mientras que el momento de inercia del segmento BC es $2I$.



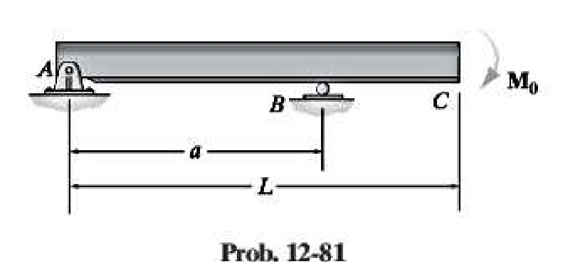
Prob. 12-79

***12-80.** Determine la pendiente en el punto A y la deflexión máxima de la viga simplemente apoyada. La viga es de un material que tiene un módulo de elasticidad E. El momento de inercia de los segmentos AB y CD en la viga es I, mientras que el momento de inercia del segmento BC es $2I$.



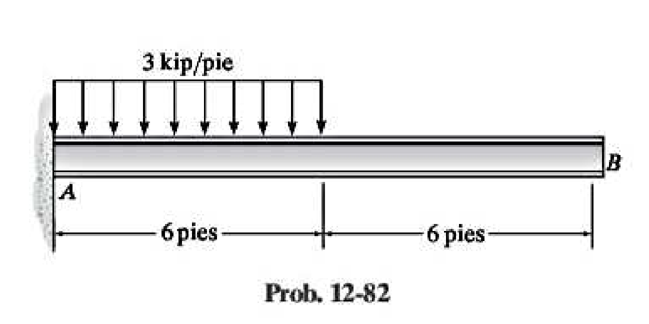
Prob. 12-80

•**12-81.** Determine la posición a del rodillo de soporte B en términos de L, de modo que la desviación en el extremo C sea igual a la deflexión máxima de la región AB de la viga simplemente apoyada con voladizo. EI es constante.



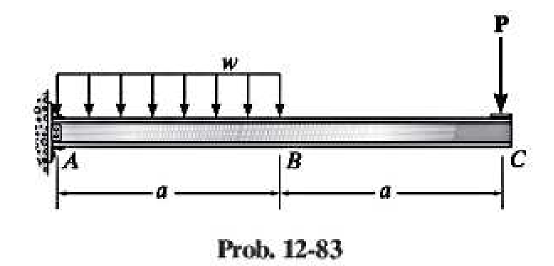
Prob. 12-81

12-82. La viga en voladizo W10 × 15 está fabricada de acero A-36 y se encuentra sometida a la carga mostrada en la figura. Determine la pendiente y el desplazamiento en su extremo B.



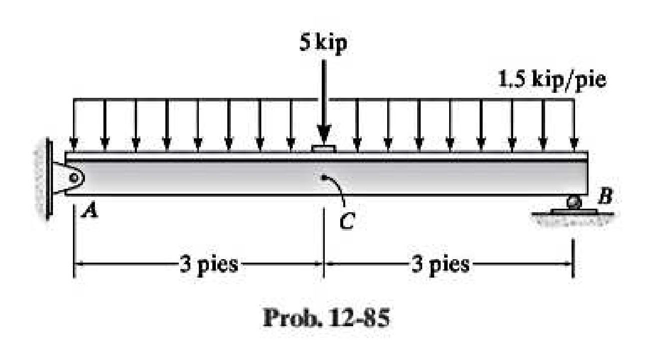
Prob. 12-82

12-83. La viga en voladizo se somete a la carga mostrada en la figura. Determine la pendiente y el desplazamiento en C. Suponga que el soporte en A está fijo. EI es constante.



Prob. 12-83

***12-84.** Determine la pendiente en C y la deflexión en B. EI es constante.

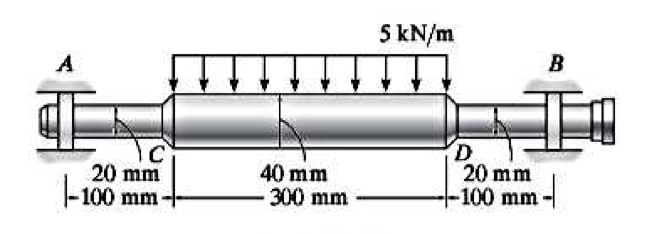


Prob. 12-84

•**12-85.** Determine la pendiente en B y el desplazamiento en C. El elemento es una T de acero estructural A-36 para el cual $I = 76.8$ pulg^4.

Prob. 12-85

12-86. El eje de acero A-36 se usa para sostener un rotor que ejerce una carga uniforme de 5 kN/m dentro de la región CD del eje. Determine la pendiente del eje en los cojinetes A y B. Los cojinetes ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje.



Prob. 12-86

12.5 Método de superposición

La ecuación diferencial $EI\, d^4v/dx^4 = w(x)$ cumple con los dos requisitos necesarios para aplicar el principio de superposición; es decir, la carga $w(x)$ se relaciona linealmente con la deflexión $v(x)$, y se supone que la carga no cambia de modo significativo la geometría original de la viga o eje. Como resultado, es posible superponer las deflexiones para una serie de cargas separadas que actúan sobre una viga. Por ejemplo, si v_1 es la deflexión para una carga y v_2 es la deflexión para otra carga, la deflexión total para las dos cargas actuando en conjunto es la suma algebraica $v_1 + v_2$. Si se usan los resultados tabulados para diferentes cargas sobre una viga, como los que se presentan en el apéndice C, o las que pueden encontrarse en distintos manuales de ingeniería, es posible encontrar la pendiente y el desplazamiento en un punto sobre una viga sometida a varias cargas diferentes al sumar algebraicamente los efectos de sus distintas partes componentes.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo se utiliza el método de superposición para resolver los problemas de deflexión, donde la deflexión se produce no sólo por deformaciones de la viga, sino también por desplazamientos de cuerpo rígido, como los que se producen cuando la viga está sostenida por resortes.



La deflexión resultante en cualquier punto de esta viga puede determinarse mediante la superposición de las deflexiones causadas por cada una de las cargas que actúan de manera separada sobre la viga.

EJEMPLO 12.13

Determine el desplazamiento en el punto C y la pendiente en el soporte A de la viga mostrada en la figura 12-28*a*. EI es constante.

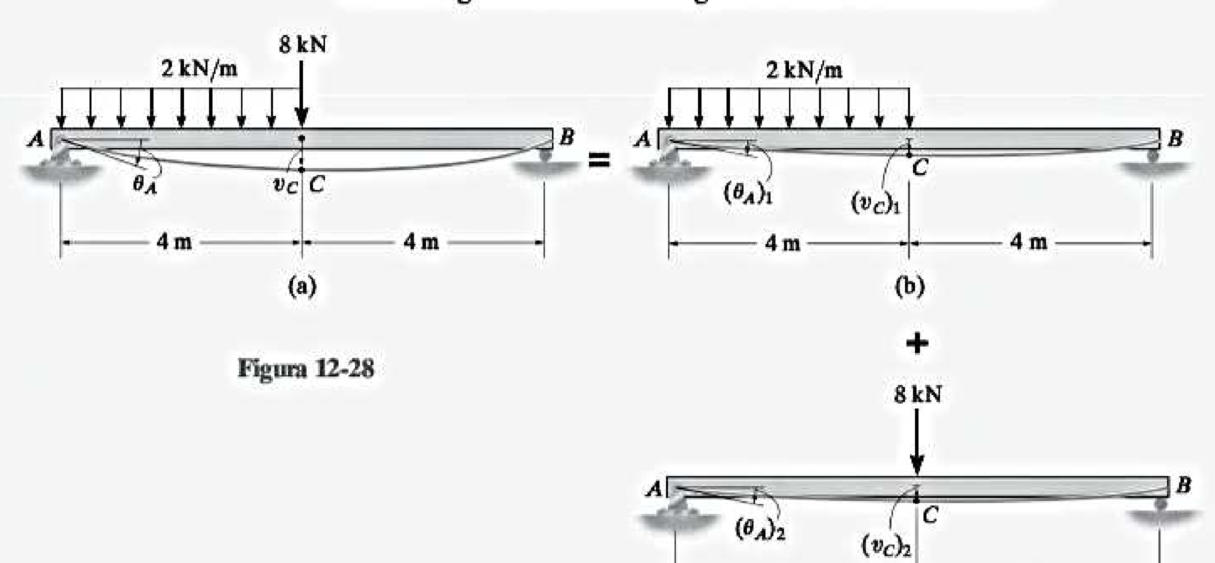


Figura 12-28

SOLUCIÓN

La carga puede separarse en dos componentes como se muestra en las figuras 12-28*b* y 12-28*c*. El desplazamiento en C y la pendiente en A se encuentran mediante el uso de la tabla del apéndice C para cada parte.

Para la carga distribuida,

$$(\theta_A)_1 = \frac{3wL^3}{128EI} = \frac{3(2\text{ kN/m})(8\text{ m})^3}{128EI} = \frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \circlearrowright$$

$$(v_C)_1 = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5(2\text{ kN/m})(8\text{ m})^4}{768EI} = \frac{53.33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Para la fuerza concentrada de 8 kN,

$$(\theta_A)_2 = \frac{PL^2}{16EI} = \frac{8\text{ kN}(8\text{ m})^2}{16EI} = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \circlearrowright$$

$$(v_C)_2 = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{8\text{ kN}(8\text{ m})^3}{48EI} = \frac{85.33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

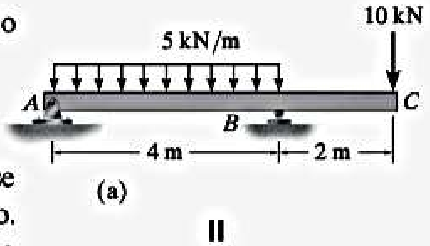
El desplazamiento en C y la pendiente en A son las sumas algebraicas de estas componentes. Por lo tanto,

$$(+\circlearrowright) \qquad \theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{56\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

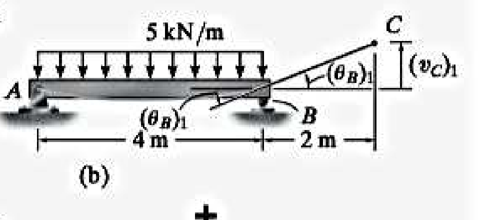
$$(+\downarrow) \qquad v_C = (v_C)_1 + (v_C)_2 = \frac{139\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 12.14

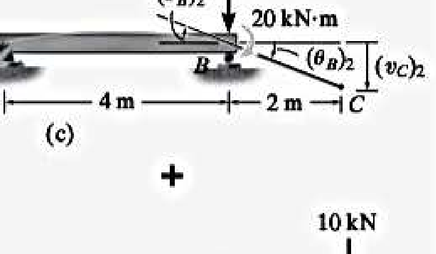
Determine el desplazamiento en el extremo C de la viga con voladizo que se muestra en la figura 12-29*a*. EI es constante.



=



+



+

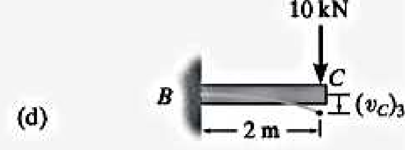


Figura 12-29

SOLUCIÓN

Como la tabla del apéndice C *no* incluye vigas con voladizos, la viga se separará en una parte simplemente apoyada y una porción en voladizo. En primer lugar se calculará la pendiente en B, causada por la carga distribuida que actúa sobre el segmento simplemente apoyado, figura 12-29*b*.

$$(\theta_B)_1 = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{5\text{ kN/m}(4\text{ m})^3}{24EI} = \frac{13.33\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$$

Como este ángulo es *pequeño*, $(\theta_B)_1 \approx \tan(\theta_B)_1$, y el desplazamiento vertical en el punto C es

$$(v_C)_1 = (2\text{ m})\left(\frac{13.33\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right) = \frac{26.67\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\uparrow$$

A continuación, la carga de 10 kN sobre el voladizo ocasiona una fuerza estáticamente equivalente de 10 kN y un momento de par de 20 kN · m en el soporte B del segmento simplemente apoyado, figura 12-29*c*. La fuerza de 10 kN no causa un desplazamiento o una pendiente en B; sin embargo, el momento de par de 20 kN · m produce una pendiente. La pendiente en B debida a este momento es

$$(\theta_B)_2 = \frac{M_0L}{3EI} = \frac{20\text{ kN}\cdot\text{m}(4\text{ m})}{3EI} = \frac{26.67\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

de modo que el punto extendido C se desplaza

$$(v_C)_2 = (2\text{ m})\left(\frac{26.7\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right) = \frac{53.33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

Por último, la parte en voladizo BC se desplaza debido a la fuerza de 10 kN, figura 12-29*d*. Se tiene

$$(v_C)_3 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{10\text{ kN}(2\text{ m})^3}{3EI} = \frac{26.67\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

Sumando estos resultados algebraicamente, se obtiene el desplazamiento del punto C,

$$(+\downarrow) \qquad v_C = -\frac{26.7}{EI} + \frac{53.3}{EI} + \frac{26.7}{EI} = \frac{53.3\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

12

EJEMPLO 12.15

Determine el desplazamiento en el extremo C de la viga en voladizo que se muestra en la figura 12-30. EI es constante.

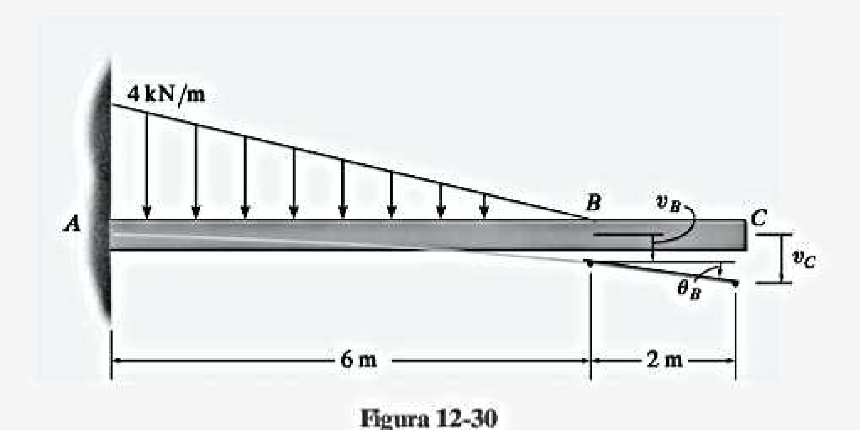


Figura 12-30

SOLUCIÓN

Si se usa la tabla del apéndice C para la carga triangular, la pendiente y el desplazamiento en el punto B son

$$\theta_B = \frac{w_0 L^3}{24EI} = \frac{4\text{ kN/m}(6\text{ m})^3}{24EI} = \frac{36\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$v_B = \frac{w_0 L^4}{30EI} = \frac{4\text{ kN/m}(6\text{ m})^4}{30EI} = \frac{172.8\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

La región descargada BC de la viga permanece recta, como se muestra en la figura 12-30. Dado que θ_B es pequeño, el desplazamiento en C se convierte en

$$(+\downarrow) \qquad v_C = v_B + \theta_B(L_{BC})$$

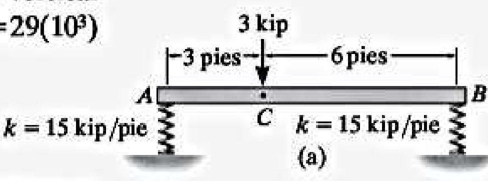
$$= \frac{172.8\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + \frac{36\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}(2\text{ m})$$

$$= \frac{244.8\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

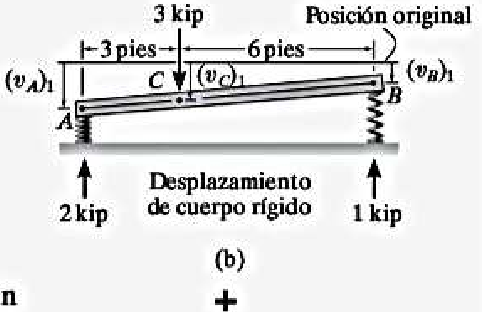
Resp.

EJEMPLO 12.16

La barra de acero que se muestra en la figura 12-31*a* se sostiene mediante dos resortes en sus extremos A y B. Cada resorte tiene una rigidez de $k = 15$ kip/pie y en un inicio está sin deformar. Si la barra se carga con una fuerza de 3 kip en el punto C, determine el desplazamiento vertical de la fuerza. No tome en cuenta el peso de la barra y tome $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $I = 12$ pulg^4.



=



+

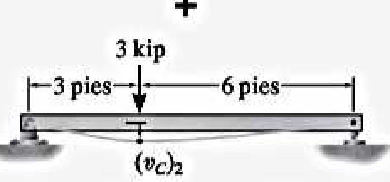


Figura 12-31

SOLUCIÓN

Se calculan las reacciones en los extremos A y B, como se muestran en la figura 12-31*b*. Cada resorte experimenta una deflexión de

$$(v_A)_1 = \frac{2 \text{ kip}}{15 \text{ kip/pie}} = 0.1333 \text{ pie}$$

$$(v_B)_1 = \frac{1 \text{ kip}}{15 \text{ kip/pie}} = 0.0667 \text{ pie}$$

Si se considera que la barra es *rígida*, estos desplazamientos causan que se mueva hasta la posición mostrada en la figura 12-31*b*. Para este caso, el desplazamiento vertical en C es

$$(v_C)_1 = (v_B)_1 + \frac{6 \text{ pies}}{9 \text{ pies}}[(v_A)_1 - (v_B)_1]$$

$$= 0.0667 \text{ pie} + \frac{2}{3}[0.1333 \text{ pie} - 0.0667 \text{ pie}] = 0.1111 \text{ pie} \downarrow$$

El desplazamiento en C causado por la *deformación* de la barra, figura 12-31*c*, puede encontrarse mediante el uso de la tabla del apéndice C. Se tiene

$$(v_C)_2 = \frac{Pab}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$$

$$= \frac{3 \text{ kip}(3 \text{ pies})(6 \text{ pies})[(9 \text{ pies})^2 - (6 \text{ pies})^2 - (3 \text{ pies})^2]}{6[29(10^3)\text{kip/pulg}^2](144 \text{ pulg}^2/1 \text{ pie}^2)(12 \text{ pulg}^4)(1 \text{ pie}^4/20\,736 \text{ pulg}^4)(9 \text{ pies})}$$

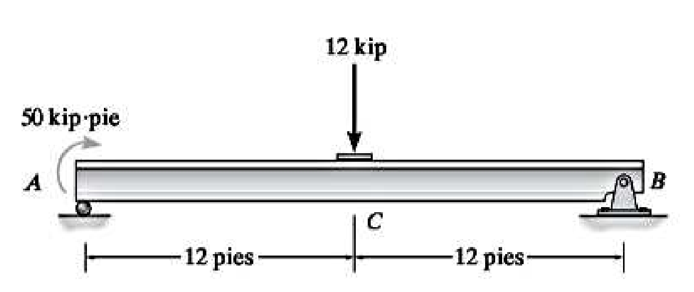
$$= 0.0149 \text{ pie} \downarrow$$

Sumando las dos componentes de desplazamiento, se obtiene

$$(+\downarrow) \quad v_C = 0.1111 \text{ pie} + 0.0149 \text{ pie} = 0.126 \text{ pie} = 1.51 \text{ pulg} \downarrow \quad \textit{Resp.}$$

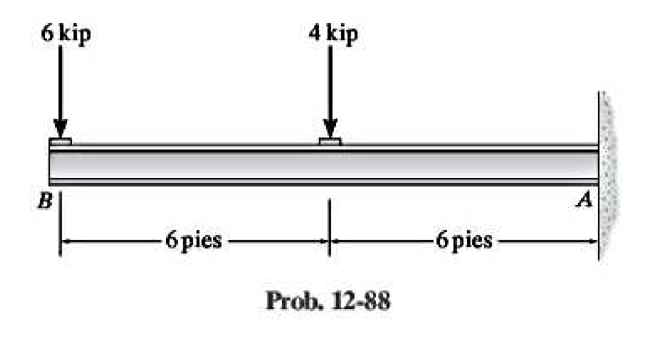
PROBLEMAS

12-87. La viga W12 × 45 simplemente apoyada está fabricada de acero A-36 y se somete a la carga mostrada en la figura. Determine la deflexión en su centro *C*.



Prob. 12-87

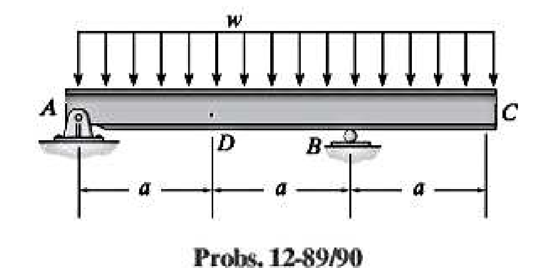
***12-88.** La viga en voladizo W10 × 15 está fabricada de acero A-36 y se encuentra sometida a la carga mostrada en la figura. Determine el desplazamiento en *B* y la pendiente en *A*.



Prob. 12-88

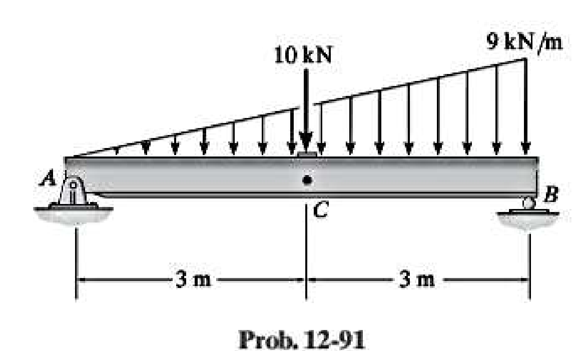
•**12-89.** Determine la pendiente y la deflexión en el extremo *C* de la viga con voladizo. *EI* es constante.

12-90. Determine la pendiente en *A* y la deflexión en el punto *D* de la viga con voladizo. *EI* es constante.



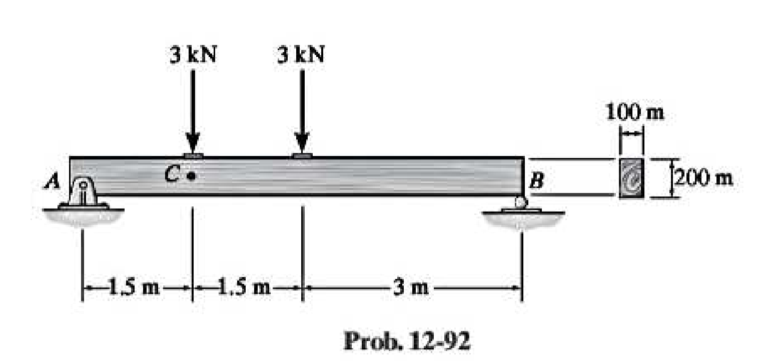
Probs. 12-89/90

12-91. Determine la pendiente en *B* y la deflexión en el punto *C* de la viga simplemente apoyada. $E = 200$ GPa e $I = 45.5(10^6)$ mm^4.



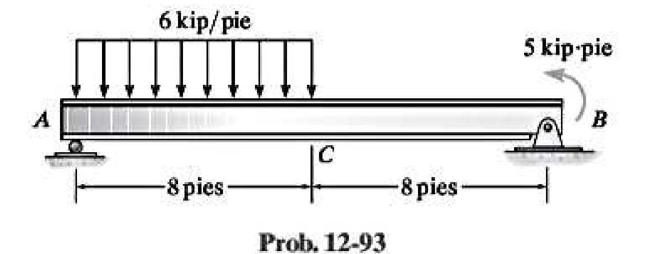
Prob. 12-91

***12-92.** Determine la pendiente en *A* y la deflexión en el punto *C* de la viga simplemente apoyada. El módulo de elasticidad de la madera es $E = 10$ GPa.



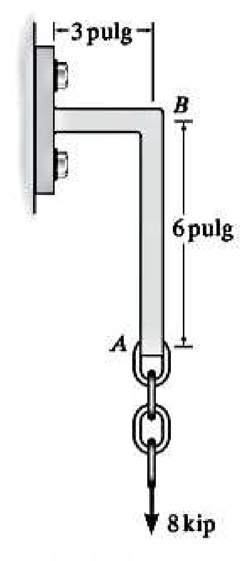
Prob. 12-92

•**12-93.** La viga simplemente apoyada W8 × 24 está fabricada de acero A-36 y se somete a la carga mostrada en la figura. Determine la deflexión en su centro *C*.



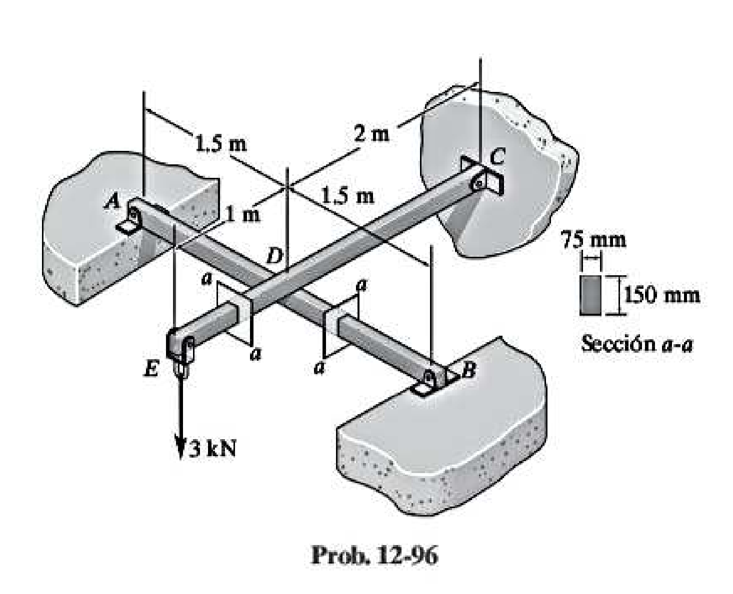
Prob. 12-93

12-94. Determine la deflexión vertical y la pendiente en el extremo A de la ménsula. Suponga que ésta se sostiene fijamente en su base, y no tome en cuenta la deformación axial del segmento AB. EI es constante.



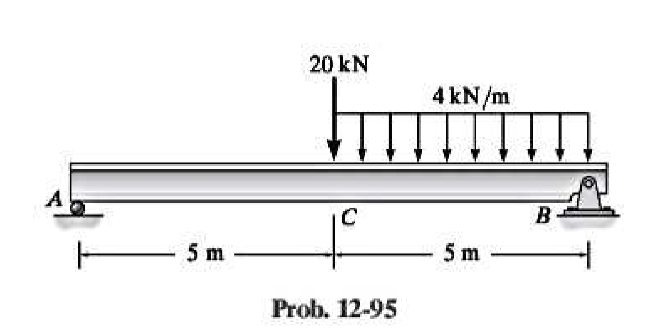
Prob. 12-94

***12-96.** Determine la deflexión en el extremo E de la viga CDE. Las vigas están hechas de madera con un módulo de elasticidad $E = 10$ GPa.



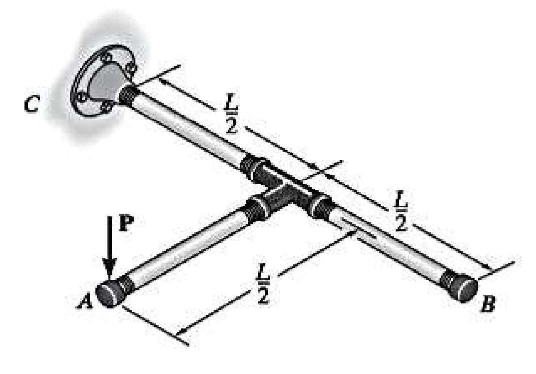
Prob. 12-96

12-95. La viga simplemente apoyada es de acero A-36 y se somete a la carga mostrada en la figura. Determine la deflexión en su centro C. $I = 0.1457(10^{-3})$ m^4.



Prob. 12-95

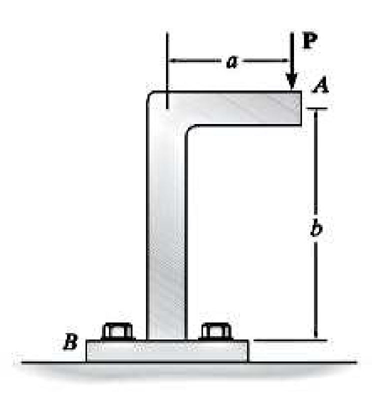
•12-97. El ensamble de tubería se compone de tres tubos del mismo tamaño con rigidez a la flexión EI y rigidez a la torsión GJ. Determine la deflexión vertical en el punto A.



Prob. 12-97

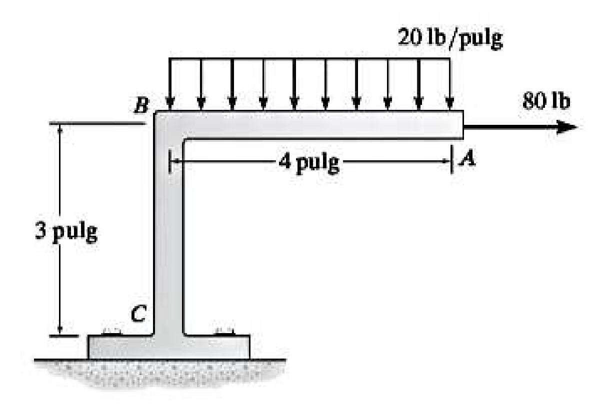
12

12-98. Determine la deflexión vertical en el extremo A de la ménsula. Suponga que la ménsula se sostiene fijamente en su base B y no tome en cuenta la deflexión axial. EI es constante.



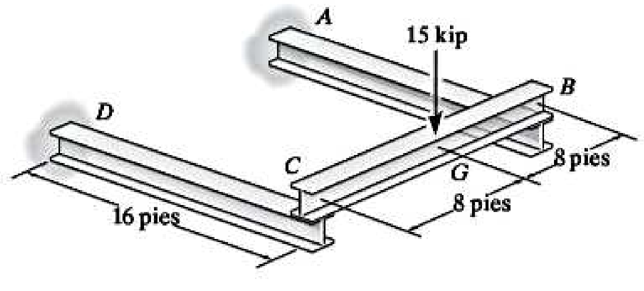
Prob. 12-98

12-99. Determine la deflexión vertical y la pendiente en el extremo A de la ménsula. Suponga que la ménsula se sostiene fijamente en su base y no tome en cuenta la deformación axial del segmento AB. EI es constante.



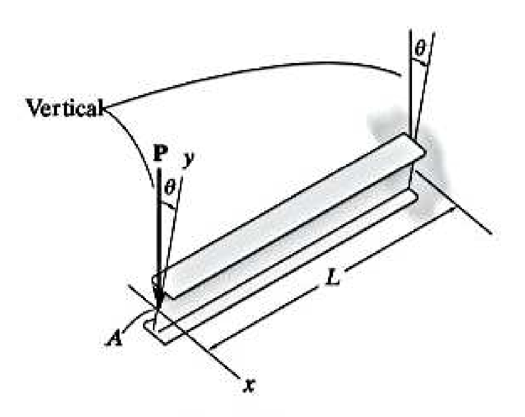
Prob. 12-99

***12-100.** El bastidor consta de dos vigas en voladizo CD y BA y una viga simplemente apoyada CB, todas de acero A-36. Si cada viga tiene un momento de inercia respecto a su eje principal de $I_x = 118$ pulg^4, determine la deflexión en el centro G de la viga CB.



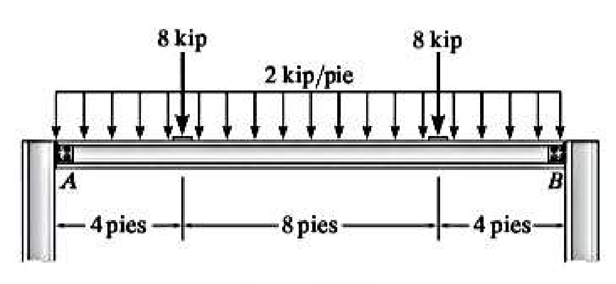
Prob. 12-100

•12-101. La viga I de ala ancha actúa como un voladizo. Debido a un error se instala a un ángulo θ con la vertical. Determine la relación en A de su deflexión en la dirección x sobre su deflexión en la dirección y, cuando se aplica una carga **P** en este punto. Los momentos de inercia son I_x e I_y. Para la solución, descomponga **P** en sus componentes y use el método de superposición. *Nota:* El resultado indica que en vigas delgadas, $I_y \ll I_x$, pueden ocurrir grandes deflexiones laterales (dirección x), cuando están mal instaladas de esta manera. Para mostrar esto numéricamente, calcule las deflexiones en las direcciones x y y para una viga W10 × 15 de acero A-36, con $P = 1.5$ kip, $\theta = 10°$ y $L = 12$ pies.



Prob. 12-101

12-102. La viga simplemente apoyada soporta una carga uniforme de 2 kip/pie. Las restricciones de código, debidas a un techo de yeso, requieren que la deflexión máxima no exceda 1/360 de la longitud del tramo. Seleccione del apéndice B la viga I de ala ancha de acero A-36 con menor peso que cumpla este requisito y soporte con seguridad la carga. El esfuerzo flexionante permisible es $\sigma_{perm} = 24$ ksi y el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = 14$ ksi. Suponga que A es un pasador y B un soporte de rodillos.

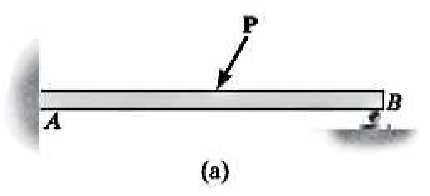


Prob. 12-102

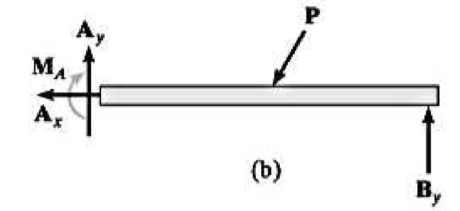
12.6 Vigas y ejes estáticamente indeterminados

Las barras cargadas axialmente y los ejes cargados a torsión que son estáticamente indeterminados se analizaron en las secciones 4.4 y 5.5, respectivamente. En esta sección se ilustrará un método general para determinar las reacciones sobre vigas y ejes estáticamente indeterminados. En específico, un elemento de cualquier tipo se clasifica como *estáticamente indeterminado* si el número de reacciones desconocidas *excede* el número disponible de ecuaciones de equilibrio.

Las reacciones adicionales en los soportes de la viga o eje que *no son necesarias* para mantenerlo en equilibrio estable se llaman *redundantes*. El número de estas redundantes se conoce como el *grado de indeterminación*. Por ejemplo, considere la viga mostrada en la figura 12-32*a*. Si se dibuja el diagrama de cuerpo libre, figura 12-32*b*, habrá cuatro reacciones desconocidas en los soportes, y como hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles para la solución, la viga se clasifica como indeterminada de primer grado. $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_y$ o $\mathbf{M}_A$ pueden clasificarse como redundantes, porque si cualquiera de estas reacciones se elimina, la viga se mantiene estable y en equilibrio ($\mathbf{A}_x$ no puede clasificarse como redundante, porque al retirarla no se satisface $\Sigma F_x = 0$.) De manera similar, la *viga continua* de la figura 12-33*a* es indeterminada de segundo grado, puesto que hay cinco reacciones desconocidas y sólo tres ecuaciones de equilibrio disponibles, figura 12-33*b*. Aquí, las dos reacciones redundantes en los soportes pueden elegirse entre $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{C}_y$ y $\mathbf{D}_y$.

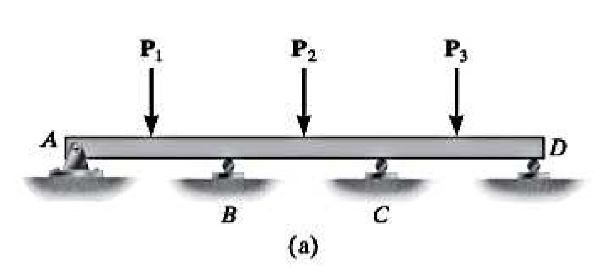


(a)

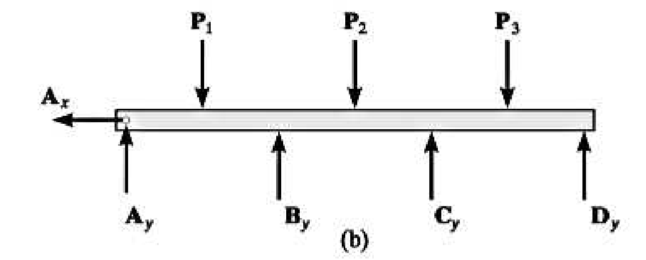


(b)

Figura 12-32



(a)



(b)

Figura 12-33

Para determinar las reacciones en una viga (o eje) que es estáticamente indeterminada, primero es necesario especificar las reacciones redundantes. Estas redundantes pueden determinarse a partir de las condiciones de geometría conocidas como las *condiciones de compatibilidad*. Una vez encontradas, las redundantes se aplican a la viga y las reacciones restantes se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio.

En las siguientes secciones se ilustrará este procedimiento de solución mediante el método de integración, sección 12.7; el método del momento de área, sección 12.8; y el método de superposición, sección 12.9.

12.7 Vigas y ejes estáticamente indeterminados: método de integración

El método de integración, analizado en la sección 12.2, requiere dos integraciones de la ecuación diferencial $d^2v/dx^2 = M/EI$ una vez que el momento interno M en la viga se expresa como una función de la posición x. Sin embargo, si la viga es estáticamente indeterminada, M también puede expresarse en términos de las redundantes *desconocidas*. Después de integrar dos veces esta ecuación, habrá dos constantes de integración junto con las redundantes a determinar. Aunque esto sea así, las incógnitas siempre pueden encontrarse a partir de las condiciones de frontera y continuidad para el problema.

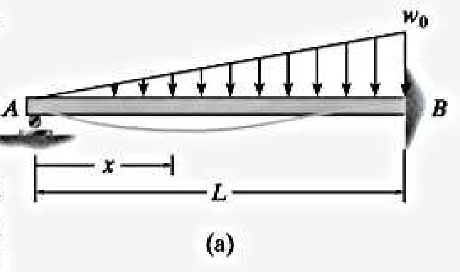
En los siguientes problemas de ejemplo se ilustran aplicaciones específicas de este método usando el procedimiento de análisis descrito en la sección 12.2.



Ejemplo de una viga estáticamente indeterminada que se usa para soportar la losa de un puente.

EJEMPLO 12.17

La viga está sometida a la carga distribuida de la figura 12-34*a*. Determine la reacción en *A*. *EI* es constante.



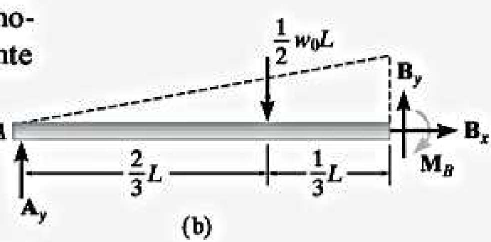
(a)

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga experimenta deflexión, como se muestra en la figura 12-34*a*. Sólo se requiere una coordenada *x*. Por conveniencia se tomará dirigida a la derecha, puesto que el momento interno es fácil de formular.

Función de momento. La viga es indeterminada de primer grado como se indica en el diagrama de cuerpo libre, figura 12-34*b*. El momento interno *M* puede expresarse en términos de la fuerza redundante en *A* usando el segmento mostrado en la figura 12-34*c*. Aquí,

$$M = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$



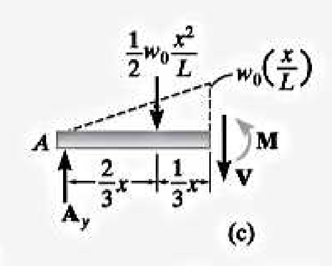
(b)

Pendiente y curva elástica. Al aplicar la ecuación 12-10, se tiene

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} A_y x^2 - \frac{1}{24} w_0 \frac{x^4}{L} + C_1$$

$$EIv = \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{120} w_0 \frac{x^5}{L} + C_1 x + C_2$$



(c)

Figura 12-34

Las tres incógnitas A_y, C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones de frontera $x = 0$, $v = 0$; $x = L$, $dv/dx = 0$, y $x = L$, $v = 0$. Al aplicar estas condiciones se obtiene

$$x = 0,\ v = 0; \qquad 0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$

$$x = L,\ \frac{dv}{dx} = 0; \qquad 0 = \frac{1}{2} A_y L^2 - \frac{1}{24} w_0 L^3 + C_1$$

$$x = L,\ v = 0; \qquad 0 = \frac{1}{6} A_y L^3 - \frac{1}{120} w_0 L^4 + C_1 L + C_2$$

Al resolver,

$$A_y = \frac{1}{10} w_0 L \qquad \textit{Resp.}$$

$$C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3 \quad C_2 = 0$$

NOTA: Si se usa el resultado de A_y, las reacciones en *B* pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 12-34*b*. Demuestre que $B_x = 0$, $B_y = 2w_0L/5$ y $M_B = w_0L^2/15$.

12

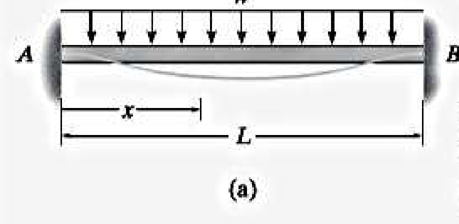
EJEMPLO 12.18

La viga de la figura 12-35*a* está soportada fijamente en ambos extremos y se somete a la carga uniforme mostrada en la figura. Determine las reacciones en los soportes. No tome en cuenta el efecto de la carga axial.

SOLUCIÓN

Curva elástica. La viga sufre deflexión, como se muestra en la figura 12-35*a*. Al igual que en el problema anterior, sólo se requiere una coordenada x para obtener la solución ya que la carga es continua en todo el segmento.

Función de momento. A partir del diagrama de cuerpo libre, figura 12-35*b*, las reacciones cortante y de momento respectivas en A y B deben ser iguales, puesto que hay simetría de las dos cargas y la geometría. Debido a esto, la ecuación de equilibrio, $\Sigma F_y = 0$, requiere



(a)

$$V_A = V_B = \frac{wL}{2} \qquad \textit{Resp.}$$

La viga es indeterminada de primer grado, donde M' es redundante. Si se usa el segmento de viga de la figura 12-35*c*, el momento interno **M** puede expresarse en términos de M' de la siguiente manera:

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M'$$

(b)

Pendiente y curva elástica. Al aplicar la ecuación 12-10, se tiene

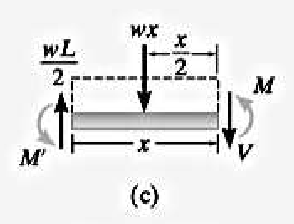
$$EI\frac{d^2v}{dx} = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M'$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 - M'x + C_1$$

$$EIv = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 - \frac{M'}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

Las tres incógnitas M', C_1 y C_2, pueden determinarse a partir de las tres condiciones de frontera $v = 0$ en $x = 0$, de donde se obtiene $C_2 = 0$; $dv/dx = 0$ en $x = 0$, que resulta en $C_1 = 0$ y $v = 0$ en $x = L$, de donde se obtiene

$$M' = \frac{wL^2}{12} \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

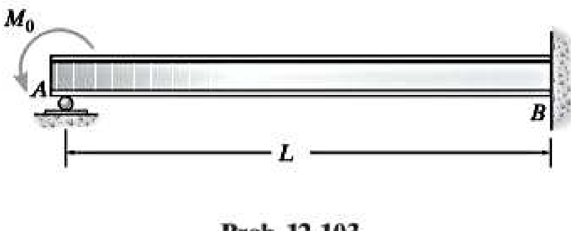
Figura 12-35

Si se usan estos resultados, puede observarse que debido a la simetría la condición de frontera restante $dv/dx = 0$ en $x = L$ se satisface de manera automática.

NOTA: Se debe tener en cuenta que este método de solución es generalmente adecuado cuando sólo se requiere una coordenada x para describir la curva elástica. Si se necesitan varias coordenadas x, es indispensable escribir las ecuaciones de continuidad, lo que complica el proceso de solución.

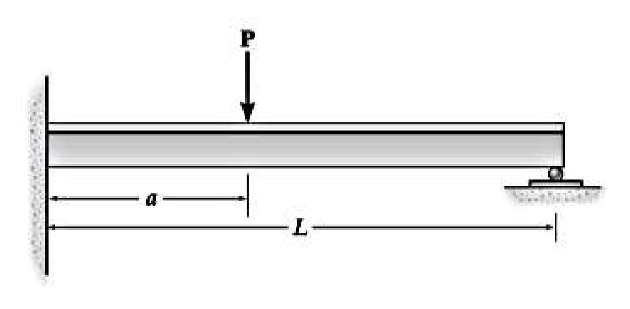
PROBLEMAS

12-103. Determine las reacciones en los apoyos A y B, después dibuje el diagrama de momento. EI es constante.



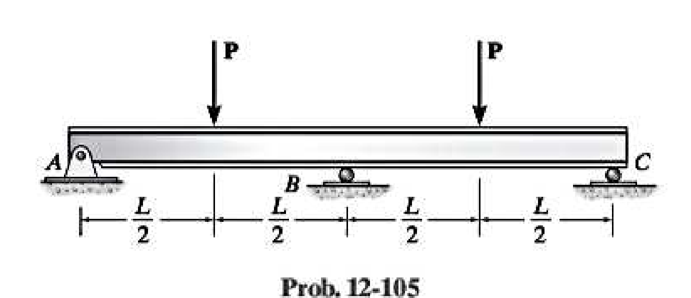
Prob. 12-103

***12-104.** Determine el valor de a para el cual el momento positivo máximo tiene la misma magnitud que el momento negativo máximo. EI es constante.



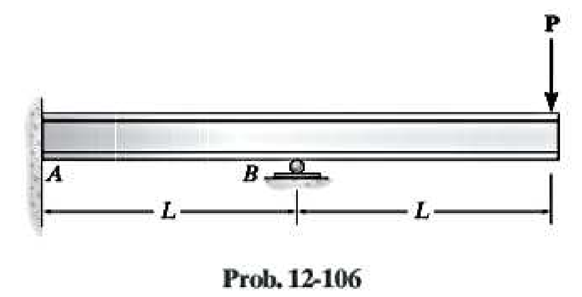
Prob. 12-104

•12-105. Determine las reacciones en los soportes A, B y C; después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. EI es constante.



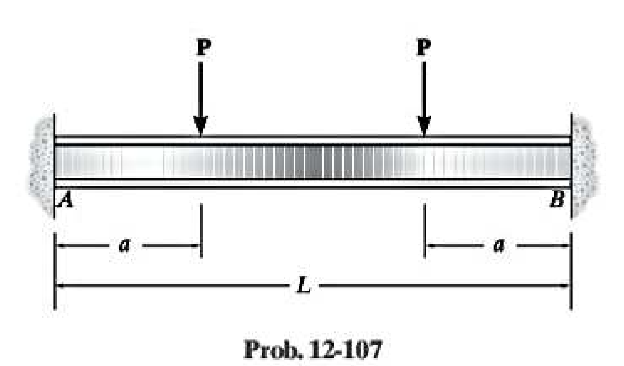
Prob. 12-105

12-106. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. EI es constante.



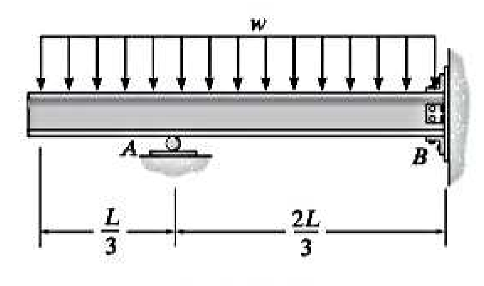
Prob. 12-106

12-107. Determine las reacciones de momento en los soportes A y B. EI es constante.



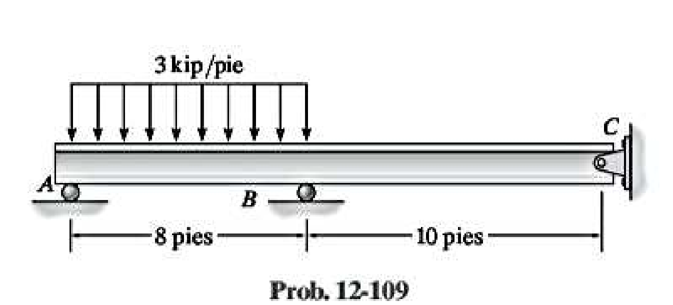
Prob. 12-107

***12-108.** Determine las reacciones en el soporte de rodillo A y en el soporte fijo B.



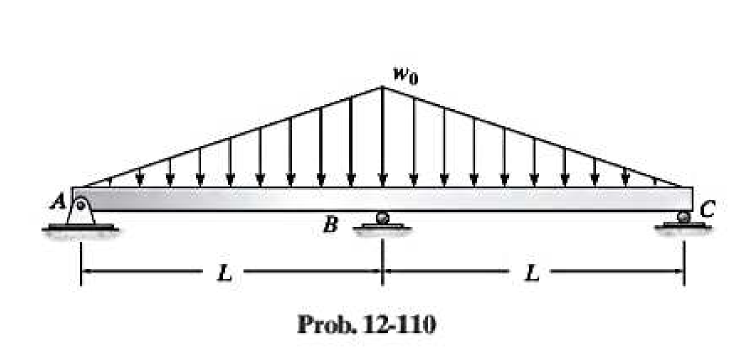
Prob. 12-108

•**12-109.** Use funciones de discontinuidad y determine las reacciones en los soportes, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. *EI* es constante.



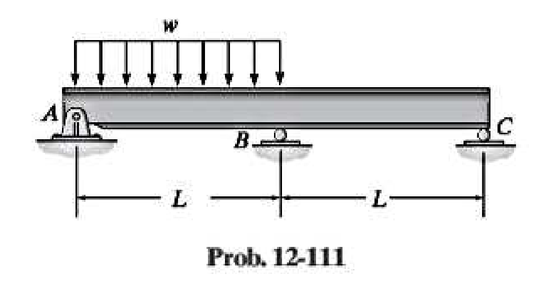
Prob. 12-109

12-110. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. *EI* es constante.



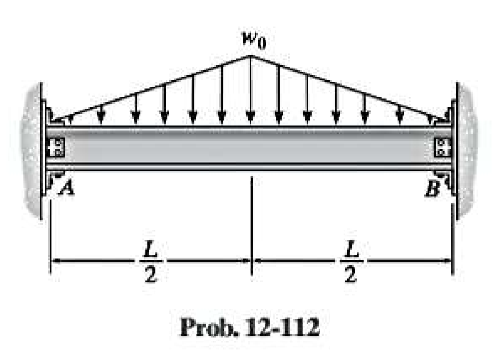
Prob. 12-110

12-111. Determine las reacciones en el soporte de pasador *A* y en los soportes de rodillo *B* y *C*. *EI* es constante.



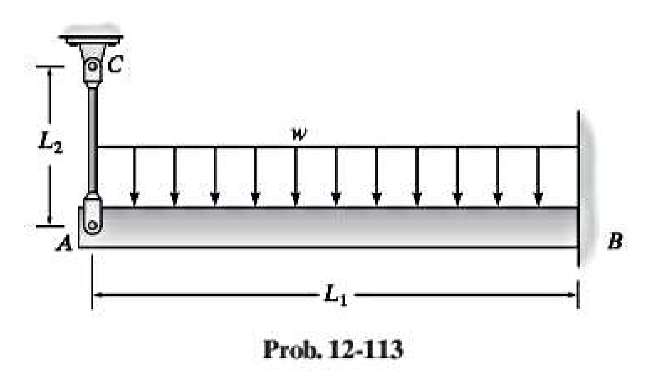
Prob. 12-111

***12-112.** Determine las reacciones de momento en los soportes fijos *A* y *B*. *EI* es constante.



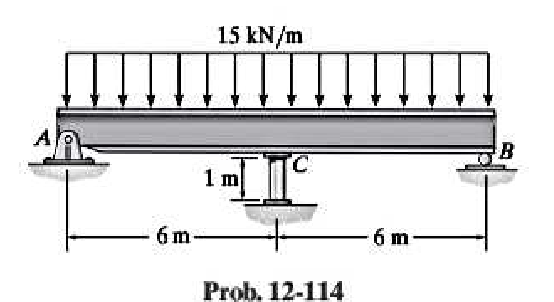
Prob. 12-112

•**12-113.** La viga tiene una constante E_1I_1 y se sostiene mediante la pared fija en *B* y la barra *AC*. Si la barra tiene un área A_2 en su sección transversal y el material tiene un módulo de elasticidad E_2, determine la fuerza en la barra.



Prob. 12-113

12-114. La viga está soportada mediante un pasador en *A*, un rodillo en *B* y un poste que tiene un diámetro de 50 mm en *C*. Determine las reacciones en los soportes *A*, *B* y *C*. El poste y la viga son del mismo material con un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa, y la viga tiene un momento de inercia constante $I = 255(10^6)$ mm^4.



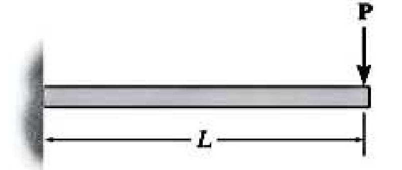
Prob. 12-114

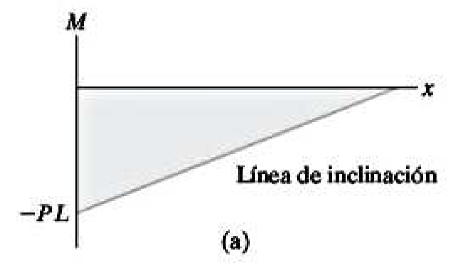
*12.8 Vigas y ejes estáticamente indeterminados: método del momento de área

Si se usa el método del momento de área para determinar las redundantes desconocidas de una viga o eje estáticamente indeterminado, entonces debe dibujarse el diagrama M/EI de modo que en él se representen las redundantes como incógnitas. Una vez que se ha establecido el diagrama M/EI, pueden aplicarse los dos teoremas del momento de área para obtener las relaciones adecuadas entre las tangentes de la curva elástica a fin de satisfacer las condiciones de desplazamiento y la pendiente en los soportes de la viga. En todos los casos, el número de estas condiciones de compatibilidad será equivalente al número de redundantes, por lo que es posible obtener una solución para las redundantes.

Diagramas de momento construidos por el método de superposición. Como la aplicación de los teoremas del momento de área requiere el cálculo tanto del área bajo el diagrama M/EI como de la ubicación centroidal de esta área, a menudo resulta conveniente usar *por separado* diagramas M/EI para *cada una* de las cargas y redundantes conocidas en vez de emplear el *diagrama resultante* para calcular estas cantidades geométricas. Esto es en especial cierto si el diagrama de momento resultante tiene una forma complicada. El método para dibujar el diagrama de momento en partes se basa en el principio de superposición.

La mayoría de las cargas sobre *vigas o ejes* en voladizo son una combinación de las cuatro cargas mostradas en la figura 12-36. La construcción de los diagramas de momento asociados, también se muestra en esta figura, de acuerdo con el análisis de los ejemplos del capítulo 6. Con base en estos resultados, ahora se mostrará cómo emplear el método de superposición para representar el diagrama de momento resultante de una serie de diagramas de momento separados para la viga en voladizo de la figura 12-37*a*. Para ello, primero se sustituirán las cargas por un sistema de cargas estáticamente equivalente. Por ejemplo, las tres vigas en voladizo mostra-





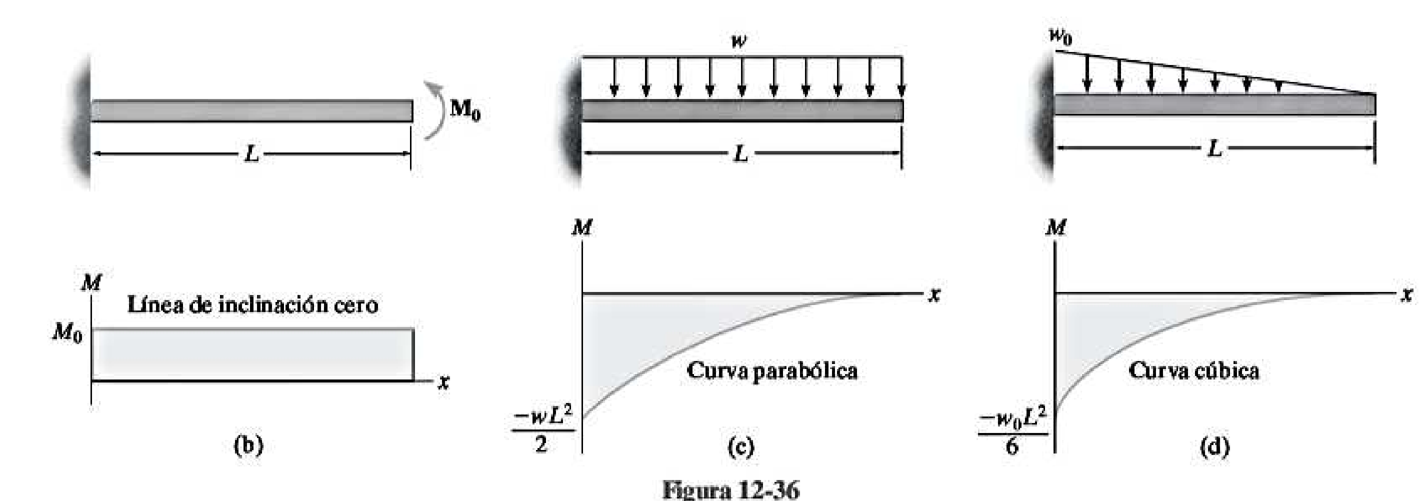
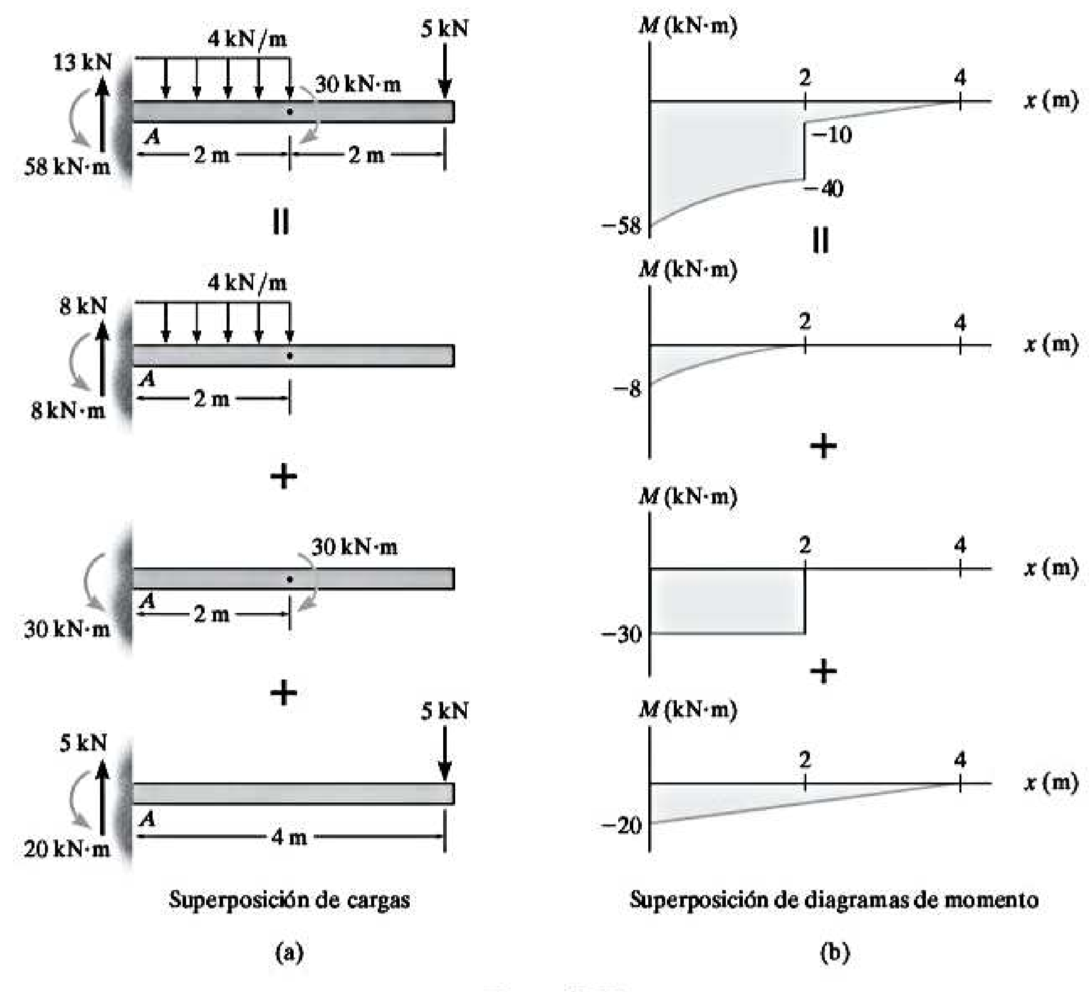


Figura 12-36



Superposición de cargas

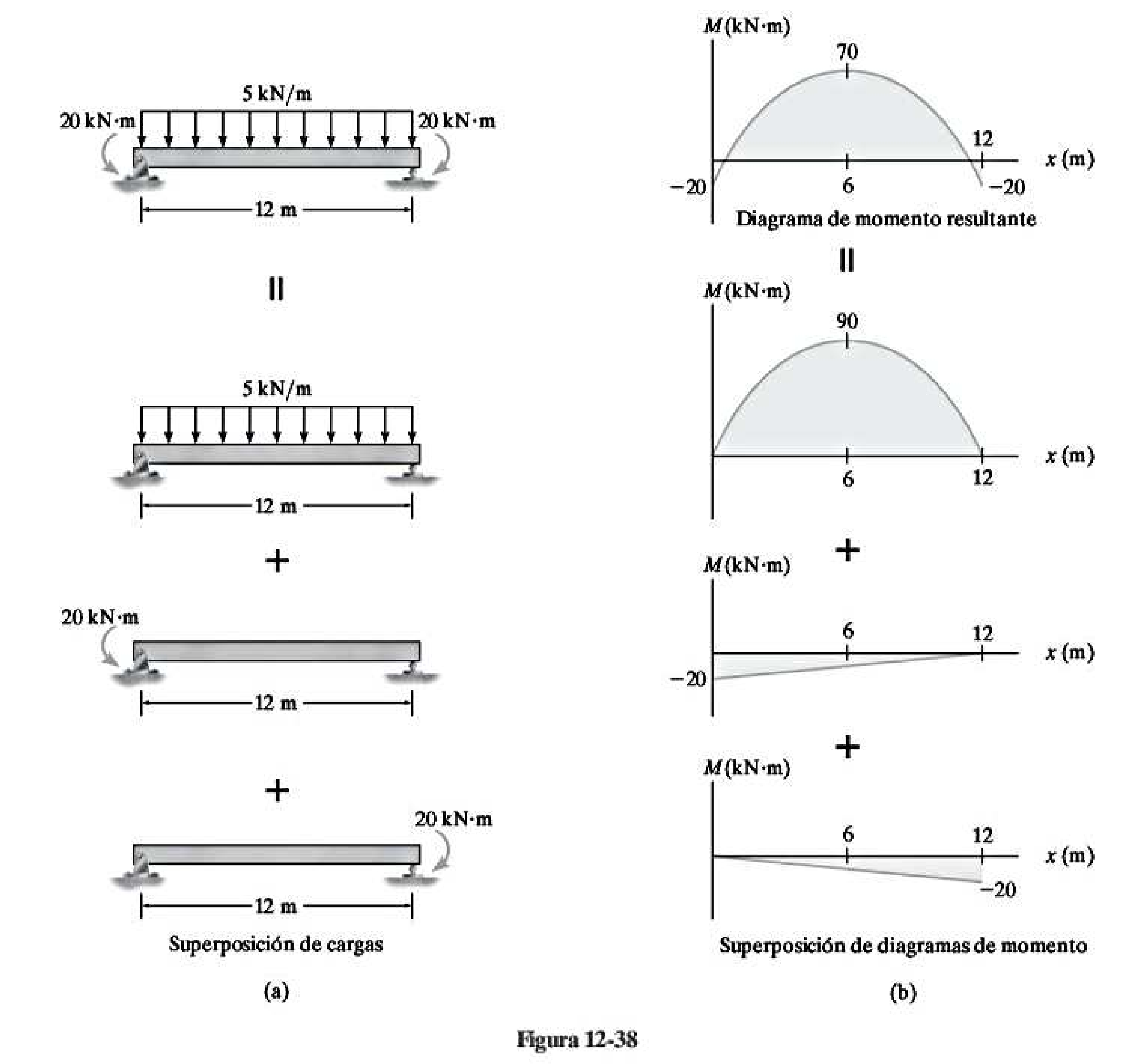
(a)

Superposición de diagramas de momento

(b)

Figura 12-37

das en la figura 12-37*a* son estáticamente equivalentes a la viga resultante, ya que la carga en cada punto de la viga resultante es igual a la superposición o la adición de las cargas en las tres vigas separadas. Por lo tanto, si se dibujan los diagramas de momento para cada viga separada, figura 12-37*b*, la superposición de estos diagramas resultará en el diagrama de momentos para la viga resultante, que se muestra en la parte superior. Por ejemplo, a partir de cada uno de los diagramas de momento separados, el momento en el extremo *A* es $M_A = -8 \text{ kN} \cdot \text{m} - 30 \text{ kN} \cdot \text{m} - 20 \text{ kN} \cdot \text{m} = -58 \text{ kN} \cdot \text{m}$, como se verifica con el diagrama de momentos de la parte superior. Este ejemplo demuestra que en ocasiones resulta más fácil construir por separado una serie de diagramas de momento estáticamente equivalentes para la viga, *en vez* de construir un diagrama de momento resultante más complicado. Como es obvio, es más fácil establecer el área y la ubicación del centroide de cada porción que determinar estos valores a partir del diagrama resultante.



Superposición de cargas

(a)

Superposición de diagramas de momento

(b)

Figura 12-38

De manera similar, el diagrama de momento resultante también puede representarse para una *viga simplemente apoyada* mediante una superposición de los diagramas de momento para cada carga que actúa sobre una serie de vigas simplemente apoyadas. Por ejemplo, las cargas sobre una viga que se muestran en la parte superior de la figura 12-38*a* son equivalentes a la suma de las cargas sobre la viga que se muestran debajo de la misma. En consecuencia, la suma de los diagramas de momento para cada una de estas tres cargas puede emplearse en lugar del diagrama de momento resultante que se muestra en la parte superior de la figura 12-38*b*.

Los siguientes ejemplos servirán para aclarar algunos de estos puntos y mostrar cómo se utilizan los teoremas del momento de área para obtener las reacciones redundantes en vigas y ejes estáticamente indeterminados. Las soluciones siguen el procedimiento de análisis descrito en la sección 12.4.

EJEMPLO 12.19

La viga se somete a la fuerza concentrada que se muestra en la figura 12-39*a*. Determine las reacciones en los soportes. *EI* es constante.

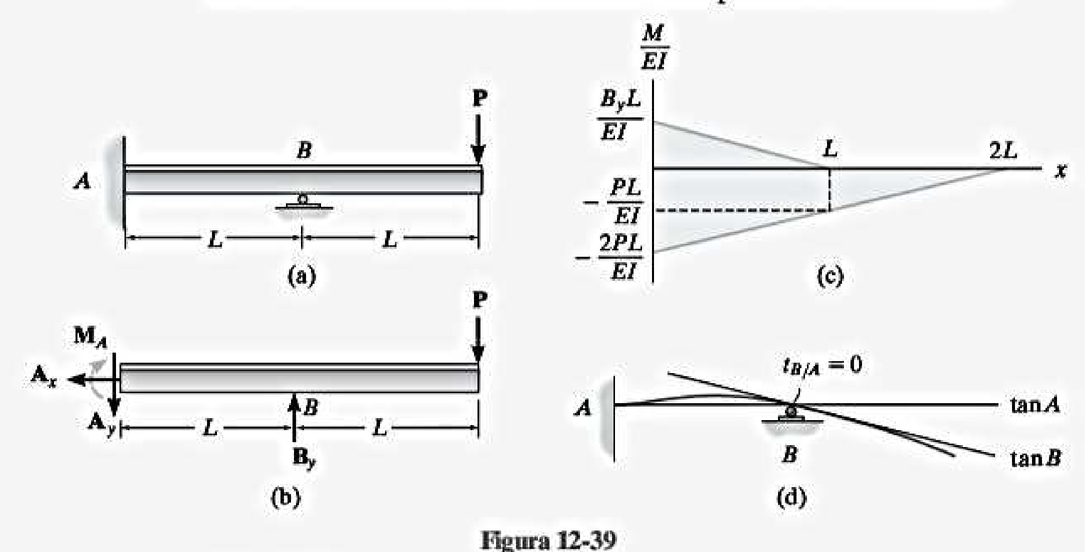


Figura 12-39

SOLUCIÓN

Diagrama *M*/*EI*. En la figura 12-39*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre. Si se usa el método de superposición, los diagramas *M*/*EI* separados para la reacción redundante $\mathbf{B}_y$ y para la carga **P** se muestran en la figura 12-39*c*.

Curva elástica. La curva elástica para la viga se muestra en la figura 12-39*d*. Se han construido las tangentes en los soportes *A* y *B*. Como $\Delta_B = 0$, entonces

$$t_{B/A} = 0$$

Teorema del momento de área. Al aplicar el teorema 2, se tiene

$$t_{B/A} = \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_yL}{EI}\right)L\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{-PL}{EI}(L)\right] + \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-PL}{EI}\right)(L)\right] = 0$$

$$B_y = 2.5P \qquad \textit{Resp.}$$

Ecuaciones de equilibrio. Si se usa este resultado, las reacciones en *A* mostradas en el diagrama de cuerpo libre, figura 12-39*b*, son

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $\quad A_x = 0$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad -A_y + 2.5P - P = 0$

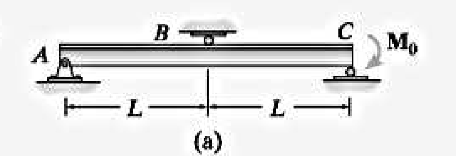
$A_y = 1.5P$ *Resp.*

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$ $\quad -M_A + 2.5P(L) - P(2L) = 0$

$M_A = 0.5PL$ *Resp.*

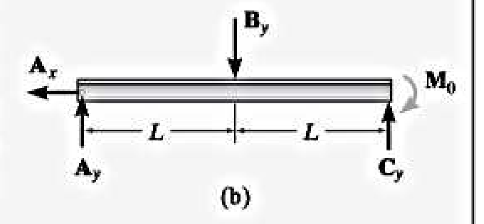
EJEMPLO 12.20

La viga se somete a un momento de par en su extremo C como se muestra en la figura 12-40a. Determine la reacción en B. EI es constante.

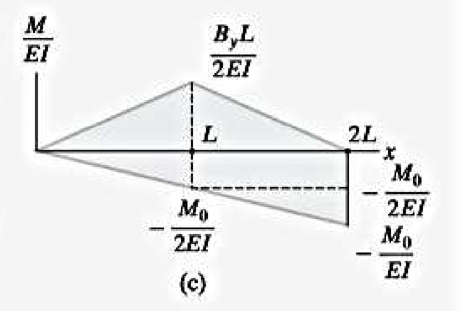


SOLUCIÓN

Diagrama M/EI. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 12-40b. Por inspección, la viga es indeterminada de primer grado. Con el fin de obtener una solución directa, se elegirá $\mathbf{B}_y$ como la redundante. Usando la superposición, los diagramas M/EI para $\mathbf{B}_y$ y $\mathbf{M}_0$, cada uno aplicado a una viga simplemente apoyada, se muestran en la figura 12-40c. (Observe que para una viga de este tipo A_x, A_y y C_y no contribuyen a un diagrama M/EI.)



Curva elástica. La curva elástica para la viga se muestra en la figura 12-40d. Se han establecido las tangentes en A, B y C. Como $\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = 0$, entonces las distancias verticales indicadas deben ser proporcionales; es decir,

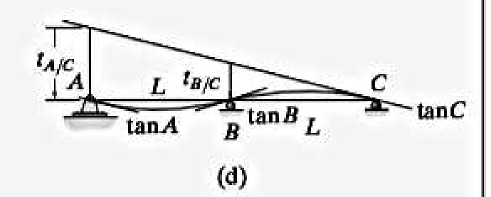


$$t_{B/C} = \frac{1}{2}t_{A/C} \qquad (1)$$

A partir de la figura 12-40c, se tiene

$$t_{B/C} = \left(\frac{1}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_yL}{2EI}\right)(L)\right] + \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-M_0}{2EI}\right)(L)\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\left(\frac{-M_0}{2EI}\right)(L)\right]$$

$$t_{A/C} = (L)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_yL}{2EI}\right)(2L)\right] + \left(\frac{2}{3}(2L)\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-M_0}{EI}\right)(2L)\right]$$



Al sustituir en la ecuación 1 y al simplificar se obtiene

$$B_y = \frac{3M_0}{2L} \qquad \textit{Resp.}$$

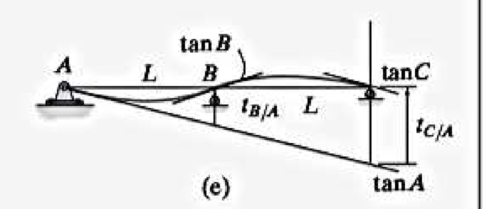


Figura 12-40

Ecuaciones de equilibrio. Ahora es posible determinar las reacciones en A y C a partir de las ecuaciones de equilibrio, figura 12-40b. Demuestre que $A_x = 0$, $C_y = 5M_0/4L$ y $A_y = M_0/4L$.

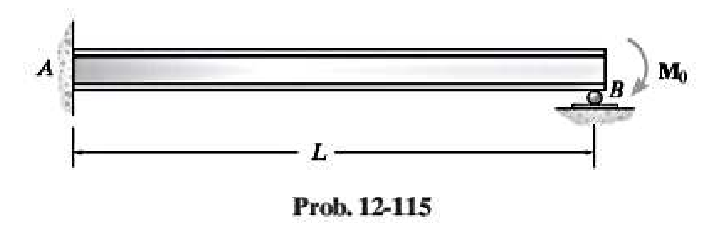
Observe, con base en la figura 12-40e que este problema también se puede manejar en términos de las distancias verticales,

$$t_{B/A} = \frac{1}{2}t_{C/A}$$

12

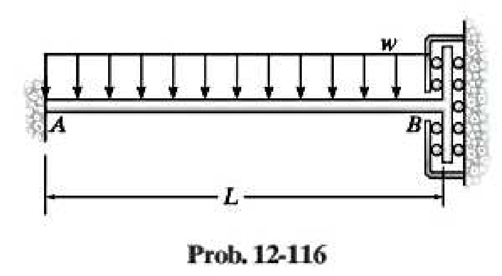
PROBLEMAS

12-115. Determine las reacciones de momento en los soportes *A* y *B*, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. *EI* es constante.



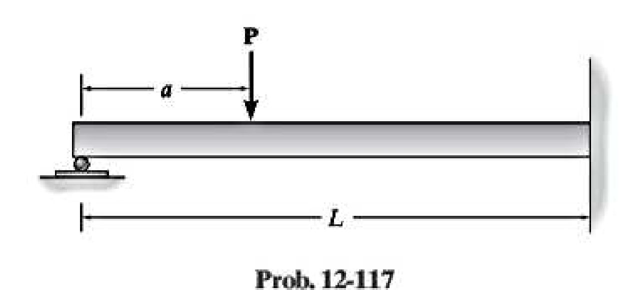
Prob. 12-115

***12-116.** La barra está fija en *A* y la conexión en *B* consiste en un alojamiento de rodillos que permite el desplazamiento vertical pero se resiste a la carga axial y al momento. Determine las reacciones de momento en estos soportes. *EI* es constante.



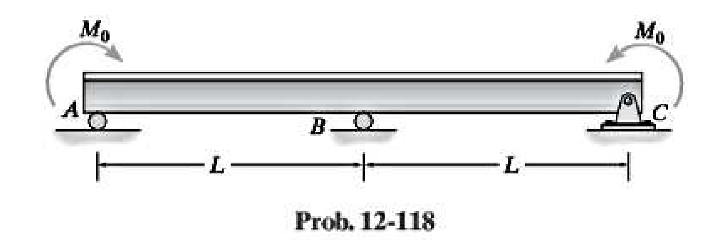
Prob. 12-116

•**12-117.** Determine el valor de *a* para el cual el momento positivo máximo tiene la misma magnitud que el momento negativo máximo. *EI* es constante.



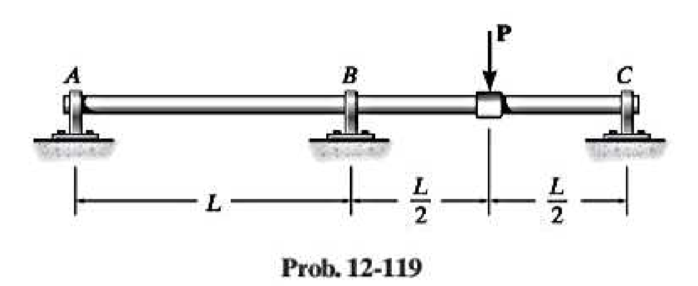
Prob. 12-117

12-118. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. *EI* es constante.



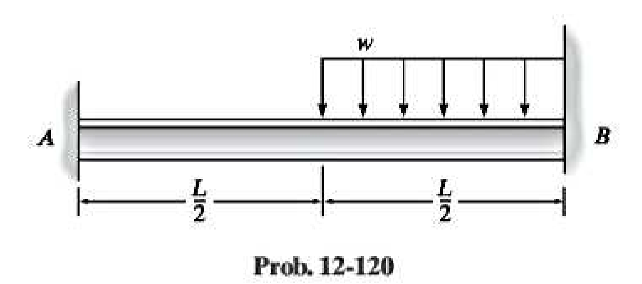
Prob. 12-118

12-119. Determine las reacciones en los soportes, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. *EI* es constante. El soporte *B* es un cojinete de empuje.



Prob. 12-119

***12-120.** Determine las reacciones de momento en los soportes *A* y *B*. *EI* es constante.



Prob. 12-120

12.9 Vigas y ejes estáticamente indeterminados: método de superposición

El método de superposición se ha utilizado previamente para resolver las cargas redundantes en barras cargadas axialmente y ejes cargados a torsión. Para aplicar este método en la solución de vigas (o ejes) estáticamente indeterminadas, primero es necesario identificar las reacciones redundantes en los soportes, como se explica en la sección 12.6. Al *eliminarlos* de la viga se obtiene la llamada *viga primaria*, que es estáticamente determinada y estable, además está sometida *sólo* a la carga externa. Si a esta viga se le agrega una sucesión de vigas apoyadas de manera similar, cada una cargada con una redundante *separada*, entonces por el principio de superposición, se obtiene la viga cargada real. Por último, con el fin de despejar las redundantes, es necesario escribir las *condiciones de compatibilidad* que existen en los soportes donde actúa cada una de las redundantes. Como de esta manera las fuerzas redundantes se determinan directamente, el método de análisis se denomina en ocasiones ***método de fuerza***. Una vez que se obtienen las redundantes, las otras reacciones sobre la viga pueden determinarse a partir de las tres ecuaciones de equilibrio.

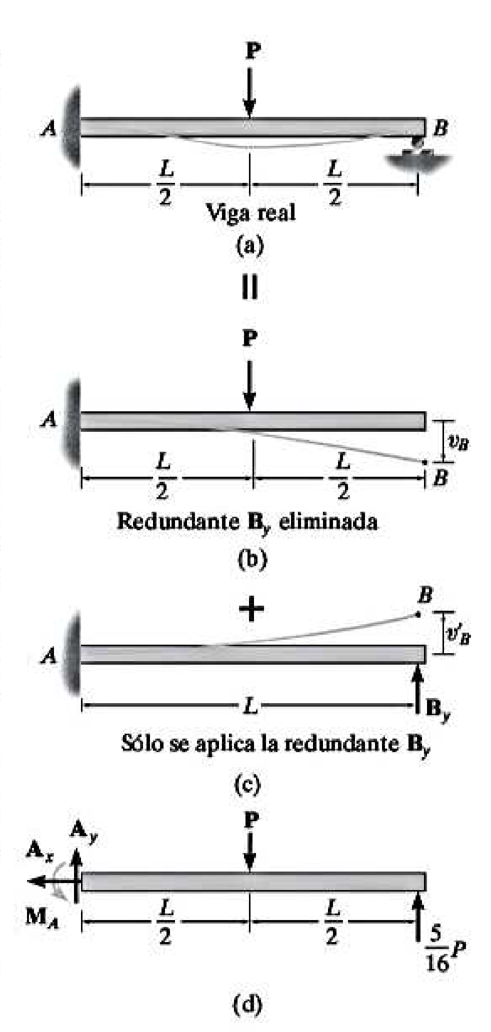


Figura 12-41

Para aclarar estos conceptos, considere la viga de la figura 12-41*a*. Si se elige la reacción $\mathbf{B}_y$ en el rodillo como redundante, entonces la viga primaria es la mostrada en la figura 12-41*b*, y la viga sobre la que actúa la redundante $\mathbf{B}_y$ se muestra en la figura 12-41*c*. El desplazamiento en el rodillo debe ser igual a cero, y como el desplazamiento del punto *B* sobre la viga primaria es v_B, y $\mathbf{B}_y$ causa que el punto *B* se desplace hacia arriba v'_B, es posible escribir la ecuación de compatibilidad en *B* como

$$(+\uparrow) \qquad 0 = -v_B + v'_B$$

Los desplazamientos v_B y v'_B pueden obtenerse mediante cualquiera de los métodos descritos en las secciones 12.2 a 12.5. Aquí se obtendrán directamente de la tabla del apéndice C. Se tiene

$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} \quad \text{y} \quad v'_B = \frac{B_yL^3}{3EI}$$

Al sustituir en la ecuación de compatibilidad, se obtiene

$$0 = -\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{B_yL^3}{3EI}$$

$$B_y = \frac{5}{16}P$$

Ahora que se conoce $\mathbf{B}_y$, las reacciones en la pared se determinan a partir de las tres ecuaciones de equilibrio aplicadas al diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 12-41*d*. Los resultados son

$$A_x = 0 \qquad A_y = \frac{11}{16}P$$

$$M_A = \frac{3}{16}PL$$

12

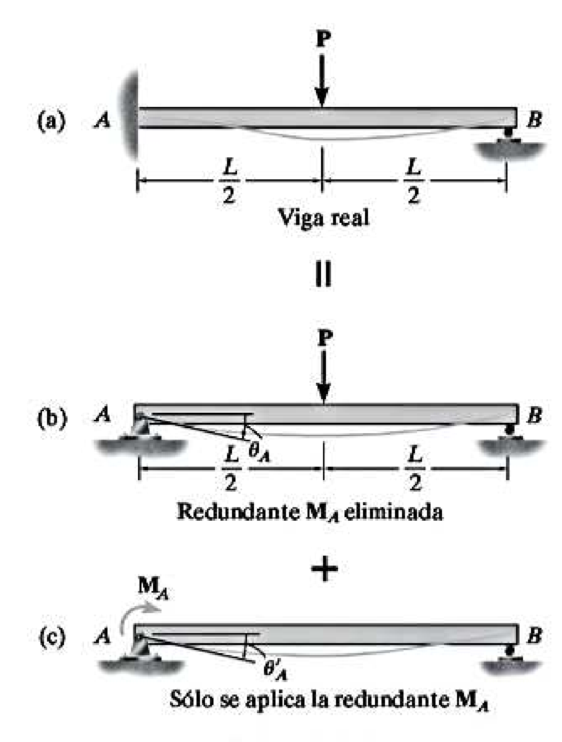


Figura 12-42

Como se estableció en la sección 12.6, la elección de la redundante es *arbitraria* siempre que la viga primaria se mantenga estable. Por ejemplo, el momento en A para la viga de la figura 12-42*a* también se puede elegir como redundante. En este caso, la capacidad de la viga para resistir $\mathbf{M}_A$ se elimina, por lo que la viga primaria es la que se sostiene mediante un pasador en A, figura 12-42*b*. A ésta se le agrega la viga sobre la cual actúa la redundante en A, figura 12-42*c*. Si a la pendiente en A causada por la carga $\mathbf{P}$ se le denomina θ_A y a la pendiente en A causada por la redundante $\mathbf{M}_A$ se le llama θ'_A, la ecuación de compatibilidad para la pendiente en A requiere

$$(\curvearrowleft +) \qquad 0 = \theta_A + \theta'_A$$

De nuevo, si se usa la tabla del apéndice C, se tiene

$$\theta_A = \frac{PL^2}{16EI} \qquad \text{y} \qquad \theta'_A = \frac{M_A L}{3EI}$$

Por lo tanto,

$$0 = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_A L}{3EI}$$

$$M_A = -\frac{3}{16}PL$$

Este es el mismo resultado que se determinó previamente. Aquí, el signo negativo para M_A sólo significa que $\mathbf{M}_A$ actúa en sentido opuesto a la dirección mostrada en la figura 12-42*c*.

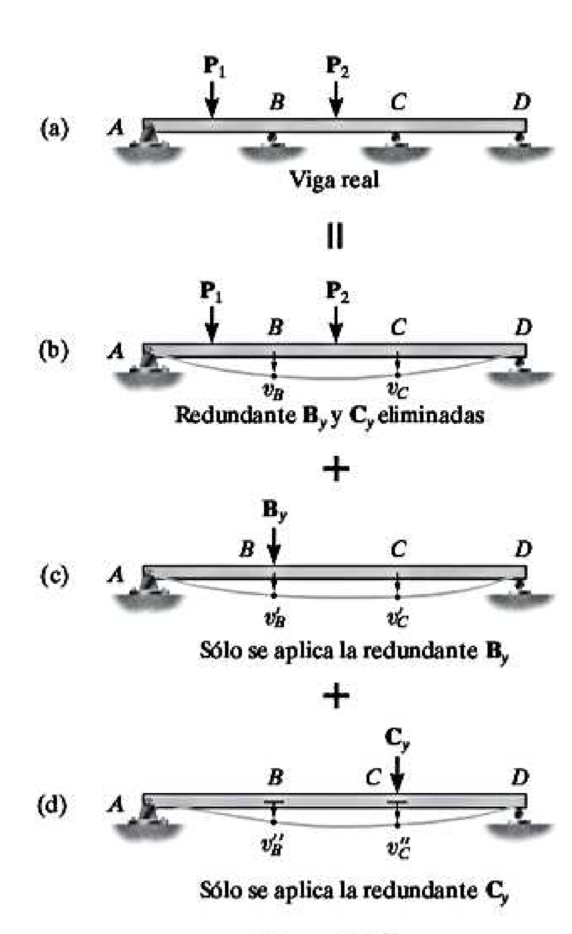


Figura 12-43

En la figura 12-43*a* se proporciona otro ejemplo que ilustra este método. En este caso, la viga es indeterminada de segundo grado y, por lo tanto, se necesitarán *dos* ecuaciones de compatibilidad para obtener la solución. Se elegirán las fuerzas en los soportes de rodillo B y C como redundantes. La viga primaria (estáticamente determinada) se deforma de la manera mostrada en la figura 12-43*b* cuando se retiran las redundantes. Cada fuerza redundante deforma esta viga como se muestra en las figuras 12-43*c* y 12-43*d*, respectivamente. Por superposición, las ecuaciones de compatibilidad para los desplazamientos en B y C son

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B + v'_B + v''_B$$

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_C + v'_C + v''_C \qquad (12\text{-}20)$$

Aquí, las componentes del desplazamiento v'_B y v'_C se expresarán en términos de la incógnita $\mathbf{B}_y$, y las componentes v''_B y v''_C se expresarán en términos de la incógnita $\mathbf{C}_y$. Cuando estos desplazamientos se hayan determinado y sustituido en la ecuación 12-20, entonces las ecuaciones podrán resolverse de manera simultánea para las dos incógnitas $\mathbf{B}_y$ y $\mathbf{C}_y$.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un medio para aplicar el método de superposición (o el método de fuerza) para determinar las reacciones en vigas o ejes estáticamente indeterminados.

Curva elástica.

- Especifique las fuerzas o momentos redundantes desconocidos que deben retirarse de la viga con el fin de hacerla estáticamente determinada y estable.
- Mediante el principio de superposición, dibuje la viga estáticamente indeterminada y muéstrela como una secuencia de las *vigas estáticamente determinadas* correspondientes.
- La primera de estas vigas, la viga primaria, soporta las mismas cargas externas que la viga estáticamente indeterminada, y cada una de las otras vigas "agregadas" a la viga primaria muestra a la viga cargada con una fuerza o momento redundante independiente.
- Dibuje la curva de deflexión para cada viga e indique de manera simbólica el desplazamiento (pendiente) en el punto de cada fuerza redundante (momento).

Ecuaciones de compatibilidad.

- Escriba una ecuación de compatibilidad para el desplazamiento (pendiente) en cada punto donde haya una fuerza (momento) redundante.
- Determine todos los desplazamientos o pendientes mediante un método adecuado, como se explica en las secciones 12.2 a 12.5.
- Sustituya los resultados en las ecuaciones de compatibilidad y despeje las redundantes desconocidas.
- Si el valor numérico de una redundante es *positivo*, tiene *el mismo sentido* que la *dirección* prevista en un principio. Del mismo modo, un valor numérico *negativo* indica que la redundante actúa en *sentido opuesto* a la *dirección* supuesta.

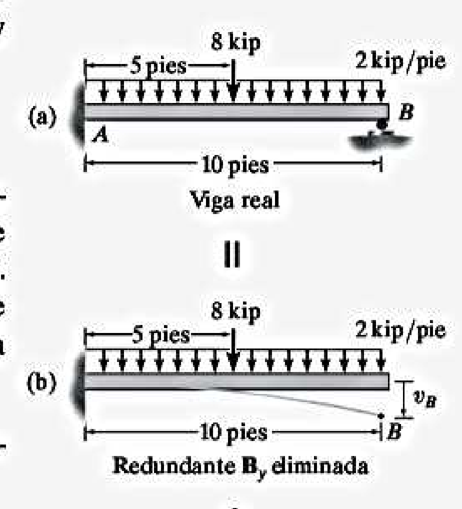
Ecuaciones de equilibrio.

- Una vez que las fuerzas y los momentos redundantes se han determinado, las reacciones desconocidas restantes pueden encontrarse a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas a las cargas que se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de este procedimiento. Por razones de brevedad, todos los desplazamientos y pendientes se determinarán usando la tabla del apéndice C.

EJEMPLO 12.21

Determine las reacciones en el soporte de rodillos B de la viga mostrada en la figura 12-44a, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. EI es constante.



SOLUCIÓN

Principio de superposición. Por inspección, la viga es estáticamente indeterminada de primer grado. El soporte de rodillo en B se elegirá como la redundante por lo que $\mathbf{B}_y$ se determinará *directamente*. En las figuras 12-44b y 12-44c se muestra la aplicación del principio de superposición. Aquí se ha supuesto que $\mathbf{B}_y$ actúa hacia arriba sobre la viga.

Ecuación de compatibilidad. Si se considera que el desplazamiento positivo es hacia abajo, la ecuación de compatibilidad en B es

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B - v'_B \qquad (1)$$

Estos desplazamientos pueden obtenerse de manera directa en la tabla del apéndice C.

$$v_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{5PL^3}{48EI}$$

$$= \frac{2\text{ kip/pie}(10\text{ pies})^4}{8EI} + \frac{5(8\text{ kip})(10\text{ pies})^3}{48EI} = \frac{3333\text{ kip}\cdot\text{pie}^3}{EI}\downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(10\text{ pies})^3}{3EI} = \frac{333.3\text{ pies}^3\, B_y}{EI}\uparrow$$

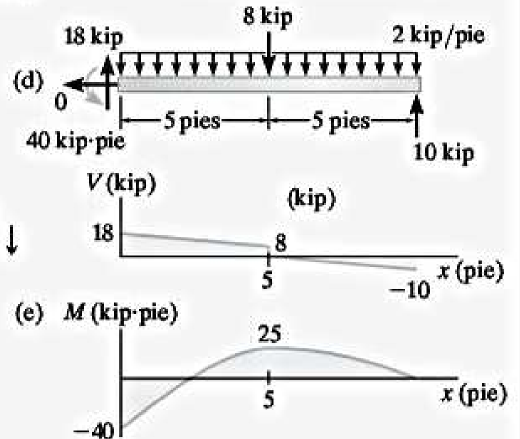


Figura 12-44

Al sustituir en la ecuación 1 y al resolver se obtiene

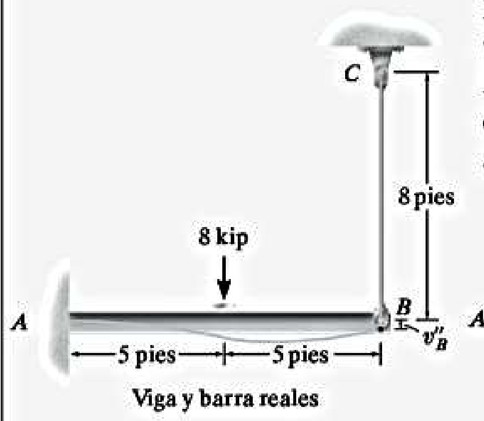
$$0 = \frac{3333}{EI} - \frac{333.3B_y}{EI}$$

$$B_y = 10\text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

Ecuaciones de equilibrio. Si se emplea este resultado y se aplican las tres ecuaciones de equilibrio, se obtienen los resultados mostrados en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 12-44d. En la figura 12-44e se muestran los diagramas de fuerza cortante y de momento.

12

EJEMPLO 12.22



La viga de la figura 12-45*a* está empotrada a la pared en *A* y conectada mediante un pasador a una varilla *BC* de $\frac{1}{2}$ pulg de diámetro. Si $E = 29(10^3)$ ksi para los dos elementos, determine la fuerza desarrollada en la barra debido a la carga. El momento de inercia de la viga respecto a su eje neutro es $I = 475$ pulg^4.

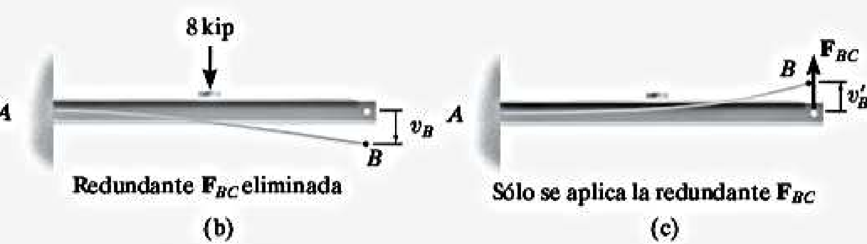


Figura 12-45

SOLUCIÓN I

Principio de superposición. Por inspección, este problema es indeterminado de primer grado. Aquí, *B* experimentará un desplazamiento desconocido, v''_B, puesto que la barra se estira. La barra se tratará como la redundante y por ende la fuerza de la barra se retira de la viga en *B*, figura 12-45*b*, y después se vuelve a aplicar, figura 12-45*c*.

Ecuación de compatibilidad. En el punto *B* se requiere

$$(+\downarrow) \qquad v''_B = v_B - v'_B \qquad (1)$$

Los desplazamientos v_B y v'_B se determinan a partir de la tabla en el apéndice C. v''_B se calcula con base en la ecuación 4-2. Si se usan unidades de kilolibras y pulgadas, se tiene

$$v''_B = \frac{PL}{AE} = \frac{F_{BC}(8\text{ pies})(12\text{ pulg/pie})}{(\pi/4)\left(\frac{1}{2}\text{ pulg}\right)^2[29(10^3)\text{ kip/pulg}^2]} = 0.01686F_{BC}\downarrow$$

$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} = \frac{5(8\text{ kip})(10\text{ pies})^3(12\text{ pulg/pie})^3}{48[29(10^3)\text{ kip/pulg}^2](475\text{ pulg}^4)} = 0.1045\text{ pulg}\downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{F_{BC}(10\text{ pies})^3(12\text{ pulg/pie})^3}{3[29(10)^3\text{ kip/pulg}^2](475\text{ pulg}^4)} = 0.04181F_{BC}\uparrow$$

Por lo tanto, la ecuación 1 se convierte en

$$(+\downarrow) \qquad 0.01686F_{BC} = 0.1045 - 0.04181F_{BC}$$

$$F_{BC} = 1.78\text{ kip}$$ *Resp.*

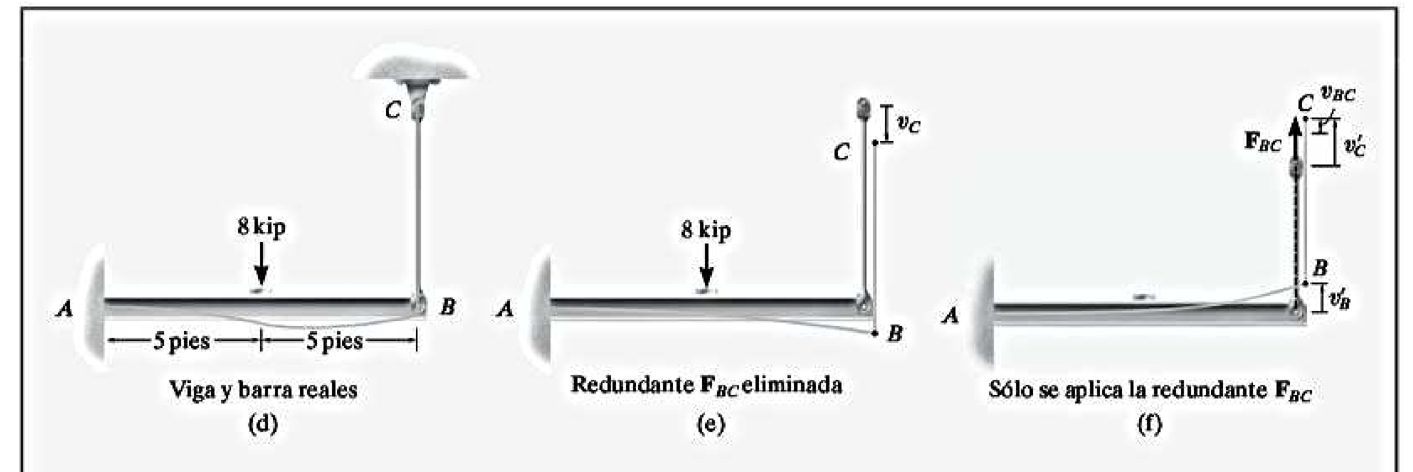


Figura 12-45 (cont.)

SOLUCIÓN II

Principio de superposición. Este problema también puede resolverse al retirar el soporte de pasador en C y al mantener la varilla conectada a la viga. En este caso, la carga de 8 kip hará que los puntos B y C se desplacen hacia abajo la *misma cantidad* v_C, figura 12-45*e*, puesto que no existe fuerza en la barra BC. Cuando se aplica la fuerza redundante $\mathbf{F}_{BC}$ en el punto C, ésta hace que el extremo C de la barra se desplace la cantidad v'_C hacia arriba y que el extremo B de la viga se desplace la cantidad v'_B hacia arriba, figura 12-45*f*. La diferencia en estos dos desplazamientos, v_{BC}, representa el estiramiento de la varilla debido a $\mathbf{F}_{BC}$, de modo que $v'_C = v_{BC} + v'_B$. Por lo tanto, a partir de las figuras 12-45*d*, 12-45*e* y 12-45*f*, la compatibilidad del desplazamiento en el punto C es

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_C - (v_{BC} + v'_B) \qquad (2)$$

A partir de la solución I, se tiene

$$v_C = v_B = 0.1045 \text{ pulg}\downarrow$$

$$v_{BC} = v''_B = 0.01686 F_{BC}\uparrow$$

$$v'_B = 0.04181 F_{BC}\uparrow$$

Por lo tanto, la ecuación 2 se convierte en

$$(+\downarrow) \qquad 0 = 0.1045 - (0.01686 F_{BC} + 0.04181 F_{BC})$$

$$F_{BC} = 1.78 \text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 12.23

Determine el momento en B para la viga mostrada en la figura 12-46*a*. EI es constante. No tome en cuenta los efectos de la carga axial.

SOLUCIÓN

Principio de superposición. Como no se toma en cuenta la carga axial sobre la viga, no habrá una fuerza vertical ni un momento en A y B. Aquí hay sólo dos ecuaciones de equilibrio disponibles ($\Sigma M = 0$, $\Sigma F_y = 0$) por lo que el problema es indeterminado de segundo grado. Se supondrá que $\mathbf{B}_y$ y $\mathbf{M}_B$ son redundantes, de modo que por el principio de superposición, la viga se representa como un voladizo cargado *de manera separada* por la carga distribuida y las reacciones $\mathbf{B}_y$ y $\mathbf{M}_B$, figuras 12-46*b*, 12-46*c* y 12-46*d*.

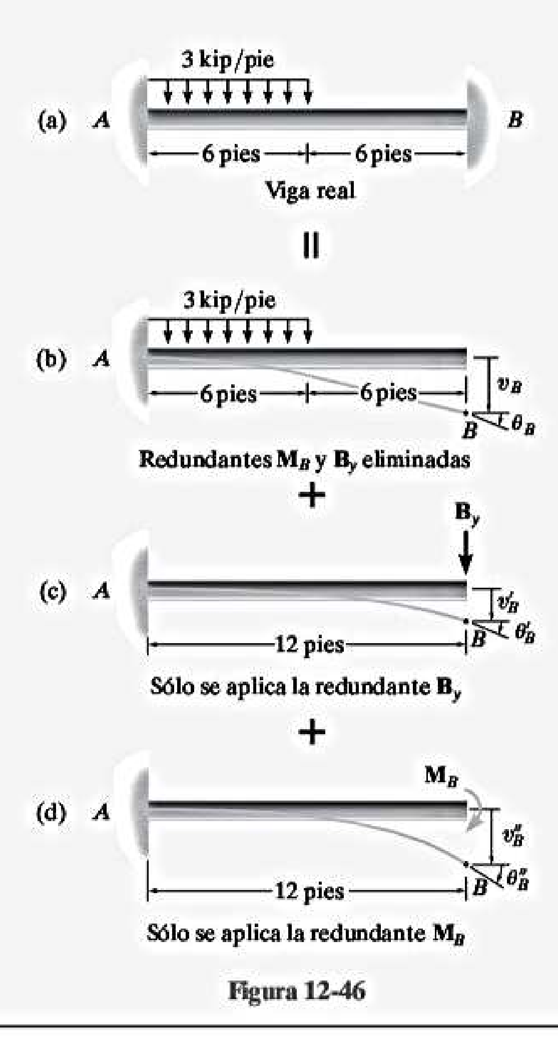


Figura 12-46

Ecuaciones de compatibilidad. En relación con el desplazamiento y la pendiente en B, se requiere

$$(\curvearrowleft +) \qquad 0 = \theta_B + \theta'_B + \theta''_B \qquad (1)$$

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B + v'_B + v''_B \qquad (2)$$

Si se usa la tabla del apéndice C para calcular las pendientes y los desplazamientos, se tiene

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI} = \frac{3 \text{ kip/pie}(12 \text{ pies})^3}{48EI} = \frac{108 \text{ kip}\cdot\text{pie}^2}{EI} \downarrow$$

$$v_B = \frac{7wL^4}{384EI} = \frac{7(3 \text{ kip/pie})(12 \text{ pies})^4}{384EI} = \frac{1134 \text{ kip}\cdot\text{pie}^3}{EI} \downarrow$$

$$\theta'_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{B_y(12 \text{ pies})^2}{2EI} = \frac{72B_y}{EI} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(12 \text{ pies})^3}{3EI} = \frac{576B_y}{EI} \downarrow$$

$$\theta''_B = \frac{ML}{EI} = \frac{M_B(12 \text{ pies})}{EI} = \frac{12M_B}{EI} \downarrow$$

$$v''_B = \frac{ML^2}{2EI} = \frac{M_B(12 \text{ pies})^2}{2EI} = \frac{72M_B}{EI} \downarrow$$

Al sustituir estos valores en las ecuaciones 1 y 2, y al cancelar el factor común EI, se obtiene

$$(\curvearrowleft +) \qquad 0 = 108 + 72B_y + 12M_B$$

$$(+\downarrow) \qquad 0 = 1134 + 576B_y + 72M_B$$

Si se resuelven estas ecuaciones de manera simultánea resulta

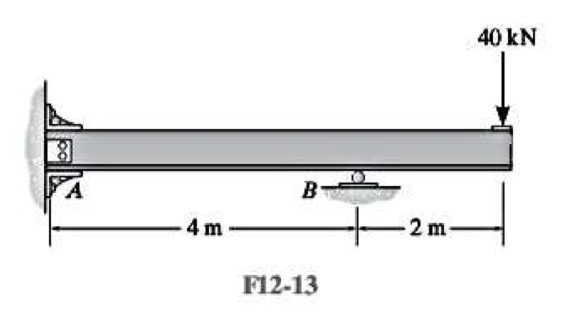
$$B_y = -3.375 \text{ kip}$$

$$M_B = 11.25 \text{ kip}\cdot\text{pie} \qquad \textit{Resp.}$$

12

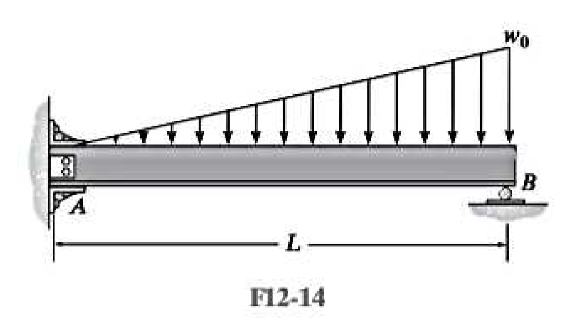
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F12-13. Determine las reacciones en el soporte fijo A y en el rodillo B. EI es constante.



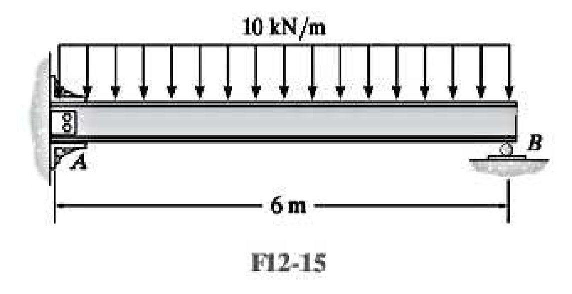
F12-13

F12-14. Determine las reacciones en el soporte fijo A y en el rodillo B. EI es constante.



F12-14

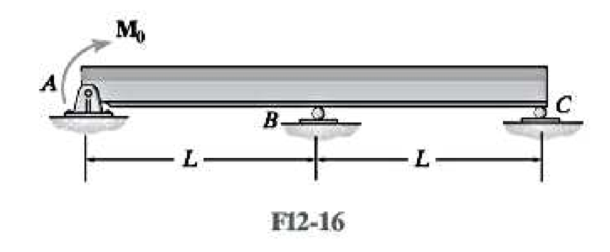
F12-15. Determine las reacciones en el soporte fijo A y en el rodillo B. El soporte en B se asienta 2 mm. $E = 200$ GPa, $I = 65.0(10^{-6})$ m^4.



F12-15

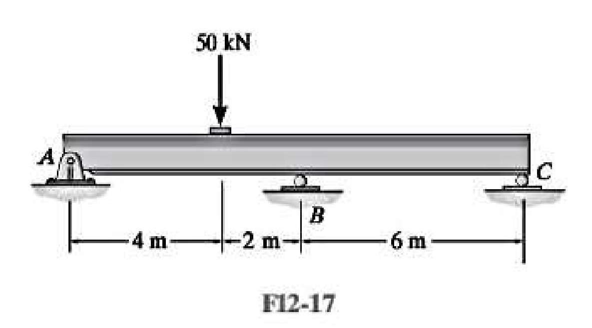


F12-16. Determine la reacción en el rodillo B. EI es constante.



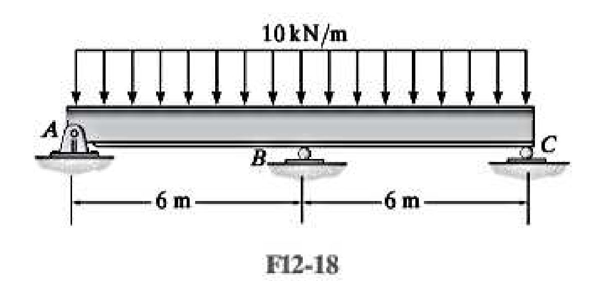
F12-16

F12-17. Determine la reacción en el rodillo B. EI es constante.



F12-17

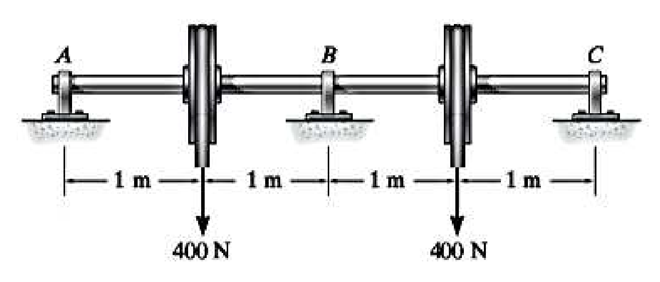
F12-18. Determine la reacción en el soporte de rodillos B si éste se asienta 5 mm. $E = 200$ GPa e $I = 65.0(10^{-6})$ m^4.



F12-18

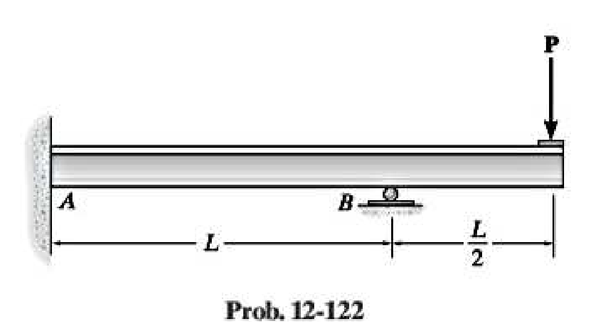
PROBLEMAS

•**12-121.** Determine las reacciones en los soportes de cojinete *A*, *B* y *C* del eje, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. *EI* es constante. Cada cojinete ejerce sólo reacciones verticales sobre el eje.



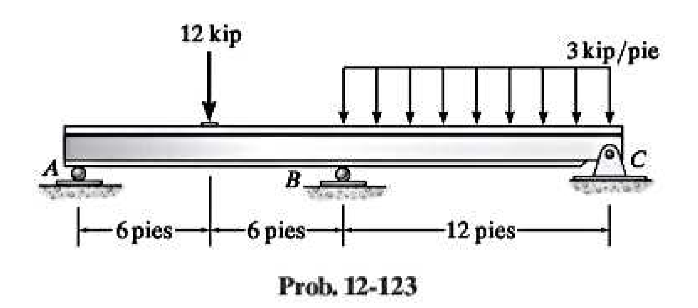
Prob. 12-121

12-122. Determine las reacciones en los soportes *A* y *B*. *EI* es constante.



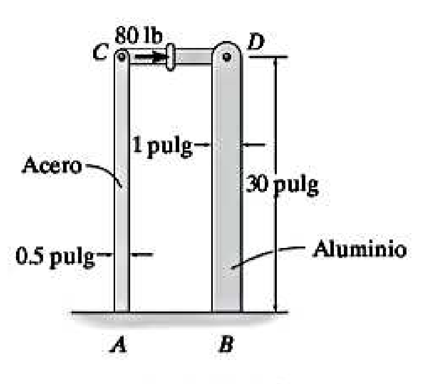
Prob. 12-122

12-123. Determine las reacciones en los soportes *A*, *B* y *C*, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. *EI* es constante.



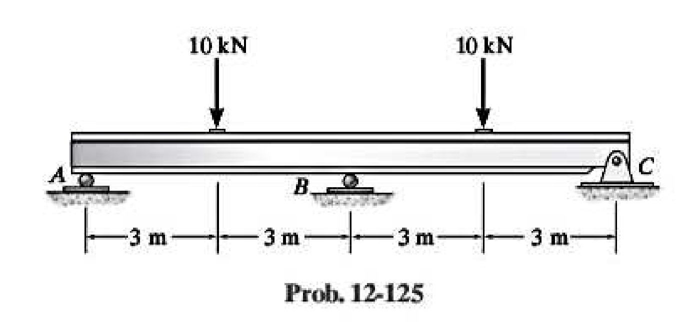
Prob. 12-123

*__12-124.__ El ensamble consiste en una barra de acero y una barra de aluminio, cada una de ellas tiene 1 pulg de grosor, están fijas en sus extremos *A* y *B*, y se conectan mediante un pasador con el eslabón corto y *rígido CD*. Si se aplica una fuerza horizontal de 80 lb al eslabón como se muestra, determine los momentos creados en *A* y *B*, $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $E_{al} = 10(10^3)$ ksi.



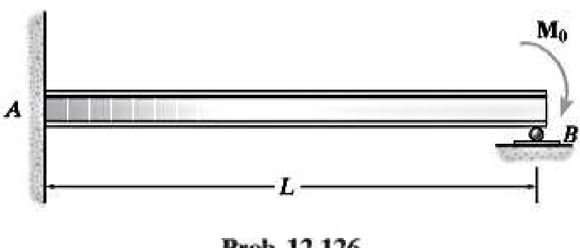
Prob. 12-124

•**12-125.** Determine las reacciones en los soportes *A*, *B* y *C*, después dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento. *EI* es constante.



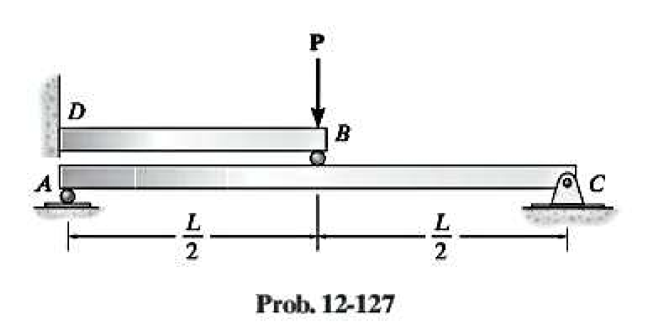
Prob. 12-125

12-126. Determine las reacciones en los soportes *A* y *B*. *EI* es constante.



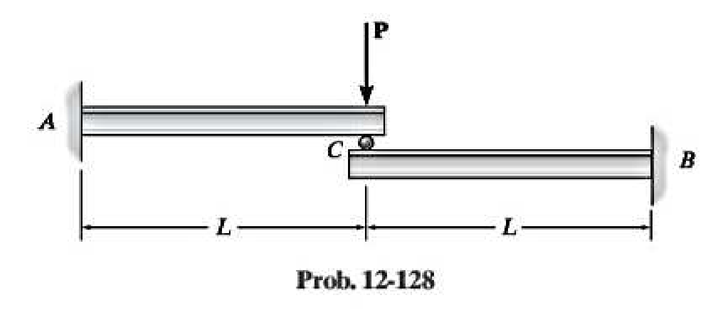
Prob. 12-126

12-127. Determine las reacciones en el soporte C. EI es constante para ambas vigas.



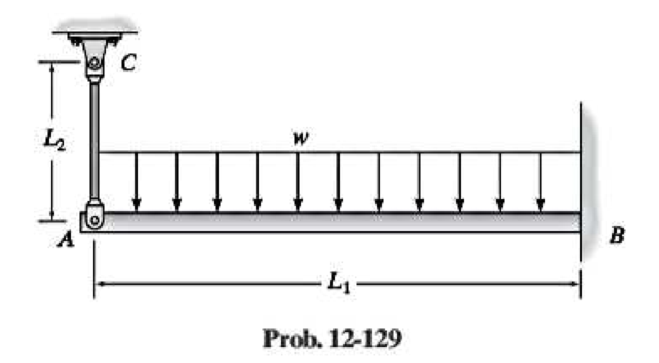
Prob. 12-127

***12-128.** Los segmentos de la viga compuesta se unen en el centro mediante un contacto liso (rodillo). Determine las reacciones en los soportes fijos A y B cuando se aplica la carga **P**. EI es constante.



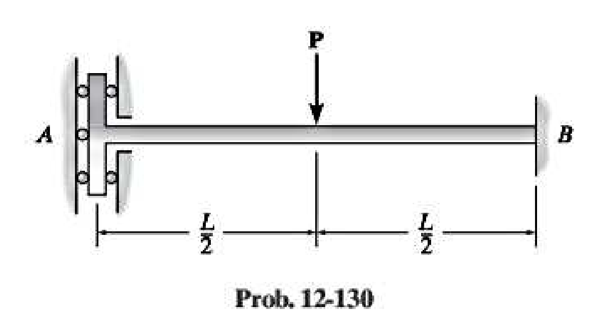
Prob. 12-128

•12.129. La viga tiene una E_1I_1 constante y se sostiene mediante la pared fija en B y la barra AC. Si la barra tiene un área A_2 en su sección transversal y el material tiene un módulo de elasticidad E_2, determine la fuerza en la barra.



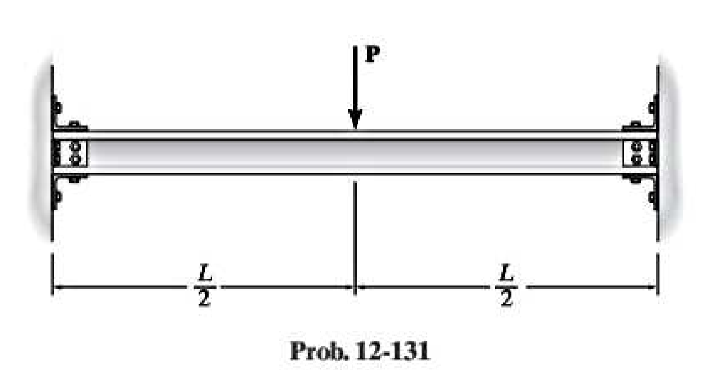
Prob. 12-129

12-130. Determine las reacciones en A y B. Suponga que el soporte en A sólo ejerce un momento sobre la viga. EI es constante.



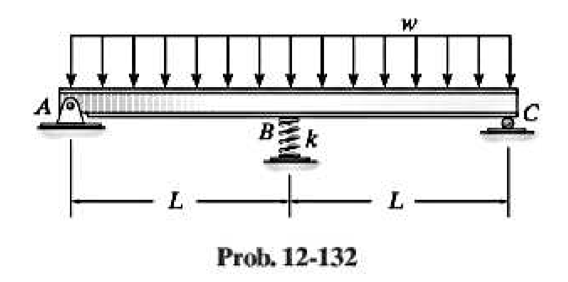
Prob. 12-130

12-131. La viga se sostiene mediante soportes atornillados en sus extremos. Cuando están cargados, estos soportes no actúan como una conexión fija real, sino que permiten una ligera rotación α antes de volverse fijos. Determine el momento en las conexiones y la deflexión máxima de la viga.



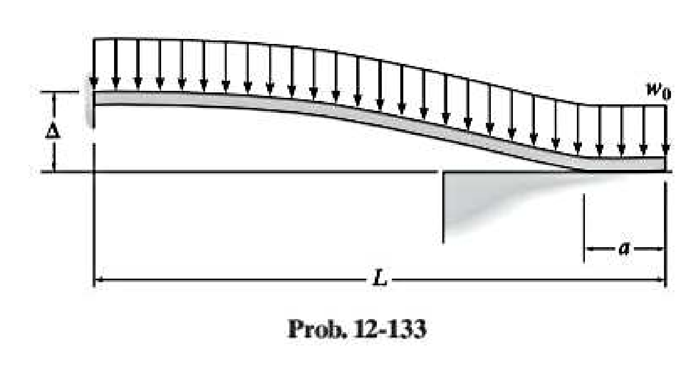
Prob. 12-131

***12-132.** La viga se sostiene mediante un pasador en A, un resorte que tiene una rigidez k en B y un rodillo en C. Determine la fuerza que ejerce el resorte sobre la viga. EI es constante.



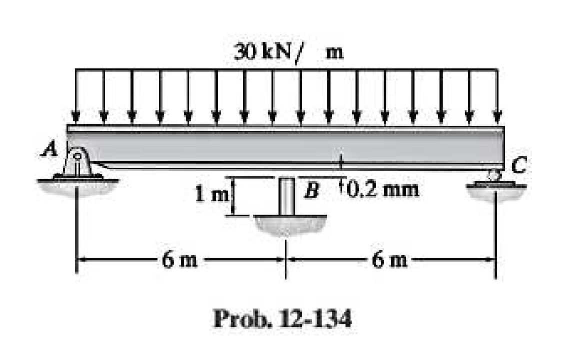
Prob. 12-132

•**12-133.** La viga está fabricada de un material suave elástico lineal que tiene una EI constante. Si en un inicio se encuentra a una distancia Δ de la superficie de su soporte extremo, determine la distancia a sobre la que descansa en este soporte cuando está sometida a la carga uniforme w_0, que es lo suficientemente grande como para hacer que esto suceda.



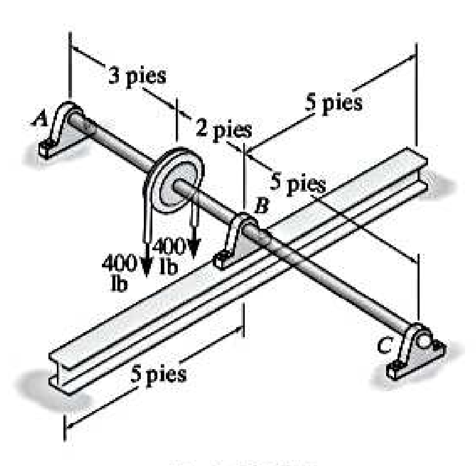
Prob. 12-133

12-134. Antes de que la carga uniformemente distribuida se aplique sobre la viga, hay un pequeño espacio de 0.2 mm entre la viga y el poste en B. Determine las reacciones en los soportes A, B y C. El poste en B tiene un diámetro de 40 mm y el momento de inercia de la viga es $I = 875(10^6)$ mm^4. El poste y la viga son de un material que tiene un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa.



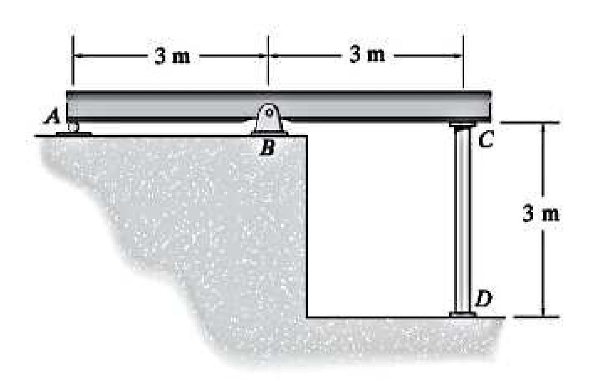
Prob. 12-134

12-135. El eje de acero A-36 con un diámetro de 1 pulg, se sostiene mediante cojinetes rígidos en A y C. El cojinete en B descansa sobre una viga I de ala ancha de acero simplemente apoyada, que tiene un momento de inercia $I = 500$ pulg^4. Si cada una de las cargas de la banda sobre la polea es de 400 lb, determine las reacciones verticales en A, B y C.



Prob. 12-135

***12-136.** Si la temperatura del poste CD de 75 mm de diámetro se incrementa en 60°C, determine la fuerza desarrollada en el poste. El poste y la viga están fabricados de acero A-36 y el momento de inercia de la viga es $I = 255(10^6)$ mm^4.



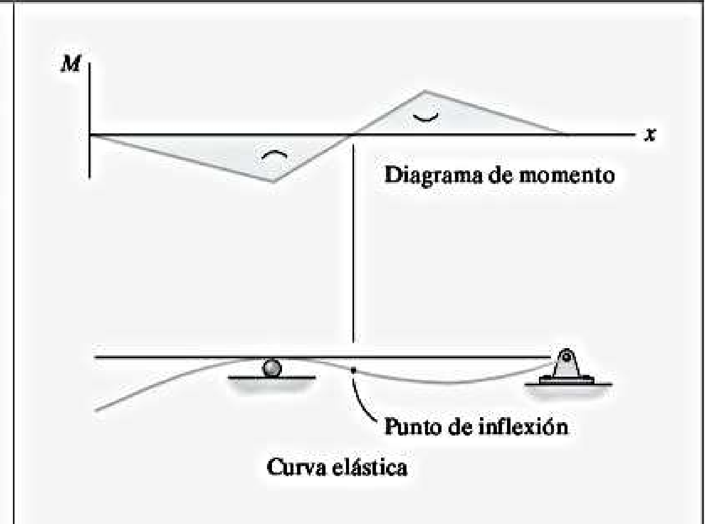
Prob. 12-136

12

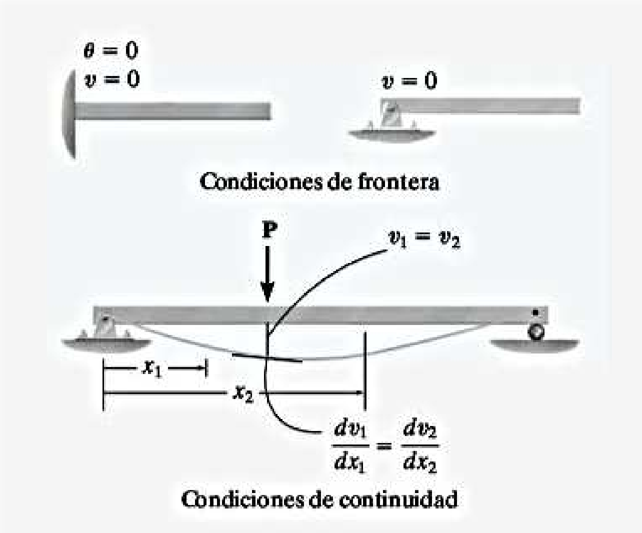
REPASO DE CAPÍTULO

La curva elástica representa la deflexión de la línea central de una viga o eje. Su forma puede determinarse mediante el diagrama de momento. Los momentos positivos causan que la curva elástica sea cóncava hacia arriba y los momentos negativos ocasionan que sea cóncava hacia abajo. El radio de curvatura en cualquier punto se determina a partir de

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

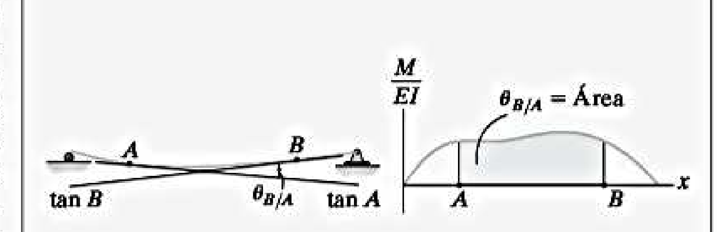


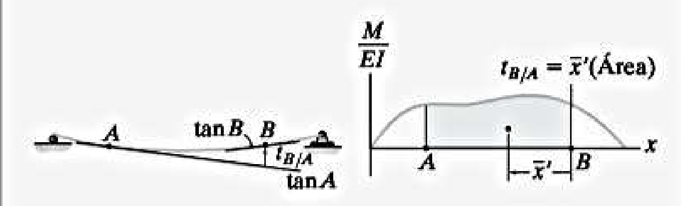
La ecuación de la curva elástica y su pendiente pueden obtenerse al encontrar primero el momento interno en el elemento como una función de x. Si hay varias cargas que actúan sobre el elemento, entonces deben determinarse funciones de momento separadas entre cada una de las cargas. Al integrar estas funciones una vez usando $EI(d^2v/dx^2) = M(x)$ se obtiene la ecuación para la pendiente de la curva elástica, y al integrar de nuevo resulta la ecuación para la deflexión. Las constantes de integración se determinan a partir de las condiciones de frontera en los soportes o, en los casos donde hay varias funciones de momento involucradas, debe satisfacerse la continuidad de la pendiente y la deflexión en los puntos donde estas funciones se unen.



Las funciones de discontinuidad permiten expresar la ecuación de la curva elástica como una función continua, sin importar el número de cargas sobre el elemento. Este método elimina la necesidad de utilizar condiciones de continuidad, ya que las dos constantes de integración pueden determinarse sólo a partir de las dos condiciones de frontera.

El método del momento de área es una técnica semigráfica para determinar la pendiente de las tangentes o la distancia vertical entre las tangentes en puntos específicos sobre la curva elástica. Se requiere encontrar segmentos de área bajo el diagrama M/EI, o el momento de estos segmentos sobre los puntos de la curva elástica. El método funciona bien para los diagramas M/EI compuestos de formas simples, como los que se producen mediante fuerzas concentradas y momentos de par.



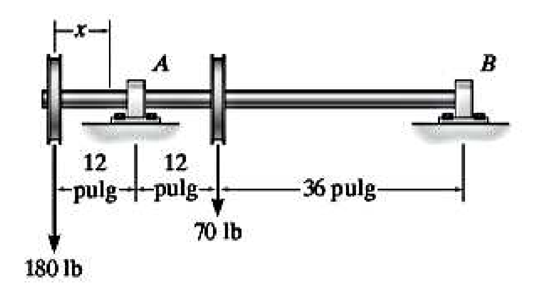


La deflexión o la pendiente en un punto de un elemento sometido a combinaciones de cargas puede determinarse mediante el método de superposición. La tabla en el apéndice C está disponible para este fin.

Las vigas y los ejes estáticamente indeterminados tienen más reacciones desconocidas en los soportes que ecuaciones de equilibrio disponibles. Para resolverlas, primero identifique las reacciones redundantes. Para determinar las redundantes desconocidas puede usarse el método de integración o el teorema del momento de área. También es posible encontrar las redundantes empleando el método de superposición, donde se consideran las condiciones de continuidad en la redundante. Aquí, el desplazamiento debido a la carga externa se determina al eliminar la redundante, y de nuevo al aplicar la redundante con la carga externa eliminada. Las tablas en el apéndice C pueden emplearse para determinar estos desplazamientos necesarios.

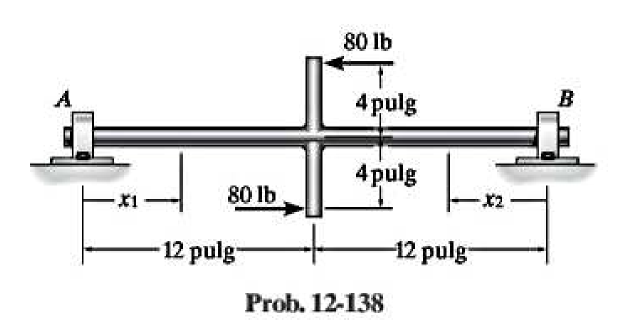
PROBLEMAS DE REPASO

•12-137. El eje soporta las dos cargas de la polea como se muestra en la figura. Use funciones de discontinuidad para determinar la ecuación de la curva elástica. Los cojinetes en A y B ejercen sólo reacciones verticales sobre el eje. EI es constante.



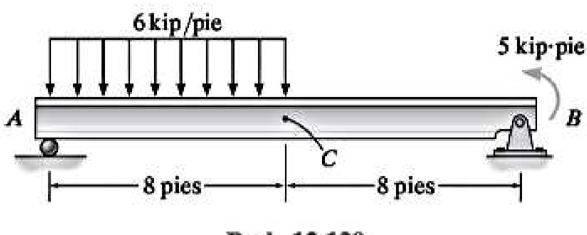
Prob. 12-137

12-138. El eje se sostiene mediante una chumacera en A, la cual ejerce sólo reacciones verticales sobre el eje, y por medio de un cojinete de empuje en B, el cual ejerce reacciones horizontales y verticales sobre el eje. Dibuje el diagrama de momento flexionante para el eje y después, con base en este diagrama, dibuje la curva elástica o curva de deflexión de la línea central del eje. Determine las ecuaciones de la curva elástica usando las coordenadas x_1 y x_2. EI es constante.



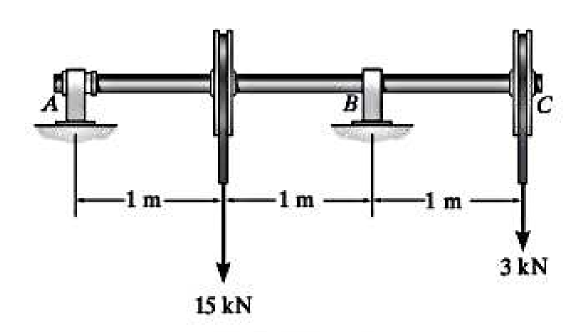
Prob. 12-138

12-139. La viga simplemente apoyada W8 × 24 se somete a la carga mostrada. Utilice el método de superposición para determinar la deflexión en el centro C. La viga está fabricada de acero A-36.



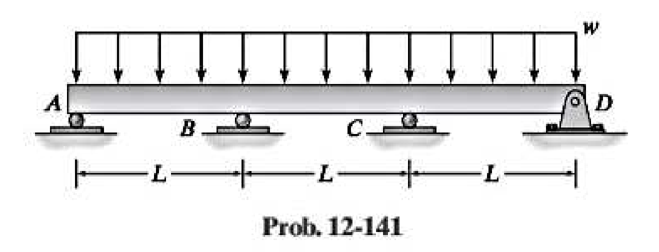
Prob. 12-139

*12-140. Use el método del momento de área para determinar la pendiente y la deflexión en el extremo C del eje. El eje tiene 75 mm de diámetro y está fabricado de un material con $E = 200$ GPa.



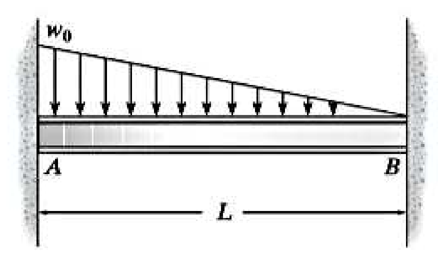
Prob. 12-140

•12.141. Determine las reacciones en los soportes. EI es constante. Use el método de superposición.



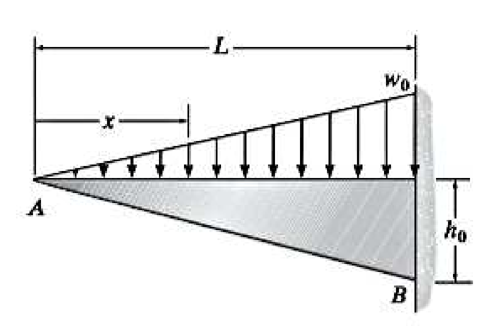
Prob. 12-141

12-142. Determine las reacciones de momento en los soportes A y B. Use el método de integración. EI es constante.



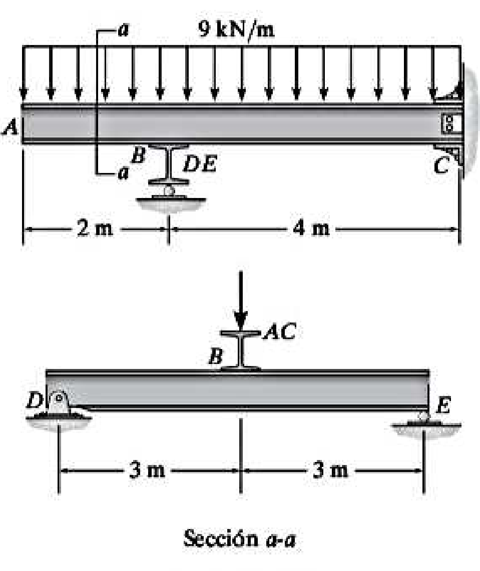
Prob. 12-142

•**12-143.** Si la viga en voladizo tiene un grosor t constante, determine la deflexión en el extremo A. La viga está hecha de un material que tiene un módulo de elasticidad E.



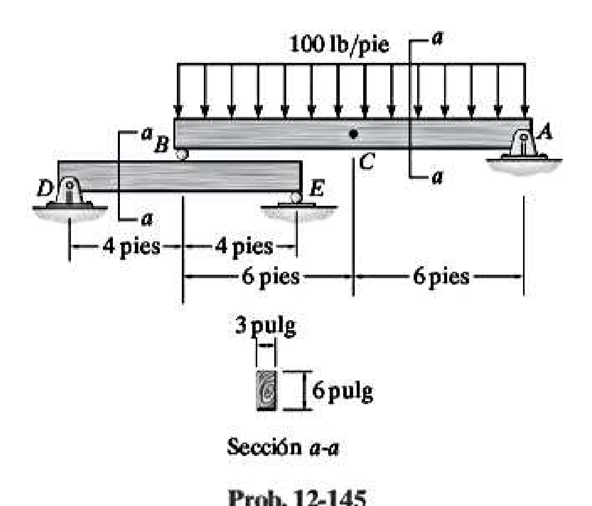
Prob. 12-143

*__12-144.__ La viga ABC se sostiene mediante la viga DBE y se encuentra fija en C. Determine las reacciones en B y C. Las vigas están fabricadas del mismo material con un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa, y el momento de inercia de ambas vigas es $I = 25.0(10^6)$ mm^4.



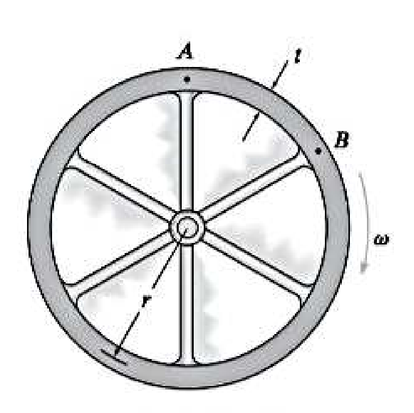
Prob. 12-144

•**12-145.** Use el método de superposición para determinar la deflexión en el punto C de la viga AB. Las vigas están hechas de madera con un módulo de elasticidad $E = 1.5(10^3)$ ksi.

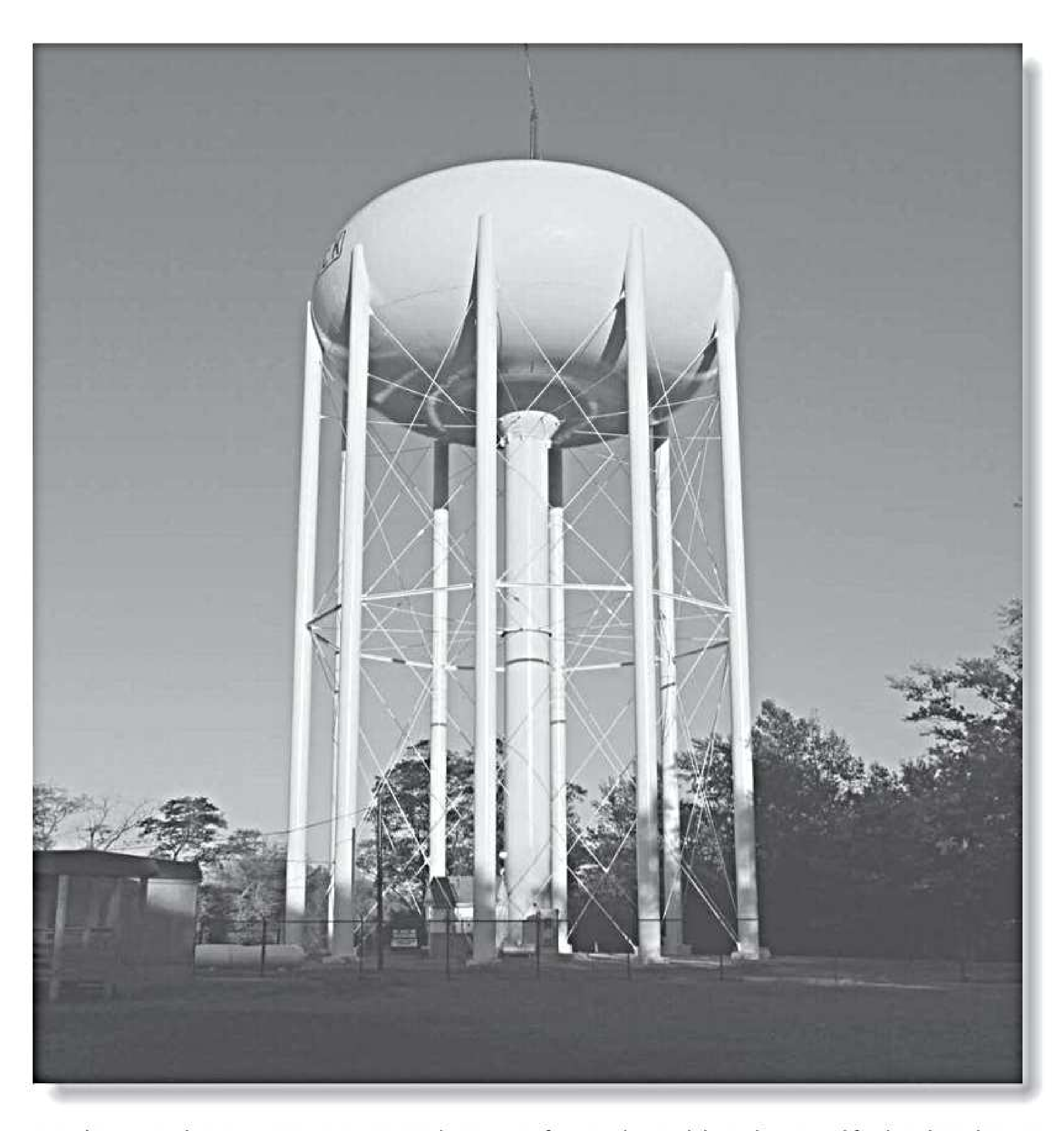


Prob. 12-145

12-146. El aro del volante de inercia tiene un grosor t, una anchura b y un peso específico γ. Si el volante gira a una velocidad constante ω, determine el momento máximo desarrollado en el aro. Suponga que los rayos no se deforman. *Sugerencia:* Debido a la simetría de las cargas, la pendiente del aro en cada rayo es igual a cero. Considere que el radio es lo suficientemente grande como para que el segmento AB se pueda considerar como una viga recta, fija en ambos extremos y cargada con una fuerza centrífuga uniforme por unidad de longitud. Demuestre que esta fuerza es $w = bt\gamma\omega^2 r/g$.



Prob. 12-146



Las columnas usadas para sostener este tanque de agua se refuerzan a la mitad de su altura con el fin de reducir el riesgo de pandeo.

Pandeo de columnas

13

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se analizará el comportamiento de las columnas y se indicarán algunos de los métodos que se emplean para diseñarlas. El capítulo comienza con un estudio general del pandeo, seguido de una determinación de la carga axial necesaria para pandear una columna que se denomina ideal. Después se aborda un análisis más realista, que toma en cuenta cualquier flexión de la columna. Además, se presenta el pandeo inelástico de una columna como un tema especial. Al final del capítulo se analizarán algunos de los métodos usados para diseñar columnas cargadas de manera concéntrica y excéntrica, las cuales están fabricadas con materiales comunes de ingeniería.

13.1 Carga crítica

Cada vez que se diseña un elemento, es necesario que cumpla con requisitos específicos de resistencia, deflexión y estabilidad. En los capítulos anteriores se han analizado algunos de los métodos que se usan para determinar la resistencia y la deflexión de un elemento, en los que siempre se supone que el elemento se encuentra en equilibrio estable. Sin embargo, algunos elementos pueden estar sometidos a cargas de compresión y si dichos elementos son largos y delgados, la carga puede ser lo suficientemente grande para hacer que el elemento experimente deflexión lateral o se ladee. En específico, los elementos largos y delgados que se someten a una fuerza de compresión axial se denominan ***columnas***, y la deflexión lateral que se produce se llama ***pandeo***. Con mucha frecuencia, el pandeo de una columna puede llevar a una falla repentina y dramática de una estructura o mecanismo y, como resultado, debe prestarse atención especial al diseño de las columnas para que puedan soportar con seguridad las cargas previstas sin pandearse.

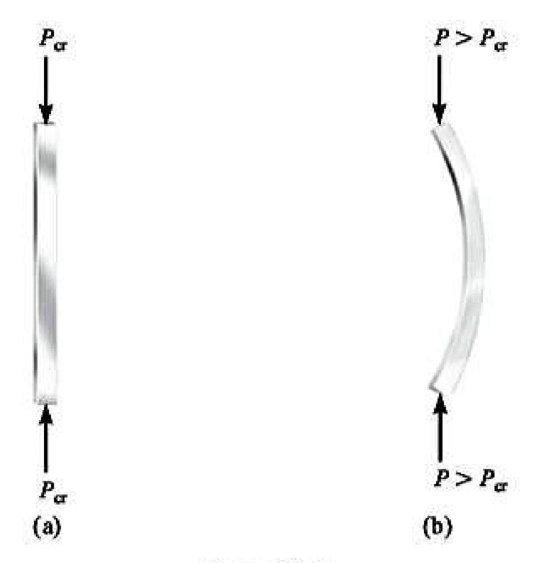


Figura 13-1

La carga axial máxima que puede soportar una columna cuando está *al borde* del pandeo se llama ***carga crítica***, P_{cr}, figura 13-1*a*. Cualquier carga adicional hará que la columna se pandee y, por lo tanto, sufra una deflexión lateral como se muestra en la figura 13-1*b*. Con el fin de comprender mejor la naturaleza de esta inestabilidad, considere un mecanismo de dos barras consistente en barras rígidas sin peso que se conectan mediante un pasador, como se muestra en la figura 13-2*a*. Cuando las barras están en posición vertical, el resorte, con una rigidez k, se encuentra sin estirar y se aplica una *pequeña* fuerza vertical **P** en la parte superior de una de las barras. Esta posición de equilibrio puede alterarse al desplazar el pasador en A una pequeña distancia Δ, figura 13-2*b*. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre del pasador cuando las barras se desplazan, figura 13-2*c*, el resorte producirá una fuerza de restauración $F = k\Delta$, mientras que la carga aplicada **P** desarrolla dos componentes horizontales, $P_x = P \tan \theta$, que tiende a empujar al pasador (y a las barras) más lejos del equilibrio. Como θ es pequeño, $\Delta \approx \theta(L/2)$ y $\tan \theta \approx \theta$. Así, la fuerza de *restauración* del resorte se convierte en $F = k\theta L/2$ y la fuerza *perturbadora* es $2P_x = 2P\theta$.

Si la fuerza de restauración es mayor que la fuerza perturbadora, es decir, $k\theta L/2 > 2P\theta$, entonces, como θ se cancela, se puede despejar P, de donde resulta

$$P < \frac{kL}{4} \qquad \text{equilibrio estable}$$

Ésta es una condición de *equilibrio estable* puesto que la fuerza desarrollada por el resorte es adecuada para restaurar las barras hasta su posición vertical. Sin embargo, si $kL\theta/2 < 2P\theta$, o bien

$$P > \frac{kL}{4} \qquad \text{equilibrio inestable}$$

entonces el mecanismo se encuentra en *equilibrio inestable*. En otras palabras, si se aplica esta carga **P** y ocurre un ligero desplazamiento en A, el mecanismo tiende a moverse fuera del equilibrio y no se restaurará a su posición original.

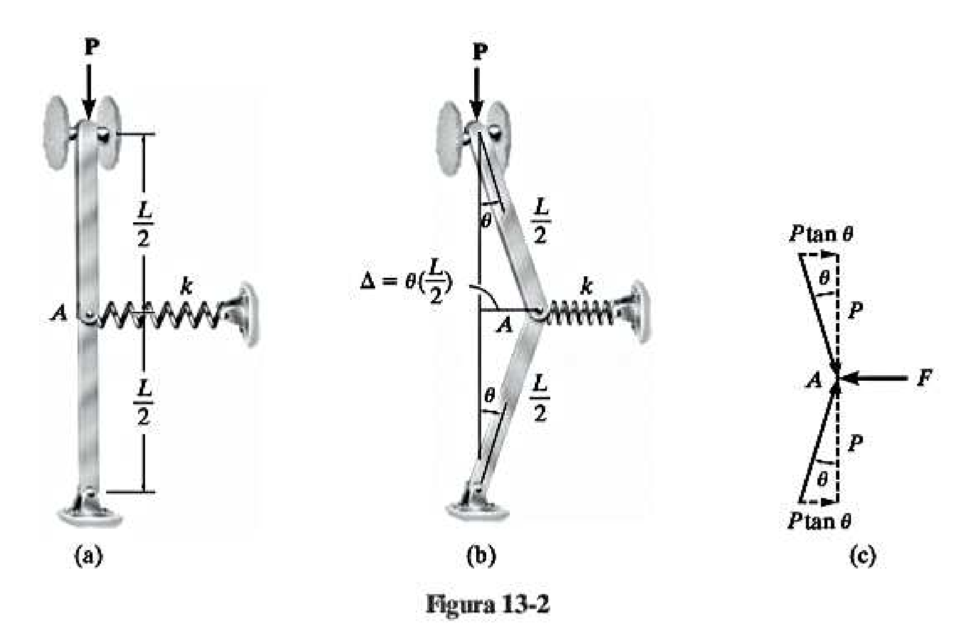


Figura 13-2

El valor intermedio de P, que requiere $kL\theta/2 = 2P\theta$, es la *carga crítica*. Aquí

$$P_{cr} = \frac{kL}{4} \qquad \text{equilibrio neutro}$$

Esta carga representa un caso del mecanismo en *equilibrio neutro*. Como P_{cr} es *independiente* del (pequeño) desplazamiento θ de las barras, cualquier alteración ligera del mecanismo no causará que se aleje del equilibrio, ni se restaurará a su posición original. En cambio, las barras *se mantendrán* en la posición con deflexión.

Estos tres diferentes estados de equilibrio se representan de manera gráfica en la figura 13-3. El punto de transición donde la carga es igual al valor crítico $P = P_{cr}$ se llama *punto de bifurcación*. En este punto, el mecanismo se encuentra en equilibrio para cualquier *valor pequeño* de θ, medido ya sea a la derecha o a la izquierda de la vertical. Físicamente, P_{cr} representa la carga con la que el mecanismo está a punto de pandearse. Resulta bastante razonable determinar este valor, suponiendo *pequeños desplazamientos* como se hace aquí; sin embargo, es necesario entender que P_{cr} *no* puede ser mayor al valor P que puede soportar el mecanismo. En efecto, si se coloca una carga mayor en las barras, entonces el mecanismo puede tener que experimentar más deflexión antes de que el resorte se comprima o alargue lo suficiente para mantener al mecanismo en equilibrio.

Al igual que en el mecanismo de dos barras que se acaba de analizar, es posible obtener las cargas críticas de pandeo sobre columnas soportadas en diversas formas; el método usado para hacer esto se explicará en la siguiente sección. Aunque en el diseño de ingeniería puede considerarse que la carga crítica es mayor a la carga que puede soportar la columna, debe observarse que, al igual que el mecanismo de dos barras en su posición

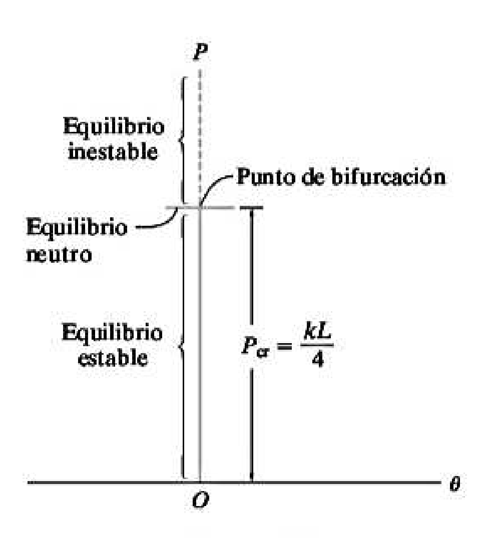


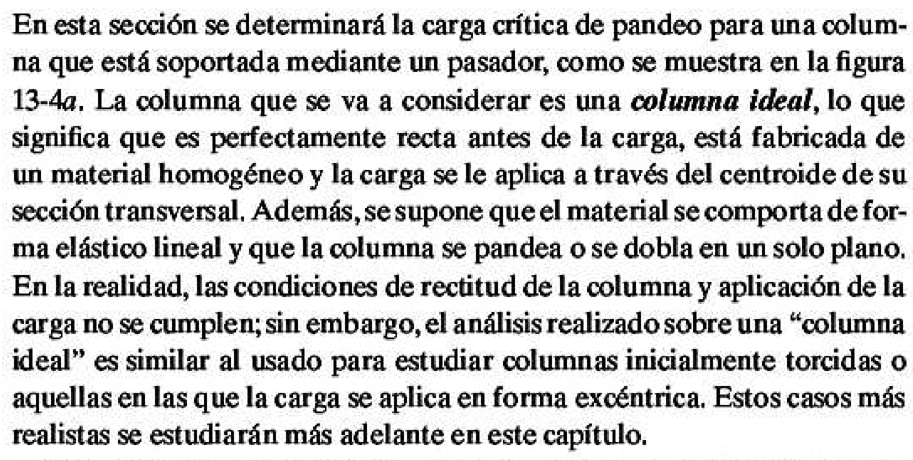
Figura 13-3

pandeada o con deflexión, una columna en realidad puede soportar una carga aún mayor que P_{cr}. Desafortunadamente, esta carga suele requerir que la columna se someta a una *gran* deflexión, que en general no se tolera en las estructuras de ingeniería o máquinas. Por ejemplo, es posible que una regla para medir requiera sólo de unos newtons de fuerza para pandearse, pero la carga adicional que puede soportar sólo puede aplicarse después de que la regla se somete a una deflexión lateral relativamente grande.

13.2 Columna ideal con soportes de pasador



Algunos elementos delgados y conectados mediante pasadores que se usan en maquinaria móvil, como este eslabón corto, se someten a cargas de compresión por lo que actúan como columnas.



En esta sección se determinará la carga crítica de pandeo para una columna que está soportada mediante un pasador, como se muestra en la figura 13-4*a*. La columna que se va a considerar es una ***columna ideal***, lo que significa que es perfectamente recta antes de la carga, está fabricada de un material homogéneo y la carga se le aplica a través del centroide de su sección transversal. Además, se supone que el material se comporta de forma elástico lineal y que la columna se pandea o se dobla en un solo plano. En la realidad, las condiciones de rectitud de la columna y aplicación de la carga no se cumplen; sin embargo, el análisis realizado sobre una "columna ideal" es similar al usado para estudiar columnas inicialmente torcidas o aquellas en las que la carga se aplica en forma excéntrica. Estos casos más realistas se estudiarán más adelante en este capítulo.

Como una columna ideal es recta, en teoría la carga axial P podría aumentarse hasta que se produjera una falla ya sea por fractura o por cedencia del material. Sin embargo, cuando se alcanza la carga crítica P_{cr}, la columna estará a punto de volverse inestable, de modo que una pequeña fuerza lateral F, figura 13-4*b*, hará que la columna permanezca en la posición con deflexión cuando se retira F, figura 13-4*c*. Cualquier reducción ligera de la carga axial P a partir de P_{cr} permitirá que la columna se enderece y cualquier aumento ligero en P, por encima de P_{cr}, ocasionará un aumento adicional de la deflexión lateral.

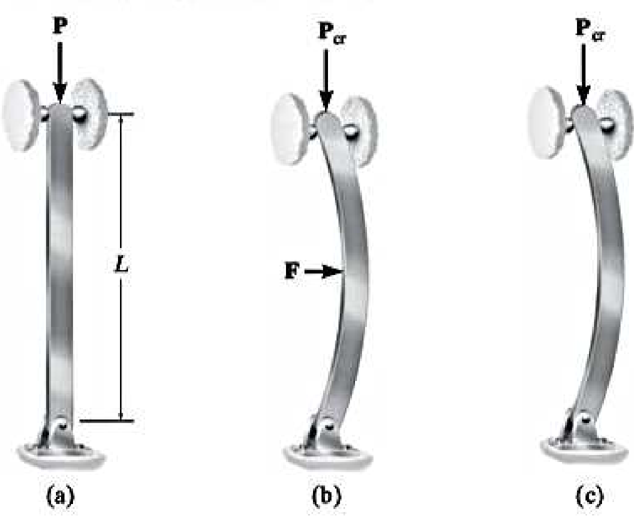


Figura 13-4

El hecho de que una columna se mantenga estable o se vuelva inestable cuando se somete a una carga axial dependerá de su capacidad de restaurarse, la cual se basa en su resistencia a la flexión. Por consiguiente, si se desea determinar la carga crítica y la forma pandeada de la columna, es necesario aplicar la ecuación 12-10, que relaciona al momento interno de la columna con su forma flexionada, es decir

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \tag{13-1}$$

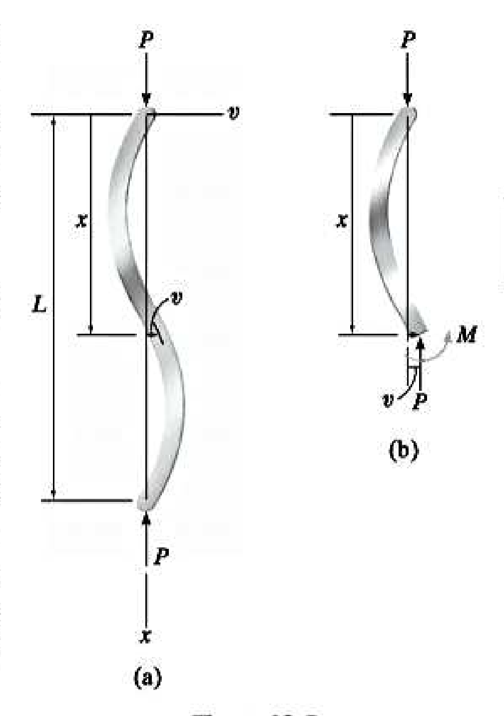


Figura 13-5

Recuerde que esta ecuación supone que la pendiente de la curva elástica es pequeña y que las deflexiones ocurren sólo por flexión. Cuando la columna está en una posición flexionada, figura 13-5*a*, el momento interno de flexión puede determinarse mediante el método de las secciones. En la figura 13-5*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de un segmento en la posición flexionada. Aquí, tanto la deflexión v como el momento interno M se muestran en la *dirección positiva* de acuerdo con la convención de signos utilizada para establecer la ecuación 13-1. El momento de equilibrio requiere que $M = -Pv$. Por lo tanto, la ecuación 13-1 se convierte en

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right)v = 0 \tag{13-2}$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes. Mediante el uso de los métodos de ecuaciones diferenciales, o por sustitución directa en la ecuación 13-2, puede demostrarse que la solución general es

$$v = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \tag{13-3}$$

Las dos constantes de integración se determinan a partir de las condiciones de frontera en los extremos de la columna. Como $v = 0$ en $x = 0$, entonces $C_2 = 0$. Y puesto que $v = 0$ en $x = L$, entonces

$$C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

Esta ecuación se cumple si $C_1 = 0$; sin embargo, entonces $v = 0$, que es una *solución trivial* que requiere que la columna permanezca siempre recta, a pesar de que la carga puede hacer que la columna se vuelva inestable. La otra posibilidad es que

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

que se cumple si

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi$$

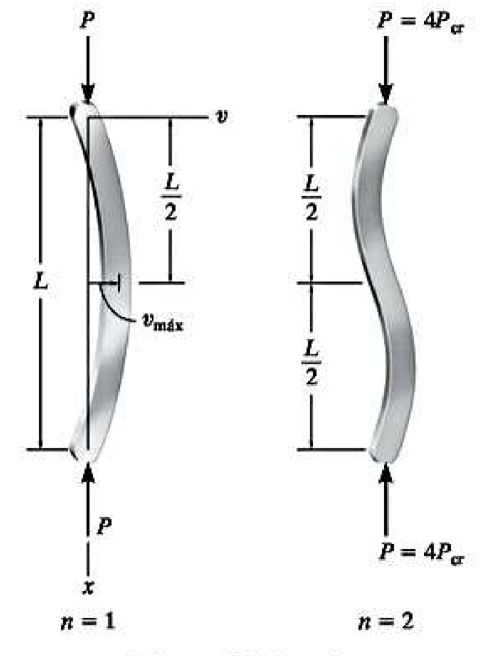


Figura 13-5 (cont.)

o bien

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{13-4}$$

El *menor valor* de P se obtiene cuando $n = 1$, por lo que la *carga crítica* para la columna es*

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

En ocasiones esta carga se conoce como la *carga de Euler*, en honor del matemático suizo Leonhard Euler, quien fue el primero en resolver este problema en 1757. La forma pandeada correspondiente se define mediante la ecuación

$$v = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Aquí la constante C_1 representa la deflexión máxima, $v_{máx}$, que se produce en el punto medio de la columna, figura 13-5*c*. No es posible obtener valores específicos para C_1 puesto que la forma exacta de la columna con deflexión no se conoce después de que ésta se pandea. Sin embargo, se supone que la deflexión es pequeña.

Tenga en cuenta que la carga crítica es independiente de la resistencia del material, ya que sólo depende de las dimensiones de la columna (I y L) y de la rigidez del material o módulo de elasticidad E. Por esta razón, en relación con el pandeo elástico, las columnas fabricadas, por ejemplo, con acero de alta resistencia no ofrecen ninguna ventaja sobre las de acero con menor resistencia, puesto que el módulo de elasticidad para ambos es aproximadamente igual. También considere que la capacidad de carga de una columna aumenta a medida que se incrementa el momento de inercia de la sección transversal. Por lo tanto, las columnas eficientes se diseñan para que la mayor parte de área transversal de la columna se ubique lo más lejos posible de los ejes principales centroidales de la sección. Ésta es la razón por la que los perfiles huecos, como los tubos, son más económicos que las secciones sólidas. Por otra parte, las secciones en I de ala ancha y las columnas que se "construyen" con canales, ángulos, placas, etcétera, son mejores que las secciones sólidas rectangulares.

También es importante darse cuenta de que una columna se pandeará alrededor del eje principal de la sección transversal que tiene el ***menor momento de inercia*** (el eje más débil). Por ejemplo, una columna que tiene

*n representa el número de ondas en la forma flexionada de la columna. Por ejemplo, si $n = 2$ aparecerán *dos* ondas en la figura 13-5*c*. Aquí, la carga crítica es 4 P_{cr} justo antes del pandeo, que en términos prácticos no existe.

una sección transversal rectangular, como la regla mostrada en la figura 13-6, se pandeará alrededor del eje *a-a* no del eje *b-b*. En consecuencia, casi siempre los ingenieros tratan de lograr un equilibrio manteniendo los momentos de inercia iguales en todas direcciones. Por lo tanto, geométricamente hablando los tubos circulares harían columnas excelentes. Asimismo se han seleccionado tubos cuadrados o formas que tienen $I_x \approx I_y$ para formar columnas.



Figura 13-6

Resumiendo la discusión anterior, puede reescribirse la ecuación de pandeo para una columna delgada y larga sostenida mediante pasadores, y los términos se pueden definir de la siguiente manera:

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}} \qquad (13\text{-}5)$$

donde

P_{cr} = carga axial máxima o crítica en la columna justo antes de que comienza a pandearse. Esta carga *no* debe causar que el esfuerzo en la columna supere el límite proporcional
E = módulo de elasticidad del material
I = *menor* momento de inercia para el área transversal de la columna
L = longitud sin soporte de la columna, cuyos extremos están articulados

Para fines de diseño, la ecuación anterior también puede escribirse en una forma más útil, al expresar $I = Ar^2$, donde A es el área transversal y r es el ***radio de giro*** del área de la sección transversal. Por lo tanto,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E(Ar^2)}{L^2}$$

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$


Columnas interiores típicas hechas con tubería de acero, que se usan para sostener el techo de un edificio de una sola planta.

o bien

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}} \qquad (13\text{-}6)$$

donde

σ_{cr} = esfuerzo crítico, que es un esfuerzo normal promedio en la columna justo antes de que ésta se pandee. Este esfuerzo es un *esfuerzo elástico* y por lo tanto $\sigma_{cr} \leq \sigma_Y$
E = módulo de elasticidad del material
L = longitud de la columna sin soporte, cuyos extremos están articulados
r = el radio de giro *más pequeño* de la columna, determinado a partir de $r = \sqrt{I/A}$, donde I es el *menor* momento de inercia del área de la sección transversal A de la columna

La relación geométrica L/r en la ecuación 13-6 se conoce como la ***relación de esbeltez*** y es una medida de la flexibilidad de la columna; como se verá más adelante, sirve para clasificar las columnas como largas, intermedias o cortas.

13

La ecuación 13-6 puede representarse gráficamente mediante ejes que representan el esfuerzo crítico contra la relación de esbeltez. En la figura 13-7 se muestran ejemplos de esta gráfica para columnas fabricadas de un acero estructural típico y de una aleación de aluminio. Tenga en cuenta que las curvas son hiperbólicas y que son válidas sólo para esfuerzos críticos por debajo del punto de cedencia del material (límite proporcional), ya que el material debe comportarse elásticamente. Para el acero, el esfuerzo de cedencia es $(\sigma_Y)_{ac} = 36$ ksi $[E_{ac} = 29(10^3)$ ksi$]$ y para el aluminio es $(\sigma_Y)_{al} = 27$ ksi $[E_{al} = 10(10^3)$ ksi$]$. Al sustituir $\sigma_{cr} = \sigma_Y$ en la ecuación 13-6, las *menores* relaciones de esbeltez permisibles para las columnas de acero y aluminio son $(L/r)_{ac} = 89$ y $(L/r)_{al} = 60.5$, respectivamente. Así, para una columna de acero, si $(L/r)_{ac} \geq 89$, puede usarse la fórmula de Euler para determinar la carga crítica, ya que el esfuerzo en la columna permanece elástico. Por otra parte, si $(L/r)_{ac} < 89$, el esfuerzo de la columna excede el punto de cedencia antes de que pueda ocurrir el pandeo, y por lo tanto la fórmula de Euler no es válida en este caso.

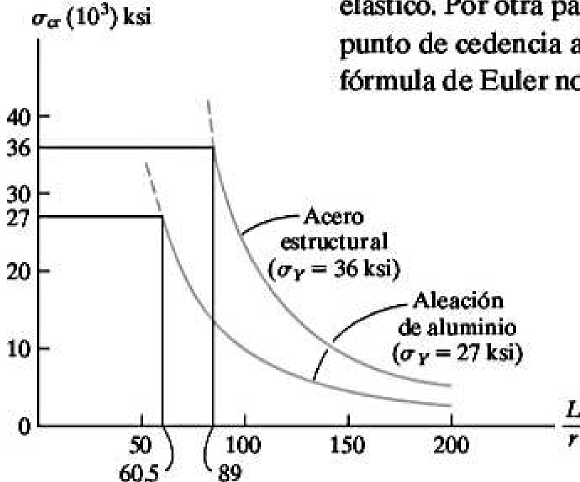


Figura 13-7

Puntos importantes

- Las *columnas* son elementos largos y delgados que se someten a cargas axiales de compresión.
- La *carga crítica* es la carga axial máxima que puede soportar una columna cuando está a punto de pandearse. Esta carga representa un caso de *equilibrio neutro*.
- Una *columna ideal* es perfectamente recta en un principio, está fabricada de un material homogéneo y la carga se aplica a través del centroide de su sección transversal.
- Una columna conectada con pasadores se pandea alrededor del eje principal de la sección transversal que tenga el *menor* momento de inercia.
- La *relación de esbeltez* es L/r, donde r es el radio de giro más pequeño de la sección transversal. El pandeo se producirá alrededor del eje donde esta relación tenga el valor más grande.

EJEMPLO 13.1

El elemento W8 × 31 de acero A-36 que se muestra en la figura 13-8 debe usarse como una columna conectada por pasadores. Determine la mayor carga axial que puede soportar antes de que comience a pandearse o antes de que el acero ceda.

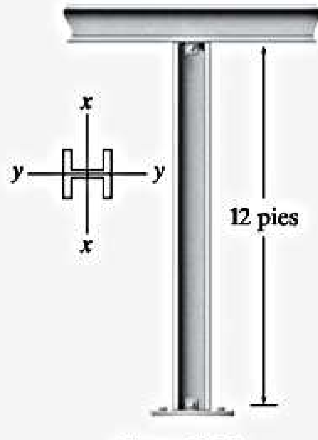


Figura 13-8

SOLUCIÓN

Con base en la tabla del apéndice B, el área de la sección transversal de la columna y los momentos de inercia son $A = 9.13$ pulg², $I_x = 110$ pulg⁴ e $I_y = 37.1$ pulg⁴. Por inspección, el pandeo se producirá alrededor del eje *y*-*y*. ¿Por qué? Al aplicar la ecuación 13-5, se tiene

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2[29(10^3)\text{ kip/pulg}^2](37.1\text{ pulg}^4)}{[12\text{ pies}(12\text{ pulg/pies})]^2} = 512\text{ kip}$$

Cuando está completamente cargada, el esfuerzo de compresión promedio en la columna es

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{512\text{ kip}}{9.13\text{ pulg}^2} = 56.1\text{ ksi}$$

Como este esfuerzo excede el esfuerzo de cedencia (36 ksi), la carga *P* se determina a partir de la compresión simple:

$$36\text{ ksi} = \frac{P}{9.13\text{ pulg}^2}; \qquad P = 329\text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

En la práctica real, es necesario incluir un factor de seguridad en esta carga.

13

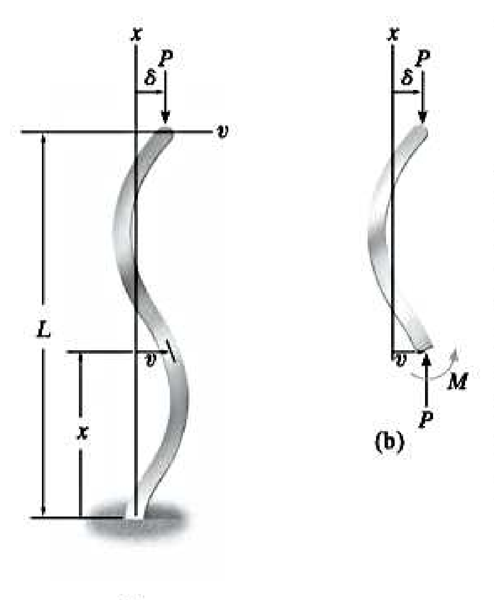


Figura 13-9

13.3 Columnas que tienen varios tipos de soportes

La carga de Euler se obtuvo para una columna que está conectada mediante un pasador o que puede girar libremente en sus extremos. Sin embargo, es común que las columnas estén soportadas de alguna otra manera. Por ejemplo, considere el caso de una columna fija en su base y libre en la parte superior, figura 13-9*a*. A medida que la columna se pandea la carga se desplaza δ y en x el desplazamiento es v. A partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 13-9*b*, el momento interno en la sección arbitraria es $M = P(\delta - v)$. En consecuencia, la ecuación diferencial de la curva de deflexión es

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = P(\delta - v)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta \qquad (13\text{-}7)$$

A diferencia de la ecuación 13-2, esta ecuación es no homogénea debido al término distinto de cero en el lado derecho. La solución consta de una solución complementaria y una solución particular, a saber,

$$v = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta$$

Las constantes se determinan a partir de las condiciones de frontera. En $x = 0$, $v = 0$, de modo que $C_2 = -\delta$. Por otra parte,

$$\frac{dv}{dx} = C_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - C_2\sqrt{\frac{P}{EI}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

En $x = 0$, $dv/dx = 0$, de modo que $C_1 = 0$. Por lo tanto, la curva de deflexión es

$$v = \delta\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\right] \qquad (13\text{-}8)$$

Como la deflexión en la parte superior de la columna es δ, es decir, en $x = L$, $v = \delta$, se requiere

$$\delta \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

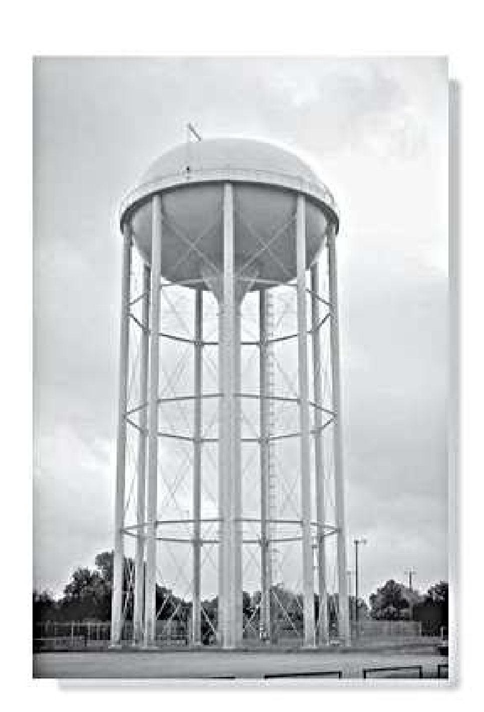
La solución trivial $\delta = 0$ indica que no ocurre pandeo, sin importar la carga P. En vez de esto,

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{n\pi}{2}, n = 1, 3, 5\ldots$$

La menor carga crítica se produce cuando $n = 1$, de modo que

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (13\text{-}9)$$

En comparación con la ecuación 13-5, se ve que una columna apoyada fijamente en su base y libre en su parte superior soportará sólo un cuarto de la carga crítica que puede aplicarse a una columna soportada por pasadores en ambos extremos.



Las columnas tubulares usadas para sostener este tanque de agua se refuerzan en tres ubicaciones en toda su longitud con el fin de evitar que se pandeen.

Las columnas con otros tipos de soporte se analizan de manera similar, por lo que no se estudiarán a detalle aquí.* En su lugar, se tabularán los resultados para los tipos de soporte más comunes en las columnas y se mostrará cómo se aplican estos resultados al escribir la fórmula de Euler en una forma general.

Longitud efectiva. Como se mencionó antes, la fórmula de Euler, ecuación 13-5, se desarrolló para el caso de una columna que tiene extremos articulados o que giran libremente. En otras palabras, L en la ecuación representa la distancia sin soporte entre los puntos de momento cero. Esta fórmula puede usarse para determinar la carga crítica en las columnas que tienen otros tipos de soporte siempre que "L" represente la distancia entre los puntos de momento cero. Esta distancia se denomina ***longitud efectiva*** de la columna, L_e. Como es obvio, para una columna con extremos articulados $L_e = L$, figura 13-10*a*. Para la columna con un extremo fijo y otro libre se encontró que la curva de deflexión, ecuación 13-8, es un medio de la curva para la columna conectada mediante pasadores y tiene una longitud de $2L$, figura 13-10*b*. Por lo tanto, la longitud efectiva entre los puntos de momento cero es $L_e = 2L$. En la figura 13-10 también se muestran ejemplos de otras dos columnas con diferentes soportes en los extremos. La columna con extremos fijos, figura 13-10*c*, tiene puntos de inflexión o puntos de momento cero a $L/4$ de cada soporte. Entonces, la longitud efectiva está representada por un medio de su longitud, es decir, $L_e = 0.5L$. Por último, la columna con un extremo articulado y otro fijo, figura 13-10*d*, tiene un punto de inflexión aproximadamente a $0.7L$ de su extremo articulado, por lo que $L_e = 0.7L$.

En vez de especificar la longitud efectiva de la columna, muchos códigos de diseño proporcionan fórmulas que emplean un coeficiente sin unidades K llamado ***factor de longitud efectiva***. Este factor se define a partir de

$$L_e = KL \qquad (13\text{-}10)$$

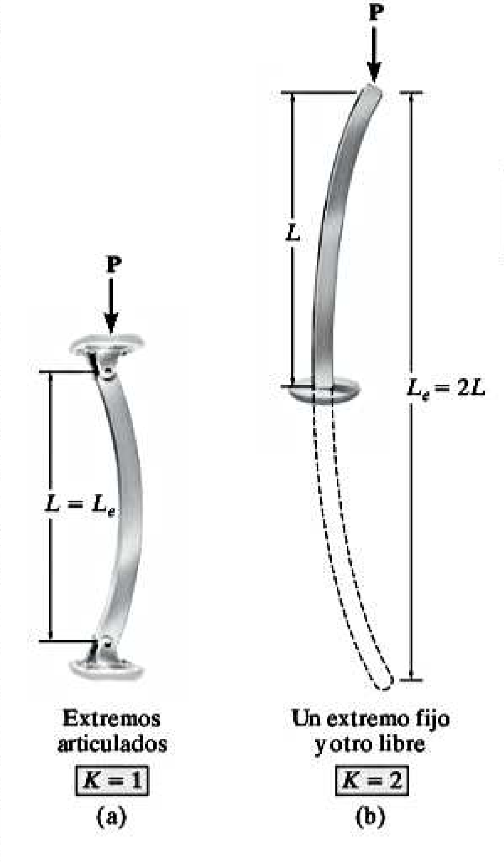
En la figura 13-10 se proporcionan valores específicos de K. Por lo tanto, con base en esta generalización puede escribirse la fórmula de Euler como

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}} \qquad (13\text{-}11)$$

o bien

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}} \qquad (13\text{-}12)$$

Aquí (KL/r) es la ***relación de esbeltez efectiva*** de la columna. Por ejemplo, si la columna está fija en su base y libre en su extremo, se tiene $K = 2$ y, por lo tanto, la ecuación 13-11 da el mismo resultado que la ecuación 13-9.



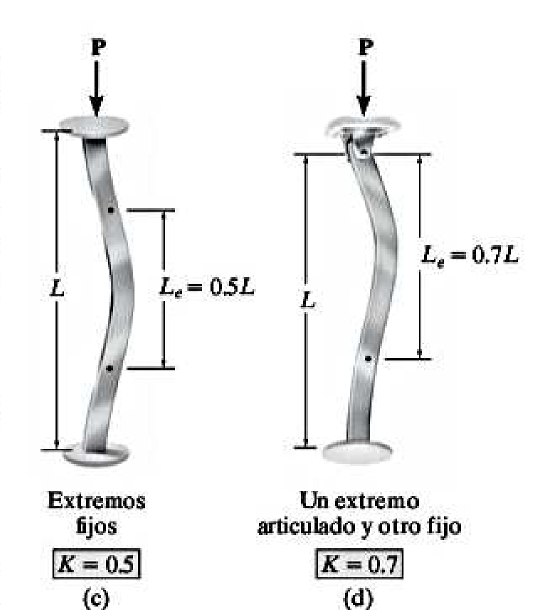
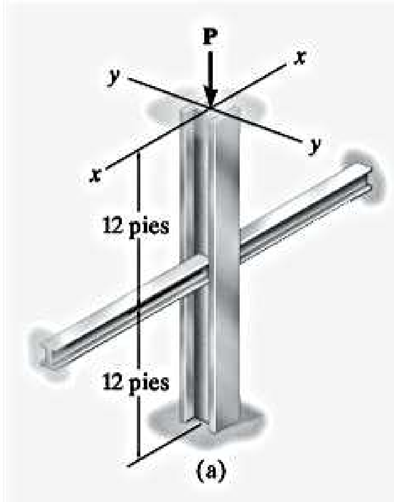


Figura 13-10

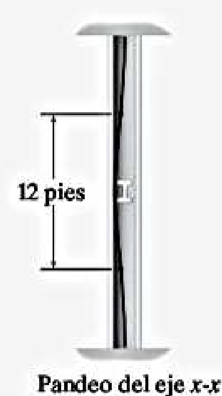
*Vea los problemas 13-43, 13-44 y 13-45.

13

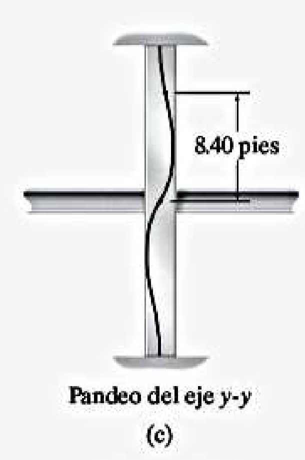
EJEMPLO 13.2



(a)



Pandeo del eje *x-x*
(b)



Pandeo del eje *y-y*
(c)

Figura 13-11

Una columna de acero W6 × 15 tiene 24 pies de largo y está fija en sus extremos como se muestra en la figura 13-11*a*. Su capacidad de carga se incrementa arriostrándola con un refuerzo alrededor del eje *y-y* (débil), mediante puntales que se supone están conectados por pasadores en su altura media. Determine la carga que puede soportar de modo que la columna no se pandee ni el material exceda el esfuerzo de cedencia. Considere $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi y $\sigma_Y = 60$ ksi.

SOLUCIÓN

El comportamiento del pandeo de la columna será *diferente* en los ejes *x-x* y *y-y* debido al arriostramiento. La forma del pandeo para cada uno de estos casos se muestra en las figuras 13-11*b* y 13-11*c*. A partir de la figura 13-11*b*, la longitud efectiva para el pandeo respecto al eje *x-x* es $(KL)_x = 0.5(24 \text{ pies}) = 12 \text{ pies} = 144 \text{ pulg}$, y con base en la figura 13-11*c*, para el pandeo respecto al eje *y-y*, $(KL)_y = 0.7(24 \text{ pies}/2) = 8.40 \text{ pies} = 100.8 \text{ pulg}$. Los momentos de inercia para una viga W6 × 15 se encuentran en la tabla del apéndice B. Se tiene $I_x = 29.1 \text{ pulg}^4$, $I_y = 9.32 \text{ pulg}^4$.

Al aplicar la ecuación 13-11,

$$(P_{cr})_x = \frac{\pi^2 E I_x}{(KL)_x^2} = \frac{\pi^2[29(10^3) \text{ ksi}]29.1 \text{ pulg}^4}{(144 \text{ pulg})^2} = 401.7 \text{ kip} \qquad (1)$$

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 E I_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[29(10^3) \text{ ksi}]9.32 \text{ pulg}^4}{(100.8 \text{ pulg})^2} = 262.5 \text{ kip} \qquad (2)$$

Por comparación, el pandeo se producirá respecto al eje *y-y*.

El área de la sección transversal es 4.43 pulg², por lo que el esfuerzo de compresión promedio en la columna es

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{262.5 \text{ kip}}{4.43 \text{ pulg}^2} = 59.3 \text{ ksi}$$

Como este esfuerzo es menor que el esfuerzo de cedencia, se presentará pandeo antes de que el material ceda. Así,

$$P_{cr} = 263 \text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: A partir de la ecuación 13-12 puede observarse que el pandeo siempre se producirá respecto al eje de la columna que tenga la *mayor* relación de esbeltez, ya que una relación de esbeltez grande generará un esfuerzo crítico pequeño. Por lo tanto, si se usan los datos para el radio de giro que se encuentran en la tabla del apéndice B, se tiene

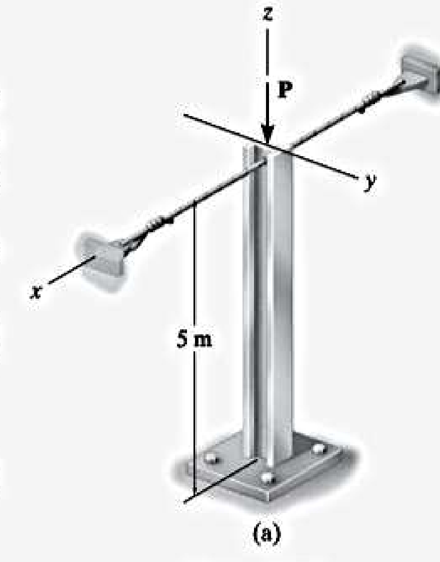
$$\left(\frac{KL}{r}\right)_x = \frac{144 \text{ pulg}}{2.56 \text{ pulg}} = 56.2$$

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{100.8 \text{ pulg}}{1.46 \text{ pulg}} = 69.0$$

Por consiguiente, ocurrirá el pandeo del eje *y-y*, que es la misma conclusión a la que se llegó mediante la comparación de las ecuaciones 1 y 2.

EJEMPLO 13.3

La columna de aluminio se encuentra fija en su parte inferior y arriostrada en su parte superior por medio de cables que tienen el propósito de evitar el movimiento en esa parte a lo largo del eje x, figura 13-12a. Si se supone que está fija en su base, determine la mayor carga P permisible que puede aplicarse. Use un factor de seguridad para el pandeo de F.S. = 3.0. Tome $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_Y = 215$ MPa, $A = 7.5(10^{-3})$ m^2, $I_x = 61.3(10^{-6})$ m^4, $I_y = 23.2(10^{-6})$ m^4.



(a)

Figura 13-12

SOLUCIÓN

En las figuras 13-12b y 13-12c se muestra el pandeo respecto a los ejes x y y. Si se usa la figura 13-10a, para el pandeo del eje x-x, $K = 2$ por lo que $(KL)_x = 2(5\text{ m}) = 10$ m. Además, para el eje y-y el pandeo $K = 0.7$, por lo que $(KL)_y = 0.7(5\text{ m}) = 3.5$ m.

Al aplicar la ecuación 13-11, se obtienen las cargas críticas para cada caso

$$(P_{cr})_x = \frac{\pi^2 E I_x}{(KL)_x^2} = \frac{\pi^2[70(10^9)\text{ N/m}^2](61.3(10^{-6})\text{ m}^4)}{(10\text{ m})^2}$$
$$= 424\text{ kN}$$
$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 E I_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[70(10^9)\text{ N/m}^2](23.2(10^{-6})\text{ m}^4)}{(3.5\text{ m})^2}$$
$$= 1.31\text{ MN}$$

Por comparación, a medida que P se incrementa la columna se pandea en torno al eje x-x. Por lo tanto, la carga permisible es

$$P_{perm} = \frac{P_{cr}}{\text{F.S.}} = \frac{424\text{ kN}}{3.0} = 141\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Dado que

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{424\text{ kN}}{7.5(10^{-3})\text{ m}^2} = 56.5\text{ MPa} < 215\text{ MPa}$$

Es posible aplicar la ecuación de Euler.



Pandeo del eje y-y

(c)



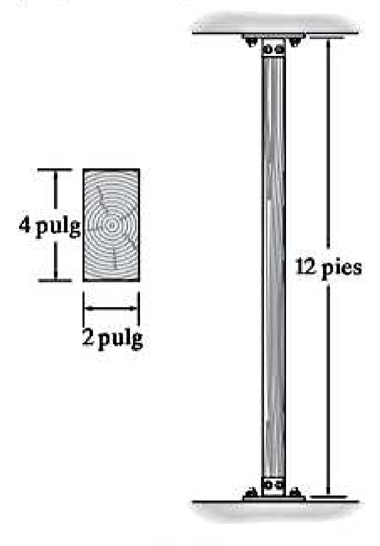
Pandeo del eje x-x

(b)

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

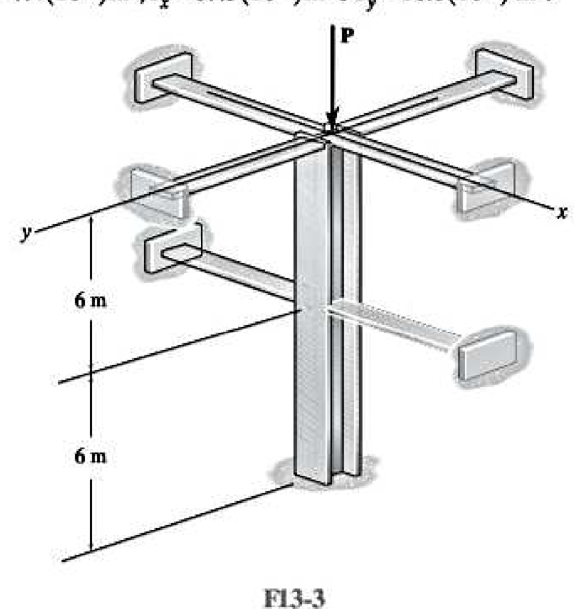
F13-1. Una barra de 50 pulg de largo está fabricada de acero y tiene un diámetro de 1 pulg. Determine la carga crítica de pandeo si los extremos se sostienen fijamente. $E = 29(10^3)$ ksi y $\sigma_Y = 36$ ksi.

F13-2. Una columna rectangular de madera con 12 pies de largo tiene las dimensiones indicadas en la figura. Determine la carga crítica si se supone que los extremos están articulados. $E = 1.6(10^3)$ ksi. No se produce cedencia.



F13-2

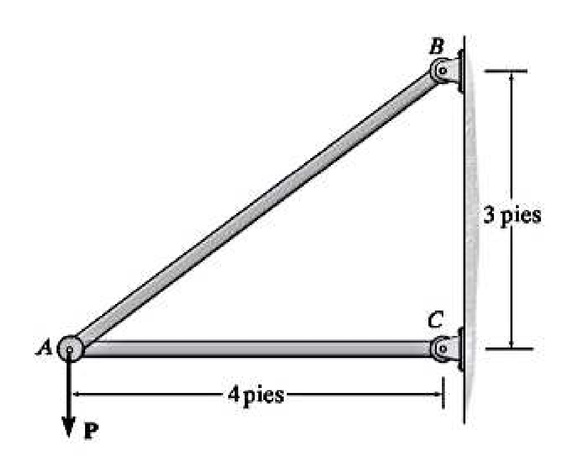
F13-3. La columna de acero A-36 puede considerarse articulada en sus partes superior e inferior y arriostrada en su eje débil a la mitad de su altura. Determine la fuerza permisible máxima **P** que puede soportar la columna sin pandearse. Aplique un F.S. = 2 contra el pandeo. Considere $A = 7.4(10^{-3})\text{m}^2$, $I_x = 87.3(10^{-6})\text{m}^4$ e $I_y = 18.8(10^{-6})\text{ m}^4$.



F13-3

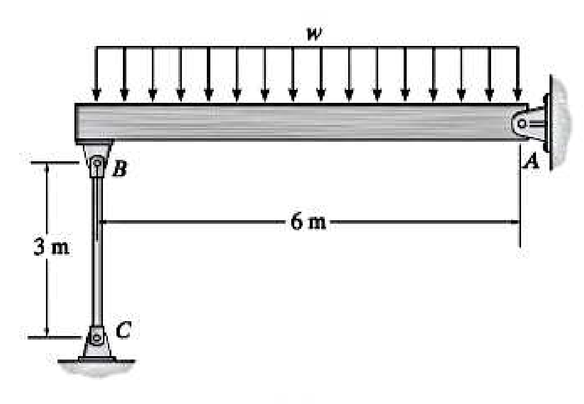
F13-4. Un tubo de acero se sostiene fijamente en sus extremos. Si tiene 5 m de largo, su diámetro externo es de 50 mm y su grosor es de 10 mm, determine la máxima carga axial P que puede soportar sin pandearse. $E_{ac} = 200$ GPa, $\sigma_Y = 250$ MPa.

F13-5. Determine la fuerza máxima **P** que puede soportar el ensamble sin causar que el elemento AC se pandee. El elemento está fabricado de acero A-36 y tiene un diámetro de 2 pulg. Considere un F.S. = 2 contra el pandeo.



F13-5

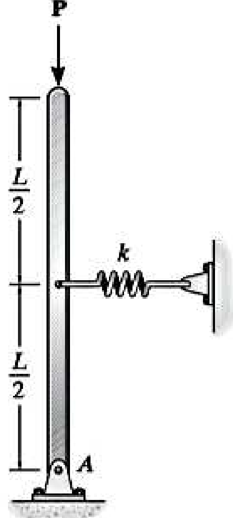
F13-6. La barra BC de acero A-36 tiene un diámetro de 50 mm y se usa como un puntal de apoyo para la viga. Determine la intensidad máxima w de la carga uniforme distribuida que puede aplicarse a la viga sin causar que el puntal se pandee. Considere un F.S. = 2 contra el pandeo.



F13-6

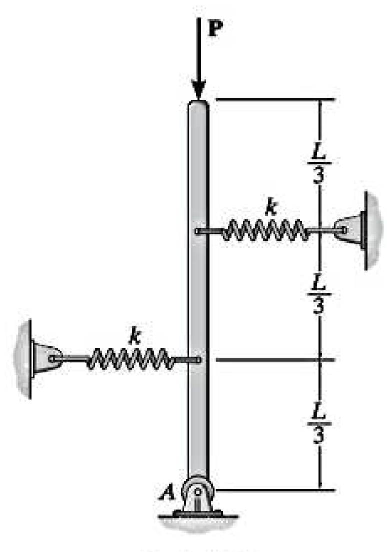
PROBLEMAS

•**13-1.** Determine la carga crítica de pandeo para la columna. Puede suponerse que el material es rígido.



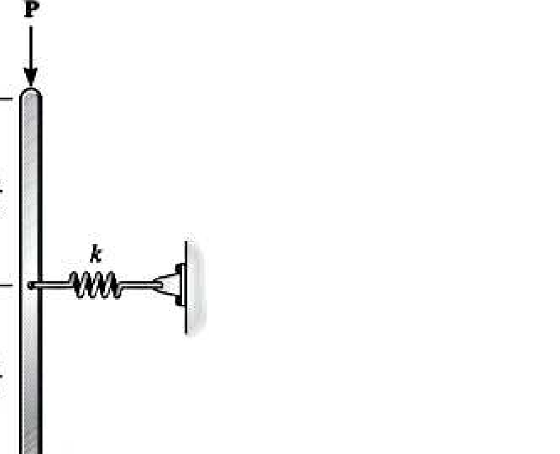
Prob. 13-1

13-2. Determine la carga crítica P_{cr} para la barra rígida y el sistema de resortes. Cada resorte tiene una rigidez k.



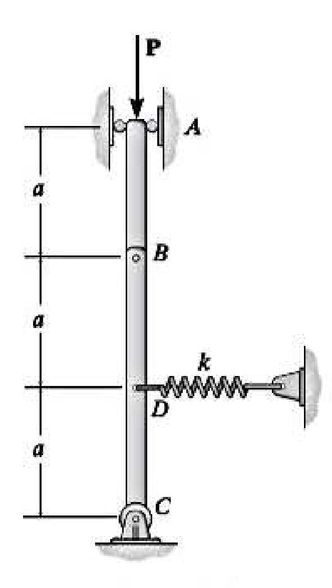
Prob. 13-2

13-3. La pierna en (a) actúa como una columna y puede modelarse (b) mediante dos elementos articulados que están conectados a un resorte de torsión con una rigidez k (par/rad). Determine la carga crítica de pandeo. Suponga que el material óseo es rígido.



Prob. 13-3

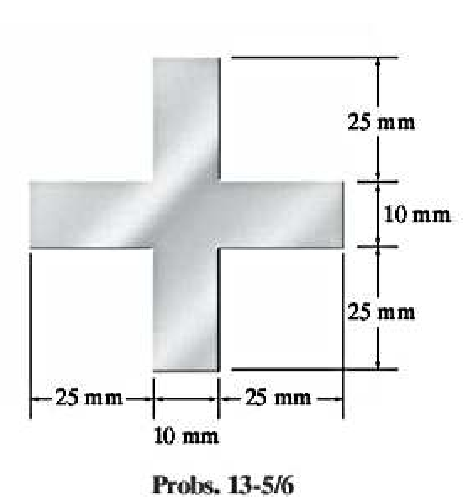
***13-4.** Las barras rígidas AB y BC están conectadas mediante pasadores en B. Si el resorte en D tiene una rigidez k, determine la carga crítica P_{cr} para el sistema.



Prob. 13-4

•13-5. Una columna de acero A-36 tiene una longitud de 4 m y está articulada en ambos extremos. Si el área de la sección transversal tiene las dimensiones indicadas en la figura, determine la carga crítica.

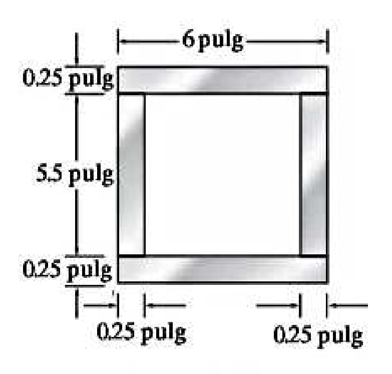
13-6. Resuelva el problema 13-5 si la columna está fija en su base y articulada en su parte superior.



Probs. 13-5/6

13-7. Una columna es de acero A-36, tiene una longitud de 20 pies y está articulada en ambos extremos. Si el área de la sección transversal tiene las dimensiones indicadas, determine la carga crítica.

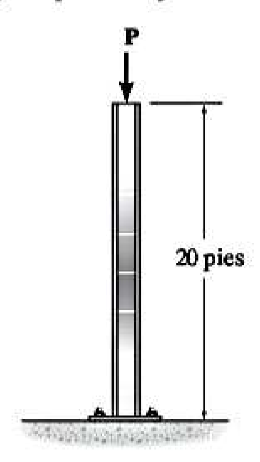
***13-8.** Una columna de aluminio 2014-T6, tiene una longitud de 30 pies, está fija en su base y se encuentra articulada en su parte superior. Si el área de la sección transversal tiene las dimensiones indicadas en la figura, determine la carga crítica.



Probs. 13-7/8

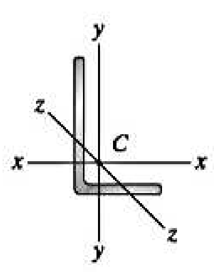
•13-9. La columna W14 × 38 es de acero A-36 y se sostiene fijamente en su base. Si se somete a una carga axial de $P = 15$ kip, determine el factor de seguridad con respecto al pandeo.

13-10. La columna W14 × 38 es de acero A-36. Determine la carga crítica si su extremo inferior se sostiene fijamente y la parte superior puede moverse con libertad respecto al eje fuerte y está fija respecto al eje débil.



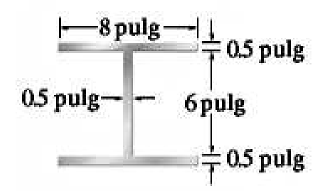
Probs. 13-9/10

13-11. El ángulo de acero A-36 tiene una sección transversal de área $A = 2.48$ pulg^2 y radios de giro respecto al eje x de $r_x = 1.26$ pulg, y respecto al eje y de $r_y = 0.879$ pulg. El radio de giro más pequeño se produce alrededor del eje z, y es $r_z = 0.644$ pulg. Si el ángulo debe usarse como una columna articulada de 10 pies de largo, determine la mayor carga axial que puede aplicarse a través de su centroide C sin causar pandeo.



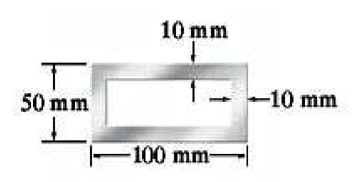
Prob. 13-11

***13-12.** Una columna de acero A-36 tiene una longitud de 15 pies y está articulada en ambos extremos. Si el área de la sección transversal tiene las dimensiones indicadas en la figura, determine la carga crítica.



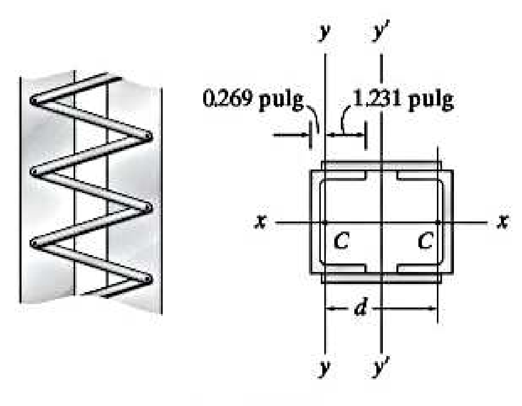
Prob. 13-12

•**13-13.** Una columna de acero A-36 tiene una longitud de 5 metros y está fija en ambos extremos. Si el área de la sección transversal tiene las dimensiones indicadas en la figura, determine la carga crítica.



Prob. 13-13

13-14. Los dos canales de acero se unen entre sí para formar una columna para un puente con 30 pies de longitud; se supone que estará conectada mediante pasadores en sus extremos. Cada canal tiene una sección transversal de área $A = 3.10$ pulg^2 y momentos de inercia $I_x = 55.4$ pulg^4 e $I_y = 0.382$ pulg^4. La ubicación del centroide C de su área se muestra en la figura. Determine la distancia apropiada d entre los centroides de los canales de modo que el pandeo se produsca alrededor de los ejes x-x y y'-y' debido a la misma carga. ¿Cuál es el valor de esta carga crítica? No tome en cuenta el efecto de la celosía en el momento de inercia. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 50$ ksi.



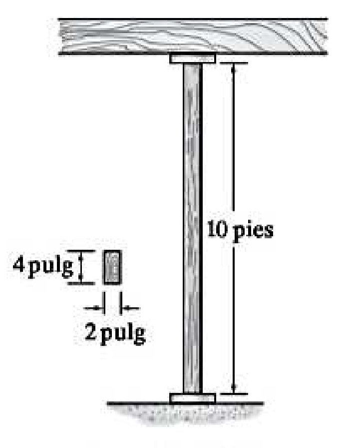
Prob. 13-14

13-15. Una columna W8 × 24 de acero A-36 está fija en un extremo y libre en el otro. Si se somete a una carga axial de 20 kip, determine la longitud máxima permisible de la columna si se desea un F.S. = 2 en contra del pandeo.

***13-16.** Una columna W8 × 24 de acero A-36 está fija en un extremo y articulada en el otro. Si se somete a una carga axial de 60 kip, determine la longitud máxima permisible de la columna si se desea un F.S. = 2 en contra del pandeo.

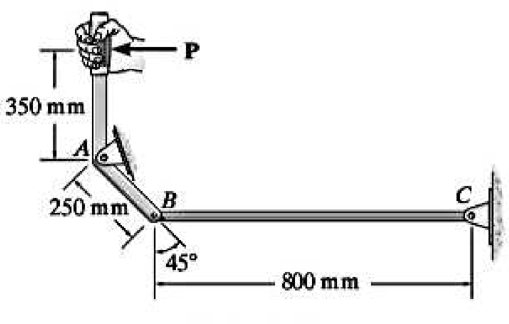
•**13-17.** La columna de madera rectangular con 10 pies de largo tiene las dimensiones indicadas en la figura. Determine la carga crítica si se supone que los extremos están conectados mediante pasadores. $E_w = 1.6(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 5$ ksi.

13-18. La columna de 10 pies tiene las dimensiones mostradas en la figura. Determine la carga crítica si la parte inferior está fija y la parte superior está articulada. $E_w = 1.6(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 5$ ksi.



Probs. 13-17/18

13-19. Determine la fuerza máxima P que puede aplicarse a la manija, de modo que la barra de control BC, fabricada con acero A-36, no se pandee. La barra tiene un diámetro de 25 mm.

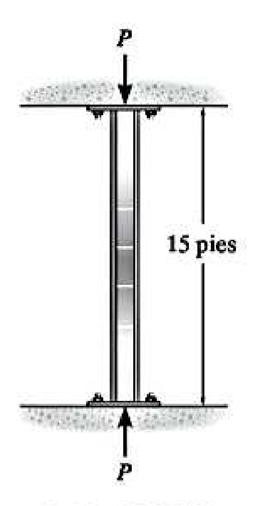


Prob. 13-19

13

*13-20. La viga W10 × 45 es de acero A-36 y se usa como una columna con longitud de 15 pies. Si se supone que sus extremos se sostienen mediante pasadores y está sometida a una carga axial de 100 kip, determine el factor de seguridad con respecto al pandeo.

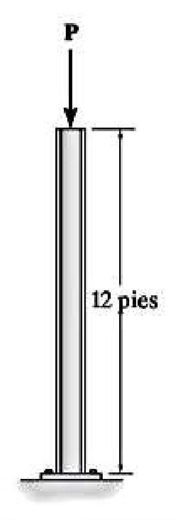
•13-21. La viga W10 × 45 es de acero A-36 y se usa como una columna con longitud de 15 pies. Si sus extremos están soportados fijamente, ¿puede la columna soportar la carga crítica sin ceder?



Probs. 13-20/21

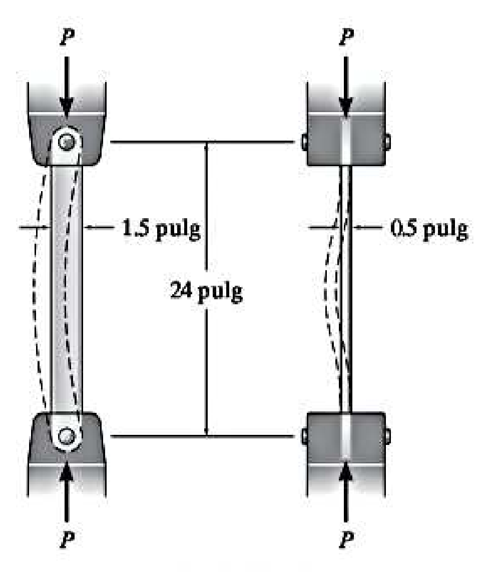
13-22. La columna W12 × 87 de acero estructural A-36 tiene una longitud de 12 pies. Si su extremo inferior se encuentra fijo, su extremo superior está libre y se somete a una carga axial de $P = 380$ kip, determine el factor de seguridad con respecto al pandeo.

13-23. La columna W12 × 87 de acero estructural A-36 tiene una longitud de 12 pies. Si su extremo inferior se encuentra fijo y su extremo superior está libre, determine la mayor carga axial que puede soportar. Use un factor de seguridad con respecto al pandeo de 1.75.



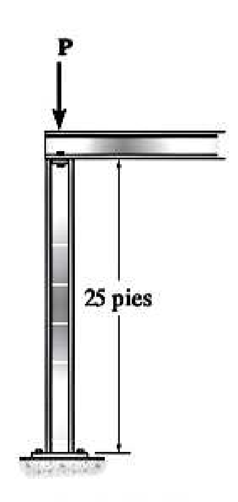
Probs. 13-22/23

*13-24. Un eslabón de acero para herramientas L-2 en una máquina de forjado está conectado mediante pasadores a los extremos de las horquillas como se muestra en la figura. Determine la máxima carga P que puede soportar sin pandearse. Use un factor de seguridad con respecto al pandeo de F.S. = 1.75. Observe en la figura de la izquierda que los extremos están articulados para el pandeo, mientras que en la figura de la derecha los extremos están fijos.



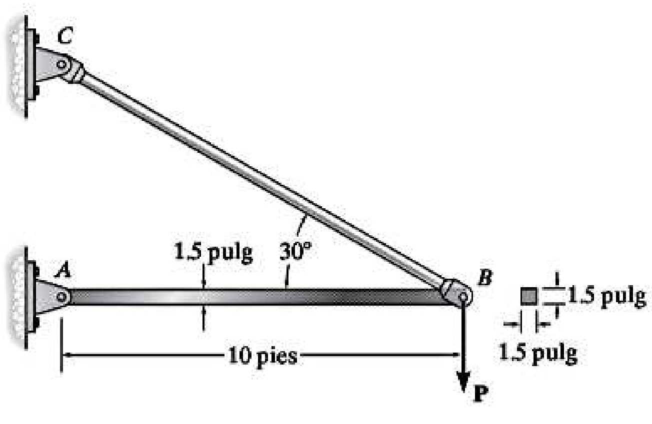
Prob. 13-24

•13-25. La viga W14 × 30 de acero A-36 se usa como una columna estructural que puede suponerse articulada en sus dos extremos. Determine la mayor fuerza axial P que se le puede aplicar sin causar pandeo.



Prob. 13-25

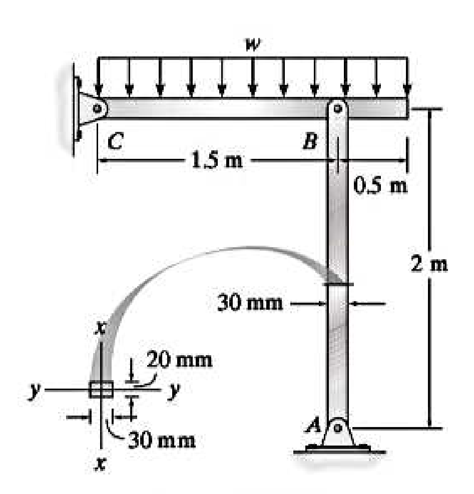
13-26. La barra de acero A-36 AB tiene una sección transversal cuadrada. Si está conectada mediante pasadores en sus extremos, determine la carga máxima permisible P que puede aplicarse al bastidor. Use un factor de seguridad con respecto al pandeo de 2.



Prob. 13-26

13-27. Determine la intensidad permisible máxima w de la carga distribuida que puede aplicarse al elemento BC sin causar que el elemento AB se pandee. Suponga que AB es de acero y está articulado en sus extremos para el pandeo del eje x-x y fijo en sus extremos para el pandeo del eje y-y. Use un factor de seguridad con respecto al pandeo de 3. $E_{ac} = 200$ GPa, $\sigma_Y = 360$ MPa.

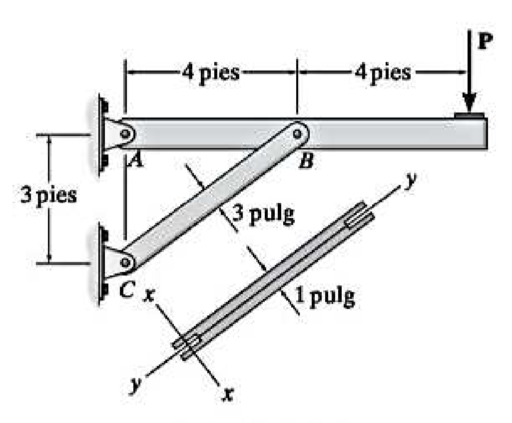
***13-28.** Determine si el bastidor puede soportar una carga de $w = 6$ kN/m cuando el factor de seguridad respecto al pandeo del elemento AB es de 3. Suponga que AB es de acero y está articulado en sus extremos para el pandeo del eje x-x y fijo en sus extremos para el pandeo del eje y-y. $E_{ac} = 200$ GPa, $\sigma_Y = 360$ MPa.



Probs. 13-27/28

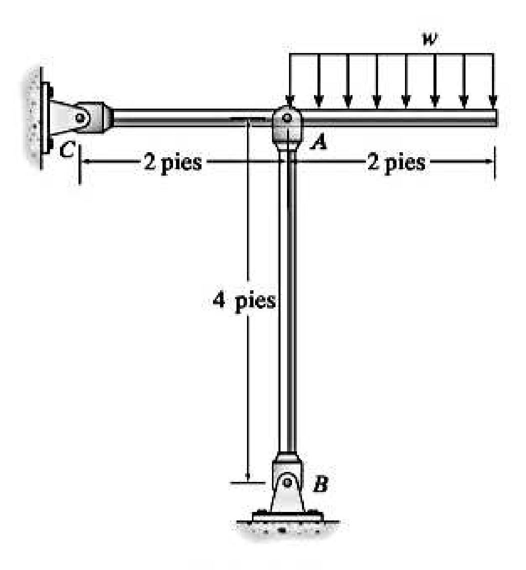
•13-29. La viga soporta la carga de $P = 6$ kip. Como resultado, el elemento BC de acero A-36 se somete a una carga de compresión. Debido a los extremos en horquilla del elemento, considere que los soportes en B y C actúan como pasadores para el pandeo del eje x-x y como soportes fijos para el pandeo del eje y-y. Determine el factor de seguridad con respecto al pandeo de cada uno de estos ejes.

13-30. Determine la mayor carga P que soportará el bastidor sin que el elemento BC de acero A-36 se pandee. Debido a los extremos en horquilla del elemento, considere que los soportes en B y C actúan como pasadores para el pandeo del eje x-x y como soportes fijos para el pandeo del eje y-y.



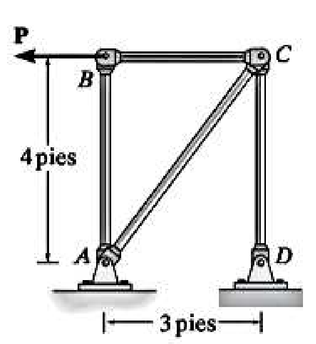
Probs. 13-29/30

13-31. Determine la carga distribuida máxima que puede aplicarse a la barra, de modo que el puntal AB de acero A-36 no se pandee. El puntal tiene un diámetro de 2 pulg y está articulado en sus extremos.



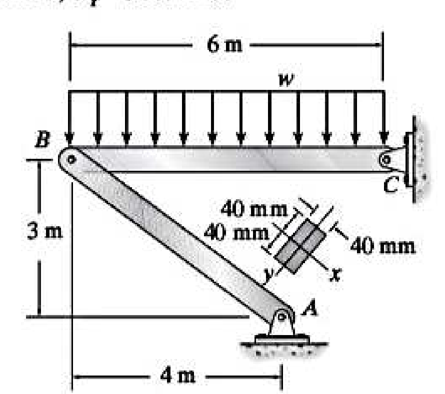
Prob. 13-31

*13-32. Suponga que los elementos de la armadura están conectados mediante pasadores. Si el elemento AC es una barra de acero A-36 con 2 pulg de diámetro, determine la carga máxima P que puede soportar la armadura sin que el elemento se pandee.



Prob. 13-32

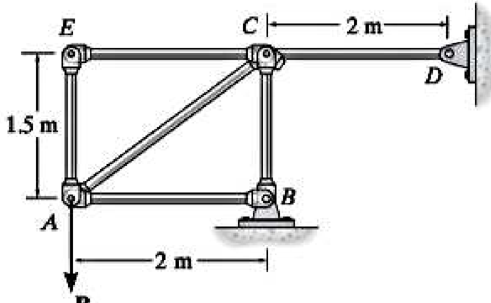
•13-33. Se supone que la barra de acero AB del bastidor está articulada en sus extremos para el pandeo del eje y-y. Si $w = 3$ kN/m, determine el factor de seguridad contra el pandeo respecto al eje y-y debido a la carga aplicada. $E_{ac} = 200$ GPa, $\sigma_Y = 360$ MPa.



Prob. 13-33

13-34. Suponga que los elementos de la armadura están conectados mediante pasadores. Si el elemento AB es una barra de acero A-36 de 40 mm de diámetro, determine la máxima fuerza P que puede soportar la armadura sin que el elemento se pandee.

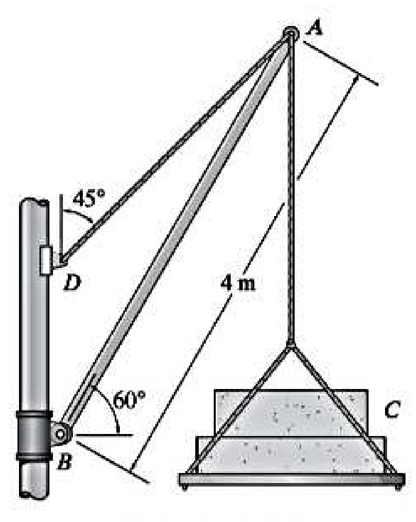
13-35. Suponga que los elementos de la armadura están conectados mediante pasadores. Si el elemento CB es una barra de acero A-36 de 40 mm de diámetro, determine la máxima fuerza P que puede soportar la armadura sin que el elemento se pandee.



Probs. 13-34/35

*13-36. Si la carga C tiene una masa de 500 kg, determine con precisión de 1 mm el diámetro mínimo requerido para que la barra sólida AB de acero L2 no se pandee. Utilice un F.S. = 2 contra el pandeo.

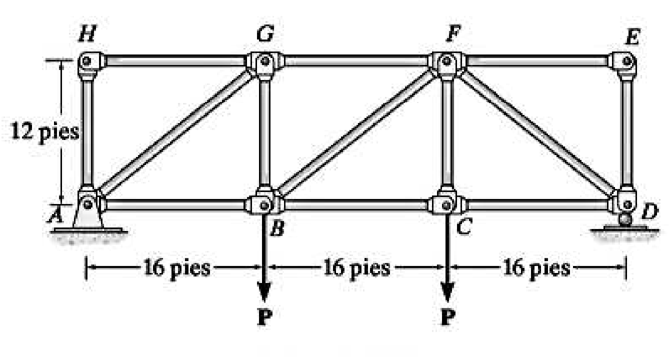
•13-37. Si el diámetro de la barra sólida AB de acero L2 es 50 mm, determine la máxima masa C que puede soportar la barra sin deformarse. Use un F.S. = 2 contra el pandeo.



Probs. 13-36/37

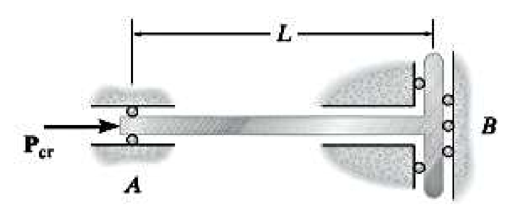
13-38. Suponga que los elementos de la armadura están conectados mediante pasadores. Si el elemento GF es una barra de acero A-36 que tiene un diámetro de 2 pulg, determine la mayor magnitud de la carga P que puede soportar la armadura sin que este elemento se pandee.

13-39. Suponga que los elementos de la armadura están conectados mediante pasadores. Si el elemento AG es una barra de acero A-36 que tiene un diámetro de 2 pulg, determine la mayor magnitud de la carga P que puede soportar la armadura sin que este elemento se pandee.



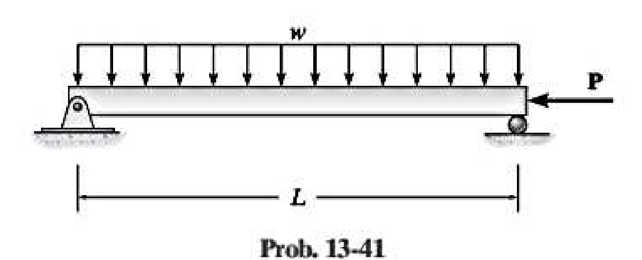
Probs. 13-38/39

•13-40. La columna tiene en B un soporte que no permite la rotación pero permite la deflexión vertical. Determine la carga crítica P_{cr}. EI es constante.



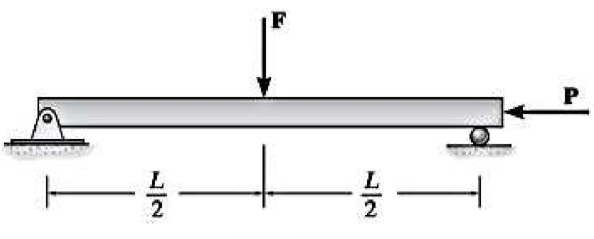
Prob. 13-40

•13-41. La columna ideal tiene un peso w (fuerza/longitud) y descansa en la posición horizontal cuando se somete a la carga axial P. Determine el momento máximo de la columna a la mitad del claro. EI es constante. *Sugerencia:* Establezca la ecuación diferencial para la deflexión, ecuación 13-1, con el origen a la mitad del claro. La solución general es $v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx + (w/(2P))x^2 - (wL/(2P))x - (wEI/P^2)$ donde $k^2 = P/EI$.



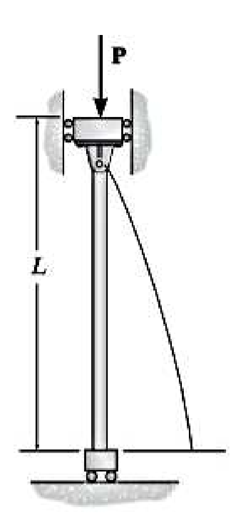
Prob. 13-41

13-42. La columna ideal está sometida a la fuerza $\mathbf{F}$ en su punto medio y la carga axial $\mathbf{P}$. Determine el momento máximo de la columna a la mitad del claro. EI es constante. *Sugerencia:* Establezca la ecuación diferencial para la deflexión, ecuación 13-1. La solución general es $v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx - c^2x/k^2$, donde $c^2 = F/2EI$, $k^2 = P/EI$.



Prob. 13-42

13-43. La columna con EI constante está restringida en sus extremos como se muestra en la figura. Determine la carga crítica de la columna.



Prob. 13-43

•13-44. Considere una columna ideal como en la figura 13-10c, con ambos extremos fijos. Demuestre que la carga crítica en la columna está dada por $P_{cr} = 4\pi^2EI/L^2$. *Sugerencia:* Debido a la deflexión vertical de la parte superior de la columna, se desarrollará un momento constante $\mathbf{M}'$ en los soportes. Demuestre que $d^2v/dx^2 + (P/EI)v = M'/EI$. La solución tiene la forma $v = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}x) + C_2 \cos(\sqrt{P/EI}x) + M'/P$.

•13-45. Considere una columna ideal como en la figura 13-10d, con un extremo fijo y el otro articulado. Demuestre que la carga crítica en la columna está dada por $P_{cr} = 20.19EI/L^2$. *Sugerencia:* Debido a la deflexión vertical de la parte superior de la columna, se desarrollará un momento constante $\mathbf{M}'$ en el soporte fijo y fuerzas reactivas horizontales $\mathbf{R}'$ en ambos soportes. Demuestre que $d^2v/dx^2 + (P/EI)v = (R'/EI)(L - x)$. La solución tiene la forma $v = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}x) + C_2 \cos(\sqrt{P/EI}x) + (R'/P)(L - x)$. Después de aplicar las condiciones de frontera demuestre que $\tan(\sqrt{P/EI}L) = \sqrt{P/EI}L$. Encuentre por prueba y error la menor raíz distinta de cero.



La columna que soporta esta grúa es demasiado larga. Estará sometida no sólo a la carga uniaxial, sino también un momento flexionante. Para evitar que se pandee, debería estar reforzada en la parte superior como con una conexión de pasador.

*13.4 La fórmula de la secante

La fórmula de Euler se obtuvo al suponer que la carga P se aplica siempre a través del centroide del área transversal de la columna y que la columna es perfectamente recta. En realidad esto es muy poco realista, ya que las columnas fabricadas nunca son perfectamente rectas, ni la aplicación de la carga se conoce con gran exactitud. Entonces, en realidad las columnas nunca se pandean súbitamente, sino que empiezan a doblarse en forma ligera inmediatamente después de la aplicación de la carga. En consecuencia, el criterio real para la aplicación de cargas debería estar limitado a una deflexión de la columna especificada o a no admitir que el esfuerzo máximo en la columna exceda el esfuerzo permisible.

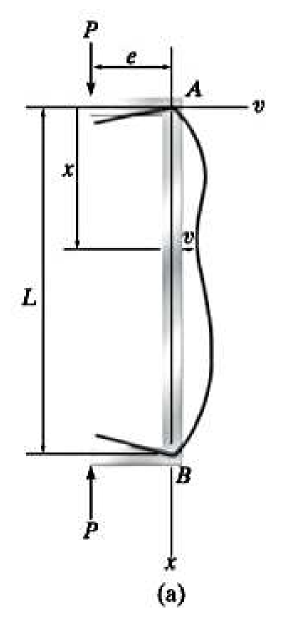
Para estudiar este efecto, se aplicará la carga P a la columna en una *distancia excéntrica* corta e desde su centroide, figura 13-13*a*. Esta carga sobre la columna es estáticamente equivalente a la carga axial P y al momento flexionante $M' = Pe$ que se indica en la figura 13-13*b*. Como se muestra en ambos casos, los extremos A y B están soportados de modo que pueden girar con libertad (soporte de pasador). Al igual que antes, sólo se considerarán pendientes y deflexiones pequeñas, y un comportamiento elástico lineal del material. Además, el plano x-v es un plano de simetría para el área de la sección transversal.

A partir del diagrama de cuerpo libre de la sección arbitraria, figura 13-13*c*, el momento interno en la columna es

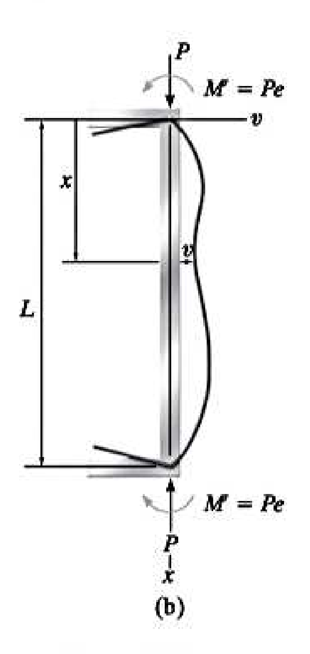
$$M = -P(e + v) \tag{13-13}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial de la curva de deflexión es

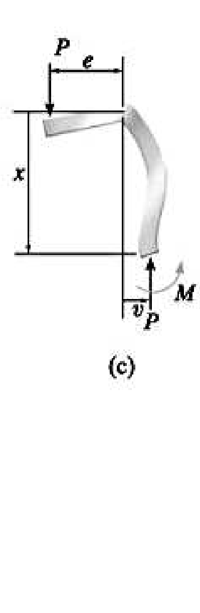
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -P(e + v)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 13-13

o bien

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = -\frac{P}{EI}e$$

Esta ecuación es similar a la ecuación 13-7 y tiene una solución general que consiste en las soluciones complementarias y particulares, a saber,

$$v = C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x - e \qquad (13\text{-}14)$$

Para evaluar las constantes se deben aplicar las condiciones de frontera. En $x = 0$, $v = 0$, por lo que $C_2 = e$. Y en $x = L$, $v = 0$, lo que resulta en

$$C_1 = \frac{e[1 - \cos(\sqrt{P/EI}\,L)]}{\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L)}$$

Como $1 - \cos(\sqrt{P/EI}\,L) = 2\operatorname{sen}^2(\sqrt{P/EI}\,L/2)$ y $\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L) = 2\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L/2)\cos(\sqrt{P/EI}\,L/2)$, se tiene

$$C_1 = e\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

Por lo tanto, la curva de deflexión, ecuación 13-14, puede escribirse como

$$v = e\left[\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - 1\right] \qquad (13\text{-}15)$$

Deflexión máxima. Debido a la simetría de carga, tanto la deflexión máxima como el esfuerzo máximo se producen en el punto medio de la columna. Por lo tanto, cuando $x = L/2$, $v = v_{máx}$, por lo que

$$v_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \qquad (13\text{-}16)$$

Tenga en cuenta que si e se aproxima a cero, entonces $v_{máx}$ también tiende a cero. Sin embargo, si los términos entre paréntesis tienden al infinito cuando e se aproxima a cero, entonces $v_{máx}$ tendrá un valor distinto de cero. Matemáticamente, esto representaría el comportamiento de una columna cargada axialmente al momento de fallar cuando está sometida a la carga crítica P_{cr}. Por lo tanto, para encontrar P_{cr} se requiere

$$\sec\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2}\right) = \infty$$

$$\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (13\text{-}17)$$

que es el mismo resultado que se encontró con la fórmula de Euler, ecuación 13-5.

Si la ecuación 13-16 se grafica como la carga P contra la deflexión $v_{máx}$ para diferentes valores de excentricidad e, resulta la familia de curvas en color gris que se muestra en la figura 13-14. Aquí, la carga crítica se con-

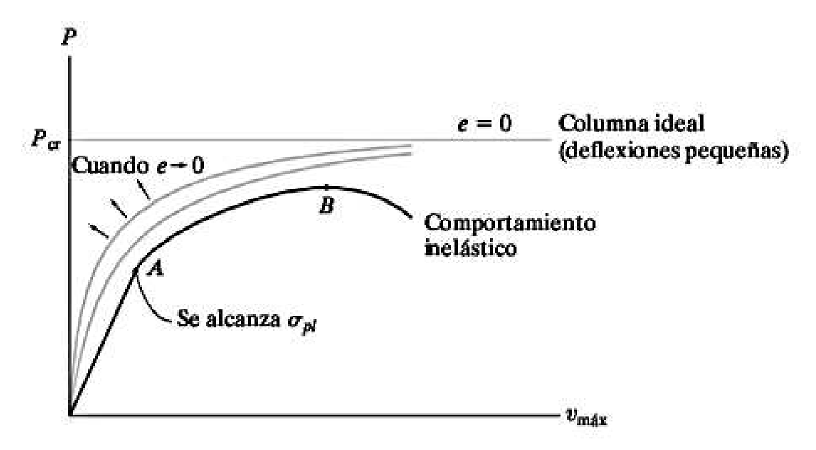


Figura 13-14

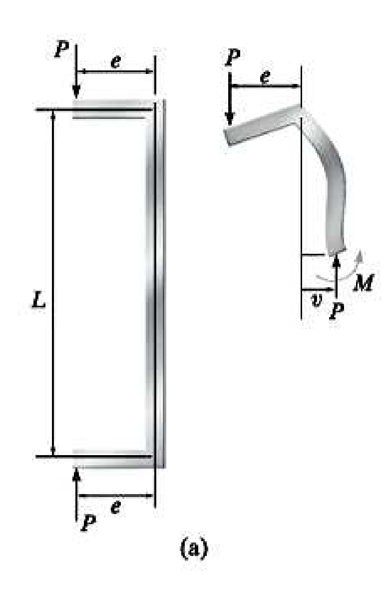
vierte en una asíntota a las curvas, y por supuesto representa el caso no realista de una columna ideal ($e = 0$). Como se dijo anteriormente, *e nunca es cero* debido a las imperfecciones en la rectitud inicial de la columna y la aplicación de la carga; sin embargo, cuando $e \rightarrow 0$ las curvas tienden a acercarse al caso ideal. Además, estas curvas son apropiadas sólo para *deflexiones pequeñas*, ya que la curvatura se aproximó mediante d^2v/dx^2 cuando se desarrolló la ecuación 13-16. Si se hubiera realizado un análisis más exacto, todas estas curvas tenderían a girar hacia arriba, intersecando y después elevándose por encima de la línea $P = P_{cr}$. Por supuesto, esto indica que se requiere una mayor carga P para crear grandes deflexiones de la columna. Sin embargo, aquí no se ha considerado este análisis puesto que el diseño de ingeniería suele restringir la deflexión de las columnas a valores pequeños.

También debe señalarse que las curvas de color gris en la figura 13-14 sólo son aplicables cuando el material se comporta de forma elástico lineal. Este es el caso cuando la columna es larga y esbelta. Sin embargo, si se considera una columna gruesa de longitud corta o intermedia, el incremento de la carga aplicada puede causar que el material ceda y que la columna comience a comportarse de una *manera inelástica*. Esto ocurre en el punto A de la curva en color negro en la figura 13-14. Cuando la carga se incrementa aún más, la curva nunca alcanza la carga crítica sino que llega a un valor máximo en B. Después, se produce una disminución súbita de la capacidad de carga mientras la columna sigue cediendo y doblándose en mayor medida.

Por último, las curvas en gris de la figura 13-14 también ilustran que se produce una relación *no lineal* entre la carga P y la deflexión v. En consecuencia, el principio de superposición *no puede usarse* para determinar la deflexión total de una columna causada por la aplicación de *cargas sucesivas* a la columna. En cambio, primero deben sumarse las cargas para después poder determinar la deflexión correspondiente con base en su resultante. La razón física por la que las cargas y deflexiones sucesivas no pueden superimponerse es que el momento interno de la columna *depende tanto* de la *carga P como* de la *deflexión v*, es decir, $M = -P(e + v)$, ecuación 13-13.

La fórmula de la secante. El esfuerzo máximo en la columna puede determinarse al observar que es causado tanto por la carga axial como por el momento, figura 13-15*a*. El momento máximo se produce en el punto medio de la columna, y mediante las ecuaciones 13-13 y 13-16 se determina que tiene una magnitud de

$$M = |P(e + v_{\text{máx}})| \qquad M = Pe\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) \tag{13-18}$$



Como se muestra en la figura 13-15*b*, el esfuerzo máximo en la columna es de compresión, y tiene un valor de

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

Como el radio de giro se define como $r^2 = I/A$, la ecuación anterior puede escribirse en una forma llamada la *fórmula de la secante*:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \tag{13-19}$$

Aquí

$\sigma_{\text{máx}}$ = *esfuerzo elástico* máximo en la columna, que ocurre en el lado interior cóncavo en el punto medio de la columna. Este esfuerzo es de compresión

P = carga vertical aplicada a la columna. $P < P_{\text{cr}}$ a menos que $e = 0$; entonces $P = P_{\text{cr}}$ (ecuación 13-5)

e = excentricidad de la carga P, medida desde el eje centroidal de la sección transversal de la columna hasta la línea de acción de P

c = distancia desde el eje centroidal hasta la fibra exterior de la columna donde ocurre el esfuerzo máximo de compresión $\sigma_{\text{máx}}$

A = área de la sección transversal de la columna

L = longitud no soportada de la columna *en el plano de flexión*. Para soportes distintos a los pasadores, debe usarse la longitud efectiva $L_e = KL$. Vea la figura 13-10

E = módulo de elasticidad del material

r = radio de giro, $r = \sqrt{I/A}$, donde se calcula I respecto al eje de flexión o centroidal



Figura 13-15

Al igual que la ecuación 13-16, la ecuación 13-19 indica que existe una relación no lineal entre la carga y el esfuerzo. Por consiguiente, el principio de superposición no es aplicable y las cargas deben *sumarse* antes de determinar el esfuerzo. Además, debido a esta relación no lineal, cualquier factor de seguridad utilizado para fines de diseño se aplicará a la carga y no al esfuerzo.

Para un valor dado de $\sigma_{\text{máx}}$, se pueden trazar las gráficas de la ecuación 13-19 como la relación de esbeltez KL/r contra el esfuerzo promedio P/A para distintos valores *de la relación de excentricidad* ec/r^2. En la figura 13-16 se muestra un conjunto específico de gráficas para un acero A-36 de

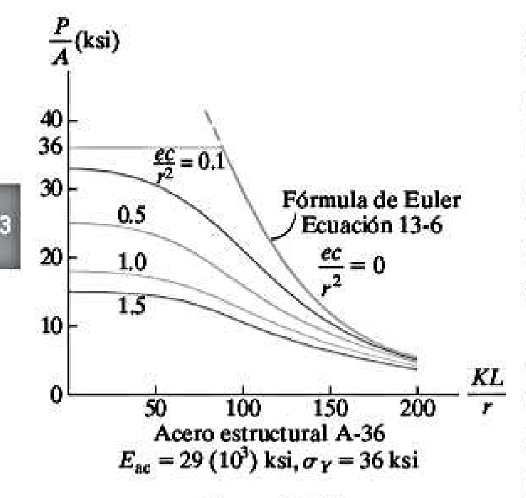


Figura 13-16

grado estructural con un punto de cedencia $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y = 36$ ksi y un módulo de elasticidad de $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi. Observe que cuando $e \to 0$, o cuando $ec/r^2 \to 0$, la ecuación 13-19 da $\sigma_{\text{máx}} = P/A$, donde P es la carga crítica en la columna, definida por la fórmula de Euler. Esto da como resultado la ecuación 13-6, que se graficó en la figura 13-7 y se repitió en la figura 13-16. Como las ecuaciones 13-6 y 13-19 sólo son válidas para cargas elásticas, los esfuerzos mostrados en la figura 13.16 no pueden exceder a $\sigma_Y = 36$ ksi, representado aquí por la línea horizontal.

Las curvas de la figura 13-16 indican que las diferencias en la relación de excentricidad tienen un gran efecto sobre la capacidad de carga de las columnas que tienen relaciones de esbeltez pequeñas. Sin embargo, las columnas que tienen relaciones de esbeltez grandes tienden a fallar en o cerca de la carga crítica de Euler sin importar la relación de excentricidad. Por lo tanto, cuando se usa la ecuación 13-19 con propósitos de diseño, es importante tener un valor con cierta exactitud para la relación de excentricidad en columnas de menor longitud.

Diseño. Una vez que se ha determinado la relación de excentricidad, los datos de la columna pueden sustituirse en la ecuación 13-19. Si se elige un valor de $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_Y$, entonces puede determinarse la carga correspondiente P_Y mediante un procedimiento de prueba y error, ya que la ecuación es trascendental y no puede resolverse de manera explícita para P_Y. Como una ayuda al diseño, también puede usarse software de computadora o gráficas como las de la figura 13-16, con el fin de determinar P_Y en forma directa.

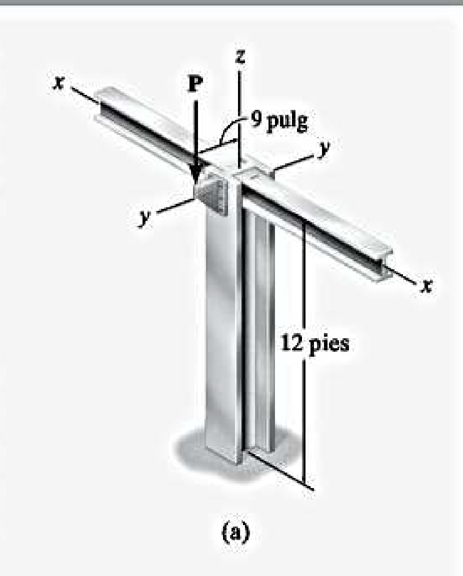
Tenga en cuenta que P_Y es la carga que hará que la columna desarrolle un esfuerzo máximo de compresión σ_Y en sus fibras internas cóncavas. Debido a la aplicación excéntrica de P_Y, esta carga siempre será menor que la carga crítica P_{cr} que se determina a partir de la fórmula de Euler. Ésta supone (de manera poco realista) que la columna está cargada axialmente. Una vez que se obtiene P_Y, puede aplicarse un factor de seguridad adecuado a fin de especificar la carga de seguridad para la columna.

Puntos importantes

- Debido a las imperfecciones en la fabricación o la aplicación específica de la carga, una columna nunca se pandea súbitamente, sino que primero comienza a flexionarse.
- La carga aplicada a una columna se relaciona con la deflexión en forma no lineal, por lo que el principio de superposición no es aplicable.
- Al aumentar la relación de esbeltez, las columnas cargadas en forma excéntrica tienden a fallar en o cerca de la carga de pandeo de Euler.

EJEMPLO 13.4

La columna W8 × 40 de acero A-36 que se muestra en la figura 13-17*a* está fija en su base y arriostrada en la parte superior de modo que se encuentre fija respecto al desplazamiento, pero libre de girar alrededor del eje *y-y*. También, puede ladearse en el plano *y-z*. Determine la carga excéntrica máxima que puede soportar la columna antes de que comience a pandearse o de que el acero ceda.



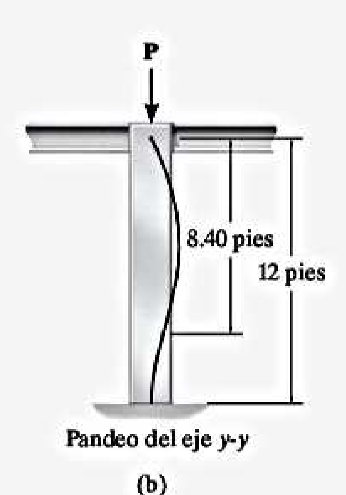
(a)

SOLUCIÓN

A partir de las condiciones de soporte se observa que, respecto al eje *y-y*, la columna se comporta como si estuviera articulada en su parte superior, fija en su parte inferior, y sometida a una carga axial *P*, figura 13-17*b*. Respecto al eje *x-x*, la columna está libre en la parte superior, fija en la parte inferior y se somete tanto a una carga axial *P* como a un momento $M = P(9 \text{ pulg})$, figura 13-17*c*.

Pandeo del eje *y-y*. A partir de la figura 13-10*d* el factor de longitud efectiva es $K_y = 0.7$, por lo que $(KL)_y = 0.7(12)$ pies $= 8.40$ pies $=$ 100.8 pulg. Si se usa la tabla del apéndice B, es posible determinar I_y para la sección W8 × 40 y al aplicar la ecuación 13-11, se tiene

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 E I_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[29(10^3)\text{ ksi}](49.1\text{ pulg}^4)}{(100.8\text{ pulg})^2} = 1383\text{ kip}$$



Pandeo del eje *y-y*

(b)

Cedencia del eje *x-x*. A partir de la figura 13-10*b*, $K_x = 2$, por lo que $(KL)_x = 2(12)$ pies $= 24$ pies $= 288$ pulg. Si se usa de nuevo la tabla del apéndice B para determinar $A = 11.7\text{ pulg}^2$, $c = 8.25\text{ pulg}/2 = 4.125$ pulg y $r_x = 3.53$ pulg, y al aplicar la fórmula de la secante se tiene

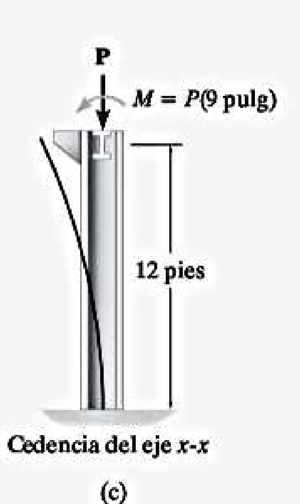
$$\sigma_Y = \frac{P_x}{A}\left[1 + \frac{ec}{r_x^2}\sec\left(\frac{(KL)_x}{2r_x}\sqrt{\frac{P_x}{EA}}\right)\right]$$

Sustituyendo los datos y simplificando se obtiene

$$421.2 = P_x[1 + 2.979\sec(0.0700\sqrt{P_x})]$$

Si se obtiene P_x por prueba y error, y se toma en cuenta que el argumento de la secante está en radianes, resulta

$$P_x = 88.4\text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$



Cedencia del eje *x-x*

(c)

Figura 13-17

Como este valor es menor que $(P_{cr})_y = 1383$ kip, se producirá una falla respecto al eje *x-x*.

*13.5 Pandeo inelástico



Este aguilón de grúa falló debido al pandeo causado por una sobrecarga. Observe la región del colapso localizado.

En la práctica de la ingeniería, las columnas suelen clasificarse de acuerdo con el tipo de esfuerzos desarrollados dentro de la columna en el momento de la falla. Las *columnas largas y delgadas* se vuelven inestables cuando el esfuerzo de compresión se mantiene elástico. La falla generada se conoce como *inestabilidad elástica*. Las *columnas intermedias* fallan debido a la *inestabilidad inelástica*, es decir, que el esfuerzo compresivo en la falla es mayor que el límite proporcional del material. Y las *columnas cortas*, que a veces se denominan *postes*, no se vuelven inestables sino que el material simplemente cede o se fractura.

La aplicación de la ecuación de Euler requiere que el esfuerzo en la columna se mantenga *por debajo* del punto de cedencia del material (en realidad del límite proporcional) cuando la columna se pandea, por lo que esta ecuación es aplicable sólo en las columnas largas. Sin embargo, en la práctica la mayoría de las columnas se seleccionan con longitudes intermedias. El comportamiento de estas columnas puede estudiarse mediante la modificación de la ecuación de Euler para que pueda aplicarse en el pandeo inelástico. Para mostrar cómo puede hacerse esto, considere que el material tiene un diagrama de esfuerzo-deformación, como el mostrado en la figura 13-18*a*. Aquí, el límite proporcional es σ_{pl}, y el módulo de elasticidad, o pendiente de la recta AB, es E.

Si la columna tiene una relación de esbeltez menor a $(KL/r)_{pl}$, entonces el esfuerzo crítico en la columna debe ser mayor que σ_{pl}. Por ejemplo, suponga que una columna tiene una relación de esbeltez $(KL/r)_1 < (KL/r)_{pl}$, con el esfuerzo crítico correspondiente $\sigma_D > \sigma_{pl}$ necesario para causar inestabilidad. Cuando la columna está *a punto de pandearse*, el cambio en el esfuerzo y la deformación que se produce en la columna está dentro de un *rango pequeño* $\Delta\sigma$ y $\Delta\epsilon$, de modo que el módulo de elasticidad o rigidez del material puede tomarse como el ***módulo de tangente*** $E_t = \Delta\sigma/\Delta\epsilon$ definido como la pendiente del diagrama σ-ϵ en el punto D, figura 13-18*a*. En otras palabras, en el momento de la falla, la columna se comporta como si estuviera hecha de un material que tiene una *menor rigidez* que cuando se comporta elásticamente, $E_t < E$.

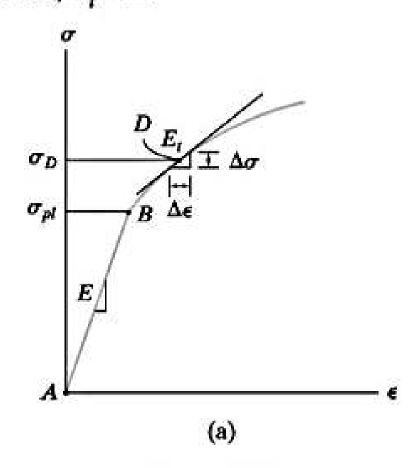


Figura 13-18

Por lo tanto, a medida que la relación de esbeltez (KL/r) disminuye, el *esfuerzo crítico* para una columna sigue aumentando; y a partir del diagrama σ-ϵ, el *módulo de tangente* para el material *disminuye*. Si se emplea esta idea, es posible modificar la ecuación de Euler para incluir estos casos de pandeo inelástico al sustituir E por el módulo de tangente del material E_t, de modo que

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} \tag{13-20}$$

Esto se denomina el *módulo de tangente* o *ecuación de Engesser*, propuesta por F. Engesser en 1889. En la figura 13-18*b* se muestra una gráfica de esta ecuación para columnas de longitud corta e intermedia, fabricadas con un material definido por el diagrama σ-ϵ de la figura 13-18*a*.

Ninguna *columna real* puede considerarse perfectamente recta o perfectamente cargada a lo largo de su eje centroidal, como se supone aquí, por lo que en realidad resulta muy difícil desarrollar una expresión que proporcione un análisis completo de este fenómeno. En consecuencia, se han considerado otros métodos para describir el pandeo inelástico de las columnas. Uno de estos métodos fue desarrollado por el ingeniero aeronáutico F. R. Shanley y se llama la *teoría de Shanley* para el pandeo inelástico. A pesar de que proporciona una mejor descripción del fenómeno que la teoría del módulo de tangente, como se explica aquí, las pruebas experimentales de un gran número de columnas, cada una de las cuales se aproxima a la columna ideal, han demostrado que la ecuación 13-20 es *razonablemente precisa* en la predicción del esfuerzo crítico en una columna. Además, el enfoque del módulo de tangente para modelar el comportamiento de una columna inelástica es relativamente fácil de aplicar.

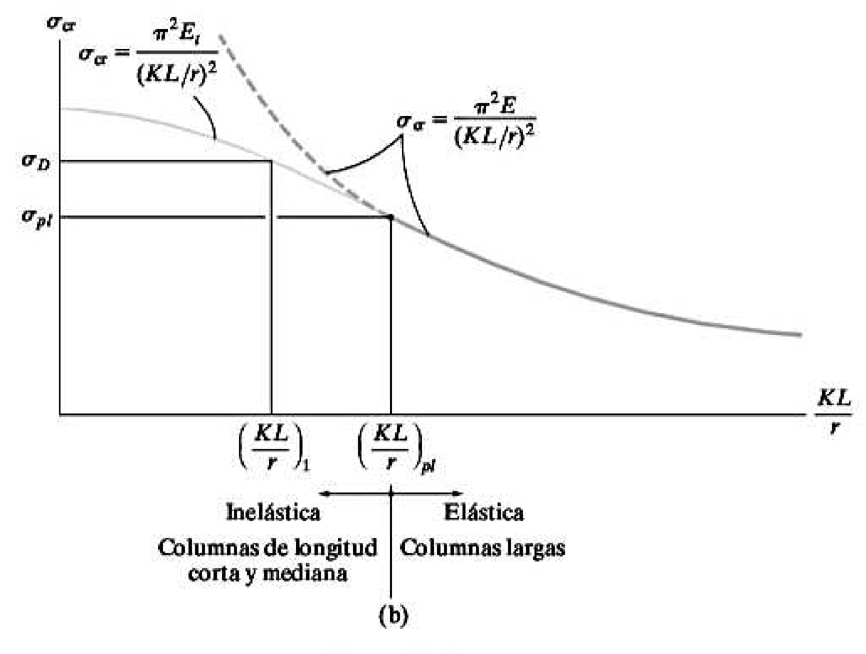


Figura 13-18 (cont.)

13

EJEMPLO 13.5

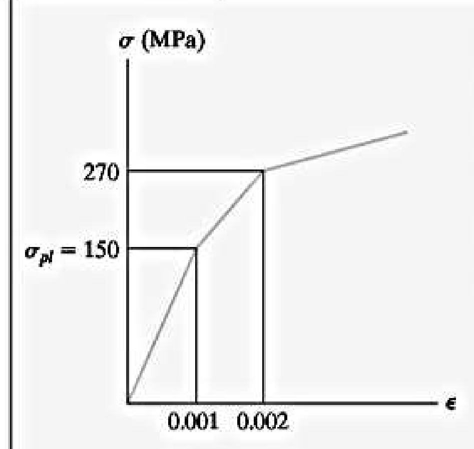


Figura 13-19

Una barra sólida tiene un diámetro de 30 mm y una longitud de 600 mm. Está fabricada de un material que puede modelarse mediante el diagrama de esfuerzo-deformación de la figura 13-19. Si se usa como una columna soportada por pasadores, determine la carga crítica.

SOLUCIÓN

El radio de giro es

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(\pi/4)(15\text{ mm})^4}{\pi(15\text{ mm})^2}} = 7.5\text{ mm}$$

y por lo tanto la relación de esbeltez es

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(600\text{ mm})}{7.5\text{ mm}} = 80$$

Al aplicar la ecuación 13-20 se tiene,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} = \frac{\pi^2 E_t}{(80)^2} = 1.542(10^{-3})E_t \qquad (1)$$

En primer lugar, se supondrá que el esfuerzo crítico es elástico. A partir de la figura 13-19,

$$E = \frac{150\text{ MPa}}{0.001} = 150\text{ GPa}$$

Por lo tanto, la ecuación 1 se convierte en

$$\sigma_{cr} = 1.542(10^{-3})[150(10^3)]\text{ MPa} = 231.3\text{ MPa}$$

Como $\sigma_{cr} > \sigma_{pl} = 150$ MPa, se produce pandeo inelástico.

A partir del segundo segmento de línea del diagrama σ-ϵ, figura 13-19, se tiene

$$E_t = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon} = \frac{270\text{ MPa} - 150\text{ MPa}}{0.002 - 0.001} = 120\text{ GPa}$$

Al aplicar la ecuación 1, resulta

$$\sigma_{cr} = 1.542(10^{-3})[120(10^3)]\text{ MPa} = 185.1\text{ MPa}$$

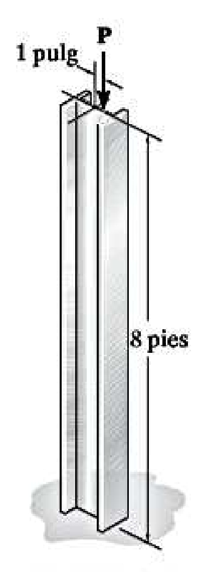
Como este valor se encuentra dentro de los límites de 150 MPa y 270 MPa, es de hecho el esfuerzo crítico.

Por lo tanto, la carga crítica sobre la barra es

$$P_{cr} = \sigma_{cr}A = 185.1(10^6)\text{ Pa}[\pi(0.015\text{ m})^2] = 131\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

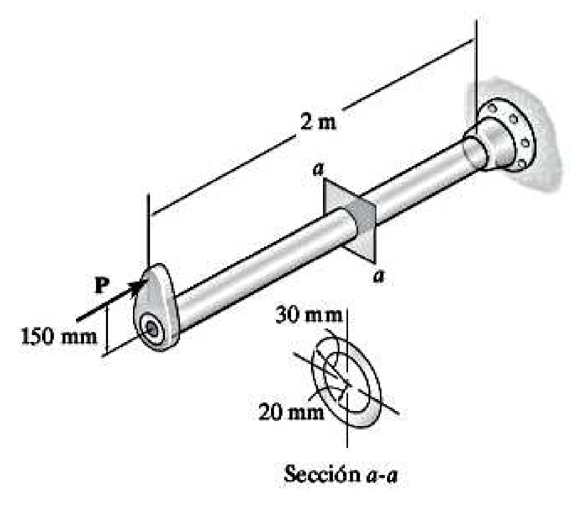
13-46. Determine la carga P requerida para causar una falla en la columna W8 × 15 de acero A-36, ya sea por pandeo o por cedencia. La columna está fija en su base y libre en su parte superior.



Prob. 13-46

13-47. El eje hueco, hecho con una aleación de cobre, latón rojo C83400, está fijo en un extremo y libre en el otro. Determine la fuerza excéntrica máxima P que puede soportar el eje sin pandearse o ceder. Además, encuentre la deflexión máxima correspondiente en el eje.

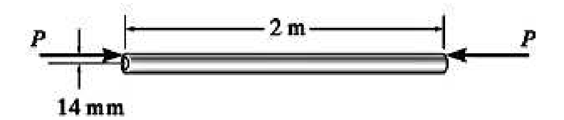
***13-48.** El eje hueco, hecho con una aleación de cobre, latón rojo C83400, está fijo en un extremo y libre en el otro. Si se aplica la fuerza excéntrica $P = 5$ kN en el eje como se muestra en la figura, determine el esfuerzo normal máximo y la deflexión máxima.



Probs. 13-47/48

•**13-49.** El tubo está fabricado de cobre y tiene un diámetro exterior de 35 mm y un grosor de pared de 7 mm. Usando un factor de seguridad con respecto al pandeo y la cedencia de F.S. = 2.5, determine la carga excéntrica permisible P. El tubo está soportado en sus extremos mediante pasadores. $E_{cu} = 120$ GPa, $\sigma_Y = 750$ MPa.

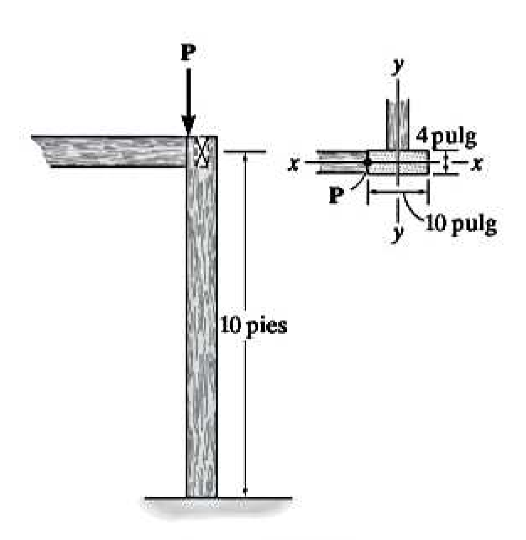
13-50. El tubo está fabricado de cobre y tiene un diámetro exterior de 35 mm y un grosor de pared de 7 mm. Usando un factor de seguridad con respecto al pandeo y la cedencia de F.S. = 2.5, determine la carga excéntrica permisible P que puede soportar sin falla. El tubo está soportado fijamente en sus extremos. $E_{cu} = 120$ GPa, $\sigma_Y = 750$ MPa.



Probs. 13-49/50

13-51. La columna de madera está fija en su base y puede suponerse que está articulada en su parte superior. Determine la máxima carga excéntrica P que puede aplicarse sin causar pandeo o cedencia en la columna. $E_w = 1.8(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 8$ ksi.

***13-52.** La columna de madera está fija en su base y puede suponerse que está fijamente conectada en su parte superior. Determine la máxima carga excéntrica P que puede aplicarse sin causar pandeo o cedencia en la columna. $E_w = 1.8(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 8$ ksi.

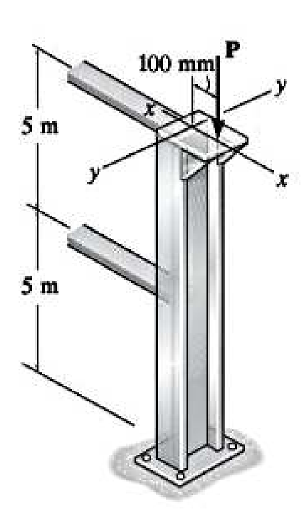


Probs. 13-51/52

•**13-53.** La columna W200 × 22 de acero A-36 está fija en su base. Su parte superior está restringida a girar alrededor del eje y-y, y es libre de moverse a lo largo de ese eje. Además, la columna está arriostrada a lo largo del eje x-x en su altura media. Determine la fuerza excéntrica permisible P que puede aplicarse sin que la columna se pandee o ceda. Use F.S. = 2 contra el pandeo y F.S. = 1.5 contra la cedencia.

13

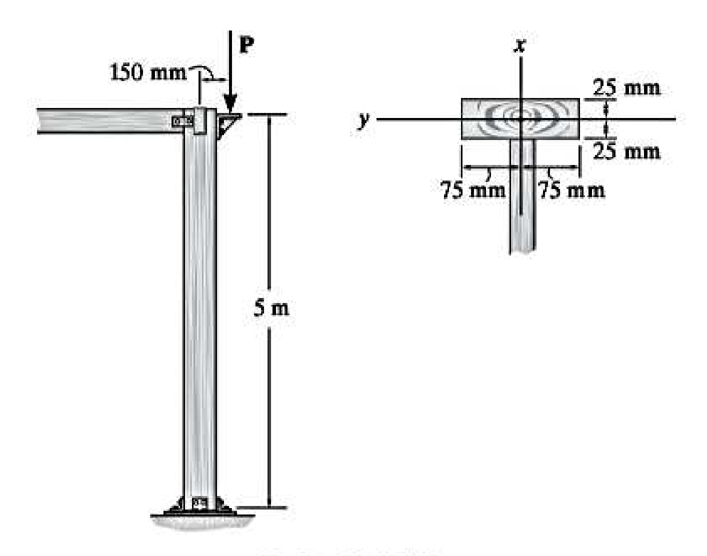
13-54. La columna W200 × 22 de acero A-36 está fija en su base. Su parte superior está restringida a girar alrededor del eje y-y, y es libre de moverse a lo largo de ese eje. Además, la columna está arriostrada a lo largo del eje x-x en su altura media. Si P = 25 kN, determine el esfuerzo máximo normal desarrollado en la columna.



Probs. 13-53/54

13-55. La columna de madera está fija en su base y su parte superior puede considerarse articulada. Si se aplica la fuerza excéntrica P = 10 kN sobre la columna, investigue si la columna es adecuada para soportar esa carga sin pandearse o ceder. Considere E = 10 GPa y σ_Y = 15 MPa.

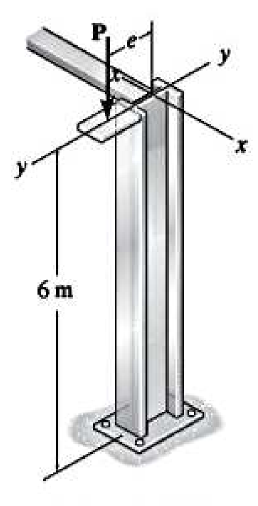
***13-56.** La columna de madera está fija en su base y su parte superior puede considerarse articulada. Determine la máxima fuerza excéntrica P que puede soportar la columna sin pandearse o ceder. Considere E = 10 GPa y σ_Y = 15 MPa.



Probs. 13-55/56

•**13-57.** La columna W250 × 28 de acero A-36 está fija en su base. Su parte superior está restringida a girar alrededor del eje y-y, y es libre de moverse a lo largo de ese eje. Si e = 350 mm, determine la fuerza excéntrica permisible P que puede aplicarse sin que la columna se pandee o ceda. Use F.S. = 2 contra el pandeo y F.S. = 1.5 contra la cedencia.

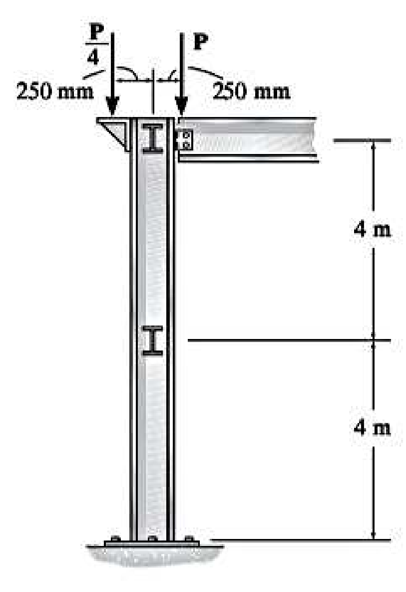
13-58. La columna W250 × 28 de acero A-36 está fija en su base. Su parte superior está restringida a girar alrededor del eje y-y, y es libre de moverse a lo largo de ese eje. Determine la fuerza **P** y su excentricidad e de tal manera que la columna ceda y se pandee en forma simultánea.



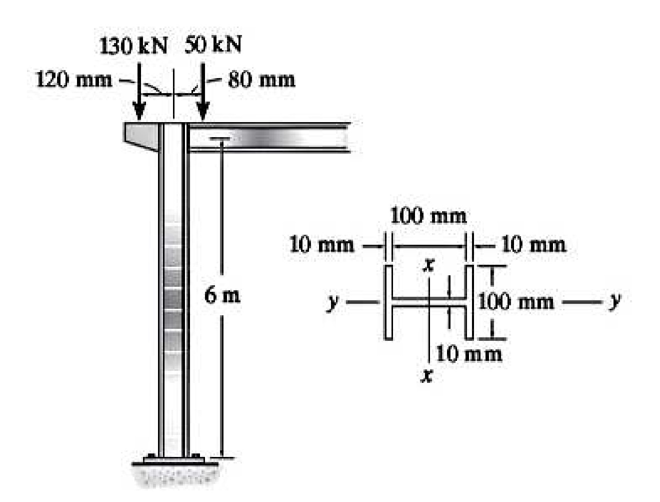
Probs. 13-57/58

13-59. La columna de acero soporta las dos cargas excéntricas. Si se supone que está articulada en su parte superior, fija en la parte inferior y totalmente arriostrada contra el pandeo respecto al eje *y-y*, determine la deflexión máxima y el esfuerzo máximo en la columna. $E_{ac} = 200$ GPa, $\sigma_Y = 360$ MPa.

***13-60.** La columna de acero soporta las dos cargas excéntricas. Si se supone que está fija en sus partes superior e inferior, y totalmente arriostrada contra el pandeo respecto al eje *y-y*, determine la deflexión máxima y el esfuerzo máximo en la columna. $E_{ac} = 200$ GPa, $\sigma_Y = 360$ MPa.



Probs. 13-61/62



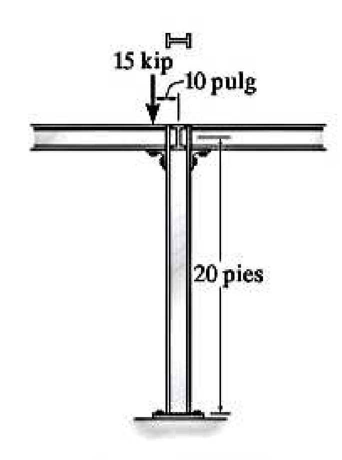
Probs. 13-59/60

13-63. El elemento W14 × 26 de acero estructural A-36 se usa como una columna de 20 pies de largo que se supone fija en sus partes superior e inferior. Si se aplica la carga de 15 kip a una distancia excéntrica de 10 pulg, determine el esfuerzo máximo en la columna.

***13-64.** El elemento W14 × 26 de acero estructural A-36 se usa como una columna que se supone fija en su parte superior y articulada en su parte inferior. Si se aplica la carga de 15 kip a una distancia excéntrica de 10 pulg, determine el esfuerzo máximo en la columna.

13-61. La columna W250 × 45 de acero A-36 está articulada en su parte superior y fija en su base. Además, la columna está arriostrada a la mitad de la altura a lo largo de su eje débil. Si $P = 250$ kN, investigue si la columna es adecuada para soportar esta carga. Use F.S. = 2 contra el pandeo y F.S. = 1.5 contra la cedencia.

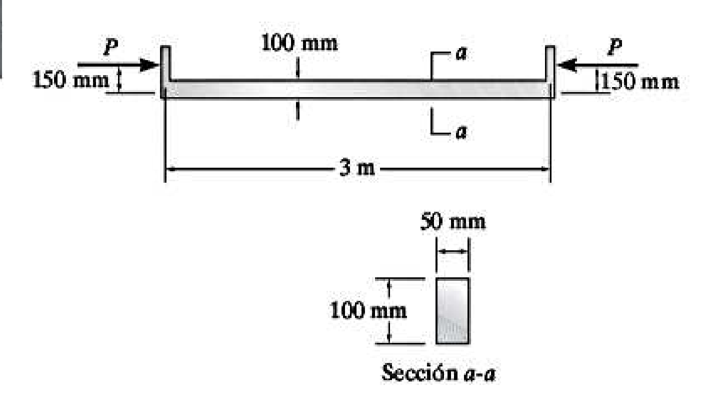
•**13-62.** La columna W250 × 45 de acero A-36 está articulada en su parte superior y fija en su base. Además, la columna está arriostrada a la mitad de la altura a lo largo de su eje débil. Determine la fuerza permisible P que puede soportar la columna sin pandearse o ceder. Use F.S. = 2 contra el pandeo y F.S. = 1.5 contra la cedencia.



Probs. 13-63/64

13

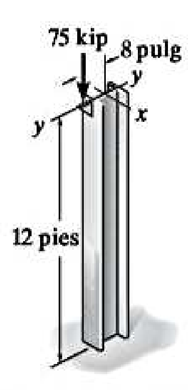
•13-65. Determine la máxima carga excéntrica P que puede soportar el puntal fabricado con una aleación de aluminio 2014-T6 sin pandearse o ceder. Los extremos del puntal están articulados.



Prob. 13-65

13-66. La columna W8 ×48 de acero estructural A-36 está fija en su parte inferior y libre en su parte superior. Si se somete a la carga excéntrica de 75 kip, determine el factor de seguridad respecto al inicio del pandeo o la cedencia.

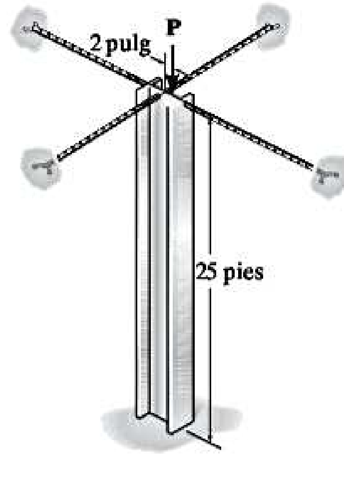
13-67. La columna W8 ×48 de acero estructural A-36 está fija en su parte inferior y articulada en su parte superior. Si se somete a la carga excéntrica de 75 kip, determine si la columna falla por cedencia. La columna está arriostrada para que no se pandee respecto al eje y-y.



Probs. 13-66/67

*13-68. Determine la carga P requerida para causar que la columna W12 ×50 de acero estructural A-36 falle por pandeo o por cedencia. La columna está fija en su parte inferior y los cables en su parte superior actúan como un soporte de pasador.

•13-69. Resuelva el problema 13-68 si la columna de acero A-36 tiene una sección W12 ×16.

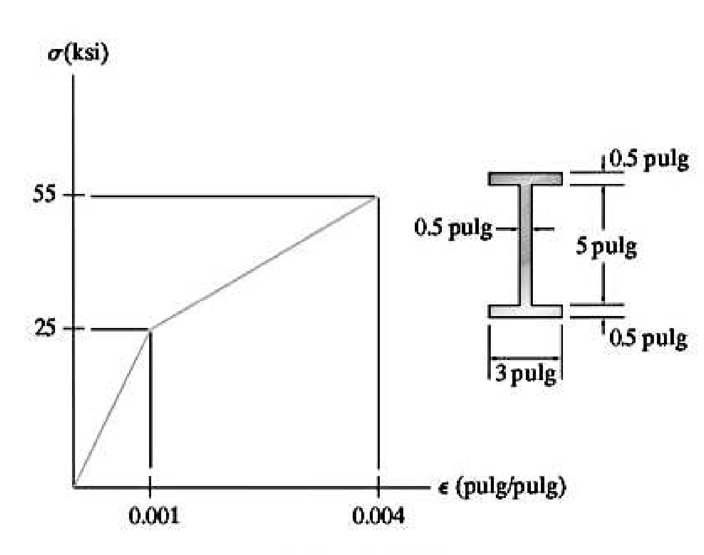


Probs. 13-68/69

13-70. Una columna de longitud intermedia se pandea cuando el esfuerzo de compresión es de 40 ksi. Si la relación de esbeltez es 60, determine el módulo de tangente.

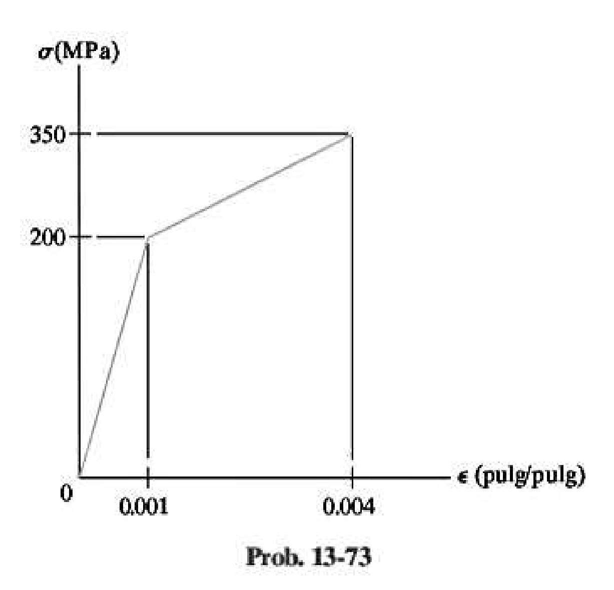
13-71. La columna de 6 pies de largo tiene la sección transversal mostrada en la figura y está fabricada de un material que tiene un diagrama de esfuerzo-deformación similar al indicado en la figura. Si la columna está articulada en ambos extremos, determine la carga crítica P_{cr} para la columna.

*13-72. La columna de 6 pies de largo tiene la sección transversal mostrada en la figura y está fabricada de un material que tiene un diagrama de esfuerzo-deformación similar al indicado en la figura. Si la columna está fija en ambos extremos, determine la carga crítica P_{cr} para la columna.



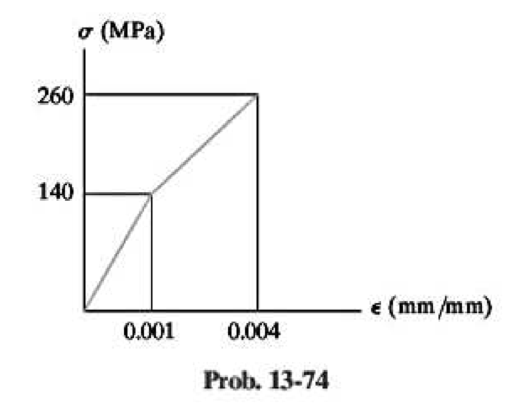
Probs. 13-71/72

•**13-73.** El diagrama de esfuerzo-deformación del material de una columna puede aproximarse en la forma mostrada en la figura. Grafique P/A contra KL/r para la columna.



Prob. 13-73

13-74. Construya la curva de pandeo, P/A contra L/r, para una columna que tiene un diagrama de esfuerzo-deformación bilineal en compresión como se muestra en la figura. La columna está articulada en sus extremos.

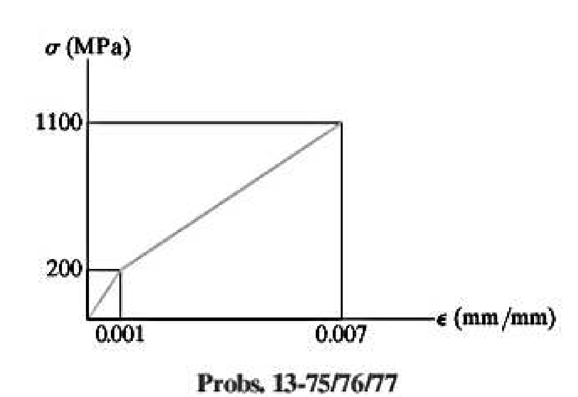


Prob. 13-74

13-75. El diagrama de esfuerzo-deformación para un material puede aproximarse mediante los dos segmentos de línea mostrados. Si una barra que tiene un diámetro de 80 mm y una longitud de 1.5 m está fabricada de este material, determine la carga crítica cuando los extremos están articulados. Suponga que la carga actúa a través del eje de la barra. Use la ecuación Engesser.

***13-76.** El diagrama de esfuerzo-deformación para un material puede aproximarse mediante los dos segmentos de línea mostrados en la figura. Si una barra que tiene un diámetro de 80 mm y una longitud de 1.5 m está fabricada de este material, determine la carga crítica cuando los extremos están fijos. Suponga que la carga actúa a través del eje de la barra. Use la ecuación Engesser.

•**13-77.** El diagrama de esfuerzo-deformación para un material puede aproximarse mediante los dos segmentos de línea mostrados en la figura. Si una barra que tiene un diámetro de 80 mm y una longitud de 1.5 m está fabricada de este material, determine la carga crítica cuando un extremo está articulado y el otro fijo. Suponga que la carga actúa a través del eje de la barra. Use la ecuación Engesser.



Probs. 13-75/76/77

13

*13.6 Diseño de columnas para cargas concéntricas



Estas columnas largas de madera sin arriostrar se usan para soportar el techo de esta construcción.

La teoría presentada hasta el momento es aplicable a las columnas que son perfectamente rectas, están fabricadas de un material homogéneo y en un principio están libres de esfuerzo. Sin embargo, hablando en forma práctica, como se indicó anteriormente, las columnas no son perfectamente rectas y la mayoría contienen esfuerzos residuales, principalmente debido al enfriamiento no uniforme durante la fabricación. Además, los soportes de las columnas son menos que exactos y los puntos de aplicación y las direcciones de las cargas no se conocen con certeza absoluta. Con el fin de compensar estos efectos, que en realidad varían de una columna a otra, muchos códigos de diseño especifican el uso de fórmulas empíricas. Mediante la realización de pruebas experimentales en un gran número de columnas cargadas axialmente, es posible graficar los resultados y desarrollar una fórmula de diseño al ajustar la curva a la media de los datos.

En la figura 13-20 se muestra un ejemplo de estas pruebas para columnas de acero en I de ala ancha. Observe la similitud entre estos resultados y los de la familia de curvas determinada a partir de la fórmula de la secante, figura 13-16. La razón de esta semejanza tiene que ver con la influencia de una relación de excentricidad "accidental" sobre la resistencia de la columna. Como se estableció en la sección 13.4, esta relación tiene un efecto mayor sobre la resistencia de las columnas con longitud intermedia y corta que sobre las columnas largas. Las pruebas han indicado que ec/r^2 puede variar de 0.1 a 0.6 para la mayoría de las columnas cargadas axialmente.

Con el fin de explicar el comportamiento de columnas con diferentes longitudes, los códigos de diseño suelen especificar varias fórmulas que se adecuan de la mejor manera a los datos dentro del rango de columnas cortas, intermedias y largas. Por consiguiente, cada fórmula se aplicará sólo para un *rango* específico de relaciones de esbeltez, por lo que es importante que el ingeniero observe con cuidado los límites KL/r para los cuales es válida una fórmula particular. A continuación se analizarán algunos ejemplos de fórmulas de diseño para columnas de acero, aluminio y madera que se usan en la actualidad. El objetivo es tener una idea de cómo se diseñan las columnas en la práctica. Sin embargo, estas fórmulas no deben utilizarse para el diseño de columnas reales, a menos que se consulte el código al que se hace referencia.

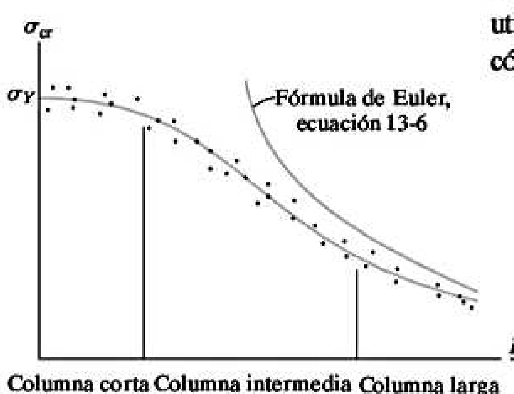


Figura 13-20

Columnas de acero. Las columnas de acero estructural pueden diseñarse con base en las fórmulas propuestas por el Structural Stability Research Council (SSRC). Los factores de seguridad se aplican a estas fórmulas y se adoptan como especificaciones para la construcción de edificios por el American Institute of Steel Construction (AISC). Básicamente, estas especificaciones proporcionan dos fórmulas para el diseño de la columna, cada una proporciona el esfuerzo máximo permisible en la columna para un rango específico de las relaciones de esbeltez.*

Para las columnas largas se propone la fórmula de Euler, es decir, $\sigma_{máx} = \pi^2 E/(KL/r)^2$.

La aplicación de esta fórmula requiere un factor de seguridad F.S. = $\frac{23}{12} \approx 1.92$. Por lo tanto, para el diseño,

$$\sigma_{perm} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} \qquad \left(\frac{KL}{r}\right)_c \leq \frac{KL}{r} \leq 200 \qquad (13\text{-}21)$$

Como se indicó, esta ecuación es aplicable para una relación de esbeltez limitada por 200 y $(KL/r)_c$. Un valor específico de $(KL/r)_c$ se obtiene requiriendo que la fórmula de Euler se aplique sólo para un comportamiento elástico del material. A través de experimentos se ha determinado que pueden existir esfuerzos residuales de compresión en perfiles de acero laminado que pueden ser de hasta la mitad del esfuerzo de cedencia. En consecuencia, si el esfuerzo en la fórmula de Euler es superior a $\frac{1}{2}\sigma_Y$, la ecuación no aplica. Por lo tanto, el valor de $(KL/r)_c$ se determina de la manera siguiente:

$$\frac{1}{2}\sigma_Y = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)_c^2} \qquad \text{o} \qquad \left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} \qquad (13\text{-}22)$$

Las columnas que tienen relaciones de esbeltez menores a $(KL/r)_c$ se diseñan con base en una fórmula empírica que es parabólica y tiene la forma

$$\sigma_{máx} = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_Y$$

Como el uso de esta fórmula para columnas largas implica una incertidumbre mayor, ésta se divide entre un factor de seguridad que se define de la siguiente manera:

$$\text{F.S.} = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(KL/r)}{(KL/r)_c} - \frac{(KL/r)^3}{8(KL/r)_c^3}$$

Aquí se ve que F.S. $= \frac{5}{3} \approx 1.67$ en $KL/r = 0$ y aumenta a F.S. $= \frac{23}{12} \approx 1.92$ en $(KL/r)_c$. Por consiguiente, para fines de diseño,

$$\sigma_{perm} = \frac{\left[1 - \dfrac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_Y}{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - \left[(KL/r)^3/8(KL/r)_c^3\right]} \qquad (13\text{-}23)$$

Las ecuaciones 13-21 y 13-23 se grafican en la figura 13-21. Cuando se aplica cualquiera de estas ecuaciones, en los cálculos pueden usarse unidades PLS o SI.

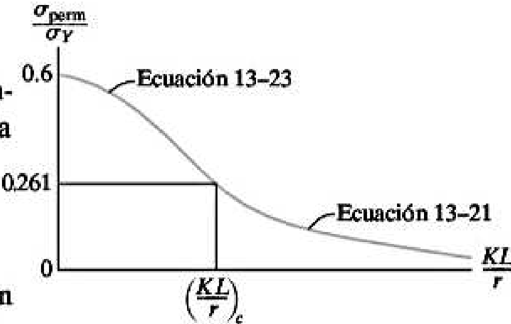


Figura 13-21

*El código AISC actual permite a los ingenieros utilizar uno de dos métodos para el diseño, a saber, el Diseño por el factor de carga y resistencia y el diseño por el esfuerzo permisible. El segundo de ellos se explica aquí.

Columnas de aluminio. El diseño de una columna de aluminio estructural está especificado por la Aluminun Association mediante tres ecuaciones, cada una aplicable a un rango específico de relaciones de esbeltez. Como existen varios tipos de aleación de aluminio, hay un conjunto único de fórmulas para cada tipo. Para una aleación común (2014-T6) usada en la construcción de edificios, las fórmulas son

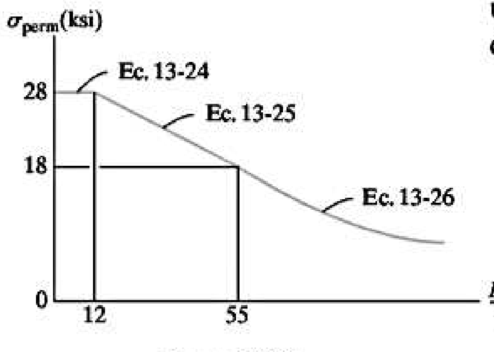
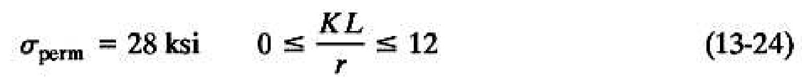


Figura 13-22



$$\sigma_{perm} = 28 \text{ ksi} \qquad 0 \leq \frac{KL}{r} \leq 12 \qquad (13\text{-}24)$$

$$\sigma_{perm} = \left[30.7 - 0.23\left(\frac{KL}{r}\right)\right] \text{ksi} \qquad 12 < \frac{KL}{r} < 55 \qquad (13\text{-}25)$$

$$\sigma_{perm} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2} \qquad 55 \leq \frac{KL}{r} \qquad (13\text{-}26)$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura 13-22. Como se muestra, las dos primeras representan líneas rectas y se utilizan para modelar los efectos de las columnas en los rangos corto e intermedio. La tercera fórmula tiene la misma forma que la fórmula de Euler y se utiliza para columnas largas.

Columnas de madera. Las columnas usadas en la construcción en madera se han diseñado con base en las fórmulas publicadas por la National Forest Products Association (NFPA) o el American Institute of Timber Construction (AITC). Por ejemplo, las fórmulas de la NFPA para el esfuerzo permisible en las columnas cortas, intermedias y largas que tienen una sección rectangular de dimensiones b y d, donde d es la dimensión *más pequeña* de la sección transversal, son

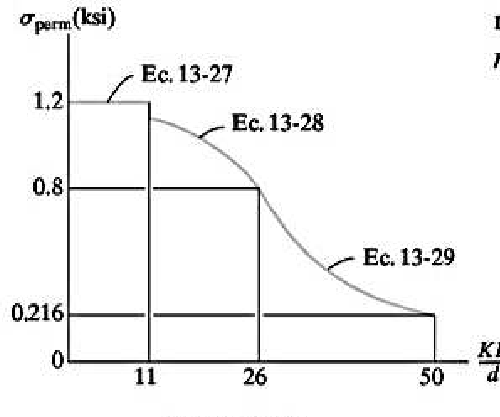
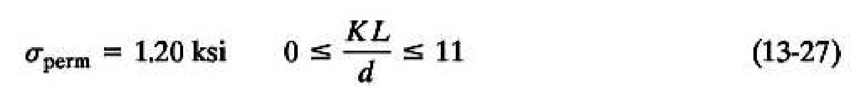


Figura 13-23



$$\sigma_{perm} = 1.20 \text{ ksi} \qquad 0 \leq \frac{KL}{d} \leq 11 \qquad (13\text{-}27)$$

$$\sigma_{perm} = 1.20\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{KL/d}{26.0}\right)^2\right] \text{ksi} \qquad 11 < \frac{KL}{d} \leq 26 \qquad (13\text{-}28)$$

$$\sigma_{perm} = \frac{540 \text{ ksi}}{(KL/d)^2} \qquad 26 < \frac{KL}{d} \leq 50 \qquad (13\text{-}29)$$

Aquí la madera tiene un módulo de elasticidad de $E_w = 1.8(10^3)$ ksi y un esfuerzo permisible de compresión de 1.2 ksi paralelo a la fibra. En particular, la ecuación 13-29 es simplemente la ecuación de Euler con un factor de seguridad de 3. Estas tres ecuaciones se grafican en la figura 13-23.

Procedimiento de análisis

Análisis de la columna.

- Cuando se utiliza cualquier fórmula para *analizar* una columna, es decir, para encontrar su carga permisible, primero es necesario calcular la relación de esbeltez con el fin de determinar cuál fórmula de columna es aplicable.
- Una vez que se ha calculado el esfuerzo permisible promedio, la carga permisible de la columna se determina a partir de $P = \sigma_{perm}A$.

Diseño de la columna.

- Si una fórmula se usa para *diseñar* una columna, es decir, para determinar el área transversal de la columna para una cierta carga y longitud efectiva, entonces por lo general debe seguirse un procedimiento de prueba y verificación cuando la columna tiene una forma compuesta, por ejemplo una sección en I de ala ancha.
- Una forma posible de aplicar un procedimiento de prueba y verificación sería *suponer* el área transversal de la columna, A', y calcular el esfuerzo correspondiente $\sigma' = P/A'$. Además, use una fórmula de diseño adecuada para determinar el esfuerzo permisible σ_{perm}. A partir de esto, calcule el área *A requerida* para la columna, $A_{req} = P/\sigma_{perm}$.
- Si $A' > A_{req}$, el diseño es seguro. Al hacer la comparación, resulta práctico exigir que A' sea un poco mayor que A_{req}, por lo general, entre 2 y 3 por ciento. Si $A' < A_{req}$ se necesita un rediseño.
- Cada vez que se repite un procedimiento de prueba y verificación, la elección de un área está determinada por el área requerida que se calculó previamente. En la práctica este método para el diseño de ingeniería suele reducirse mediante el uso de programas informáticos o tablas y gráficas publicadas.



Estas columnas de madera pueden considerarse articuladas en su parte inferior y conectadas fijamente a las vigas en su parte superior.

13

EJEMPLO 13.6

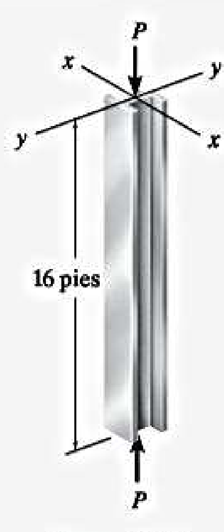


Figura 13-24

Un elemento W10 × 100 de acero A-36 se utiliza como una columna soportada mediante pasadores, figura 13-24. Use las fórmulas para el diseño de columnas del AISC a fin de determinar la mayor carga que puede soportar.

SOLUCIÓN

Los siguientes datos para un elemento W10×100 se tomaron de la tabla en el apéndice B.

$$A = 29.4 \text{ pulg}^2 \quad r_x = 4.60 \text{ pulg} \quad r_y = 2.65 \text{ pulg}$$

Como $K = 1$ para que los ejes x y y se pandeen, la relación de esbeltez es más grande si se usa r_y. Por lo tanto,

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(16 \text{ pies})(12 \text{ pulg/pie})}{2.65 \text{ pulg}} = 72.45$$

De la ecuación 13-22, se tiene

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}}$$
$$= \sqrt{\frac{2\pi^2[29(10^3) \text{ ksi}]}{36 \text{ ksi}}}$$
$$= 126.1$$

Aquí $0 < KL/r < (KL/r)_c$, por lo que la ecuación 13-23 es aplicable.

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\left[1 - \dfrac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_Y}{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r_c)^3]}$$
$$= \frac{[1 - (72.45)^2/2(126.1)^2]36 \text{ ksi}}{(5/3) + [(3/8)(72.45/126.1)] - [(72.45)^3/8(126.1)^3]}$$
$$= 16.17 \text{ ksi}$$

Por lo tanto, la carga permisible P sobre la columna es

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{P}{A}; \qquad 16.17 \text{ kip/pulg}^2 = \frac{P}{29.4 \text{ pulg}^2}$$

$$P = 476 \text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 13.7

La barra de acero de la figura 13-25 se va a usar para soportar una carga axial de 18 kip. Si $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi y $\sigma_Y = 50$ ksi, determine el diámetro más pequeño de la barra permitido por la especificación AISC. La barra está fija en ambos extremos.

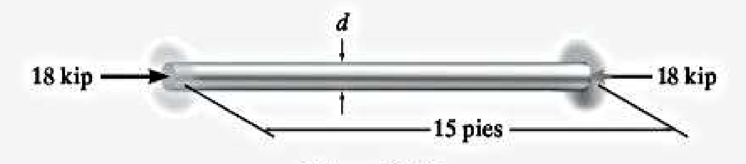


Figura 13-25

SOLUCIÓN

Para una sección transversal circular el radio de giro se convierte en

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(1/4)\pi(d/2)^4}{(1/4)\pi d^2}} = \frac{d}{4}$$

Al aplicar la ecuación 13-22, se tiene

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2[29(10^3)\text{ ksi}]}{50\text{ ksi}}} = 107.0$$

Como el radio de giro de la barra es desconocido, KL/r es desconocido, y por lo tanto debe elegirse entre la aplicación de las ecuaciones 13-21 y 13-23. Se considerará la ecuación 13-21. Para una columna con extremos fijos $K = 0.5$, por lo que

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2}$$

$$\frac{18\text{ kip}}{(1/4)\pi d^2} = \frac{12\pi^2[29(10^3)\text{ kip/pulg}^2]}{23[0.5(15\text{ pies})(12\text{ pulg/pie})/(d/4)]^2}$$

$$\frac{22.92}{d^2} = 1.152 d^2$$

$$d = 2.11\text{ pulg}$$

Use

$$d = 2.25\text{ pulg} = 2\tfrac{1}{4}\text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

Para este diseño, deben verificarse los límites de la relación de esbeltez, es decir,

$$\frac{KL}{r} = \frac{0.5(15\text{ pies})(12\text{ pulg/pie})}{(2.25\text{ pulg}/4)} = 160$$

Como $107.0 < 160 < 200$, el uso de la ecuación 13-21 es adecuado.

13

EJEMPLO 13.8

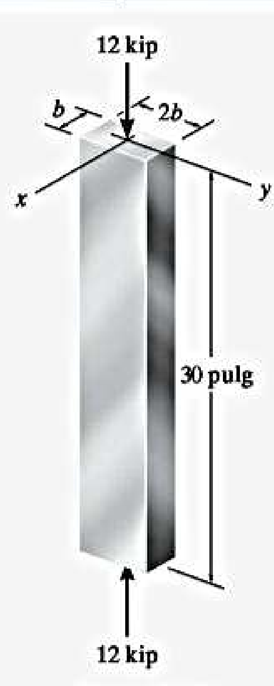


Figura 13-26

Una barra que tiene una longitud de 30 pulg se usa para soportar una carga axial de compresión de 12 kip, figura 13-26. Se sostiene mediante pasadores en sus extremos y está fabricada de una aleación de aluminio 2014-T6. Determine las dimensiones de su sección transversal si el ancho es el doble del grosor.

SOLUCIÓN

Como $KL = 30$ pulg es igual para el pandeo en los ejes x y y, la relación de esbeltez más grande se determina usando el menor radio de giro, es decir, se emplea $I_{\text{mín}} = I_y$:

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{KL}{\sqrt{I_y/A}} = \frac{1(30)}{\sqrt{(1/12)2b(b^3)/[2b(b)]}} = \frac{103.9}{b} \qquad (1)$$

Aquí se debe aplicar la ecuación 13-24, 13-25 o 13-26. Como todavía no se conoce la relación de esbeltez, se iniciará usando la ecuación 13-24.

$$\frac{P}{A} = 28 \text{ ksi}$$

$$\frac{12 \text{ kip}}{2b(b)} = 28 \text{ kip/pulg}^2$$

$$b = 0.463 \text{ pulg}$$

Para comprobar la relación de esbeltez, se tiene

$$\frac{KL}{r} = \frac{103.9}{0.463} = 224.5 > 12$$

Se prueba la ecuación 13-26, que es válida para $KL/r \geq 55$,

$$\frac{P}{A} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2}$$

$$\frac{12}{2b(b)} = \frac{54\,000}{(103.9/b)^2}$$

$$b = 1.05 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

A partir de la ecuación 1,

$$\frac{KL}{r} = \frac{103.9}{1.05} = 99.3 > 55 \qquad \text{Verificado}$$

NOTA: Sería satisfactorio elegir la sección transversal con dimensiones de 1 por 2 pulg.

EJEMPLO 13.9

Una tabla que tiene una sección transversal con dimensiones de 5.5 por 1.5 pulg se utiliza para soportar una carga axial de 5 kip, figura 13-27. Si se supone que la tabla está sostenida mediante pasadores en sus partes superior e inferior, determine la *mayor* longitud L permisible según la especificación de la NFPA.

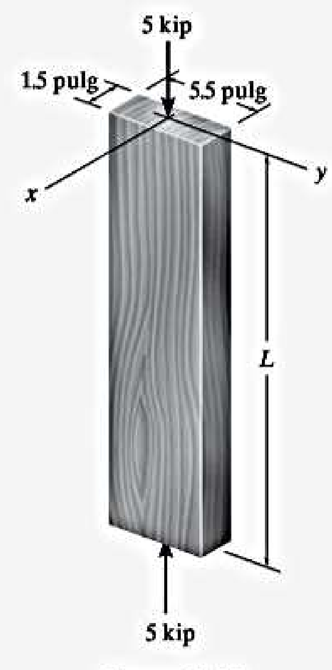


Figura 13-27

SOLUCIÓN

Por inspección, la tabla se pandeará respecto al eje y. En las ecuaciones de la NFPA, $d = 1.5$ pulg. Si se supone que la ecuación 13-29 es aplicable, se tiene

$$\frac{P}{A} = \frac{540 \text{ ksi}}{(KL/d)^2}$$

$$\frac{5 \text{ kip}}{(5.5 \text{ pulg})(1.5 \text{ pulg})} = \frac{540 \text{ ksi}}{(1\,L/1.5 \text{ pulg})^2}$$

$$L = 44.8 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

Aquí

$$\frac{KL}{d} = \frac{1(44.8 \text{ pulg})}{1.5 \text{ pulg}} = 29.8$$

Como $26 < KL/d \leq 50$, la solución es válida.

13

PROBLEMAS

13-78. Determine la mayor longitud de una barra de acero estructural A-36 si se sostiene fijamente y está sometida a una carga axial de 100 kN. La barra tiene un diámetro de 50 mm. Use las ecuaciones del AISC.

13-79. Determine la mayor longitud de una columna W10 × 45 de acero estructural si se sostiene mediante pasadores y está sometida a una carga axial de 290 kips. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 50$ ksi. Use las ecuaciones del AISC.

***13-80.** Determine la mayor longitud de una sección W10 × 12 de acero estructural A-36 si se sostiene mediante pasadores y está sometida a una carga axial de 28 kip. Use las ecuaciones del AISC.

•13-81. Use las ecuaciones del AISC y seleccione del apéndice B la columna de acero estructural A-36 con el menor peso, que tenga 14 pies de largo y soporte una carga axial de 40 kip. Los extremos están articulados. Considere $\sigma_Y = 50$ ksi.

13-82. Use las ecuaciones del AISC y seleccione del apéndice B la columna de acero estructural A-36 con el menor peso, que tenga 12 pies de largo y soporte una carga axial de 40 kip. Los extremos están fijos. Considere $\sigma_Y = 50$ ksi.

13-83. Use las ecuaciones del AISC y seleccione del apéndice B la columna de acero estructural A-36 con el menor peso, que tenga 24 pies de largo y soporte una carga axial de 100 kip. Los extremos están fijos.

***13-84.** Use las ecuaciones del AISC y seleccione del Apéndice B la columna de acero estructural A-36 con el menor peso, que tenga 30 pies de largo y soporte una carga axial de 200 kip. Los extremos están fijos.

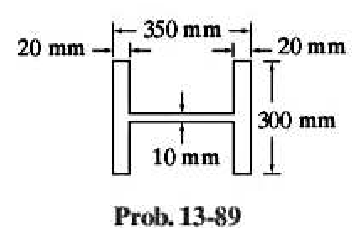
•13-85. Una columna W8 × 24 de acero A-36 que tiene 30 pies de largo, está articulada en ambos extremos y arriostrada contra su eje débil a la mitad de la altura. Determine la fuerza axial P permisible que la columna puede soportar con seguridad. Use las fórmulas del AISC para el diseño de columnas.

13-86. Verifique si una columna W10 × 39 puede soportar una fuerza axial de $P = 250$ kip. La columna tiene 20 pies de largo, está articulada en ambos extremos y arriostrada contra el eje débil a la mitad de la altura. La columna es de acero con $E = 29(10^3)$ ksi y $\sigma_Y = 50$ ksi. Use las fórmulas del AISC para el diseño de columnas.

13-87. Una barra de 5 pies de largo se usa en una máquina para transmitir una carga axial compresiva de 3 kip. Determine su menor diámetro si se conecta mediante pasadores en sus extremos y está fabricada de una aleación de aluminio 2014-T6.

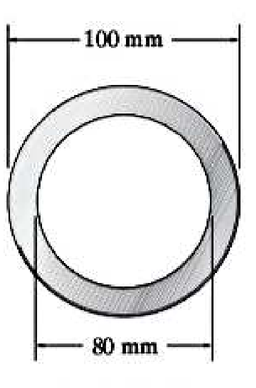
***13-88.** Verifique si una columna W10 × 45 puede soportar con seguridad una fuerza axial de $P = 200$ kip. La columna tiene 15 pies de largo y se encuentra articulada en sus dos extremos. Está fabricada de acero con $E = 29(10^3)$ ksi y $\sigma_Y = 50$ ksi. Use las fórmulas del AISC para el diseño de columnas.

•13-89. Use las ecuaciones del AISC y verifique si una columna que tiene la sección transversal mostrada puede soportar una fuerza axial de 1500 kN. La columna tiene una longitud de 4 m, está fabricada de acero A-36 y sus extremos están articulados.



Prob. 13-89

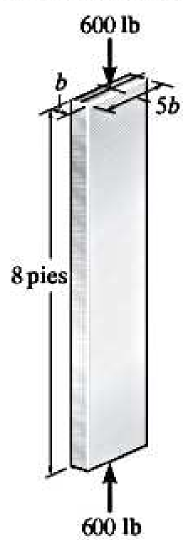
13-90. El tubo de acero A-36 está fijo en ambos extremos. Si se somete a una fuerza axial de 150 kN, determine la longitud máxima que el tubo puede soportar con seguridad. Use las fórmulas del AISC para el diseño de columnas.



Prob. 13-90

13-91. La barra está fabricada de una aleación de aluminio 2014-T6. Determine su menor grosor b si su anchura es $5b$. Suponga que está articulada en sus extremos.

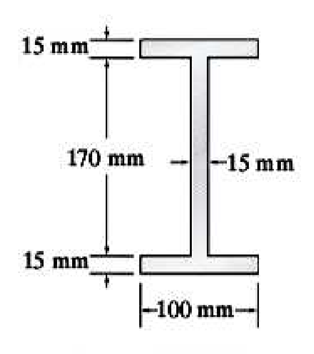
***13-92.** La barra está hecha de una aleación de aluminio 2014-T6. Determine su menor grosor b si su anchura es $5b$. Suponga que está fija en sus extremos.



Probs. 13-91/92

•13-93. La columna de aluminio 2014-T6 con 3 m de longitud tiene la sección transversal mostrada. Si la columna está articulada en ambos extremos y arriostrada contra el eje débil en su altura media, determine la fuerza axial permisible P que la columna puede soportar con seguridad.

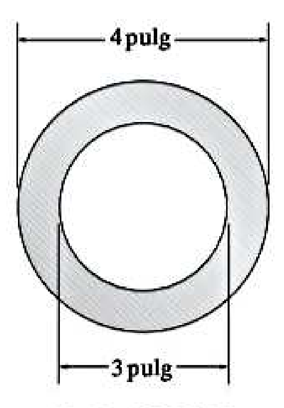
13-94. La columna de aluminio 2014-T6 tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si la columna está articulada en ambos extremos y se somete a una fuerza axial P = 100 kN, determine la longitud máxima que puede tener la columna para soportar la carga con seguridad.



Probs. 13-93/94

13-95. La sección hueca de aluminio 2014-T6 tiene el área transversal mostrada en la figura. Si la columna tiene 10 pies de largo y está fija en ambos extremos, determine la fuerza axial permisible P que la columna puede soportar con seguridad.

***13-96.** La sección hueca de aluminio 2014-T6 tiene el área transversal mostrada en la figura. Si la columna está fija en su base, articulada en su parte superior y se somete a la fuerza axial P = 100 kip, determine la longitud máxima que puede tener la columna para soportar la carga con seguridad.

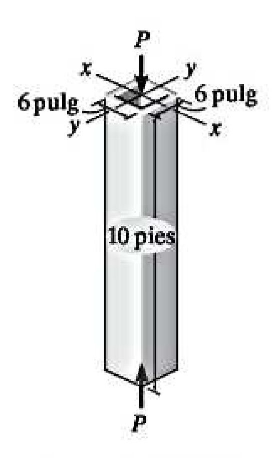


Probs. 13-95/96

•13-97. El tubo cuadrado tiene 0.25 pulg de grosor, está fabricado de una aleación de aluminio 2014-T6, se encuentra fijo en su base y está articulado en su parte superior. Determine la mayor carga axial que puede soportar.

13-98. El tubo cuadrado tiene 0.25 pulg de grosor, está fabricado de una aleación de aluminio 2014-T6 y se conecta fijamente en sus extremos. Determine la mayor carga axial que puede soportar.

13-99. El tubo cuadrado tiene 0.25 pulg de grosor, está hecho de una aleación de aluminio 2014-T6 y se encuentra articulado en sus extremos. Determine la mayor carga axial que puede soportar.

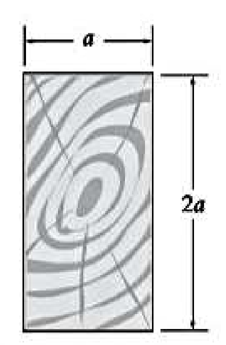


Probs. 13-97/98/99

***13-100.** Una columna rectangular de madera tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si la columna tiene 6 pies de largo y se somete a una fuerza axial de $P = 15$ kip, determine con una precisión de $\frac{1}{16}$ de pulg la dimensión a mínima requerida para su sección transversal, de modo que la columna pueda soportar la carga con seguridad. La columna está articulada en ambos extremos.

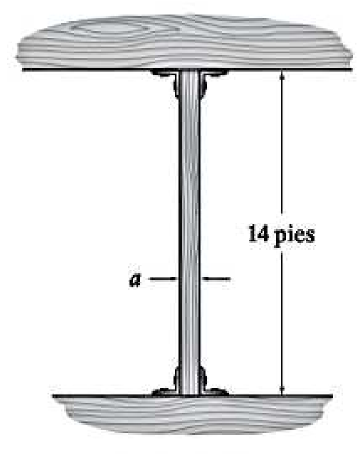
•13-101. Una columna rectangular de madera tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si $a = 3$ pulg y la columna tiene 12 pies de largo, determine la fuerza axial P permisible que la columna puede soportar con seguridad. La columna está articulada en su parte superior y fija en su base.

13-102. Una columna rectangular de madera tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si $a = 3$ pulg y la columna está sometida a una fuerza axial de $P = 15$ kip, determine la longitud máxima que puede tener la columna para soportar la carga con seguridad. La columna está articulada en su parte superior y fija en su base.



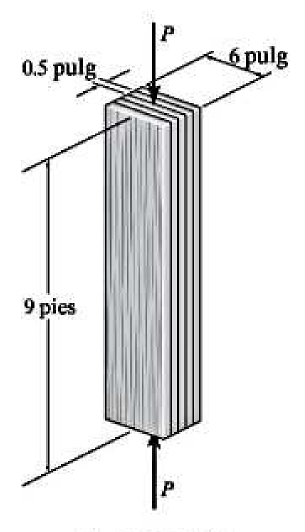
Probs. 13-100/101/102

13-103. La columna de madera tiene una sección transversal cuadrada y se supone que está articulada en sus partes superior e inferior. Si soporta una carga axial de 50 kip, determine con precisión de $\frac{1}{2}$ pulg su dimensión lateral más pequeña. Use las fórmulas de la NFPA.



Prob. 13-103

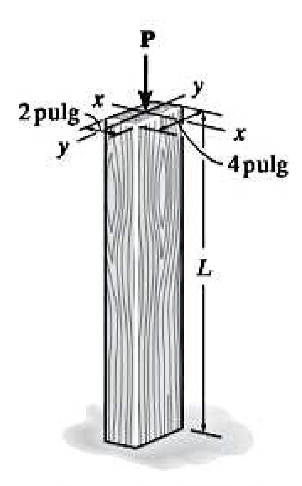
***13-104.** La columna de madera que se muestra en la figura se forma al pegar entre sí tablas de 6×0.5 pulg. Si la columna está articulada en ambos extremos y se somete a una carga axial de $P = 20$ kip, determine el número necesario de tablas para formar una columna que pueda soportar la carga con seguridad.



Prob. 13-104

•13-105. La columna es de madera. Está fija en su parte inferior y libre en su parte superior. Utilice las fórmulas de la NFPA para determinar su mayor longitud permisible si debe soportar una carga axial de $P = 2$ kip.

13-106. La columna es de madera. Está fija en su parte inferior y libre en su parte superior. Utilice las fórmulas de la NFPA para determinar la mayor carga axial permisible P que puede soportar si tiene una longitud $L = 4$ pies.



Probs. 13-105/106

*13.7 Diseño de columnas para cargas excéntricas

En ocasiones puede ser necesario que una columna soporte una carga que actúa en su borde o sobre una ménsula de ángulo unida en uno de sus lados, como se muestra en la figura 13-28*a*. El momento flexionante $M = Pe$ causado por la carga excéntrica, debe tomarse en cuenta al momento de diseñar la columna. En la práctica de la ingeniería, hay varias maneras aceptables de hacer esto. Se analizarán dos de los métodos más comunes.

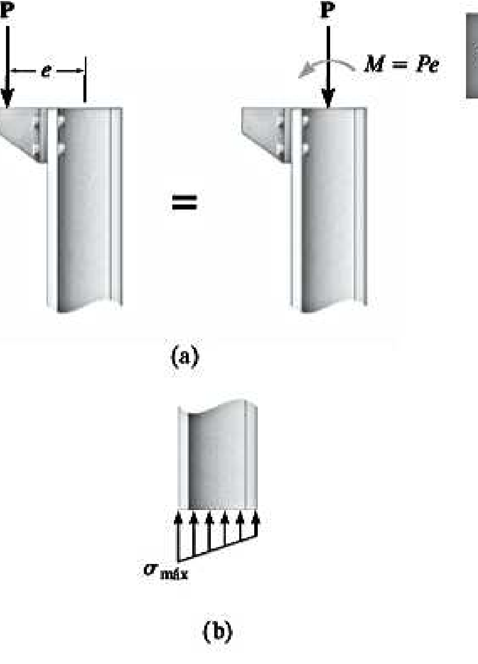


Figura 13-28

Uso de las fórmulas de columna disponibles. La distribución del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal de la columna, y que se muestra en la figura 13-28*a*, se determina con base en una superposición de la fuerza axial P y el momento flexionante $M = Pe$. En particular, el esfuerzo de compresión máximo es

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{13-30}$$

En la figura 13-28*b* se muestra un perfil de esfuerzo típico. Si se *supone* de manera conservadora que toda la sección transversal está sujeta al esfuerzo uniforme $\sigma_{máx}$ determinado a partir de la ecuación 13-30, entonces es posible comparar $\sigma_{máx}$ con σ_{perm}, que se determina usando las fórmulas dadas en la sección 13.6. El cálculo de σ_{perm} suele realizarse empleando la *mayor* relación de esbeltez de la columna, sin importar el eje sobre el cual la columna experimenta la flexión. Por lo general, este requisito se especifica en los códigos de diseño y, en la mayoría de los casos, conduce a un diseño conservador. Si

$$\sigma_{máx} \leq \sigma_{perm}$$

entonces la columna puede soportar la carga especificada. Si esta desigualdad no se cumple, entonces debe aumentarse el área A de la columna y es necesario calcular nuevos valores para $\sigma_{máx}$ y σ_{perm}. La aplicación de este método de diseño es bastante sencilla y funciona bien para las columnas de longitud corta o intermedia.

Fórmula de interacción. Al *diseñar* una columna cargada excéntricamente resulta conveniente observar cómo *interactúan* la flexión y las cargas axiales, de modo que pueda lograrse el equilibrio entre estos dos efectos. Para ello, se considerarán por separado las contribuciones hechas al área total de la columna por la fuerza axial y el momento. Si el esfuerzo permisible para la carga axial es $(\sigma_a)_{perm}$, entonces el área requerida para que la columna pueda soportar la carga P es

$$A_a = \frac{P}{(\sigma_a)_{perm}}$$

Del mismo modo, si el esfuerzo flexionante permisible es $(\sigma_b)_{perm}$, como $I = Ar^2$, el área requerida para que la columna pueda soportar el momento excéntrico se determina a partir de la fórmula de la flexión, es decir,

$$A_b = \frac{Mc}{(\sigma_b)_{perm} r^2}$$

13

El área total A necesaria para que la columna pueda resistir *tanto* la carga axial *como* el momento exige que

$$A_a + A_b = \frac{P}{(\sigma_a)_{\text{perm}}} + \frac{Mc}{(\sigma_b)_{\text{perm}} r^2} \leq A$$

o bien

$$\frac{P/A}{(\sigma_a)_{\text{perm}}} + \frac{Mc/Ar^2}{(\sigma_b)_{\text{perm}}} \leq 1$$

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{\text{perm}}} + \frac{\sigma_b}{(\sigma_b)_{\text{perm}}} \leq 1 \qquad (13\text{-}31)$$

Aquí

σ_a = esfuerzo axial causado por la fuerza P que se determina a partir de $\sigma_a = P/A$, donde A es el área de la sección transversal de la columna

σ_b = esfuerzo flexionante causado por la aplicación de una carga excéntrica o un momento M; σ_b se encuentra a partir de $\sigma_b = Mc/I$, donde I es el momento de inercia del área transversal calculado respecto al eje de flexión o eje centroidal

$(\sigma_a)_{\text{perm}}$ = esfuerzo axial permisible según lo definen las fórmulas dadas en la sección 13.6 u otras especificaciones en los códigos de diseño. Para este propósito, use siempre la *mayor* relación de esbeltez de la columna, sin importar el eje sobre el cual experimenta la flexión

$(\sigma_b)_{\text{perm}}$ = esfuerzo flexionante permisible según lo definen las especificaciones de código

Tenga en cuenta que, si la columna está sometida sólo a una carga axial, entonces la relación flexión-esfuerzo de la ecuación 13-31 sería igual a cero y el diseño se basaría sólo en el esfuerzo axial permisible. Del mismo modo, cuando no hay carga axial presente, la relación carga axial-esfuerzo es cero y el requisito de esfuerzo se basa en el esfuerzo flexionante permisible. Por lo tanto, cada relación de esfuerzo indica la contribución de la carga axial o el momento flexionante. Como la ecuación 13-31 muestra la forma en que interactúan las cargas, en ocasiones esta ecuación se conoce como la ***fórmula de interacción***. Este enfoque de diseño requiere un procedimiento de prueba y verificación en el que el diseñador debe *elegir* una columna disponible para después comprobar si se cumple la desigualdad. Si no es así, debe elegir una sección más grande y repetir el proceso. Se considera que una elección económica es aquella en la que el lado izquierdo es cercano pero inferior a 1.



Ejemplo típico de una columna usada para soportar la carga excéntrica de un techo.

Con frecuencia, el método de interacción está especificado en los códigos para el diseño de columnas de acero, aluminio o madera. En particular, para el diseño del esfuerzo permisible, el American Institute of Steel Construction especifica el uso de esta ecuación sólo cuando la relación de carga axial-esfuerzo $\sigma_a/(\sigma_a)_{\text{perm}} \leq 0.15$. Para otros valores de esta relación, se emplea una forma modificada de la ecuación 13-31.

EJEMPLO 13.10

La columna de la figura 13-29 está hecha de una aleación de aluminio 2014-T6 y se emplea para soportar una carga excéntrica **P**. Determine la magnitud máxima de **P** que se puede soportar si la columna está fija en su base y libre en su parte superior. Use la ecuación 13-30.

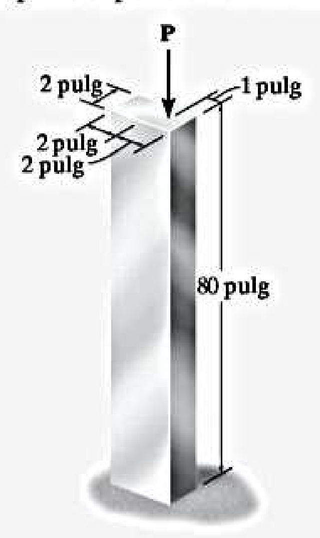


Figura 13-29

SOLUCIÓN

A partir de la figura 13-10*b*, $K = 2$. Por lo tanto, la mayor relación de esbeltez para la columna es

$$\frac{KL}{r} = \frac{2(80 \text{ pulg})}{\sqrt{[(1/12)(4 \text{ pulg})(2 \text{ pulg})^3]/[(2 \text{ pulg})\ 4 \text{ pulg}]}} = 277.1$$

Por inspección, debe usarse la ecuación 13-26 ($277.1 > 55$). Por lo tanto,

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(277.1)^2} = 0.7031 \text{ ksi}$$

El esfuerzo de compresión máximo en la columna se determina a partir de la combinación de la carga axial y la flexión. Se tiene

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{(Pe)c}{I}$$
$$= \frac{P}{2 \text{ pulg}(4 \text{ pulg})} + \frac{P(1 \text{ pulg})(2 \text{ pulg})}{(1/12)(2 \text{ pulg})(4 \text{ pulg})^3}$$
$$= 0.3125P$$

Si *se supone* que este esfuerzo es *uniforme* en toda la sección transversal, se requiere

$\sigma_{\text{perm}} = \sigma_{\text{máx}};$ $\quad 0.7031 = 0.3125P$

$$P = 2.25 \text{ kip}$$ *Resp.*

13

EJEMPLO 13.11

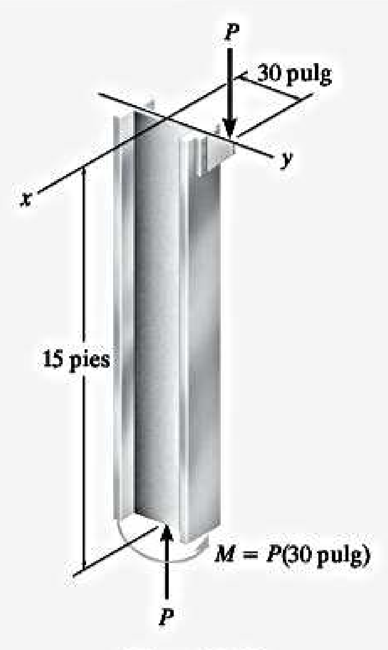


Figura 13-30

La columna W6 × 20 de acero A-36 que se muestra en la figura 13-30 está articulada en sus extremos y se somete a la carga excéntrica P. Determine el máximo valor permisible de P usando el método de interacción si el esfuerzo flexionante permisible es $(\sigma_b)_{\text{perm}} = 22$ ksi.

SOLUCIÓN

Aquí $K = 1$. Las propiedades geométricas necesarias para la sección W6 × 20 se toman de la tabla del apéndice B.

$$A = 5.87 \text{ pulg}^2 \quad I_x = 41.4 \text{ pulg}^4 \quad r_y = 1.50 \text{ pulg} \quad d = 6.20 \text{ pulg}$$

Se considerará r_y porque esto conducirá al *mayor* valor de la relación de esbeltez. También se necesita I_x puesto que ocurre flexión respecto al eje x ($c = 6.20$ pulg$/2 = 3.10$ pulg). Para determinar el esfuerzo de compresión permisible, se tiene

$$\frac{KL}{r} = \frac{1[15 \text{ pies}(12 \text{ pulg/pie})]}{1.50 \text{ pulg}} = 120$$

Como

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2[29(10^3) \text{ ksi}]}{36 \text{ ksi}}} = 126.1$$

entonces $KL/r < (KL/r)_c$, por lo que debe usarse la ecuación 13-23.

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{[1 - (KL/r)^2/2(KL/r)_c^2]\sigma_Y}{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - \left[(KL/r)^3/8(KL/r)_c^3\right]}$$

$$= \frac{[1 - (120)^2/2(126.1)^2]36 \text{ ksi}}{(5/3) + [(3/8)(120)/(126.1)] - [(120)^3/8(126.1)^3]}$$

$$= 10.28 \text{ ksi}$$

Al aplicar la ecuación de interacción 13-31 resulta

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{\text{perm}}} + \frac{\sigma_b}{(\sigma_b)_{\text{perm}}} \le 1$$

$$\frac{P/5.87 \text{ pulg}^2}{10.28 \text{ ksi}} + \frac{P(30 \text{ pulg})(3.10 \text{ pulg})/(41.4 \text{ pulg}^4)}{22 \text{ ksi}} = 1$$

$$P = 8.43 \text{ kip}$$ *Resp.*

Para comprobar la aplicación del método de interacción en la sección de acero, se requiere

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{\text{perm}}} = \frac{8.43 \text{ kip}/(5.87 \text{ pulg})}{10.28 \text{ kip/pulg}^2} = 0.140 < 0.15 \qquad \text{Verificado.}$$

EJEMPLO 13.12

La columna de madera mostrada en la figura 13-31 está fabricada de dos tablas clavadas entre sí de modo que la sección transversal tenga las dimensiones indicadas en la figura. Si la columna está fija en su base y libre en su parte superior, use la ecuación 13-30 para determinar la carga excéntrica **P** que puede soportar.

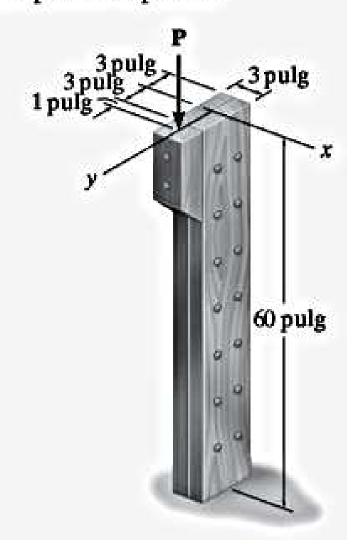


Figura 13-31

SOLUCIÓN

A partir de la figura 13-10*b*, $K = 2$. Aquí es necesario calcular KL/d para determinar cuál de las ecuaciones 13-27 a 13-29 debe usarse. Como σ_{perm} se determina usando la mayor relación de esbeltez, se elige $d = 3$ pulg. Lo anterior se hace para que esta relación sea lo más grande posible y, por lo tanto, genere el menor esfuerzo axial permisible. Se tiene

$$\frac{KL}{d} = \frac{2(60 \text{ pulg})}{3 \text{ pulg}} = 40$$

Como $26 < KL/d < 50$ el esfuerzo axial permisible se determina con base en la ecuación 13-29. Así,

$$\sigma_{perm} = \frac{540 \text{ ksi}}{(KL/d)^2} = \frac{540 \text{ ksi}}{(40)^2} = 0.3375 \text{ ksi}$$

Al aplicar la ecuación 13-30 con $\sigma_{perm} = \sigma_{máx}$ se tiene

$$\sigma_{perm} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$0.3375 \text{ ksi} = \frac{P}{(3 \text{ pulg})(6 \text{ pulg})} + \frac{P(4 \text{ pulg})(3 \text{ pulg})}{(1/12)(3 \text{ pulg})(6 \text{ pulg})^3}$$

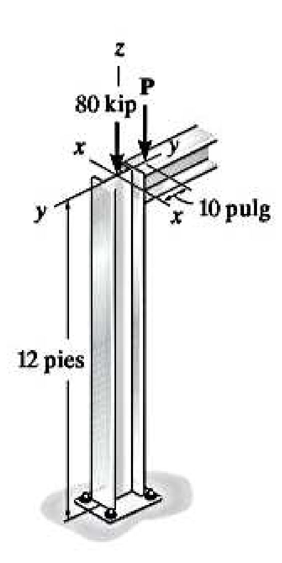
$$P = 1.22 \text{ kip}$$ *Resp.*

PROBLEMAS

13

13-107. La columna W14 × 53 de acero estructural A-36 soporta una carga axial de 80 kip además de una carga excéntrica P. Determine el máximo valor permisible de P con base en las ecuaciones del AISC dadas en la sección 13.6 y la ecuación 13-30. Suponga que la columna está fija en su base, y que en su parte superior es libre de ladearse en el plano x-z y está articulada en el plano y-z.

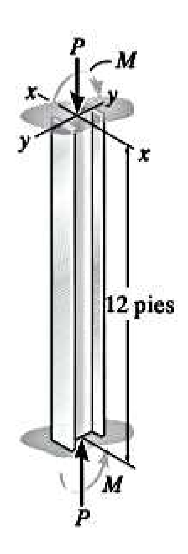
***13-108.** La columna W12 ×45 de acero estructural A-36 soporta una carga axial de 80 kip, además de una carga excéntrica P = 60 kip. Determine si la columna falla con base en las ecuaciones del AISC dadas en la sección 13.6 y la ecuación 13-30. Suponga que la columna está fija en su base, y que en su parte superior es libre de ladearse en el plano x-z y está articulada en el plano y-z.



Probs. 13-107/108

•13-109. La columna W14 ×22 de acero estructural A-36, está fija en sus partes superior e inferior. Si una carga horizontal (que no se muestra) hace que la columna soporte momentos en sus extremos de M = 10 kip·pie, determine la fuerza axial máxima permisible P que puede aplicarse. La flexión se produce alrededor del eje x-x. Use las ecuaciones del AISC dadas en la sección 13.6 y la ecuación 13-30.

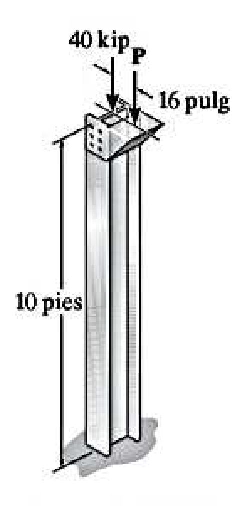
13-110. La columna W14 × 22 de acero estructural A-36, está fija en sus partes superior e inferior. Si una carga horizontal (que no se muestra) hace que la columna soporte momentos en sus extremos de M = 15 kip·pie, determine la fuerza axial máxima permisible P que puede aplicarse. La flexión se produce alrededor del eje x-x. Use la fórmula de interacción con $(\sigma_b)_{perm}$ = 24 ksi.



Probs. 13-109/110

13-111. La columna W14 × 43 de acero estructural A-36 está fija en su parte inferior y libre en su parte superior. Determine la mayor carga excéntrica P que puede aplicarse empleando la ecuación 13-30 y las ecuaciones del AISC dadas en la sección 13.6.

***13-112.** La columna W10 × 45 de acero estructural A-36 está fija en su parte inferior y libre en su parte superior. Si se somete a una carga de P = 2 kip, determine si soporta la carga con seguridad de acuerdo con las ecuaciones del AISC dadas en la sección 13.6 y con la ecuación 13-30.



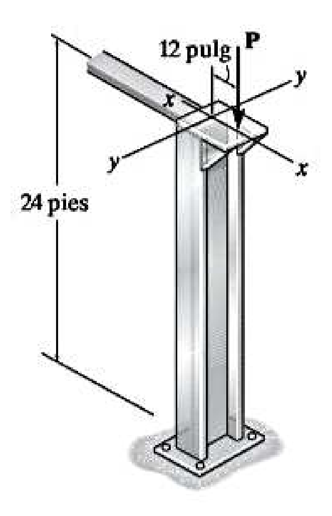
Probs. 13-111/112

•**13-113.** La columna W10 × 45 de acero A-36 está fija en su base. Su parte superior está restringida a moverse a lo largo del eje *x-x*, pero es libre de girar alrededor y moverse a lo largo del eje *y-y*. Determine la máxima fuerza excéntrica *P* que la columna puede soportar con seguridad empleando el método del esfuerzo permisible.

13-114. La columna W10 × 45 de acero A-36 está fija en su base. Su parte superior está restringida a moverse a lo largo del eje *x-x*, pero es libre de girar alrededor y moverse a lo largo del eje *y-y*. Determine la máxima fuerza excéntrica *P* que la columna puede soportar con seguridad empleando una fórmula de interacción. El esfuerzo flexionante permisible es $(\sigma_b)_{perm} = 15$ ksi.

13-115. La columna W12 ×50 de acero A-36 está fija en su base. Su parte superior está restringida a moverse a lo largo del eje *x-x*, pero es libre de girar alrededor y moverse a lo largo del eje *y-y*. Si se aplica la fuerza excéntrica $P = 15$ kip, investigue si la columna es adecuada para soportar la carga. Use el método del esfuerzo permisible.

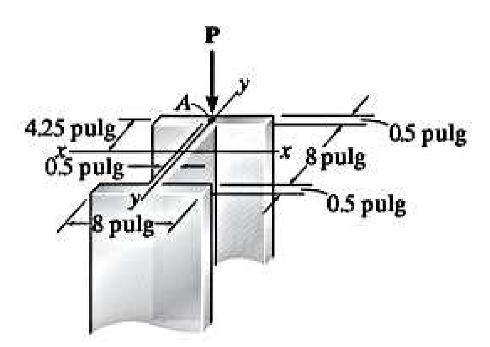
***13-116.** La columna W12 × 50 de acero A-36 está fija en su base. Su parte superior está restringida a moverse a lo largo del eje *x-x*, pero es libre de girar alrededor y moverse a lo largo del eje *y-y*. Si se aplica la fuerza excéntrica $P = 15$ kip, investigue si la columna es adecuada para soportar la carga. Use la fórmula de interacción. El esfuerzo flexionante permisible es $(\sigma_b)_{perm} = 15$ ksi.



Probs. 13-113/114/115/116

•**13-117.** Una columna de 16 pies de largo está fabricada de una aleación de aluminio 2014-T6. Si está fija en sus partes superior e inferior, y se aplica una carga compresiva **P** en el punto *A*, determine la magnitud máxima permisible de **P** empleando las ecuaciones de la sección 13.6 y la ecuación 13-30.

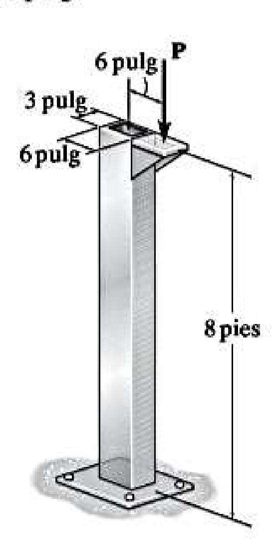
13-118. Una columna de 16 pies de largo está fabricada de una aleación de aluminio 2014-T6. Si está fija en sus partes superior e inferior y se aplica una carga compresiva **P** en el punto *A*, determine la magnitud máxima permisible de **P** empleando las ecuaciones de la sección 13.6 y la fórmula de interacción con $(\sigma_b)_{perm} = 20$ ksi.



Probs. 13-117/118

13-119. La columna hueca de aluminio 2014-T6 está fija en su base y libre en su parte superior. Determine la máxima fuerza excéntrica *P* que la columna puede soportar con seguridad. Utilice el método del esfuerzo permisible. El grosor de pared para la sección es $t = 0.5$ pulg.

***13-120.** La columna hueca de aluminio 2014-T6 está fija en su base y libre en su parte superior. Determine la máxima fuerza excéntrica *P* que la columna puede soportar con seguridad. Utilice la fórmula de interacción. El esfuerzo flexionante permisible es $(\sigma_b)_{perm} = 30$ ksi. El grosor de pared para la sección es $t = 0.5$ pulg.

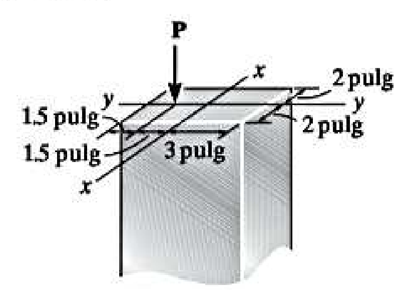


Probs. 13-119/120

13

•**13-121.** La barra de 10 pies de largo está fabricada con una aleación de aluminio 2014-T6. Si está fija en su parte inferior y articulada en su parte superior, determine la carga excéntrica máxima permisible **P** que puede aplicarse empleando las fórmulas de la sección 13.6 y la ecuación 13-30.

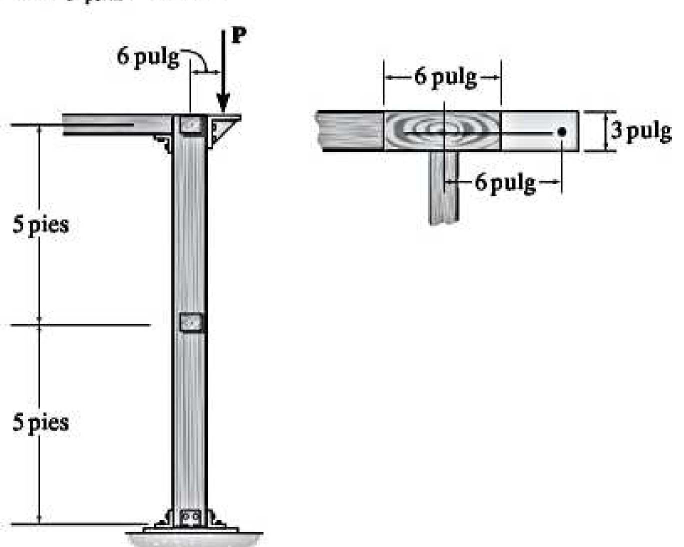
13-122. La barra de 10 pies de largo está fabricada con una aleación de aluminio 2014-T6. Si está fija en su parte inferior y articulada en su parte superior, determine la carga excéntrica máxima permisible **P** que puede aplicarse empleando las ecuaciones de la sección 13.6 y la fórmula de interacción con $(\sigma_b)_{perm} = 18$ ksi.



Probs. 13-121/122

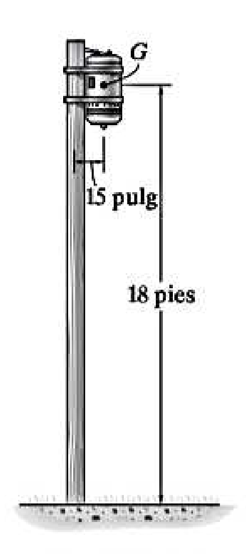
13-123. La columna rectangular de madera puede considerarse fija en su base y articulada en su parte superior. Además, la columna está arriostrada a la mitad de su altura contra el eje débil. Determine la fuerza excéntrica máxima P que la columna puede soportar con seguridad empleando el método del esfuerzo permisible.

***13-124.** La columna rectangular de madera puede considerarse fija en su base y articulada en su parte superior. Además, la columna está arriostrada a la mitad de su altura contra el eje débil. Determine la fuerza excéntrica máxima P que la columna puede soportar con seguridad empleando la fórmula de interacción. El esfuerzo flexionante permisible es $(\sigma_b)_{perm} = 1.5$ ksi.



Probs. 13-123/124

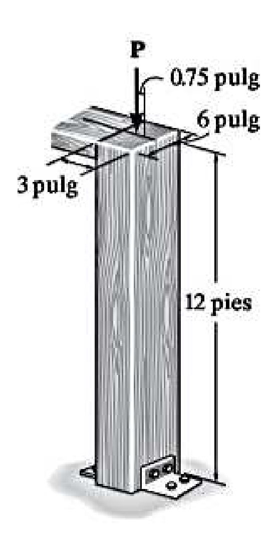
•**13-125.** El poste eléctrico de 10 pulg de diámetro sostiene el transformador que tiene un peso de 600 lb y su centro de gravedad en G. Si el poste está fijo al suelo y libre en su parte superior, determine si es adecuado de acuerdo con las ecuaciones de la NFPA dadas en la sección 13.6 y con la ecuación 13-30.



Prob. 13-125

13-126. Use las ecuaciones de la NFPA dadas en la sección 13.6 y la ecuación 13-30 para determinar la carga excéntrica máxima permisible P que puede aplicarse a la columna de madera. Suponga que la columna está articulada tanto en su parte superior como en la inferior.

13-127. Use las ecuaciones de la NFPA dadas en la sección 13.6 y la ecuación 13-30 para determinar la carga excéntrica máxima permisible P que puede aplicarse a la columna de madera. Suponga que la columna está articulada en su parte superior y fija en su parte inferior.



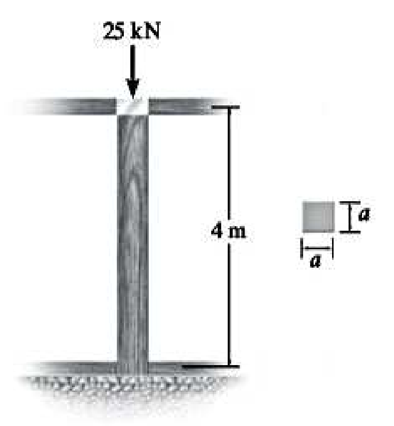
Probs. 13-126/127

REPASO DE CAPÍTULO

El pandeo es la inestabilidad repentina que se produce en las columnas o en los elementos que soportan una carga axial de compresión. La carga axial máxima que puede soportar un elemento antes de pandearse se llama la carga crítica P_{cr}.		
La carga crítica para una columna ideal se determina a partir de la fórmula de Euler, donde $K = 1$ para los soportes de pasador, $K = 0.5$ para los soportes fijos, $K = 0.7$ para un soporte de pasador y otro fijo, y $K = 2$ para un soporte fijo y un extremo libre.	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$	$\mathbf{P}_{cr}$
Si la carga axial se aplica en la columna de manera excéntrica, entonces puede usarse la fórmula de la secante para determinar el esfuerzo máximo en la columna.	$\sigma_{máx} = \dfrac{P}{A}\left[1 + \dfrac{ec}{r^2}\sec\left(\dfrac{L}{2r}\sqrt{\dfrac{P}{EA}}\right)\right]$	
Cuando la carga axial causa la cedencia del material, entonces debe usarse el módulo de tangente con la fórmula de Euler para determinar la carga crítica de la columna. Esto se conoce como la ecuación de Engesser.	$\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2}$	
Se han desarrollado fórmulas empíricas basadas en datos experimentales, las cuales pueden usarse para diseñar columnas de acero, aluminio y madera.		

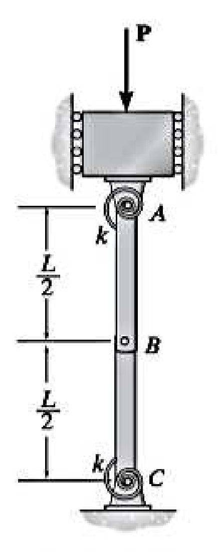
PROBLEMAS DE REPASO

***13-128.** La columna de madera tiene 4 m de largo y se emplea para soportar una carga axial de 25 kN. Si la sección transversal es cuadrada, determine la dimensión a de cada uno de sus lados usando un factor de seguridad contra el pandeo de F.S. = 2.5. Se supone que la columna está articulada en sus partes superior e inferior. Use la ecuación de Euler. $E_w = 11$ GPa y $\sigma_Y = 10$ MPa.



Prob. 13-128

•13-129. Si los resortes de torsión unidos a los extremos A y C de los elementos rígidos AB y BC tienen una rigidez k, determine la carga crítica P_{cr}.

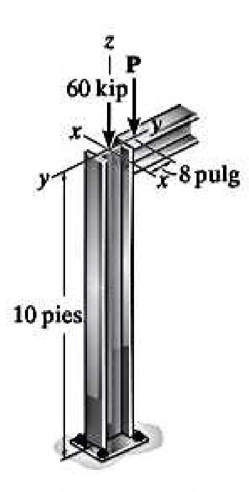


Prob. 13-129

13-130. Determine la intensidad máxima w de la carga uniforme distribuida que puede aplicarse sobre la viga, de modo que los elementos a compresión que forman la armadura de soporte no se pandeen. Estos elementos están fabricados con barras de acero A-36 que tienen un diámetro de 60 mm. Use un F.S. = 2 contra el pandeo.

Prob. 13-130

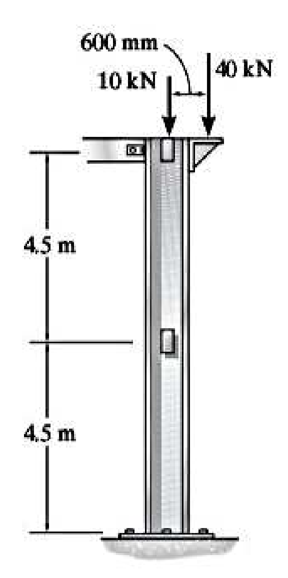
13-131. La columna de acero W10 × 45 soporta una carga axial de 60 kip, además de una carga excéntrica **P**. Determine el valor máximo permisible de **P** con base en las ecuaciones del AISC dadas en la sección 13.6 y la ecuación 13-30. Suponga que en el plano x-z, $K_x = 1.0$, y en el plano y-z, $K_y = 2.0$. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 50$ ksi.



Prob. 13-131

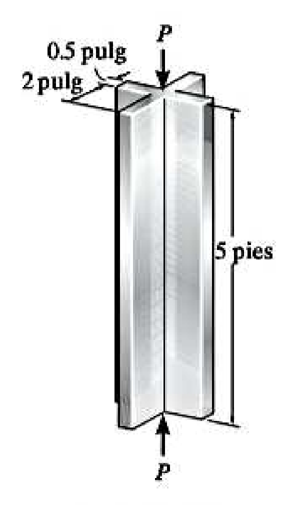
***13-132.** La columna de acero A-36 puede considerarse articulada en su parte superior y fija en su base. Además, está arriostrada a la mitad de su altura a lo largo del eje débil. Investigue si una sección W250×45 puede soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. Use el método del esfuerzo permisible.

•13-133. La columna de acero A-36 puede considerarse articulada en su parte superior y fija en su base. Además, está arriostrada a la mitad de su altura a lo largo del eje débil. Investigue si una sección W250×45 puede soportar con seguridad la carga mostrada en la figura. Use la fórmula de interacción. El esfuerzo flexionante permisible es $(\sigma_b)_{perm}$ = 100 MPa.



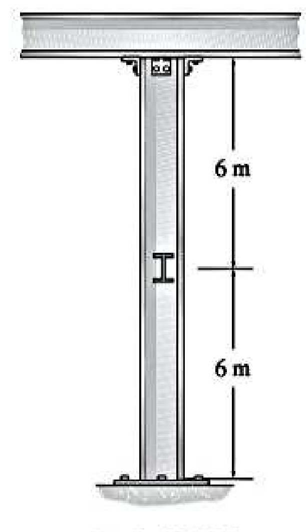
Probs. 13-132/133

13-134. El elemento tiene una sección transversal simétrica. Si está articulado en sus extremos, determine la máxima fuerza que puede soportar. Está hecho de una aleación de aluminio 2014-T6.



Prob. 13-134

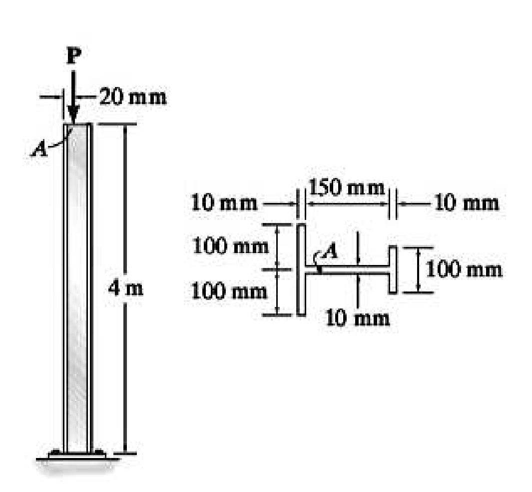
13-135. La columna W200×46 de acero A-36 puede considerarse articulada en su parte superior y fija en su base. Además, la columna está arriostrada a la mitad de su altura contra el eje débil. Determine la máxima carga axial que la columna puede soportar sin pandearse.



Prob. 13-135

***13-136.** La columna de acero estructural A-36 tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si está fija en la parte inferior y libre en la parte superior, determine la fuerza máxima P que puede aplicarse en A sin causar el pandeo o la cedencia. Use un factor de seguridad de 3 con respecto al pandeo y la cedencia.

•13-137. La columna de acero estructural A-36 tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si está fija en la parte inferior y libre en la parte superior, determine si la columna se pandea o cede cuando la carga $P = 10$ kN. Use un factor de seguridad de 3 con respecto al pandeo y la cedencia.



Probs. 13-136/137



Cuando los pilotes se colocan en su sitio, sus extremos se someten a cargas de impacto. Para determinar el esfuerzo desarrollado dentro del pilote es necesario entender la naturaleza del impacto y la energía derivada de éste.

Métodos de energía

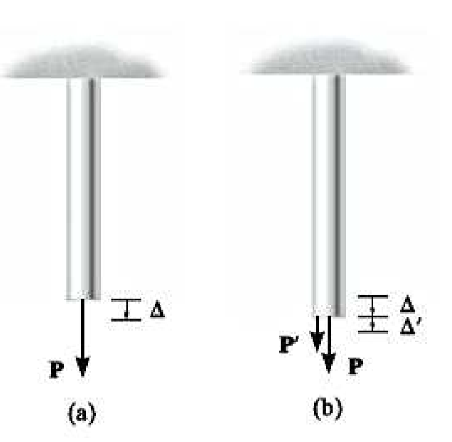
14

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se mostrará cómo aplicar los métodos de energía para resolver problemas que implican deflexión. El capítulo comienza con un análisis del trabajo y la energía de deformación, seguido por el desarrollo del principio de la conservación de la energía. Con base en este principio, se determinarán el esfuerzo y la deflexión de un elemento cuando éste se somete a un impacto. Se desarrollarán los métodos del trabajo virtual y el teorema de Castigliano, los cuales se emplean para determinar el desplazamiento y la pendiente en ciertos puntos de elementos estructurales y elementos mecánicos.

14.1 Trabajo externo y energía de deformación

La deflexión de las juntas (nodos) en una armadura o los puntos en una viga o eje puede determinarse empleando los métodos de energía. Sin embargo, antes de desarrollar cualquiera de estos métodos, primero se definirá el trabajo causado por una fuerza externa y un momento de par, y se mostrará cómo se expresa este trabajo en términos de la energía de deformación del cuerpo. Las formulaciones que se presentan aquí y en la siguiente sección servirán de base para aplicar los métodos de trabajo y energía que se presentan a lo largo del capítulo.



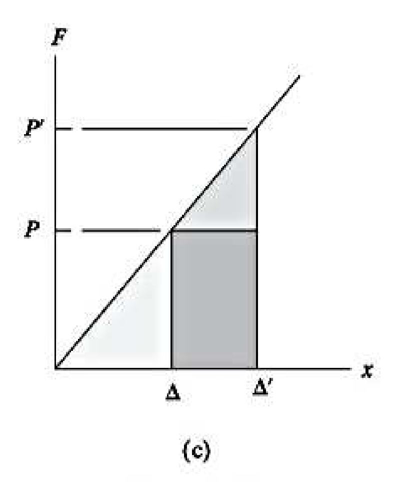


Figura 14-1

Trabajo de una fuerza. En mecánica, una fuerza realiza *trabajo* cuando experimenta un desplazamiento dx que tiene la *misma dirección* que la fuerza. El trabajo realizado es un escalar, se define como $dU_e = F dx$. Si el desplazamiento total es Δ, el trabajo se convierte en

$$U_e = \int_0^{\Delta} F\, dx \qquad (14\text{-}1)$$

Para mostrar cómo se aplica esta ecuación, se calculará el trabajo realizado por una fuerza axial aplicada al extremo de la barra mostrada en la figura 14-1*a*. A medida que la magnitud de la fuerza aumenta *gradualmente* desde cero hasta un valor límite $F = P$, el desplazamiento del extremo de la barra se convierte en Δ. Si el material se comporta de forma elástico lineal, entonces la fuerza será directamente proporcional al desplazamiento, es decir, $F = (P/\Delta)x$. Al sustituir en la ecuación 14-1 e integrar desde 0 hasta Δ, se obtiene

$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta \qquad (14\text{-}2)$$

Por lo tanto, a medida que la fuerza se aplica gradualmente a la barra, su magnitud se construye desde cero hasta un valor P y, en consecuencia, el trabajo realizado es igual a la *magnitud de la fuerza promedio*, $P/2$, multiplicada por el desplazamiento total Δ. Esto puede representarse gráficamente como el área de color gris claro en el triángulo inferior de la figura 14-1*c*.

Ahora suponga que **P** ya estaba aplicada a la barra y que en este momento se aplica *otra fuerza* **P′**, de modo que el extremo de la barra se desplaza *aún más* en una cantidad Δ', figura 14-1*b*. El trabajo realizado por **P′** es igual a la zona de color gris medio en el triángulo superior, pero ahora el trabajo realizado por **P** cuando la barra experimenta este desplazamiento adicional es

$$U_e' = P \Delta' \qquad (14\text{-}3)$$

Aquí, el trabajo representa el *área rectangular* en color gris oscuro de la figura 14-1*c*. En este caso **P** no cambia su magnitud, puesto que el desplazamiento Δ' de la barra es causado sólo por **P′**. Por lo tanto, el trabajo aquí es tan sólo la magnitud de la fuerza P multiplicada por el desplazamiento Δ'.

Trabajo de un momento de par. Un momento de par **M** realiza trabajo cuando experimenta un desplazamiento angular $d\theta$ a lo largo de su línea de acción. El trabajo se define como $dU_e = M\,d\theta$, figura 14-2. Si el desplazamiento angular total es de θ rad, el trabajo se convierte en

$$U_e = \int_0^{\theta} M\,d\theta \qquad (14\text{-}4)$$

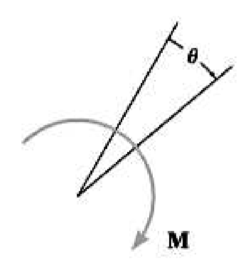


Figura 14-2

Al igual que en el caso de la fuerza, si el momento de par se aplica a un *cuerpo* de un material que tiene un comportamiento elástico lineal, de manera que su magnitud se incrementa gradualmente desde cero en $\theta = 0$ hasta M en θ, entonces el trabajo es

$$U_e = \frac{1}{2}M\theta \qquad (14\text{-}5)$$

Sin embargo, si el momento de par ya está aplicado al cuerpo y otras cargas hacen girar aún más al cuerpo una cantidad θ', entonces el trabajo es

$$U'_e = M\theta'$$

Energía de deformación. Cuando se aplican cargas a un cuerpo, éstas deforman el material. Siempre que no se pierda energía en forma de calor, el trabajo externo realizado por las cargas se convierte en trabajo interno llamado ***energía de deformación***. Esta energía, que *siempre es positiva*, se almacena en el cuerpo y es causada por la acción del esfuerzo normal o cortante.

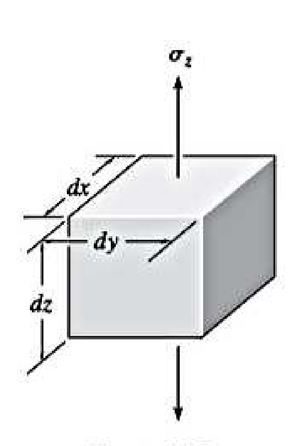


Figura 14-3

Esfuerzo normal. Si el elemento de volumen mostrado en la figura 14-3 se somete al esfuerzo normal σ_z, entonces la fuerza creada en las caras superior e inferior del elemento es de $dF_z = \sigma_z dA = \sigma_z dx\,dy$. Si esta fuerza se aplica gradualmente al elemento, como la fuerza **P** analizada previamente, su magnitud aumenta desde cero hasta dF_z, mientras que el elemento experimenta un alargamiento $d\Delta_z = \epsilon_z\,dz$. Por lo tanto, el trabajo realizado por dF_z es $dU_i = \frac{1}{2}dF_z\,d\Delta_z = \frac{1}{2}[\sigma_z\,dx\,dy]\epsilon_z\,dz$. Como el volumen del elemento es $dV = dx\,dy\,dz$, se tiene

$$dU_i = \frac{1}{2}\sigma_z\epsilon_z\,dV \qquad (14\text{-}6)$$

Tenga en cuenta que dU_i *siempre es positiva*, incluso si σ_z es de compresión, puesto que σ_z y ϵ_z siempre tendrán la misma dirección.

En general, si el cuerpo sólo está sometido a un *esfuerzo normal* σ, entonces la energía de deformación en el cuerpo es

$$U_i = \int_V \frac{\sigma\epsilon}{2}\,dV \qquad (14\text{-}7)$$

Por otra parte, si el material se comporta de forma elástico lineal, es posible aplicar la ley de Hooke y expresar la energía de deformación en términos del esfuerzo normal como

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV \quad (14\text{-}8)$$

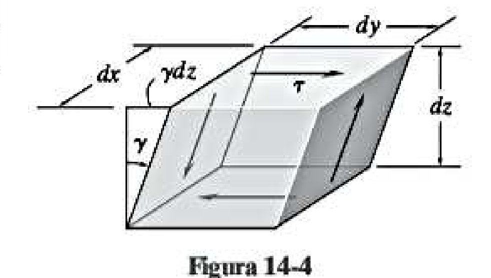


Figura 14-4

Esfuerzo cortante. También puede establecerse una expresión para la energía de deformación, similar a la del esfuerzo normal, cuando el material está sometido a un esfuerzo cortante. Considere el elemento de volumen mostrado en la figura 14-4. Aquí el esfuerzo cortante hace que el elemento se deforme de modo que sólo la fuerza cortante $dF = \tau(dx\,dy)$, que actúa sobre la cara superior del elemento, se desplaza $\gamma\, dz$ respecto a la cara inferior. Las *caras verticales* sólo giran, por lo que las fuerzas cortantes sobre estas caras no realizan ningún trabajo. Por consiguiente, la energía de deformación almacenada en el elemento es

$$dU_i = \frac{1}{2}[\tau(dx\,dy)]\gamma\, dz$$

o como $dV = dx\,dy\,dz$

$$dU_i = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dV \quad (14\text{-}9)$$

Entonces, la energía de deformación almacenada en el cuerpo es

$$U_i = \int_V \frac{\tau\gamma}{2} dV \quad (14\text{-}10)$$

Al igual que en el caso de la energía de deformación normal, la energía de deformación cortante siempre es positiva puesto que τ y γ siempre tienen la misma dirección. Si el material es elástico lineal, entonces al aplicar la ley de Hooke, $\gamma = \tau/G$, puede expresarse la energía de deformación en términos del esfuerzo cortante como

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (14\text{-}11)$$

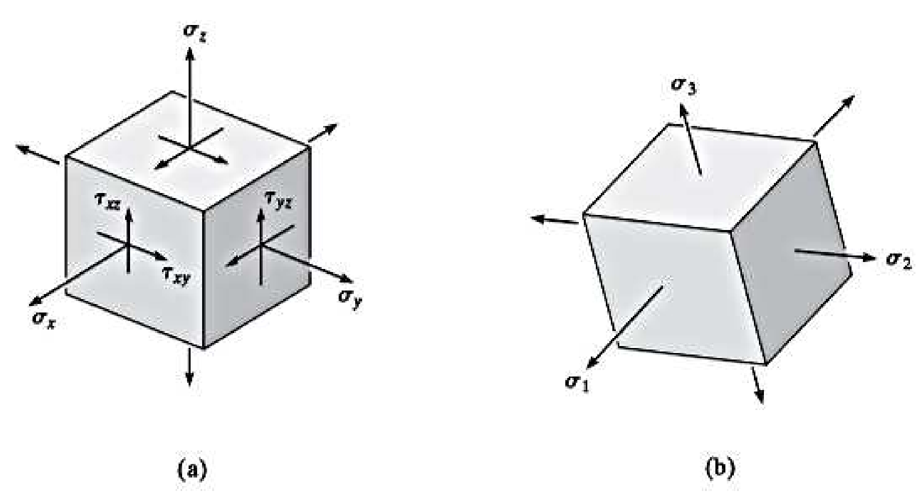


Figura 14-5

En la siguiente sección, se usarán las ecuaciones 14-8 y 14-11 para obtener las expresiones formales de la energía de deformación almacenada en los elementos sometidos a varios tipos de cargas. Una vez hecho esto, será posible desarrollar los métodos de energía necesarios para determinar el desplazamiento y la pendiente en los puntos de un cuerpo.

Esfuerzo multiaxial. El desarrollo anterior puede ampliarse para determinar la energía de deformación en un cuerpo cuando está sometido a un estado general de esfuerzo, figura 14-5*a*. Las energías de deformación asociadas a cada una de las componentes del esfuerzo normal y del esfuerzo cortante pueden obtenerse a partir de las ecuaciones 14-6 y 14-9. Como la energía es un escalar, la energía de deformación total en el cuerpo es

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\epsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\epsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz} \right] dV \qquad (14\text{-}12)$$

Las deformaciones pueden eliminarse usando la forma generalizada de la ley de Hooke dada por las ecuaciones 10-18 y 10-19. Después de sustituir y combinar términos, se tiene

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right) \right] dV \qquad (14\text{-}13)$$

Si sobre el elemento sólo actúan los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3, figura 14-5*b*, esta ecuación se reduce a una forma más simple, a saber,

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] dV \qquad (14\text{-}14)$$

Esta ecuación se usó en la sección 10.7 como base para el desarrollo de la teoría de la máxima energía de distorsión.

14.2 Energía de deformación elástica para diferentes tipos de carga

14

Si se usan las ecuaciones para la energía de deformación elástica desarrolladas en la sección anterior, es posible formular la energía de deformación almacenada en un elemento cuando está sometido a una carga axial, un momento flexionante, una fuerza cortante transversal y un momento de torsión. Se darán ejemplos para mostrar cómo se calcula la energía de deformación en los elementos sometidos a cada una de estas cargas.

Carga axial. Considere una barra de sección transversal variable ligeramente ahusada, figura 14-6. La *fuerza axial interna* en una sección situada a una distancia x de un extremo es N. Si el área transversal en esta sección es A, entonces el esfuerzo normal en la sección es $\sigma = N/A$. Al aplicar la ecuación 14-8, se tiene



Figura 14-6

$$U_i = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_V \frac{N^2}{2EA^2} dV$$

Si se elige un elemento o corte diferencial con un volumen $dV = A\,dx$, entonces la fórmula general para la energía de deformación en la barra es

$$U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx \tag{14-15}$$

Para el caso más común de una barra prismática de sección transversal constante A, longitud L y carga axial constante N, figura 14-7, al integrar la ecuación 14-15 se obtiene

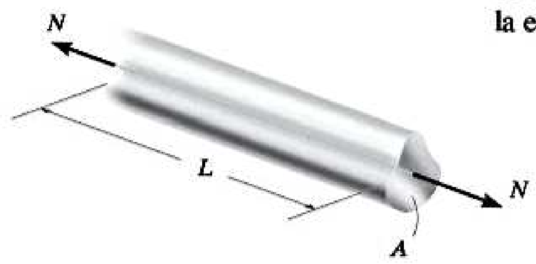


Figura 14-7

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} \tag{14-16}$$

Observe que la energía de deformación elástica de la barra se *incrementará* si la longitud de la barra es mayor, o si el módulo de elasticidad o el área transversal disminuyen. Por ejemplo, una barra de aluminio $[E_{al} = 10(10^3)$ ksi$]$ almacenará aproximadamente tres veces más energía que una barra de acero $[E_{ac} = 29(10^3)$ ksi$]$ con el mismo tamaño y sometida a la misma carga. Por otra parte, al duplicar el área de la sección transversal de una barra, disminuirá a la mitad su capacidad de almacenar energía. El siguiente ejemplo ilustra este punto en forma numérica.

EJEMPLO 14.1

Se debe elegir uno de los dos pernos de acero de alta resistencia *A* y *B* que se muestran en la figura 14-8 para soportar una carga de tensión repentina. Para la elección es necesario determinar la mayor cantidad de energía de deformación elástica que cada perno puede absorber. El perno *A* tiene un diámetro de 0.875 pulg en 2 pulg de su longitud y un diámetro raíz (o diámetro más pequeño) de 0.731 pulg en la región roscada de 0.25 pulg. El perno *B* tiene la rosca en "relieve" por lo que el diámetro en toda su longitud de 2.25 pulg puede tomarse como 0.731 pulg. En ambos casos, no tome en cuenta el material extra que forma las roscas. Considere $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 44$ ksi.

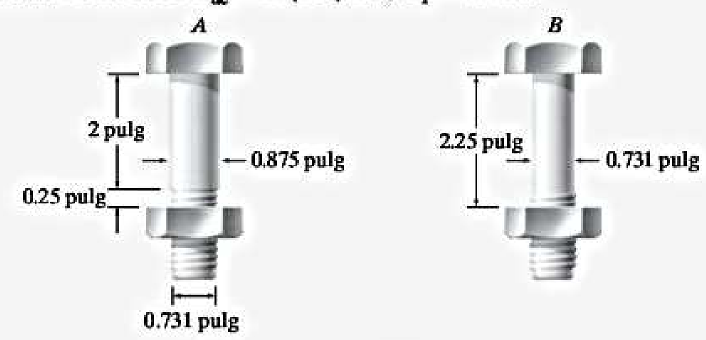


Figura 14-8

SOLUCIÓN

Perno *A*. Si el perno se somete a su tensión máxima, el esfuerzo máximo de $\sigma_Y = 44$ ksi se producirá dentro de la región de 0.25 pulg. Esta fuerza de tensión es

$$P_{máx} = \sigma_Y A = 44 \text{ ksi}\left[\pi\left(\frac{0.731 \text{ pulg}}{2}\right)^2\right] = 18.47 \text{ kip}$$

Al aplicar la ecuación 14-16 a cada región del perno, se tiene

$$U_i = \sum \frac{N^2 L}{2AE}$$

$$= \frac{(18.47 \text{ kip})^2(2 \text{ pulg})}{2[\pi(0.875 \text{ pulg}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]} + \frac{(18.47 \text{ kip})^2(0.25 \text{ pulg})}{2[\pi(0.731 \text{ pulg}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]}$$

$$= 0.0231 \text{ pulg}\cdot\text{kip} \qquad \textit{Resp.}$$

Perno *B*. Aquí se supone que el perno tiene un diámetro uniforme de 0.731 pulg a través de sus 2.25 pulg de longitud. Además, a partir del cálculo anterior, el perno puede soportar una fuerza de tensión máxima de $P_{máx} = 18.47$ kip. Por lo tanto,

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} = \frac{(18.47 \text{ kip})^2(2.25 \text{ pulg})}{2[\pi(0.731 \text{ pulg}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]} = 0.0315 \text{ pulg}\cdot\text{kip} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Por comparación, el perno *B* puede absorber 36 por ciento más energía elástica que el perno *A*, ya que tiene una sección transversal más pequeña a lo largo de su vástago.

Momento flexionante. Puesto que un momento flexionante aplicado a un elemento prismático recto desarrolla *esfuerzo normal* en el elemento, es posible usar la ecuación 14-8 para determinar la energía de deformación almacenada en éste debido a la flexión. Por ejemplo, considere la viga axisimétrica que se muestra en la figura 14-9. Aquí el momento interno es M, y el esfuerzo normal que actúa sobre el elemento arbitrario a una distancia y del eje neutro es $\sigma = My/I$. Si el volumen del elemento es $dV = dA\,dx$, donde dA es el área de su cara expuesta y dx es su longitud, la energía de deformación elástica de la viga es

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_V \frac{1}{2E}\left(\frac{My}{I}\right)^2 dA\,dx$$

o

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int_A y^2\,dA\right) dx$$

Si se observa que el área integral representa el momento de inercia del área respecto al eje neutro, el resultado final puede escribirse como

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}} \qquad (14\text{-}17)$$

Por lo tanto, para evaluar la energía de deformación, primero debe expresarse el momento interno en función de su posición x a lo largo de la viga, y después integrar sobre toda la longitud de la viga.* Los siguientes ejemplos ilustran este procedimiento.

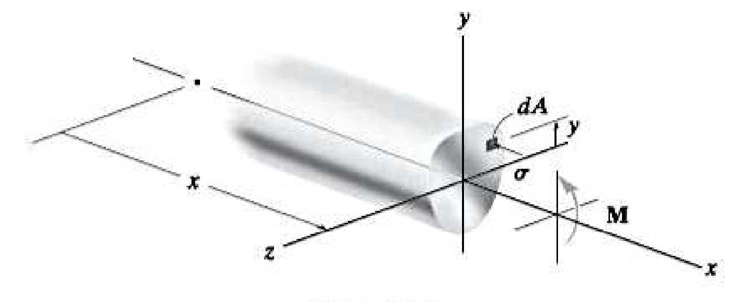
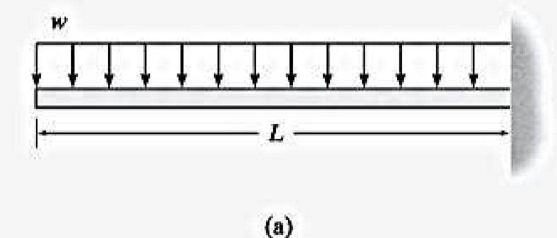


Figura 14-9

*Recuerde que la fórmula de la flexión, tal como se usó aquí, también puede emplearse con exactitud justificable para determinar el esfuerzo en vigas ligeramente ahusadas (vea la sección 6.4). Así, en un sentido general, I en la ecuación 14-17 también puede expresarse como una función de x.

EJEMPLO 14.2

Determine la energía de deformación elástica debida a la flexión de la viga en voladizo mostrada en la figura 14-10*a*. EI es constante.

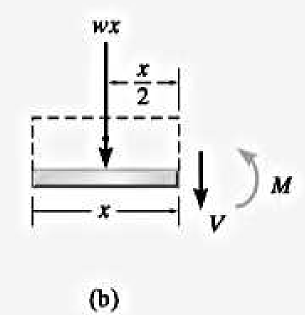


(a)

Figura 14-10

SOLUCIÓN

El momento interno en la viga se determina al establecer la coordenada x, con origen en el lado izquierdo. El segmento izquierdo de la viga se muestra en la figura 14-10*b*. Se tiene



(b)

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M = -w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Al aplicar la ecuación 14-17 resulta

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[-w(x^2/2)]^2\,dx}{2EI} = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4\,dx$$

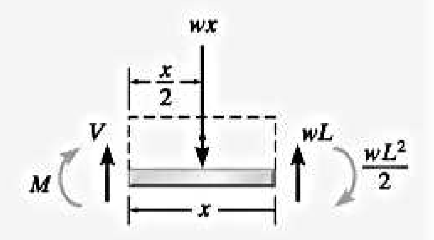
o bien

$$U_i = \frac{w^2L^5}{40EI} \qquad \textit{Resp.}$$

También es posible obtener la energía de deformación usando una coordenada x que tenga su origen en el lado derecho de la viga y se extienda positiva hacia la izquierda, figura 14-10*c*. En este caso,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \quad -M - wx\left(\frac{x}{2}\right) + wL(x) - \frac{wL^2}{2} = 0$$

$$M = -\frac{wL^2}{2} + wLx - w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$



(c)

Al aplicar la ecuación 14-17 se obtiene el mismo resultado anterior; sin embargo, este método implica una mayor cantidad de cálculos.

EJEMPLO 14.3

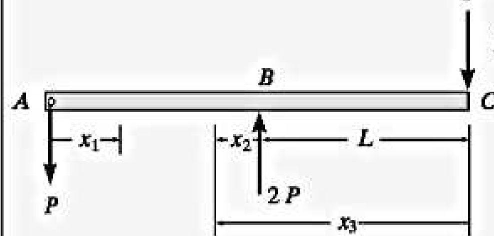
Determine la energía de deformación flexionante en la región AB de la viga mostrada en la figura 14-11a. EI es constante.

(a)

SOLUCIÓN

En la figura 14-11b se muestra un diagrama de cuerpo libre de la viga. Para obtener la respuesta se puede expresar el momento interno en términos de cualquiera de las tres coordenadas "x" indicadas para después aplicar la ecuación 14-17. A continuación se considerará cada una de estas soluciones.

$0 \leq x_1 \leq L$. A partir del diagrama de cuerpo libre de la sección en la figura 14-11c, se tiene



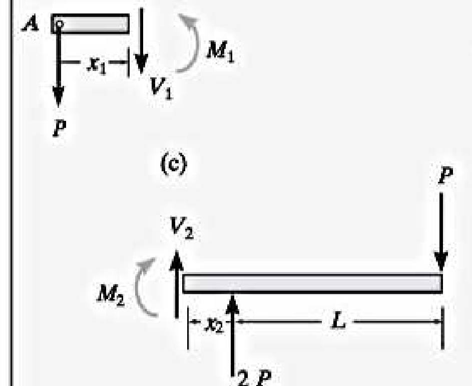
(b)

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M_1 + Px_1 = 0$$

$$M_1 = -Px_1$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px_1)^2\,dx_1}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resp.}$$

$0 \leq x_2 \leq L$. Si se usa el diagrama de cuerpo libre de la sección en la figura 14-11d, resulta



(d)

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad -M_2 + 2P(x_2) - P(x_2 + L) = 0$$

$$M_2 = P(x_2 - L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[P(x_2 - L)]^2\,dx_2}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resp.}$$

$L \leq x_3 \leq 2L$. A partir del diagrama de cuerpo libre en la figura 14-11e, se tiene

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad -M_3 + 2P(x_3 - L) - P(x_3) = 0$$

$$M_3 = P(x_3 - 2L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_L^{2L} \frac{[P(x_3 - 2L)]^2\,dx_3}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resp.}$$

(e)

Figura 14-11

NOTA: Este ejemplo y el anterior indican que la energía de deformación de la viga puede encontrarse usando *cualquier* coordenada x propicia. Sólo es necesario integrar sobre el rango de la coordenada donde debe determinarse la energía interna. Aquí la elección de x_1 proporciona la solución más simple.

Cortante transversal. La energía de deformación debida al esfuerzo cortante en un elemento de viga puede determinarse al aplicar la ecuación 14-11. Aquí se considerará que la viga es prismática y tiene un eje de simetría alrededor del eje y, como se muestra en la figura 14-12. Si la fuerza cortante interna en la sección de x es V, entonces el esfuerzo cortante que actúa sobre el elemento de volumen del material, que tiene un área dA y una longitud dx, es $\tau = VQ/It$. Al sustituir en la ecuación 14-11, la energía de deformación para la fuerza cortante se convierte en

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{1}{2G}\left(\frac{VQ}{It}\right)^2 dA\, dx$$

$$U_i = \int_0^L \frac{V^2}{2GI^2}\left(\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA\right) dx$$

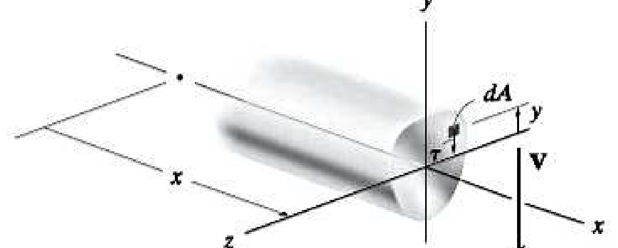


Figura 14-12

La integral entre paréntesis puede simplificarse si se define el *factor de forma* para la cortante como

$$f_s = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA \tag{14-18}$$

Al sustituir en la ecuación anterior, se obtiene

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{f_s V^2\, dx}{2GA}} \tag{14-19}$$

El factor de forma definido por la ecuación 14-18 es un número adimensional que es único para cada área específica de sección transversal. Por ejemplo, si la viga tiene una sección rectangular de ancho b y altura h, figura 14-13, entonces,

$$t = b$$
$$dA = b\,dy$$
$$I = \frac{1}{12}bh^3$$
$$Q = \bar{y}'A' = \left(y + \frac{(h/2) - y}{2}\right)b\left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

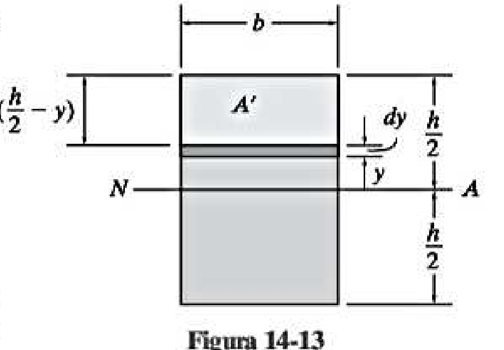


Figura 14-13

Si se sustituyen estos términos en la ecuación 14-18, resulta

$$f_s = \frac{bh}{(\frac{1}{12}bh^3)^2}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{b^2}{4b^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 b\,dy = \frac{6}{5} \tag{14-20}$$

El factor de forma para otras secciones puede determinarse de una manera similar. Una vez obtenido, este factor se sustituye en la ecuación 14-19 y así puede evaluarse la energía de deformación para la cortante transversal.

14

EJEMPLO 14.4

Determine la energía de deformación en la viga en voladizo debida a la fuerza cortante si la viga tiene una sección transversal cuadrada y se somete a una carga uniforme distribuida w, figura 14-14a. EI y G son constantes.

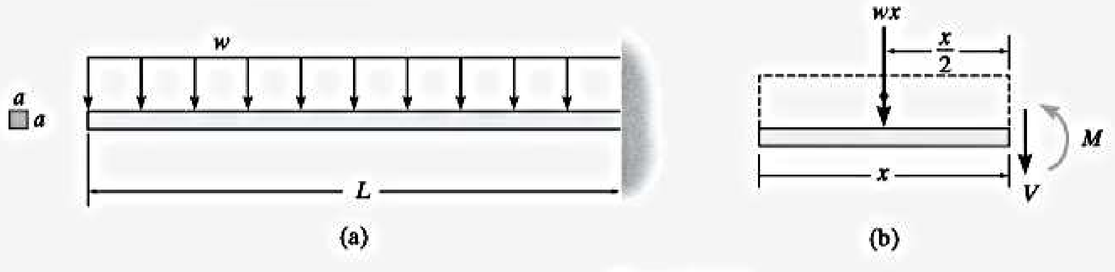


Figura 14-14

SOLUCIÓN

A partir del diagrama de cuerpo libre de una sección arbitraria, figura 14-14b, se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -V - wx = 0$$

$$V = -wx$$

Como la sección transversal es cuadrada, el factor de forma $f_s = \frac{6}{5}$ (ecuación 14-20) y, por lo tanto, la ecuación 14-19 se convierte en

$$(U_i)_s = \int_0^L \frac{\frac{6}{5}(-wx)^2\,dx}{2GA} = \frac{3w^2}{5GA}\int_0^L x^2\,dx$$

o bien

$$(U_i)_s = \frac{w^2L^3}{5GA} \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: Si se usan los resultados del ejemplo 14.2, con $A = a^2, I = \frac{1}{12}a^4$, la relación de fuerza cortante sobre energía de deformación es

$$\frac{(U_i)_s}{(U_i)_b} = \frac{w^2L^3/5Ga^2}{w^2L^5/40E\left(\frac{1}{12}a^4\right)} = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{L}\right)^2\frac{E}{G}$$

Dado que $G = E/2(1+\nu)$ y $\nu \leq \frac{1}{2}$ (sección 10.6), entonces, como un límite *superior*, $E = 3G$, por lo que

$$\frac{(U_i)_s}{(U_i)_b} = 2\left(\frac{a}{L}\right)^2$$

Se puede observar que esta relación aumentará a medida que disminuya L. Sin embargo, incluso para vigas muy cortas, donde por ejemplo $L = 5a$, la contribución debida a la energía de deformación cortante es sólo el 8 por ciento de la energía de deformación flexionante. Por esta razón, la energía de deformación cortante almacenada en las vigas suele pasarse por alto en el análisis de ingeniería.

Momento de torsión. Para determinar la energía de deformación interna en un eje circular o tubo, debida a un momento de torsión aplicado, es necesario aplicar la ecuación 14-11. Considere el eje ligeramente ahusado de la figura 14-15. Una sección del eje tomada una distancia x de un extremo se somete a un par de torsión interno T. La distribución del esfuerzo cortante que ocasiona este par varía linealmente desde el centro del eje. En el elemento arbitrario de área dA y longitud dx, el esfuerzo es $\tau = T\rho/J$. Por lo tanto, la energía de deformación almacenada en el eje es

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{1}{2G}\left(\frac{T\rho}{J}\right)^2 dA\, dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int_A \rho^2\, dA\right) dx$$

Como la integral del área representa el momento polar de inercia J para el eje en la sección, el resultado final puede escribirse como

$$U_i = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \qquad (14\text{-}21)$$

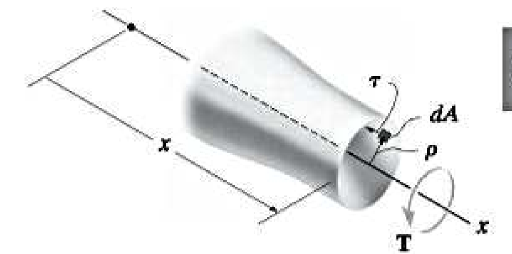


Figura 14-15

El caso más común se produce cuando el eje (o tubo) tiene un área transversal constante y el par de torsión aplicado es constante, figura 14-16. En ese caso, al integrar la ecuación 14-21 resulta

$$U_i = \frac{T^2 L}{2GJ} \qquad (14\text{-}22)$$

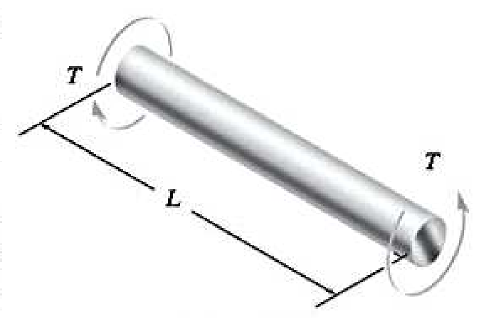


Figura 14-16

A partir de esta ecuación se puede concluir que, al igual que en un elemento cargado axialmente, la capacidad de absorción de energía de un eje cargado a torsión se *reduce* al aumentar el diámetro del eje, ya que esto aumenta a J.

Puntos importantes

- Una *fuerza* realiza trabajo cuando se mueve a través de un *desplazamiento*. Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo y su magnitud se incrementa gradualmente desde cero hasta F, el trabajo es $U = (F/2)\,\Delta$, mientras que si la fuerza es constante cuando ocurre el desplazamiento, entonces $U = F\Delta$.
- Un *momento de par* realiza trabajo cuando se desplaza a través de una *rotación*.
- La *energía de deformación* es causada por el trabajo interno de los esfuerzos normales y cortantes. Siempre es una cantidad *positiva*.
- La energía de deformación puede relacionarse con las cargas resultantes internas N, V, M y T.
- A medida que la viga se hace más larga, la energía de deformación debida a la flexión se vuelve mucho mayor que la energía de deformación debida al cortante. Por esta razón, la *energía de deformación cortante* en vigas puede *pasarse por alto* en la mayor parte de los casos.

El siguiente ejemplo ilustra cómo determinar la energía de deformación de un eje circular debida a una carga de torsión.

14

EJEMPLO 14.5

El eje tubular de la figura 14-17*a* está fijo en la pared y se somete a dos pares de torsión como se muestra en la figura. Determine la energía de deformación almacenada en el eje debida a esta carga. $G = 75$ GPa.

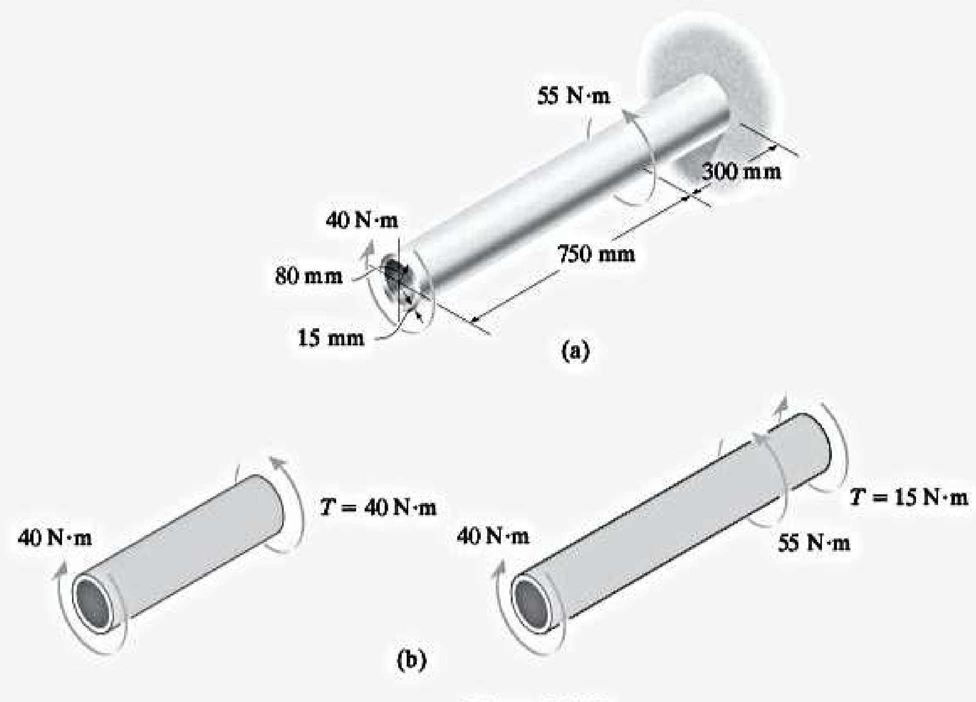


Figura 14-17

SOLUCIÓN

Si se emplea el método de las secciones, el par de torsión interno se determina primero dentro de las dos regiones del eje donde es constante, figura 14-17*b*. Aunque estos pares de torsión (40 N · m y 15 N · m) tienen direcciones opuestas, esto no tendrá ninguna consecuencia en la determinación de la energía de deformación, ya que el par de torsión se eleva al cuadrado en la ecuación 14-22. En otras palabras, la energía de deformación siempre es positiva. El momento polar de inercia para el eje es

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.08\text{ m})^4 - (0.065\text{ m})^4] = 36.30(10^{-6})\text{ m}^4$$

Al aplicar la ecuación 14-22, se tiene

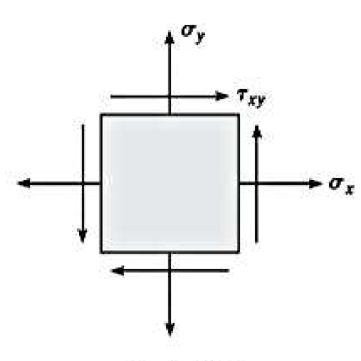
$$U_i = \sum \frac{T^2L}{2GJ}$$

$$= \frac{(40\text{ N}\cdot\text{m})^2(0.750\text{ m})}{2[75(10^9)\text{ N/m}^2]36.30(10^{-6})\text{ m}^4} + \frac{(15\text{ N}\cdot\text{m})^2(0.300\text{ m})}{2[75(10^9)\text{ N/m}^2]36.30(10^{-6})\text{ m}^4}$$

$$= 233\ \mu\text{J}$$ *Resp.*

PROBLEMAS

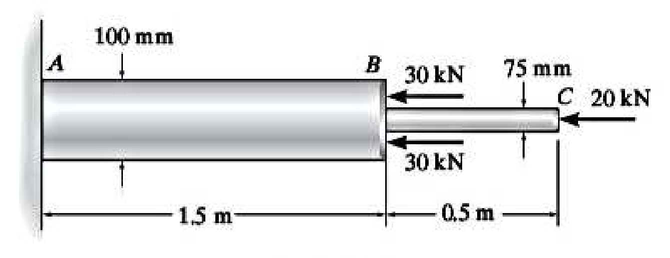
14-1. Un material está sometido a un estado general de esfuerzo plano. Exprese la densidad de la energía de deformación en términos de las constantes elásticas E, G y ν, y las componentes de esfuerzo σ_x, σ_y y τ_{xy}.



Prob. 14-1

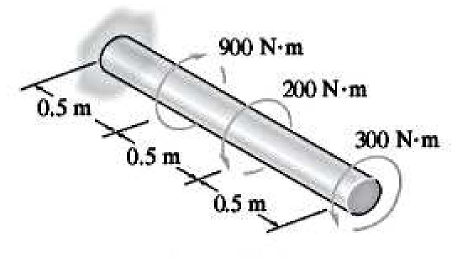
14-2. La densidad de la energía de deformación debe ser la misma si el estado de esfuerzo se representa mediante σ_x, σ_y y τ_{xy}, o por medio de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2. Para mostrar esto, iguale las expresiones para la energía de deformación en cada uno de estos dos casos y demuestre que $G = E/[2(1 + \nu)]$.

14-3. Determine la energía de deformación en el ensamble de barras escalonadas. La porción AB es de acero (ac) y la parte BC es de latón (br). $E_{br} = 101$ GPa, $E_{ac} = 200$ GPa, $(\sigma_Y)_{br} = 410$ MPa, $(\sigma_Y)_{ac} = 250$ MPa.



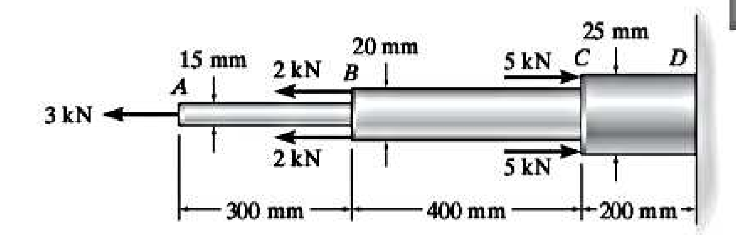
Prob. 14-3

***14-4.** Determine la energía de deformación de torsión en el eje de acero A-36. El eje tiene un diámetro de 40 mm.



Prob. 14-4

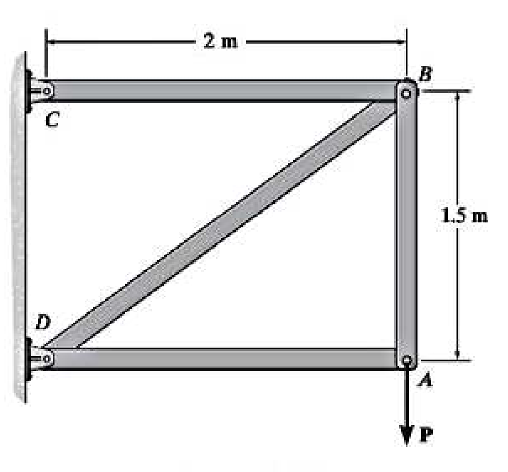
•14-5. Determine la energía de deformación en el ensamble de barras. La porción AB es de acero, la parte BC es de latón y CD es de aluminio. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{br} = 101$ GPa, $E_{br} = 73.1$ GPa, respectivamente.



Prob. 14-5

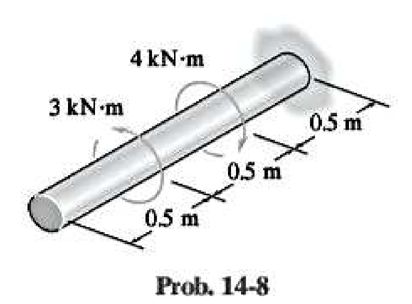
14-6. Si $P = 60$ kN, determine la energía de deformación total almacenada en la armadura. Cada elemento tiene un área en su sección transversal de $2.5(10^3)$ mm^2 y está fabricado de acero A-36.

14-7. Determine la máxima fuerza **P** y la energía correspondiente de deformación máxima total almacenada en la armadura sin que ninguno de los elementos tenga una deformación permanente. Cada elemento tiene un área en su sección transversal de $2.5(10^3)$ mm^2 y está fabricado de acero A-36.



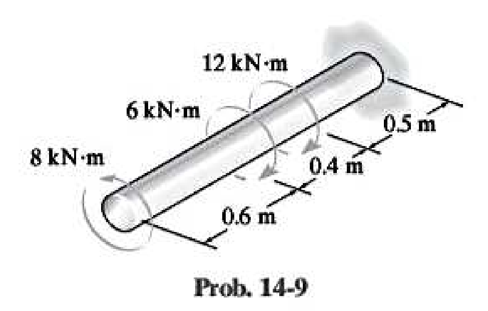
Probs. 14-6/7

*14-8. Determine la energía de deformación de torsión en el eje de acero A-36. El eje tiene un radio de 30 mm.



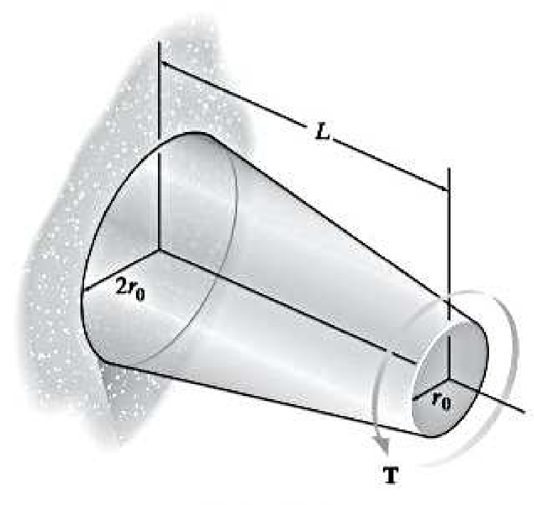
Prob. 14-8

•14-9. Determine la energía de deformación de torsión en el eje de acero A-36. El eje tiene un radio de 40 mm.



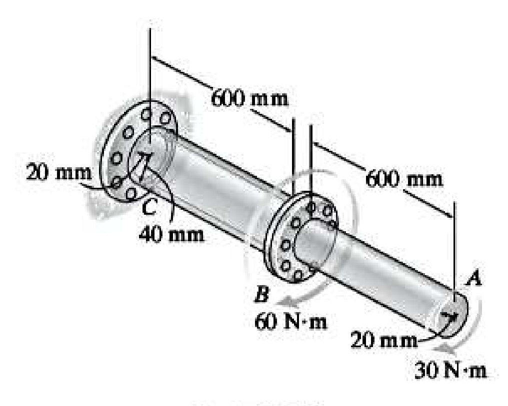
Prob. 14-9

14-10. Determine la energía de deformación de torsión almacenada en la barra ahusada cuando se somete al par de torsión **T**. La barra está hecha de un material que tiene un módulo de rigidez de G.



Prob. 14-10

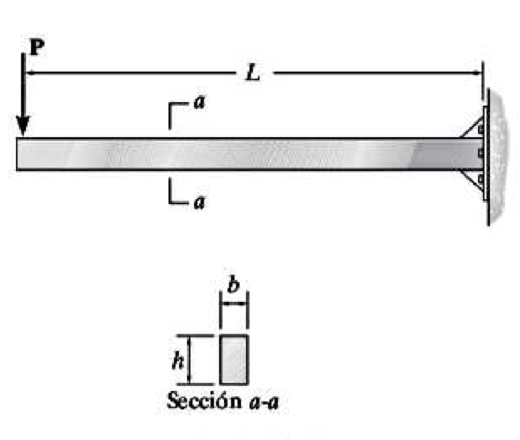
14-11. El ensamble de ejes está fijo en C. El segmento hueco BC tiene un radio interior de 20 mm y un radio exterior de 40 mm, mientras que el segmento sólido AB tiene un radio de 20 mm. Determine la energía de deformación de torsión almacenada en el eje. El eje está hecho de una aleación de aluminio 2014-T6. El acoplamiento en B es rígido.



Prob. 14-11

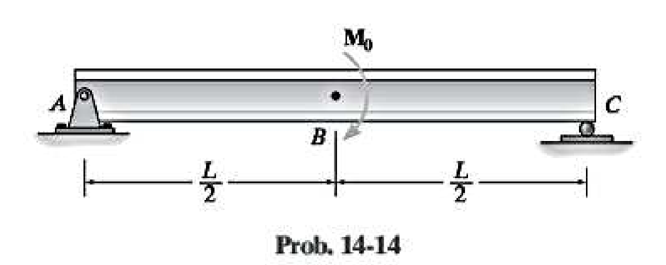
*14-12. Considere el tubo de pared delgada de la figura 5-28. Use la fórmula para el esfuerzo cortante, $\tau_{prom} = T/2tA_m$, ecuación 5-18, y la ecuación general de la energía de deformación cortante, ecuación 14-11, para mostrar que el giro del tubo está dado por la ecuación 5-20. *Sugerencia:* Iguale el trabajo realizado por el par de torsión T con la energía de deformación en el tubo, determinada mediante la integración de la energía de deformación para un elemento diferencial, figura 14-4, sobre el volumen del material.

•14-13. Determine la relación de la energía de deformación cortante sobre la energía de deformación flexionante para la viga rectangular en voladizo cuando se somete a la carga mostrada en la figura. El material tiene un módulo de elasticidad E y una relación de Poisson ν.



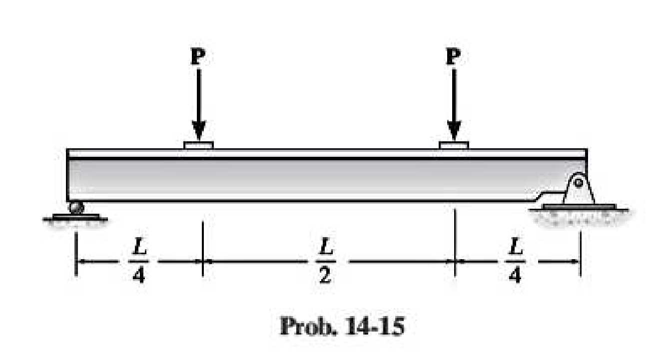
Prob. 14-13

14-14. Determine la energía de deformación flexionante en la viga, debida a la carga mostrada. EI es constante.



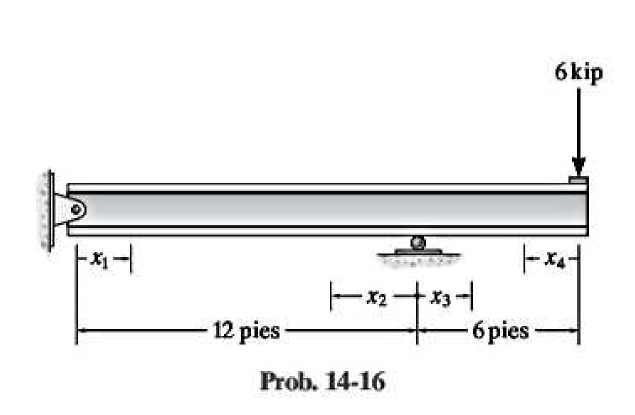
Prob. 14-14

14-15. Determine la energía de deformación flexionante en la viga. EI es constante.



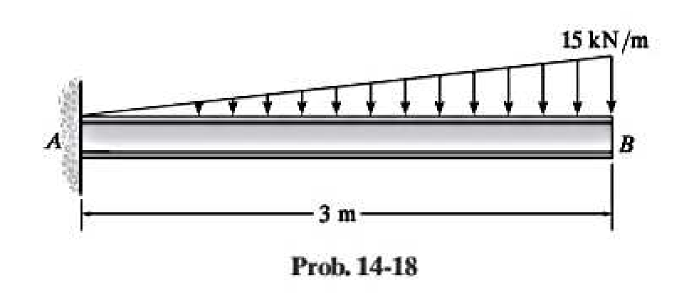
Prob. 14-15

***14-16.** Determine la energía de deformación flexionante en la viga W10 × 12 de acero estructural A-36. Obtenga la respuesta usando las coordenadas (a) x_1 y x_4 y (b) x_2 y x_3.



Prob. 14-16

•14-17. Determine la energía de deformación flexionante en la viga de acero A-36. $I = 99.2(10^6)$ mm^4.



Prob. 14-17

14-18. Determine la energía de deformación flexionante en la viga de acero A-36 debida a la carga distribuida. $I = 122(10^6)$ mm^4.

15 kN/m

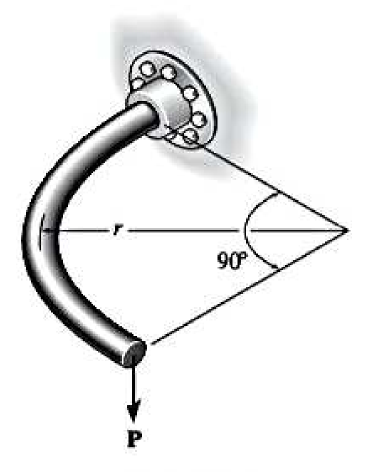
A

B

3 m

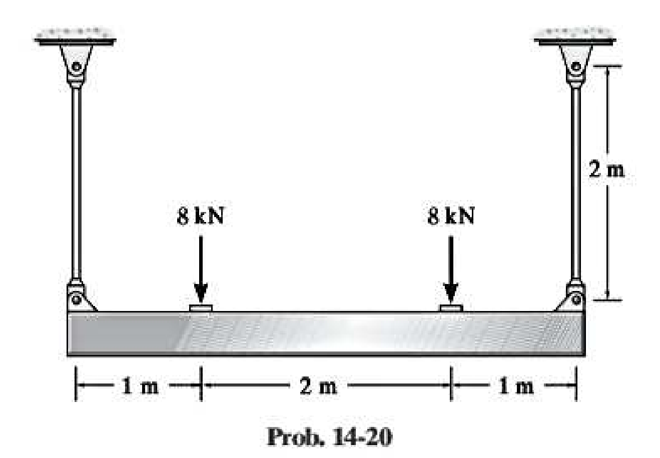
Prob. 14-18

14-19. Determine la energía de deformación en la barra curva *horizontal* debida a la torsión. Existe una fuerza *vertical* **P** que actúa en su extremo. JG es constante.



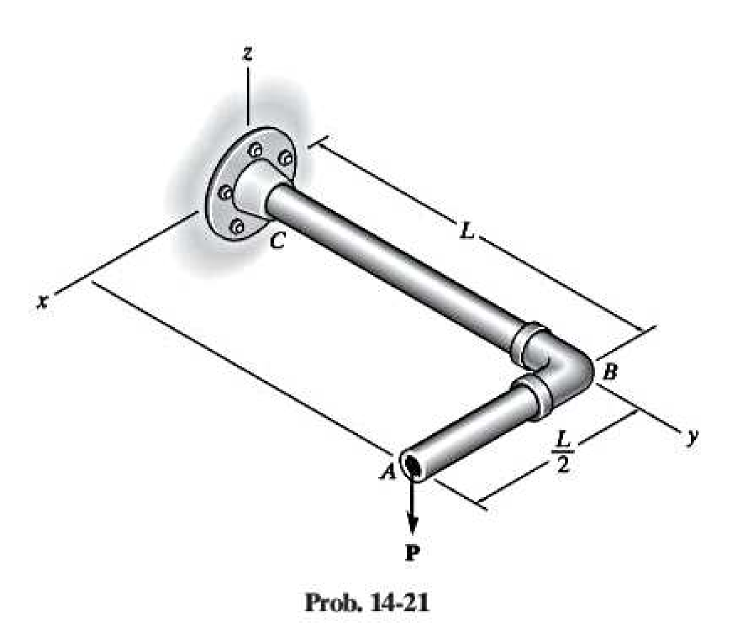
Prob. 14-19

*14-20. Determine la energía de deformación flexionante en la viga y la energía de deformación axial en cada una de las dos barras. La viga está fabricada de aluminio 2014-T6 y tiene una sección transversal cuadrada de 50 mm por 50 mm. Las barras están fabricadas de acero A-36 y tiene una sección transversal circular con un diámetro de 20 mm.



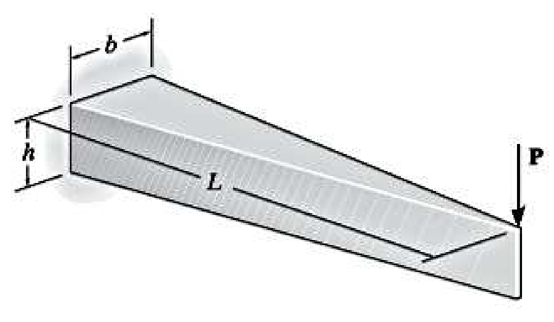
Prob. 14-20

•14-21. La tubería se encuentra en el plano horizontal. Si se somete a una fuerza vertical **P** en su extremo, determine la energía de deformación debida a la flexión y a la torsión. Exprese los resultados en términos de las propiedades I y J de la sección transversal, y de las propiedades E y G del material.



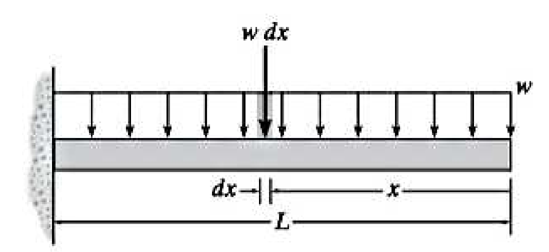
Prob. 14-21

14-22. La viga que se muestra en la figura está ahusada en toda su anchura. Si se aplica una fuerza **P** en su extremo, determine la energía de deformación en la viga y compare este resultado con el de una viga que tenga una sección transversal rectangular constante con anchura b y altura h.



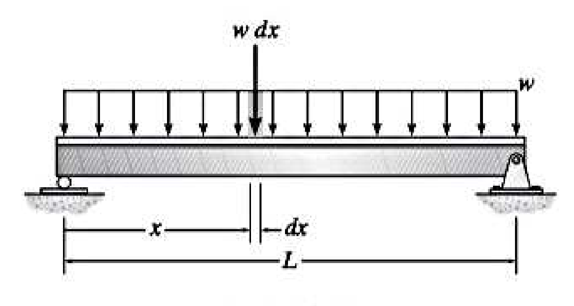
Prob. 14-22

14-23. Determine la energía de deformación flexionante en la viga en voladizo, debida a una carga uniforme w. Resuelva el problema de dos maneras. (a) Aplique la ecuación 14-17. (b) La carga $w\,dx$ que actúa sobre un segmento dx de la viga se desplaza una distancia y, donde $y = w(-x^4 + 4L^3x - 3L^4)/(24EI)$, la ecuación de la curva elástica. De ahí, la energía de deformación interna en el segmento diferencial dx de la viga es igual al trabajo externo, es decir, $dU_i = \frac{1}{2}(w\,dx)(-y)$. Integre esta ecuación para obtener la energía de deformación total en la viga. EI es constante.



Prob. 14-23

*14-24. Determine la energía de deformación flexionante en la viga simplemente apoyada, debida a una carga uniforme w. Resuelva el problema de dos maneras. (a) Aplique la ecuación 14-17. (b) La carga $w\,dx$ que actúa sobre un segmento dx de la viga se desplaza una distancia y, donde $y = w(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x)/(24EI)$, la ecuación de la curva elástica. Por lo tanto, la energía de deformación interna en el segmento diferencial dx de la viga es igual al trabajo externo, es decir, $dU_i = \frac{1}{2}(w\,dx)(-y)$. Integre esta ecuación para obtener la energía de deformación total en la viga. EI es constante.



Prob. 14-24

14.3 Conservación de la energía

Todos los métodos de energía usados en la mecánica se basan en el equilibrio de la energía, a menudo se conoce como conservación de la energía. En este capítulo, sólo se considerará la energía mecánica en el equilibrio de la energía; es decir, la energía desarrollada por el calor, las reacciones químicas y los efectos electromagnéticos no se tomarán en cuenta. Como resultado, si una carga se aplica *lentamente* a un cuerpo, entonces físicamente las cargas externas tienden a deformarlo de modo que las cargas realizan *trabajo externo* U_e a medida que se desplazan. Este trabajo externo sobre el cuerpo se transforma en *trabajo interno* o energía de deformación U_i, que se almacena en el cuerpo. Además, cuando se retiran las cargas, la energía de deformación restaura al cuerpo en su posición original sin sufrir deformación, siempre y cuando no se supere el límite elástico del material. Por lo tanto, la conservación de la energía para el cuerpo puede establecerse de manera matemática como

$$\boxed{U_e = U_i} \qquad (14\text{-}23)$$

A continuación se mostrarán tres ejemplos de cómo puede aplicarse esta ecuación para determinar el desplazamiento de un punto en un elemento o una estructura deformable. En el primer ejemplo, considere la armadura de la figura 14-18 sometida a la carga **P**. Siempre que **P** se aplique gradualmente, el trabajo externo realizado por **P** se determina a partir de la ecuación 14-2, es decir, $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$, donde Δ es el desplazamiento vertical de la armadura en la junta donde se aplica **P**. Si se supone que **P** desarrolla una fuerza axial **N** en un elemento particular, la energía de deformación almacenada en este elemento se determina a partir de la ecuación 14-16, esto es, $U_i = N^2L/2AE$. Al sumar las energías de deformación para todos los elementos de la armadura, es posible escribir la ecuación 14-23 como

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE} \qquad (14\text{-}24)$$

Una vez que se determinan las fuerzas internas (N) en todos los elementos de la armadura y se calculan los términos a la derecha, entonces es posible determinar el desplazamiento desconocido Δ.

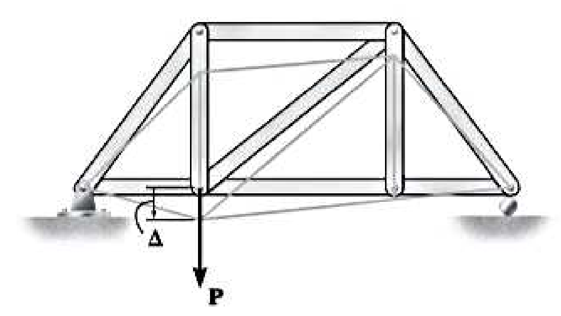


Figura 4-18

Como segundo ejemplo, considere la determinación del desplazamiento vertical Δ bajo la carga **P** que actúan sobre la viga de la figura 14-19. Una vez más, el trabajo externo es $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$. En este caso la energía de deformación es el resultado de las cargas de fuerza cortante y de momento causadas por **P**. En particular, la contribución de la energía de deformación debida a la fuerza cortante suele *pasarse por alto* en la mayoría de los problemas de deflexión a menos que la viga sea corta y soporte una carga muy grande (vea el ejemplo 14.4). En consecuencia, la energía de transformación de la viga se determinará sólo mediante el momento interno flexionante M; por lo tanto, con base en la ecuación 14-17, la ecuación 14-23 puede escribirse simbólicamente como

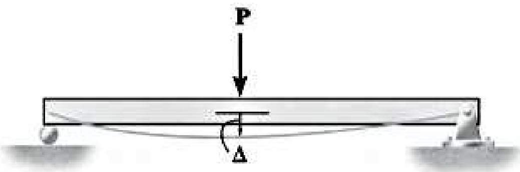


Figura 14-19

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \qquad (14\text{-}25)$$

Una vez que M se expresa como una función de la posición x y que la integral se evalúa, es posible determinar Δ.

En el último ejemplo, se considerará una viga cargada mediante un momento de par $\mathbf{M}_0$ como se muestra en la figura 14-20. Este momento causa el desplazamiento de rotación θ en el punto en que se aplica el momento de par. Como el momento de par sólo realiza trabajo al *girar*, si usa la ecuación 14-5, el trabajo externo es $U_e = \frac{1}{2}M_0\theta$. Por lo tanto, la ecuación 14.23 se convierte en

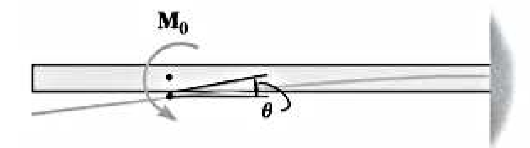


Figura 14-20

$$\frac{1}{2}M_0\theta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \qquad (14\text{-}26)$$

Aquí la energía de deformación es el resultado del momento flexionante interno M provocado por la aplicación del momento de par $\mathbf{M}_0$. Una vez que M se ha expresado como una función de x y la energía de deformación se ha evaluado, entonces es posible determinar θ que mide la pendiente de la curva elástica.

En cada uno de los ejemplos anteriores, debe tenerse en cuenta que la aplicación de la ecuación 14-23 está *bastante limitada*, porque sobre el elemento o la estructura sólo debe actuar *una* fuerza externa o un momento de par. Además, el desplazamiento se puede calcular *solamente* en la dirección de la fuerza externa o del momento de par. Si se aplica más de una fuerza externa o momento de par, el trabajo externo de cada carga implicaría su desplazamiento asociado desconocido. Como resultado, no sería posible determinar *todos* estos desplazamientos desconocidos, ya que sólo está disponible la ecuación 14-23 para obtener la solución. Aunque la aplicación de la conservación de la energía tal como se describe aquí tiene ciertas restricciones, sirve como una introducción a los métodos de energía más generales que se considerarán en el resto de este capítulo.

EJEMPLO 14.6

La armadura de tres barras que se muestra en la figura 14-21*a* está sometida a una fuerza horizontal de 5 kip. Si la sección transversal de cada elemento es de 0.20 pulg², determine el desplazamiento horizontal en el punto *B*. $E = 29(10^3)$ ksi.

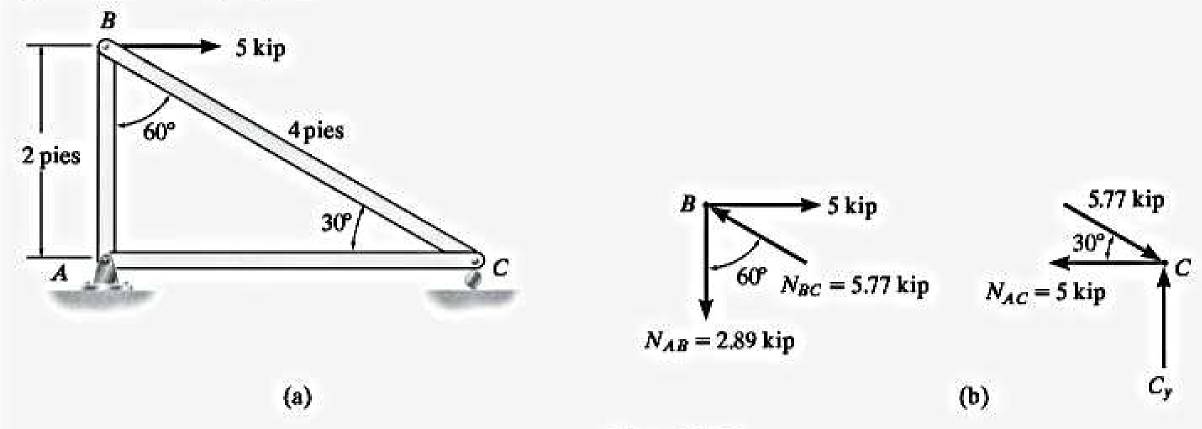


Figura 14-21

SOLUCIÓN

Para resolver este problema puede aplicarse la conservación de la energía, ya que sobre la armadura sólo actúa *una* fuerza externa y el desplazamiento requerido tiene la *misma dirección* que la fuerza. Por otra parte, las fuerzas de reacción sobre la armadura no realizarán ningún trabajo, puesto que no se desplazan.

Si se usa el método de nodos, la fuerza en cada elemento se determina como se muestra en los diagramas de cuerpo libre de los pasadores en *B* y *C*, figura 14-21*b*.

Al aplicar ecuación 14-24, se tiene

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE}$$

$$\frac{1}{2}(5\text{ kip})(\Delta_B)_h = \frac{(2.89\text{ kip})^2(2\text{ pies})}{2AE} + \frac{(-5.77\text{ kip})^2(4\text{ pies})}{2AE} + \frac{(5\text{ kip})^2(3.46\text{ pies})}{2AE}$$

$$(\Delta_B)_h = \frac{47.32\text{ kip}\cdot\text{pie}}{AE}$$

Observe que como *N* se eleva al cuadrado, no importa si un elemento en particular está en tensión o en compresión. Al sustituir en los datos numéricos de *A* y *E*, y al resolver, se obtiene

$$(\Delta_B)_h = \frac{47.32\text{ kip}\cdot\text{pie}(12\text{ pulg/pie})}{(0.2\text{ pulg}^2)[29(10^3)\text{ kip/pulg}^2]}$$

$$= 0.0979\text{ pulg} \rightarrow$$ *Resp.*

EJEMPLO 14.7

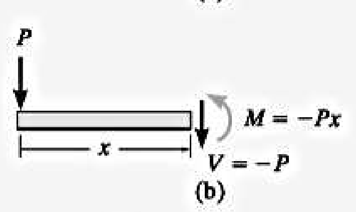


Figura 14-22

La viga en voladizo de la figura 14-22*a* tiene una sección transversal rectangular y está sometida a una carga **P** en su extremo. Determine el desplazamiento de la carga. *EI* es constante.

SOLUCIÓN

La fuerza cortante interna y el momento interno en la viga como funciones de x se determinan mediante el método de las secciones, figura 14-22*b*.

Al aplicar la ecuación 14-23 se considerará la energía de deformación debida tanto al cortante como a la flexión. Si se usan las ecuaciones 14-19 y 14-17, se tiene

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{f_s V^2\,dx}{2GA} + \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

$$= \int_0^L \frac{\left(\frac{6}{5}\right)(-P)^2\,dx}{2GA} + \int_0^L \frac{(-Px)^2\,dx}{2EI} = \frac{3P^2L}{5GA} + \frac{P^2L^3}{6EI} \quad (1)$$

El primer término en el lado derecho de esta ecuación representa la energía de deformación debida a la fuerza cortante, mientras que el segundo es la energía de deformación debida a la flexión. Como se indica en el ejemplo 14.4, para la mayoría de las vigas la energía de deformación cortante es mucho menor que la energía de deformación flexionante. Para mostrar que éste es el caso de la viga en la figura 14-22*a*, se requiere

$$\frac{3}{5}\frac{P^2L}{GA} \ll \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$\frac{3}{5}\frac{P^2L}{G(bh)} \ll \frac{P^2L^3}{6E\left[\frac{1}{12}(bh^3)\right]}$$

$$\frac{3}{5G} \ll \frac{2L^2}{Eh^2}$$

Como $E \leq 3G$ (vea el ejemplo 14.4), entonces

$$0.9 \ll \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

Por lo tanto, si L es relativamente largo en comparación con h, la viga se vuelve esbelta y la energía de deformación cortante puede pasarse por alto. En otras palabras, la *energía de deformación cortante* se vuelve importante *sólo* para *vigas cortas y de gran peralte*. Por ejemplo, las vigas para las que $L = 5h$ tienen aproximadamente 28 veces más energía de deformación flexionante que energía de deformación cortante, por lo que al no tomar en cuenta la energía de deformación cortante se incurre en un error de alrededor de 3.6 por ciento. Con esto en mente, la ecuación 1 puede simplificarse como

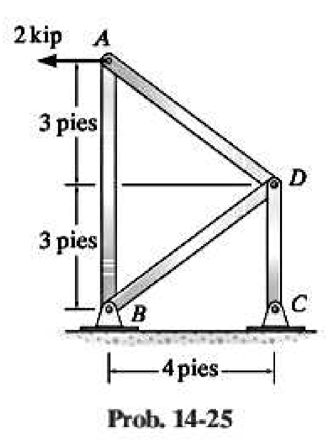
$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

de manera que

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \textit{Resp.}$$

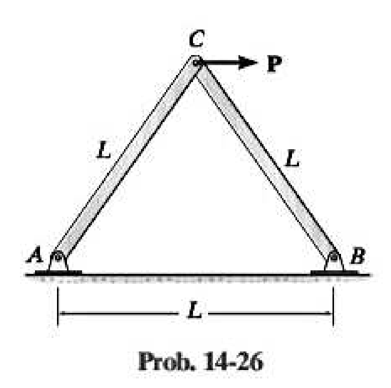
PROBLEMAS

•**14-25.** Determine el desplazamiento horizontal del nodo *A*. Cada barra está fabricada de acero A-36 y tiene un área transversal de 1.5 pulg^2.



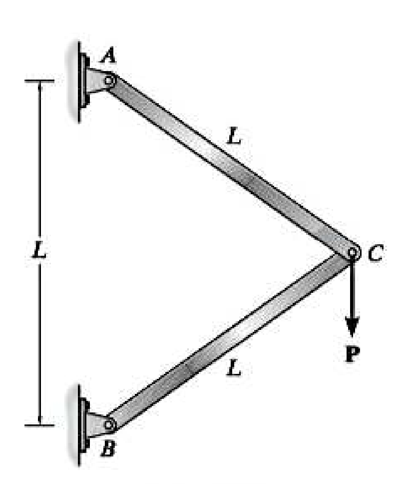
Prob. 14-25

14-26. Determine el desplazamiento horizontal del nodo *C*. *AE* es constante.



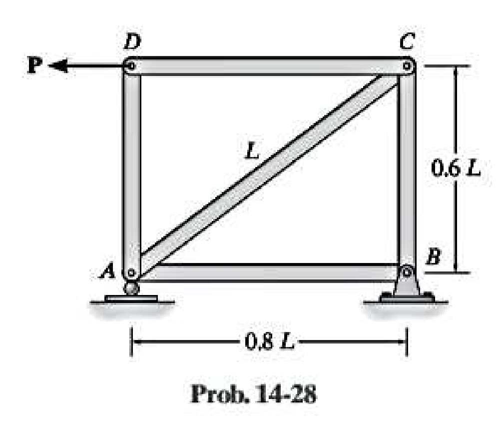
Prob. 14-26

14-27. Determine el desplazamiento vertical del nodo *C*. *AE* es constante.



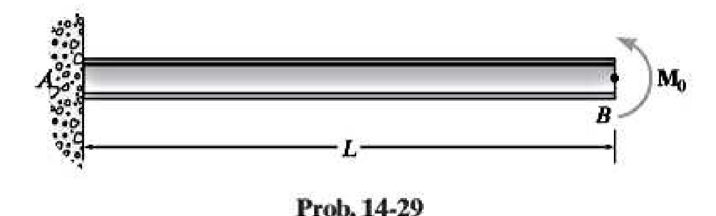
Prob. 14-27

***14-28.** Determine el desplazamiento horizontal del nodo *D*. *AE* es constante.



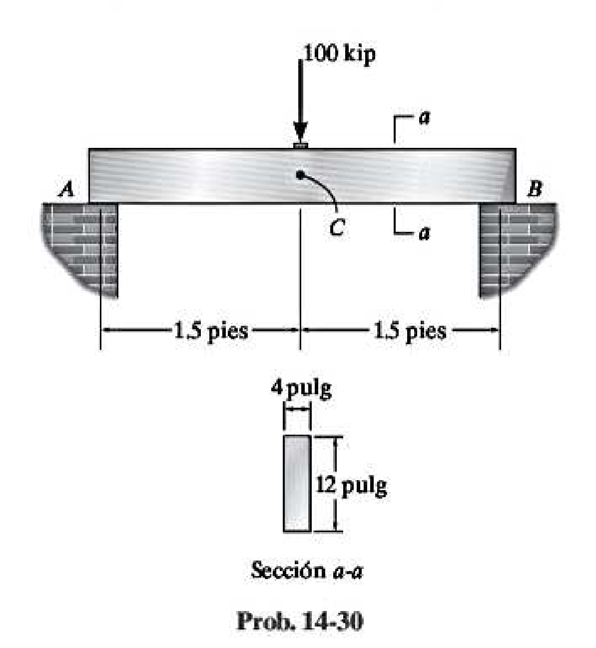
Prob. 14-28

•**14-29.** La viga en voladizo se somete a un momento de par M_0 aplicado en su extremo. Determine la pendiente de la viga en *B*. *EI* es constante.



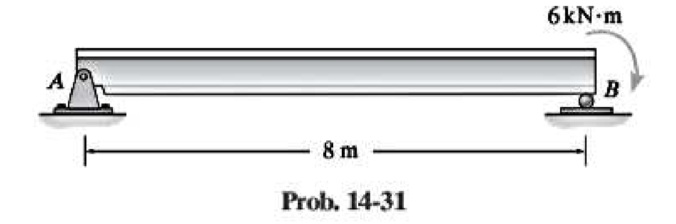
Prob. 14-29

14-30. Determine el desplazamiento vertical del punto *C* de la viga simplemente apoyada de aluminio 6061-T6. Considere la energía de deformación cortante y flexionante.



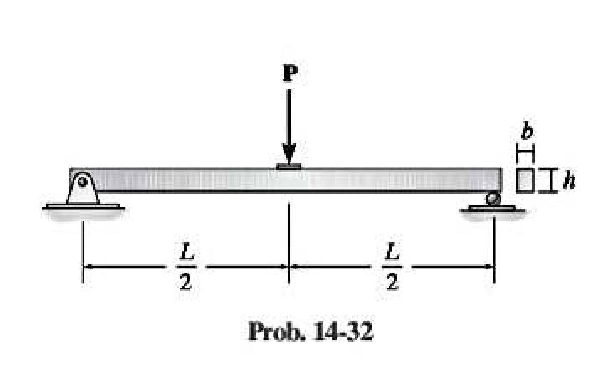
Prob. 14-30

14-31. Determine la pendiente en el extremo B de la viga de acero A-36. $I = 80(10^6)$ mm^4.



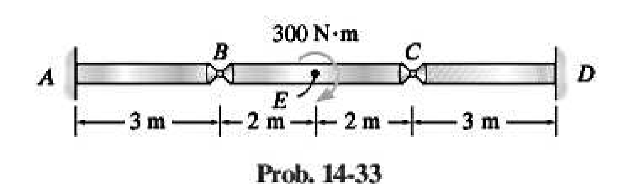
Prob. 14-31

***14-32.** Determine la deflexión en el centro de la viga causada por el cortante. El módulo de cortante es G.



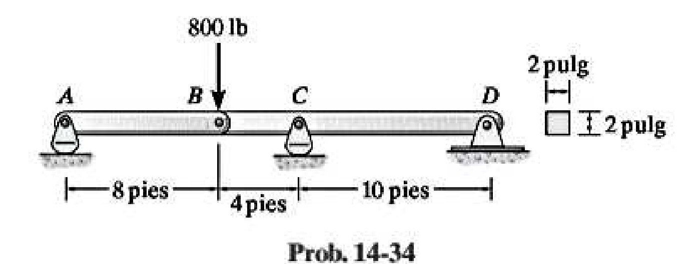
Prob. 14-32

•**14-33.** Las barras de acero A-36 están conectadas mediante pasadores en B y C. Si cada una tiene un diámetro de 30 mm, determine la pendiente en E.



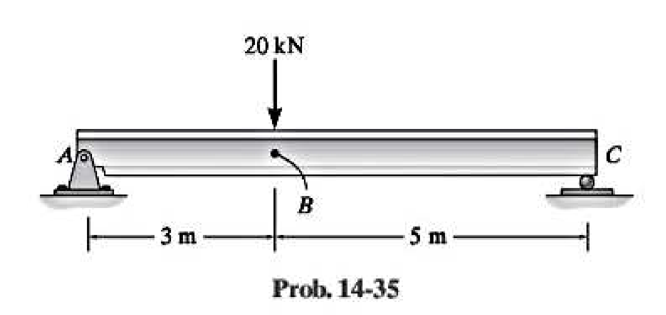
Prob. 14-33

14-34. Las barras de acero A-36 están conectadas mediante pasadores en B. Si cada una tiene una sección transversal cuadrada, determine el desplazamiento vertical en B.



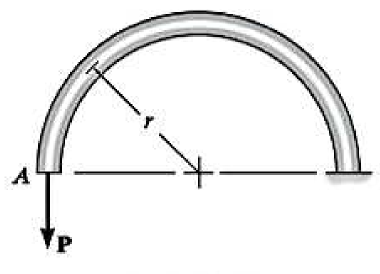
Prob. 14-34

14-35. Determine el desplazamiento del punto B en la viga de acero A-36. $I = 80(10^6)$ mm^4.



Prob. 14-35

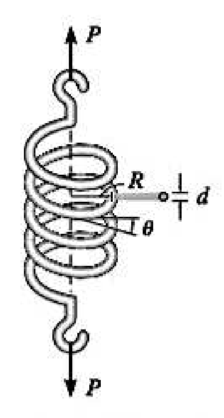
***14-36.** La barra tiene una sección transversal circular con un momento de inercia I. Si se aplica una fuerza vertical **P** en A, determine el desplazamiento vertical en este punto. Tome en cuenta sólo a la energía de deformación debida a la flexión. El módulo de elasticidad es E.



Prob. 14-36

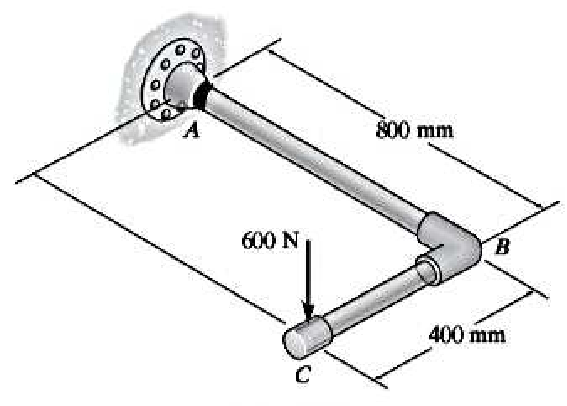
•**14-37.** La carga **P** ocasiona que las espiras abiertas del resorte hagan un ángulo θ con la horizontal al estirar el resorte. Demuestre que para esta posición lo anterior causa un par de torsión $T = PR \cos \theta$ y un momento flexionante $M = PR \operatorname{sen} \theta$ en la sección transversal. Utilice estos resultados para determinar el esfuerzo máximo normal en el material.

14-38. El resorte helicoidal tiene n espiras y está fabricado de un material que tiene un módulo de cortante G. Determine el estiramiento del resorte cuando se somete a la carga **P**. Suponga que las espiras están cercanas entre sí de modo que $\theta \approx 0°$ y la deflexión se debe por completo al esfuerzo de torsión en la bobina.



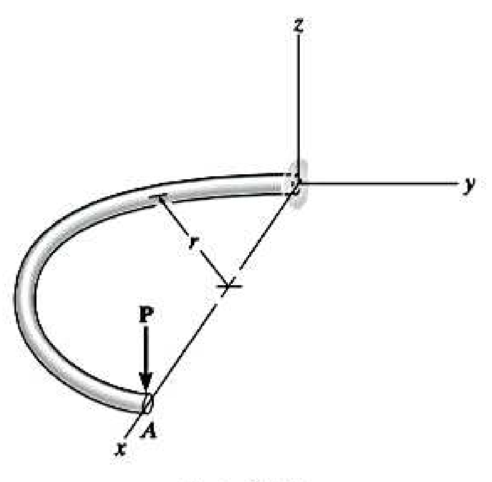
Probs. 14-37/38

14-39. El ensamble de tubos está fijo en A. Determine el desplazamiento vertical del extremo C del ensamble. La tubería tiene un diámetro interior de 40 mm y un diámetro exterior de 60 mm, y está fabricada de acero A-36. No tome en cuenta la energía de deformación cortante.



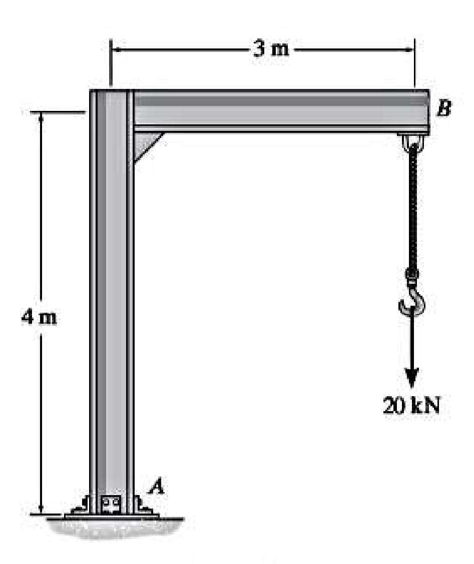
Prob. 14-39

*__14-40.__ La barra tiene una sección circular con un momento polar de inercia J y un momento de inercia I. Si se aplica una fuerza vertical **P** en A, determine el desplazamiento vertical de este punto. Considere la energía de deformación debida a la flexión y a la torsión. Las constantes del material son E y G.



Prob. 14-40

•**14-41.** Determine el desplazamiento vertical del extremo B del bastidor. Considere solamente la energía de deformación flexionante. El bastidor se hizo usando dos secciones W460×68 de I de ala ancha de acero A-36.



Prob. 14-41

14.4 Carga de impacto

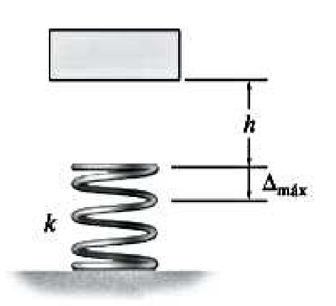


Figura 14-23

A lo largo de este libro se ha considerado que todas las cargas se aplican a un cuerpo de manera gradual, de modo que cuando llegan a un valor máximo el cuerpo permanece estático. Sin embargo, algunas cargas son dinámicas, es decir, que varían con el tiempo. Un ejemplo típico podría ser causado por la colisión de objetos. Esto se denomina carga de impacto. En específico, el ***impacto*** se produce cuando un objeto golpea a otro, de modo que se desarrollan grandes fuerzas entre los objetos durante un periodo muy corto.

Si se supone que durante el impacto no se pierde energía debido al calor, al sonido o a deformaciones plásticas localizadas, entonces es posible estudiar la mecánica del impacto empleando la conservación de la energía. Para mostrar cómo se hace esto, primero se analizará el movimiento de un sistema simple formado por un bloque y un resorte como se muestra en la figura 14-23. Cuando el bloque se suelta desde el reposo, cae una distancia h, golpea al resorte y lo comprime momentáneamente una distancia $\Delta_{máx}$ antes de detenerse. Si no se toma en cuenta la masa del resorte y se supone que éste responde *de manera elástica*, la conservación de la energía requiere que la energía del bloque al caer se transforme en energía almacenada (de deformación) en el resorte; dicho con otras palabras, el trabajo realizado por el peso del bloque al caer, $h + \Delta_{máx}$, es igual al trabajo necesario para desplazar el extremo del resorte una distancia $\Delta_{máx}$. Como la fuerza en un resorte se relaciona con $\Delta_{máx}$ mediante la ecuación $F_{máx} = k\Delta_{máx}$, donde k es la rigidez del resorte, entonces al aplicar la conservación de la energía y la ecuación 14-2, se tiene

$$U_e = U_i$$

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}(k\Delta_{máx})\,\Delta_{máx}$$

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}k\Delta_{máx}^2 \qquad (14\text{-}27)$$

$$\Delta_{máx}^2 - \frac{2W}{k}\Delta_{máx} - 2\left(\frac{W}{k}\right)h = 0$$

De esta ecuación cuadrática puede despejarse $\Delta_{máx}$. La raíz máxima es

$$\Delta_{máx} = \frac{W}{k} + \sqrt{\left(\frac{W}{k}\right)^2 + 2\left(\frac{W}{k}\right)h}$$

Si el peso W está soportado estáticamente por el resorte, entonces el desplazamiento de la parte superior del resorte es $\Delta_{est} = W/k$. Si se usa esta simplificación, la ecuación anterior se convierte en

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est} + \sqrt{(\Delta_{est})^2 + 2\Delta_{est}h}$$

o sea

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right] \qquad (14\text{-}28)$$



Esta barrera de seguridad está diseñada para absorber la energía del impacto de los vehículos en movimiento.

Una vez calculada $\Delta_{máx}$, la fuerza máxima aplicada al resorte puede determinarse con base en

$$F_{máx} = k\Delta_{máx} \tag{14-29}$$

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que esta fuerza y el desplazamiento asociado ocurren sólo un *instante*. Siempre que el bloque no rebote en el resorte, éste continuará vibrando hasta que el movimiento se amortigüe y el bloque asuma la posición estática, Δ_{est}. Además, observe que si el bloque se mantiene justo encima del resorte, $h = 0$, y después se suelta, entonces a partir de la ecuación 14-28, el desplazamiento máximo del bloque es

$$\Delta_{máx} = 2\Delta_{est}$$

En otras palabras, cuando el bloque se suelta desde la parte superior del resorte (una carga dinámica), el desplazamiento es *el doble* de lo que sería si se asentara en el resorte (una carga estática).

Si se emplea un análisis similar, también es posible determinar el desplazamiento máximo del extremo del resorte si el bloque se desliza sobre una superficie horizontal lisa con una velocidad **v** conocida justo antes de chocar con el resorte, figura 14-24. Aquí la energía cinética del bloque,* $\frac{1}{2}(W/g)v^2$, se transformará en energía almacenada en el resorte. Por lo tanto,

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2 = \frac{1}{2}k\Delta^2_{máx}$$

$$\Delta_{máx} = \sqrt{\frac{Wv^2}{gk}} \tag{14-30}$$

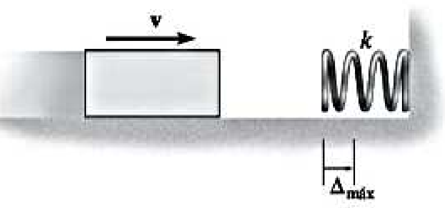


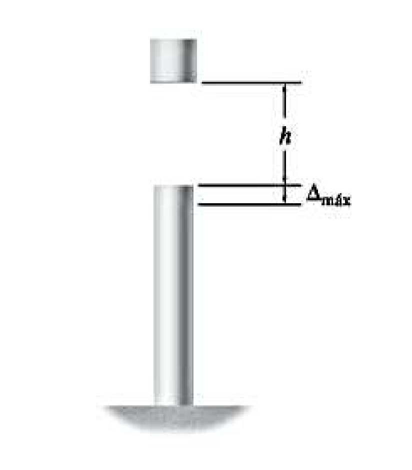
Figura 14-24

Como el desplazamiento estático en la parte superior del resorte causado por el peso W que se encuentra sobre él es $\Delta_{est} = W/k$, entonces

$$\Delta_{máx} = \sqrt{\frac{\Delta_{est}v^2}{g}} \tag{14-31}$$

Los resultados de este análisis simplificado pueden emplearse para determinar tanto la deflexión aproximada como el esfuerzo desarrollo en un elemento deformable cuando se somete a un impacto. Para ello deben hacerse los supuestos necesarios en relación con la colisión, de modo que el comportamiento de los cuerpos en colisión sea semejante a la respuesta de los modelos de bloque y resorte analizados anteriormente. Por lo tanto, se considerará que el cuerpo en movimiento es *rígido* como el bloque y que el cuerpo estático es deformable como el resorte. Además, se supone que el material se comporta de manera elástico lineal. Cuando se produce la colisión, los cuerpos permanecen en contacto hasta que el cuerpo elástico alcanza su máxima deformación y, durante el movimiento, no se considera la inercia o la masa del cuerpo elástico. Tenga en cuenta que cada uno de estos supuestos conduce a una estimación *conservadora* del esfuerzo máximo y de la deflexión del cuerpo elástico. En otras palabras, sus valores serán más grandes que los que se presentan en realidad.

*Recuerde que en física la energía cinética es "la energía del movimiento". Para la traslación de un cuerpo, se determina a partir de $\frac{1}{2}mv^2$ donde m es la masa del cuerpo, $m = W/g$.



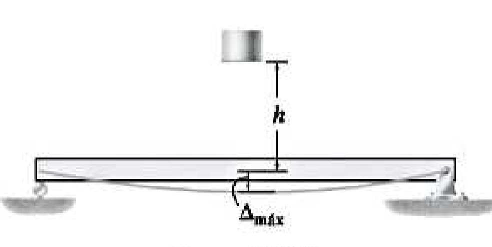


Figura 14-25

En la figura 14-25 se muestran algunos ejemplos de cuándo puede aplicarse esta teoría. Aquí, un bloque de peso conocido se deja caer sobre un poste y una viga, haciendo que éstos se deformen una cantidad máxima $\Delta_{máx}$. La energía del bloque al caer se transforma momentáneamente en energía de deformación axial en el poste y energía de deformación flexionante en la viga.* Con el fin de determinar la deformación $\Delta_{máx}$ puede emplearse el mismo planteamiento que para el sistema de un bloque y un resorte, consistente en escribir la ecuación de conservación de la energía para el bloque y el poste o el bloque y la viga, y luego despejar $\Delta_{máx}$. Sin embargo, también es posible resolver estos problemas de manera más directa al modelar el poste y la viga mediante un *resorte equivalente*. Por ejemplo, si una fuerza **P** desplaza la parte superior del poste $\Delta = PL/AE$, entonces un resorte con una rigidez $k = AE/L$ se desplazaría la misma cantidad mediante **P**, es decir, $\Delta = P/k$. De forma semejante, con base en el apéndice C, una fuerza **P** aplicada sobre el centro de una viga simplemente apoyada desplaza el centro $\Delta = PL^3/48EI$, y por lo tanto un resorte equivalente tendría una rigidez de $k = 48EI/L^3$. Sin embargo, no es necesario aplicar la ecuación 14-28 o 14-30 para encontrar en realidad la rigidez del resorte equivalente. Todo lo que se necesita para determinar el desplazamiento dinámico, $\Delta_{máx}$, es calcular el *desplazamiento estático*, Δ_{est}, debido al peso $P_{est} = W$ del bloque que descansa sobre el elemento.

Una vez determinado $\Delta_{máx}$, la fuerza dinámica máxima puede calcularse a partir de $P_{máx} = k\Delta_{máx}$. Si se considera que $P_{máx}$ es una *carga estática equivalente*, entonces el esfuerzo máximo en el elemento puede determinarse usando la estática y la teoría de la mecánica de materiales. Recuerde que este esfuerzo actúa sólo por un *instante*. En realidad, las ondas vibratorias pasan a través del material y, por ejemplo, el esfuerzo en el poste o la viga no se mantiene constante.

La relación de la carga estática equivalente $P_{máx}$ sobre la carga estática $P_{est} = W$ se denomina *factor de impacto*, n. Como $P_{máx} = k\Delta_{máx}$ y $P_{est} = k\Delta_{est}$, entonces a partir de la ecuación 14-28, este factor puede expresarse como

$$n = 1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)} \qquad (14\text{-}32)$$



Los elementos de este parachoques deben estar diseñados para resistir una carga de impacto predeterminada, de modo que pueda detener el movimiento de un vagón de ferrocarril.

Este factor representa el aumento de una carga aplicada estáticamente de modo que pueda tratarse en forma dinámica. Si se emplea la ecuación 14-32, n puede calcularse para cualquier elemento que tenga una relación lineal entre la carga y la deflexión. Sin embargo, para un sistema complicado de elementos conectados entre sí, los factores de impacto se determinarán a partir de la experiencia y de pruebas experimentales. Una vez determinada n, el esfuerzo dinámico y la deflexión en el punto de impacto pueden encontrarse con facilidad a partir del esfuerzo estático σ_{est} y de la deflexión estática Δ_{est} causados por la carga W, es decir, $\sigma_{máx} = n\sigma_{est}$ y $\Delta_{máx} = n\Delta_{est}$.

*No se toma en cuenta la energía de deformación debida a la fuerza cortante por las razones explicadas en el ejemplo 14.4.

Puntos importantes

- El *impacto* se produce cuando se desarrolla una gran fuerza entre dos objetos que chocan entre sí durante un periodo corto.
- Los efectos del impacto pueden analizarse al suponer que el cuerpo en movimiento es rígido, que el material del cuerpo inmóvil es elástico lineal, que no se pierde energía durante la colisión, que los cuerpos permanecen en contacto durante el choque, y que es posible pasar por alto la inercia del cuerpo elástico.
- La carga dinámica sobre un cuerpo puede determinarse al multiplicar la carga estática por un *factor de impacto*.

EJEMPLO 14.8

El tubo de aluminio mostrado en la figura 14-26 se utiliza para soportar una carga de 150 kip. Determine el desplazamiento máximo en la parte superior del tubo si la carga (a) se aplica gradualmente y (b) se aplica súbitamente al soltar la parte superior del tubo cuando $h = 0$. Considere $E_{al} = 10(10^3)$ ksi y suponga que el aluminio se comporta de manera elástica.

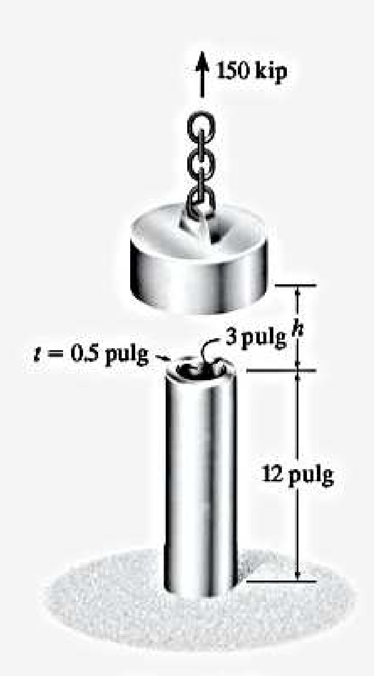


Figura 14-26

SOLUCIÓN

Inciso (a). Cuando la carga se aplica gradualmente, el trabajo realizado por el peso se transforma en energía de deformación elástica en el tubo. Al aplicar la conservación de la energía, se tiene

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2}W\Delta_{est} = \frac{W^2L}{2AE}$$

$$\Delta_{est} = \frac{WL}{AE} = \frac{150 \text{ kip}(12 \text{ pulg})}{\pi[(3 \text{ pulg})^2 - (2.5 \text{ pulg})^2]10(10^3) \text{ kip/pulg}^2}$$

$$= 0.02083 \text{ pulg} = 0.0208 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

Inciso (b). Aquí puede aplicarse la ecuación 14-28, con $h = 0$. Entonces,

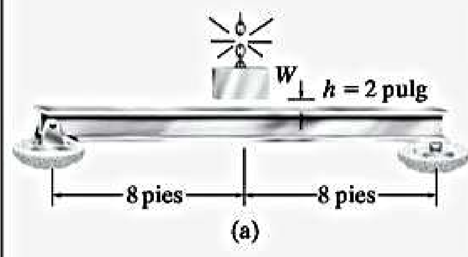
$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right]$$

$$= 2\Delta_{est} = 2(0.02083 \text{ pulg})$$

$$= 0.0417 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

Por lo tanto, el desplazamiento del peso cuando se aplica en forma dinámica es el doble del desplazamiento cuando la carga se aplica estáticamente. En otras palabras, el factor de impacto es $n = 2$, ecuación 14-32.

EJEMPLO 14.9



La viga de acero A-36 mostrada en la figura 14-27*a* tiene una sección W10 × 39. Determine el esfuerzo flexionante máximo y la deflexión máxima en la viga si el peso $W = 1.50$ kip se deja caer desde una altura $h = 2$ pulg sobre la viga. $E_{est} = 29(10^3)$ ksi.

SOLUCIÓN I

Se aplicará la ecuación 14-28. Sin embargo, primero debe calcularse Δ_{est}. A partir de la tabla del apéndice C y de los datos del apéndice B para las propiedades de una viga W10 × 39, se tiene

$$\Delta_{est} = \frac{WL^3}{48EI} = \frac{(1.50 \text{ kip})(16 \text{ pies})^3(12 \text{ pulg/pie})^3}{48[29(10^3) \text{ ksi}](209 \text{ pulg}^4)} = 0.03649 \text{ pulg}$$

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right]$$

$$= 0.03649 \text{ pulg}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{2 \text{ pulg}}{0.03649 \text{ pulg}}\right)}\right] = 0.420 \text{ pulg} \quad \textit{Resp.}$$

Por lo tanto, la carga estática equivalente que ocasiona este desplazamiento es

$$P_{máx} = \frac{48EI}{L^3}\Delta_{máx} = \frac{48(29(10^3) \text{ ksi})(209 \text{ pulg}^4)}{(16 \text{ pies})^3 (12 \text{ pulg/pie})^3}(0.420 \text{ pulg}) = 17.3 \text{ kip}$$

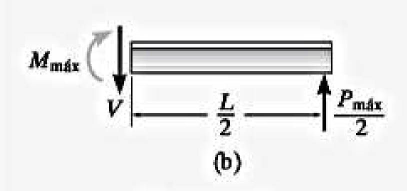


Figura 14-27

El momento interno causado por esta carga es máximo en el centro de la viga, de modo que mediante el método de las secciones, figura 14-27*b*, $M_{máx} = P_{máx}L/4$. Al aplicar la fórmula de la flexión para determinar el esfuerzo flexionante, se tiene

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}c}{I} = \frac{P_{máx}Lc}{4I} = \frac{12E\,\Delta_{máx}c}{L^2}$$

$$= \frac{12[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2](0.420 \text{ pulg})(9.92 \text{ pulg}/2)}{(16 \text{ pies})^2(12 \text{ pulg/pie})^2} = 19.7 \text{ ksi} \quad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

También es posible obtener primero la deflexión dinámica o máxima $\Delta_{máx}$ con base en los principios básicos. El trabajo externo del peso W al caer es $U_e = W(h + \Delta_{máx})$. Como la viga se desvía $\Delta_{máx}$ y $P_{máx} = 48EI\Delta_{máx}/L^3$, entonces

$$U_e = U_i$$

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}\left(\frac{48EI\Delta_{máx}}{L^3}\right)\Delta_{máx}$$

$$(1.50 \text{ kip})(2 \text{ pulg} + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}\left[\frac{48[29(10^3) \text{ kip/pulg}^2]209 \text{ pulg}^4}{(16 \text{ pies})^3(12 \text{ pulg/pie})^3}\right]\Delta_{máx}^2$$

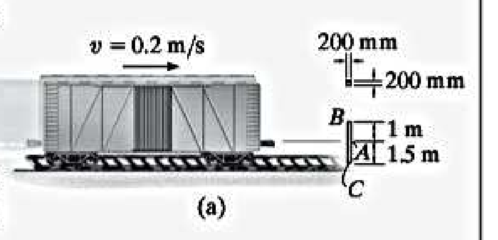
$$20.55\Delta_{máx}^2 - 1.50\Delta_{máx} - 3.00 = 0$$

Al resolver y elegir la raíz positiva se obtiene

$$\Delta_{máx} = 0.420 \text{ pulg} \quad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 14.10

Un vagón de ferrocarril que se supone rígido y que tiene una masa de 80 Mg avanza a una velocidad de $v = 0.2$ m/s cuando golpea un poste de acero de 200 mm por 200 mm en A, figura 14-28a. Si el poste se encuentra fijo al suelo en C, determine el desplazamiento horizontal máximo de su parte superior B debido al impacto. Considere $E_{ac} = 200$ GPa.



(a)

SOLUCIÓN

Aquí la energía cinética del vagón de ferrocarril se transforma en la energía de deformación flexionante interna sólo para la región AC del poste. (La región BA no está sometida a una carga interna.) Si se supone que el punto A se desplaza $(\Delta_A)_{máx}$, entonces la fuerza $P_{máx}$ que ocasiona este desplazamiento puede determinarse a partir de la tabla del apéndice C. Se tiene

$$P_{máx} = \frac{3EI(\Delta_A)_{máx}}{L_{AC}^3} \tag{1}$$

$$U_e = U_i; \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P_{máx}(\Delta_A)_{máx}$$

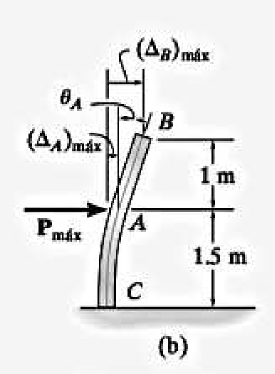
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{3EI}{L_{AC}^3}(\Delta_A)_{máx}^2; \qquad (\Delta_A)_{máx} = \sqrt{\frac{mv^2L_{AC}^3}{3EI}}$$

Al sustituir los datos numéricos se obtiene

$$(\Delta_A)_{máx} = \sqrt{\frac{80(10^3)\text{ kg}(0.2\text{ m/s})^2(1.5\text{ m})^3}{3[200(10^9)\text{ N/m}^2]\left[\frac{1}{12}(0.2\text{ m})^4\right]}} = 0.01162\text{ m} = 11.62\text{ mm}$$

Por lo tanto, con base en la ecuación 1, la fuerza $P_{máx}$ es

$$P_{máx} = \frac{3[200(10^9)\text{ N/m}^2]\left[\frac{1}{12}(0.2\text{ m})^4\right](0.01162\text{ m})}{(1.5\text{ m})^3} = 275.4\text{ kN}$$



(b)

Figura 14-28

En relación con la figura 14-28b, el segmento AB del poste se mantiene recto. Para determinar el desplazamiento máximo en B, primero debe determinarse la pendiente en A. Si se usa la fórmula apropiada de la tabla del apéndice C para determinar θ_A, se tiene

$$\theta_A = \frac{P_{máx}L_{AC}^2}{2EI} = \frac{275.4(10^3)\text{ N }(1.5\text{ m})^2}{2[200(10^9)\text{ N/m}^2]\left[\frac{1}{12}(0.2\text{ m})^4\right]} = 0.01162\text{ rad}$$

Así, el desplazamiento máximo en B es

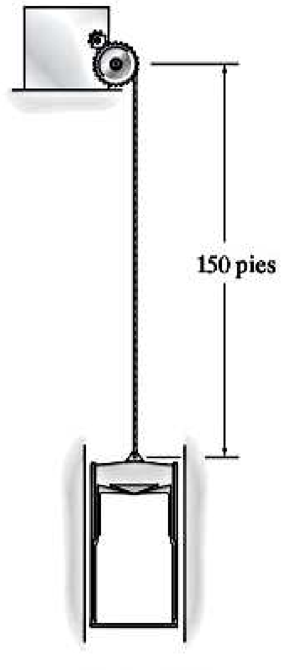
$$(\Delta_B)_{máx} = (\Delta_A)_{máx} + \theta_A L_{AB}$$
$$= 11.62\text{ mm} + (0.01162\text{ rad})\,1(10^3)\text{ mm} = 23.2\text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

14-42. Una barra tiene 4 m de largo y un diámetro de 30 mm. Si debe usarse para absorber la energía en tensión de una carga de impacto, determine la cantidad total de energía elástica que puede absorber si (a) está fabricada de acero con $E_{ac} = 200$ GPa, $\sigma_Y = 800$ MPa, y (b) está fabricada de una aleación de aluminio para la cual $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_Y =$ 405 MPa.

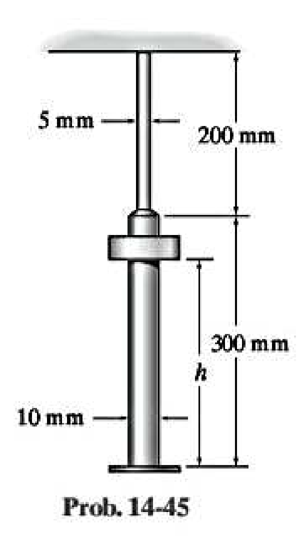
14-43. Determine el diámetro de una barra de latón rojo C83400 que tiene 8 pies de largo, si debe usarse para absorber 800 pie · lb de la energía en tensión de una carga de impacto. No se produce cedencia.

***14-44.** Un cable de acero con un diámetro de 0.4 pulg está enrollado en un tambor y se usa para bajar un ascensor que tiene un peso de 800 lb. El ascensor está 150 pies debajo del tambor y desciende a velocidad constante de 2 pies/s cuando el tambor se detiene repentinamente. Determine el esfuerzo máximo desarrollado en el cable cuando esto ocurre. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 50$ ksi.



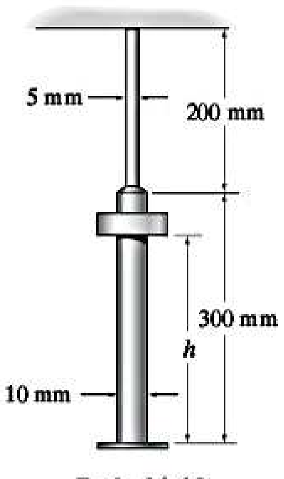
Prob. 14-44

•**14-45.** La barra compuesta de aluminio consiste en dos segmentos con diámetros de 5 y 10 mm. Determine el esfuerzo axial máximo desarrollado en la barra si el collar de 5 kg se deja caer desde una altura de $h = 100$ mm. $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_Y = 410$ MPa.



Prob. 14-45

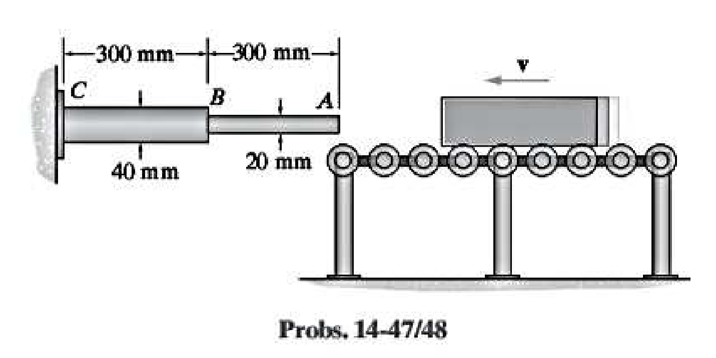
14-46. La barra compuesta de aluminio consiste en dos segmentos con diámetros de 5 y 10 mm. Determine la altura máxima h desde la que debe dejarse caer el collar de 5 kg modo que produzca en la barra un esfuerzo axial máximo de $\sigma_{máx} = 300$ MPa, $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_Y = 410$ MPa.



Prob. 14-46

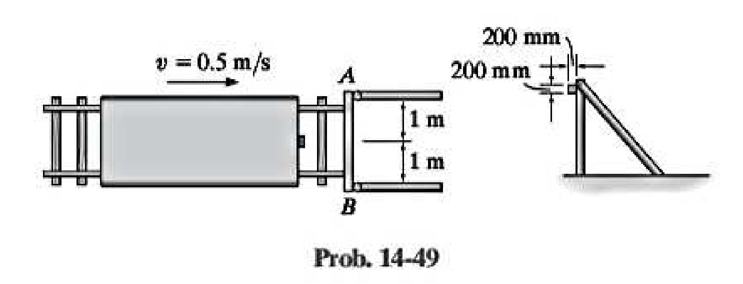
14-47. El bloque de 5 kg se mueve con una velocidad v = 4 m/s justo antes de golpear el cilindro escalonado de aluminio 6061-T6. Determine el esfuerzo máximo normal desarrollado en el cilindro.

***14-48.** Determine la velocidad máxima v del bloque de 5 kg que no causará cedencia en el cilindro escalonado de aluminio 6061-T6, después de ser golpeado por el bloque.



Probs. 14-47/48

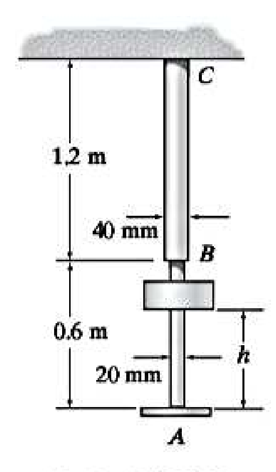
•**14-49.** La viga de acero AB se usa para detener el vagón de ferrocarril en movimiento, el cual tiene una masa de 10 Mg y se desliza hacia la viga con v = 0.5 m/s. Determine el esfuerzo máximo desarrollado en la viga si el vagón la golpea en su centro. La viga está simplemente apoyada y en los puntos A y B sólo se producen fuerzas horizontales. Suponga que el vagón y el bastidor de apoyo para la viga permanecen rígidos. También calcule la deflexión máxima de la viga. E_{ac} = 200 GPa, σ_Y = 250 MPa.



Prob. 14-49

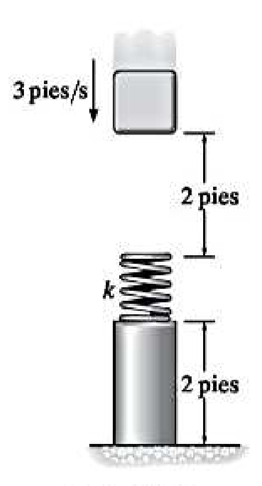
14-50. El ensamble de barras de aluminio se compone de dos segmentos que tienen diámetros de 40 y 20 mm. Determine el esfuerzo máximo axial desarrollado en la barra si el collar de 10 kg se deja caer desde una altura de h = 150 mm. Considere E_{al} = 70 GPa, σ_Y = 410 MPa.

14-51. El ensamble de barras de aluminio se compone de dos segmentos que tienen diámetros de 40 y 20 mm. Determine la altura máxima h a la que puede dejarse caer el collar de 60 kg, de modo que no cause la cedencia de la barra. Considere E_{al} = 70 GPa, σ_Y = 410 MPa.



Probs. 14-50/51

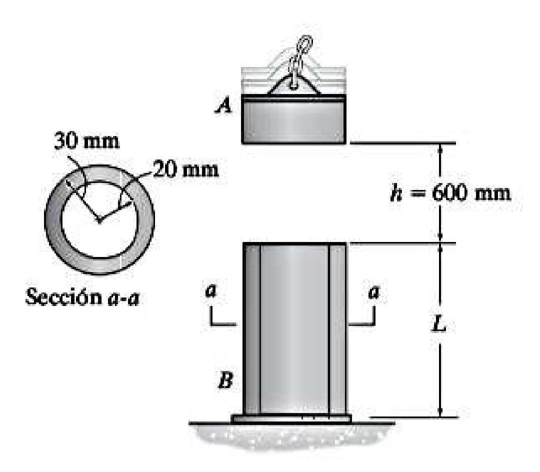
***14-52.** El peso de 50 lb cae a 3 pies/s en el instante en que se encuentra a 2 pies por encima del ensamble formado por el resorte y el poste. Determine el esfuerzo máximo en el poste si el resorte tiene una rigidez de k = 200 kip/pulg. El poste tiene un diámetro de 3 pulg y un módulo de elasticidad E = 6.80(10^3) ksi. Suponga que el material no cederá.



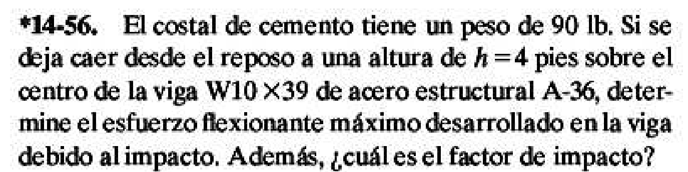
Prob. 14-52

•**14-53.** El bloque de 50 kg se deja caer desde $h = 600$ mm sobre el tubo de bronce C86100. Determine la mínima longitud L que puede tener el tubo sin que se presente cedencia.

14-54. El bloque de 50 kg se deja caer desde $h = 600$ mm sobre el tubo de bronce C86100. Si $L = 900$ mm, determine el esfuerzo normal máximo desarrollado en el tubo.

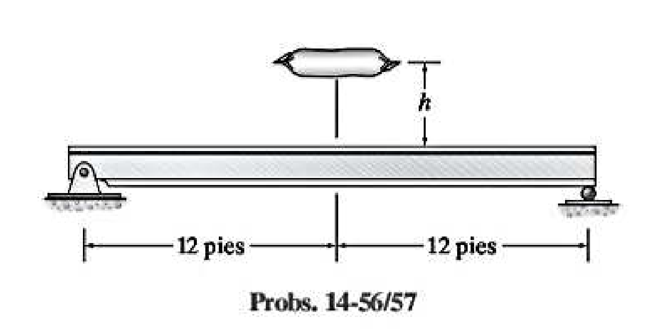


Probs. 14-53/54



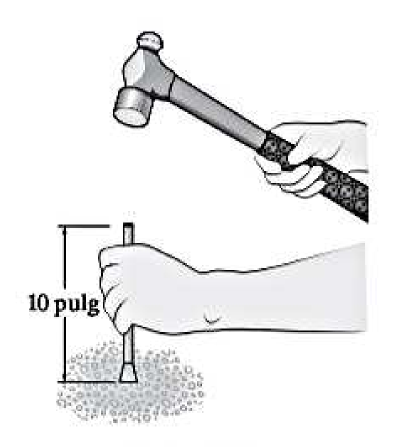
***14-56.** El costal de cemento tiene un peso de 90 lb. Si se deja caer desde el reposo a una altura de $h = 4$ pies sobre el centro de la viga W10 × 39 de acero estructural A-36, determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en la viga debido al impacto. Además, ¿cuál es el factor de impacto?

•**14-57.** El costal de cemento tiene un peso de 90 lb. Determine la altura máxima h a la que puede dejarse caer desde el reposo, sobre el centro de la viga W10 × 39 de acero estructural A-36, de modo que el esfuerzo flexionante máximo debido al impacto no sea superior a 30 ksi.



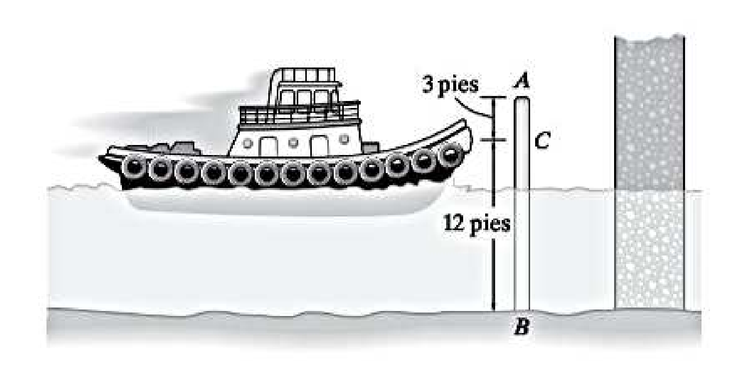
Probs. 14-56/57

14-55. El cincel de acero, que tiene un diámetro de 0.5 pulg y una longitud de 10 pulg, es golpeado por un martillo que pesa 3 lb y que en el instante del impacto se mueve a 12 pies/s. Determine el esfuerzo máximo de compresión en el cincel, si se supone que el 80 por ciento de la energía de impacto afecta al cincel. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 100$ ksi.



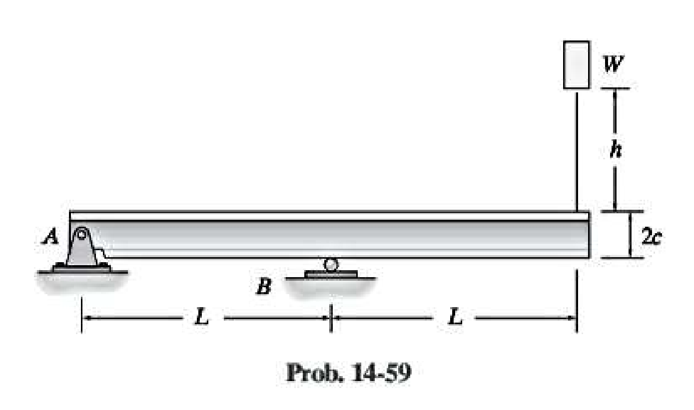
Prob. 14-55

14-58. El remolcador tiene un peso de 120 000 lb y se desplaza a 2 pies/s cuando golpea al poste amortiguador AB de 12 pulg de diámetro que se usa para proteger el pilar de un embarcadero. Si el poste está hecho de abeto blanco tratado y se supone que está fijo en el lecho del río, determine la distancia horizontal máxima que se moverá la parte superior del poste debido al impacto. Suponga que el remolcador es rígido y no tome en cuenta el efecto del agua.



Prob. 14-58

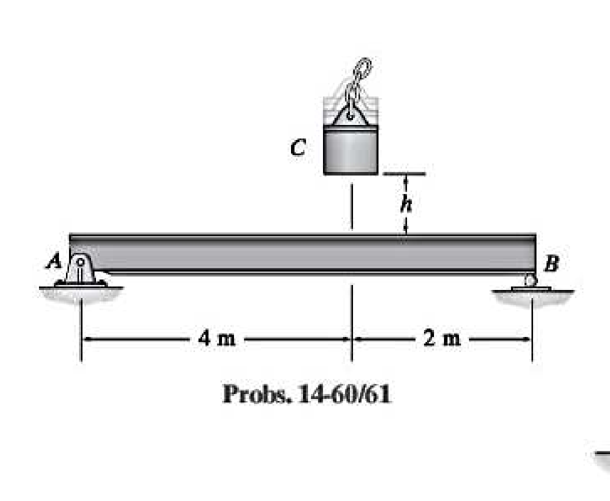
14-59. La viga I de ala ancha tiene una longitud de $2L$, un peralte $2c$ y una EI constante. Determine la altura máxima h desde la cual puede dejarse caer un peso W sobre su extremo sin exceder un esfuerzo elástico máximo $\sigma_{\text{máx}}$ en la viga.



Prob. 14-59

***14-60.** El bloque C de 50 kg se deja caer desde $h = 1.5$ m sobre la viga simplemente apoyada. Si la viga tiene una sección I de ala ancha W250 × 45 de acero A-36, determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en la viga.

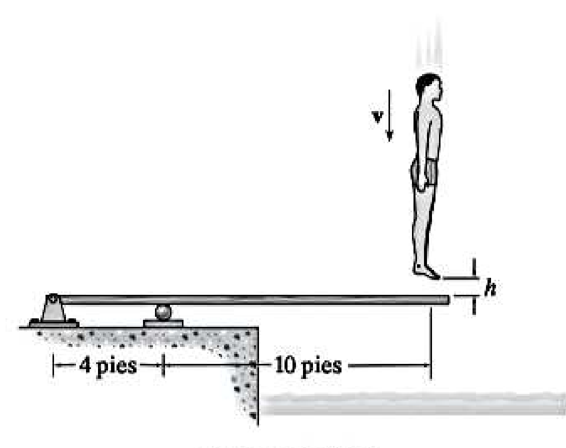
•14-61. Determine la altura máxima h desde la que puede dejarse caer el bloque C de 50 kg sin causar cedencia en la viga con sección I de ala ancha W310 × 39 de acero A-36, cuando el bloque golpea a la viga.



Probs. 14-60/61

14-62. El clavadista pesa 150 lb y, mientras se mantiene rígido, golpea el extremo de un trampolín de madera ($h = 0$) con una velocidad hacia abajo de 4 pies/s. Determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en el trampolín. La plancha tiene un espesor de 1.5 pulg y un ancho de 1.5 pies. $E_w = 1.8(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 8$ ksi.

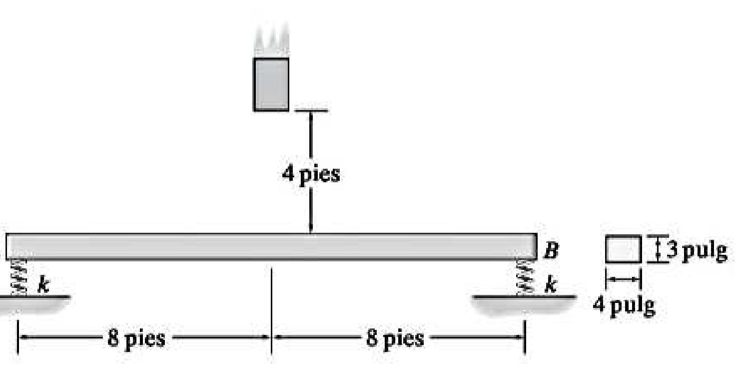
14-63. El clavadista pesa 150 lb y, mientras se mantiene rígido, golpea el extremo de un trampolín de madera. Determine la altura máxima h a la que puede saltar sobre el trampolín de modo que el esfuerzo flexionante máximo en la madera no supere los 6 ksi. La plancha tiene un espesor de 1.5 pulg y una anchura de 1.5 pies. $E_w = 1.8(10^3)$ ksi.



Probs. 14-62/63

***14-64.** El peso de 175 lb se deja caer desde una altura de 4 pies desde la parte superior de la viga de acero A-36. Determine la deflexión máxima y el esfuerzo máximo en la viga si los resortes de apoyo en A y B tienen cada uno una rigidez de $k = 500$ lb/pulg. La viga tiene 3 pulg de grosor y 4 pulg de anchura.

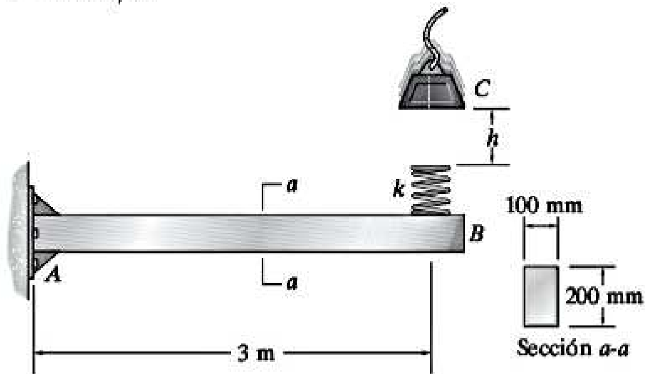
•14-65. El peso de 175 lb se deja caer desde una altura de 4 pies desde la parte superior de la viga de acero A-36. Determine el factor de carga n si los resortes de apoyo en A y B tienen cada uno una rigidez de $k = 300$ lb/pulg. La viga tiene 3 pulg de grosor y 4 pulg de anchura.



Probs. 14-64/65

14-66. El bloque C con masa de 50 kg se deja caer desde una altura $h = 0.9$ m sobre un resorte que tiene rigidez $k =$ 150 kN/m y que está montado en el extremo B de la viga en voladizo de aluminio 6061-T6. Determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en la viga.

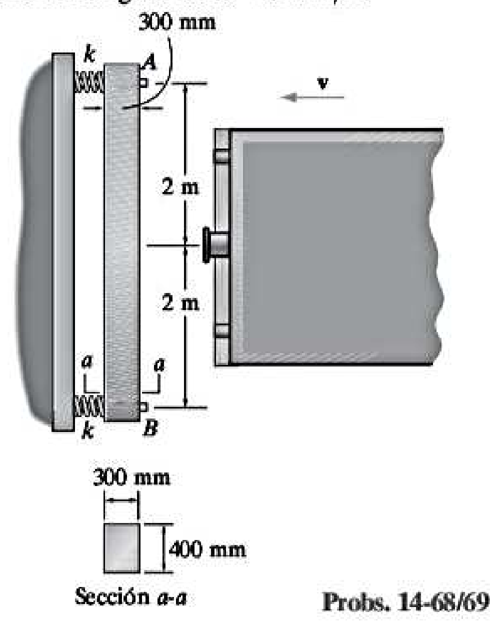
14-67. Determine la máxima altura h desde la que puede dejarse caer el bloque C de 200 kg sin causar la cedencia de la viga en voladizo de aluminio 6061-T6. El resorte montado en el extremo B de la viga tiene una rigidez de $k = 150$ kN/m.



Probs. 14-66/67

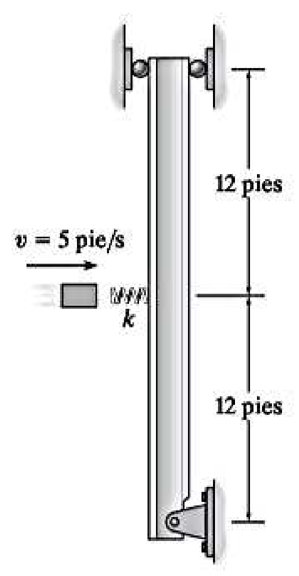
***14-68.** La barra AB de aluminio 2014-T6 puede deslizarse libremente a lo largo de las guías montadas sobre la barrera de seguridad rígida. Si el vagón con masa de 10 Mg viaja a una velocidad de $v = 1.5$ m/s, determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en la barra. Los resortes en A y B tienen una rigidez de $k = 15$ MN/m.

•14-69. La barra AB de aluminio 2014-T6 puede deslizarse libremente a lo largo de las guías montadas sobre la barrera de seguridad rígida. Determine la velocidad máxima v que puede tener el vagón de 10 Mg sin causar la cedencia de la barra cuando ésta es golpeada por el vagón. Los resortes en A y B tienen una rigidez de $k = 15$ MN/m.



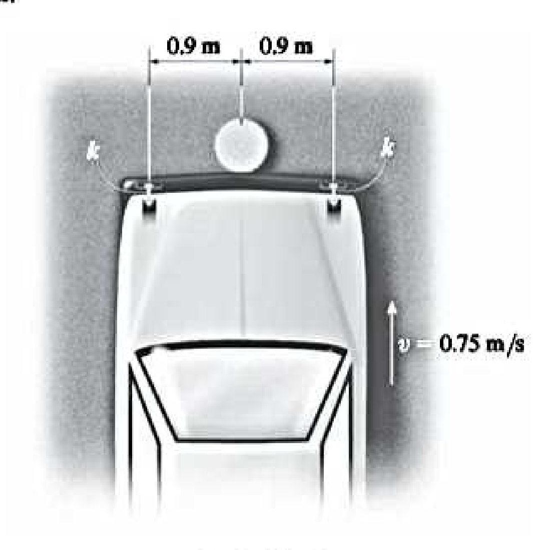
Probs. 14-68/69

14-70. La viga simplemente apoyada W10 × 15 de acero estructural A-36, se encuentra en el plano horizontal y actúa como un amortiguador para el bloque de 500 lb que se desplaza hacia ella a 5 pies/s. Determine la deflexión máxima de la viga y el esfuerzo máximo en la viga durante el impacto. El resorte tiene una rigidez de $k = 1000$ lb/pulg.



Prob. 14-70

14-71. La defensa del automóvil está fabricada de tereftalato de policarbonato-polibutileno. Si $E = 2.0$ GPa, determine la deflexión máxima y el esfuerzo máximo en la defensa si ésta golpea el poste rígido cuando el automóvil se desplaza a $v = 0.75$ m/s. El vehículo tiene una masa de 1.80 Mg y puede considerarse que la defensa está simplemente apoyada mediante dos soportes de resorte unidos a la estructura rígida del auto. Para la defensa considere $I = 300(10^6)$ mm^4, $c = 75$ mm, $\sigma_Y = 30$ MPa y $k = 1.5$ MN/m.



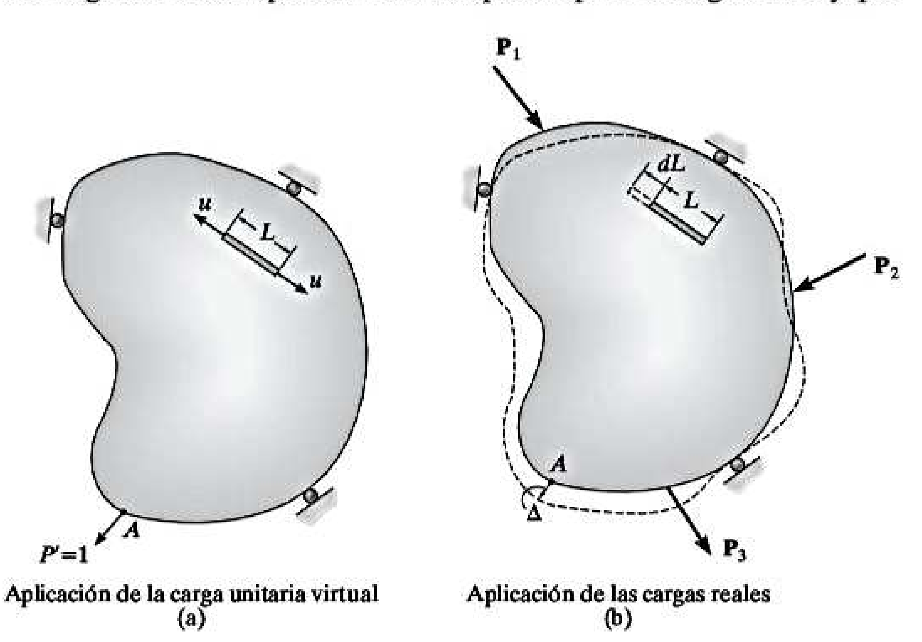
Prob. 14-71

*14.5 Principio del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual fue desarrollado por John Bernoulli en 1717, y al igual que otros métodos de análisis se basa en la conservación de la energía. Si bien el principio del trabajo virtual tiene muchas aplicaciones en la mecánica, en este libro se usará para obtener el desplazamiento y la pendiente en un punto de un cuerpo deformable.

Para lograr esto, se considerará que el cuerpo tiene una forma arbitraria como la mostrada en la figura 14-29*b*, y que está sometido a las "cargas reales" $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$. Se supone que estas cargas no causan movimiento en los soportes; sin embargo, en general pueden deformar el material *más allá* del límite elástico. Se asume que es necesario determinar el desplazamiento Δ de un punto A en el cuerpo. Como no hay fuerza que actúe en A, entonces Δ *no* se incluirá como un "término del trabajo" externo en la ecuación al aplicar el principio de la conservación de la energía en el cuerpo. Con el fin de evitar esta limitación, se colocará una fuerza "virtual" *imaginaria* $\mathbf{P}'$ sobre el cuerpo en el punto A, de modo que $\mathbf{P}'$ actúe en la *misma dirección* que Δ. Además, esta carga se aplicará al cuerpo *antes* de aplicar las cargas reales, figura 14-29*a*. Por conveniencia, que se aclarará más adelante, se elegirá $\mathbf{P}'$ con una magnitud "unitaria", es decir, $P' = 1$. Debe enfatizarse que el término "***virtual***" se utiliza para describir esta carga porque es *imaginaria* y en realidad no existe como parte de las cargas reales.

No obstante, esta carga virtual externa crea una carga virtual interna **u** en un elemento representativo o fibra del cuerpo, como se muestra en la figura 14-29*a*. Como era de esperarse, P' y u pueden relacionarse mediante las ecuaciones de equilibrio. Además, a causa de P' y u, el cuerpo y el elemento experimentarán un desplazamiento virtual (imaginario), aunque sus magnitudes *no* importan. Una vez que se aplica la carga virtual *y que*



Aplicación de la carga unitaria virtual
(a)

Aplicación de las cargas reales
(b)

Figura 14-29

el cuerpo se somete a las *cargas reales* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$, el punto A se desplazará una cantidad real Δ, que hace que el elemento se desplace dL, figura 14-29*b*. Como resultado, la fuerza virtual externa $\mathbf{P}'$ y la carga interna virtual $\mathbf{u}$ "se mueven" o desplazan Δ y dL, respectivamente. En consecuencia, estas cargas realizan el *trabajo virtual externo* $1 \cdot \Delta$ en el cuerpo y el *trabajo virtual interno* $u \cdot dL$ en el elemento. Considerando *sólo* la conservación de la energía *virtual*, el trabajo virtual externo es igual al trabajo virtual interno realizado en todos los elementos del cuerpo. Por lo tanto, es posible escribir la ecuación del trabajo virtual como

cargas virtuales

$$1 \cdot \Delta = \Sigma u \cdot dL \qquad (14\text{-}34)$$

desplazamientos reales

Aquí

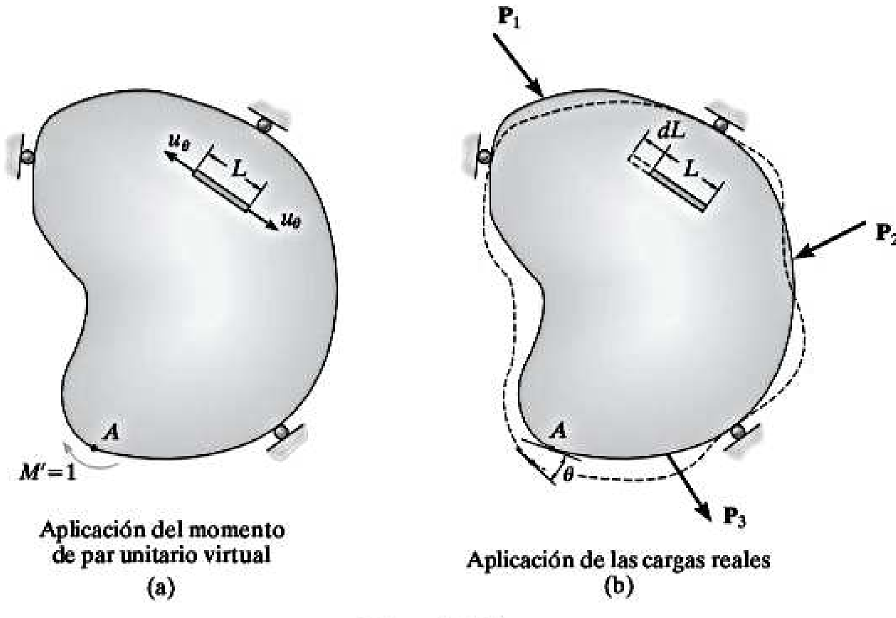
$P' = 1$ = carga unitaria virtual externa que actúa en la dirección de Δ

u = carga virtual interna que actúa sobre el elemento

Δ = desplazamiento externo causado por las cargas reales

dL = desplazamiento interno del elemento en la dirección de $\mathbf{u}$, causado por las cargas reales

Al elegir $P' = 1$, puede verse que la solución para Δ se obtiene directamente, ya que $\Delta = \Sigma u\ dL$.



Aplicación del momento de par unitario virtual
(a)

Aplicación de las cargas reales
(b)

Figura 14-30

De manera similar, si debe determinarse el desplazamiento angular o la pendiente de la tangente a un punto del cuerpo en A, figura 14-30b, entonces se aplica en el punto un *momento de par* virtual $\mathbf{M}'$, que tiene una magnitud "unitaria", figura 14-30a. Como resultado, este momento de par causa una carga virtual u_θ en uno de los elementos del cuerpo. Si se supone que las cargas reales $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ deforman el elemento una cantidad dL, el desplazamiento angular θ puede encontrarse a partir de la ecuación del trabajo virtual

$$\overbrace{1 \cdot \theta = \Sigma u_\theta}^{\text{cargas virtuales}} \underbrace{\theta = \Sigma u_\theta\, dL}_{\text{desplazamientos reales}} \qquad (14\text{-}35)$$

Aquí

$M' = 1 =$ momento de par unitario virtual externo que actúa en la dirección de θ

$u_\theta =$ carga virtual interna que actúa sobre un elemento

$\theta =$ desplazamiento angular externo en radianes causado por las cargas reales

$dL =$ desplazamiento interno del elemento en la dirección de u_θ, causado por las cargas reales

Este método para aplicar el principio del trabajo virtual se conoce a menudo como el *método de las fuerzas virtuales*, ya que se aplica una *fuerza virtual*, lo que resulta en la determinación de un *desplazamiento real* externo. En este caso, la ecuación del trabajo virtual representa una declaración de los *requisitos de compatibilidad* para el cuerpo. Aunque no es importante aquí, observe que también puede aplicarse el principio del trabajo virtual como un *método de desplazamientos virtuales*. En este caso, los *desplazamientos virtuales* se imponen en el cuerpo cuando éste se somete a *cargas reales*. Este método puede usarse para determinar la fuerza reactiva externa sobre el cuerpo o una carga interna desconocida. Cuando se utiliza de esta manera, la ecuación del trabajo virtual es una declaración de los *requisitos de equilibrio* para el cuerpo.*

Trabajo virtual interno. Los términos del lado derecho de las ecuaciones 14-34 y 14-35 representan el trabajo virtual interno desarrollado en el cuerpo. Los desplazamientos internos reales dL en estos términos pueden producirse de varias maneras diferentes. Por ejemplo, pueden deberse a errores geométricos de fabricación, cambios de temperatura, o más comúnmente al esfuerzo. En particular, no se ha impuesto ninguna restricción en la magnitud de la carga externa, por lo que el esfuerzo puede ser lo suficientemente grande como para causar cedencia o incluso endurecimiento por deformación del material.

*Vea *Ingeniería mecánica: estática*, 12a edición, R.C. Hibbeler, Prentice Hall, Inc., 2009.

14

TABLA 14–1

Deformación causada por	Energía de deformación	Trabajo virtual interno
Carga axial N	$\int_0^L \frac{N^2}{2EA}dx$	$\int_0^L \frac{nN}{EA}dx$
Cortante V	$\int_0^L \frac{f_s V^2}{2GA}dx$	$\int_0^L \frac{f_s vV}{GA}dx$
Momento flexionante M	$\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$	$\int_0^L \frac{mM}{EI}dx$
Momento de torsión T	$\int_0^L \frac{T^2}{2GJ}dx$	$\int_0^L \frac{tT}{GJ}dx$

Si se supone que el comportamiento del material es elástico lineal y que el esfuerzo no excede el límite proporcional, es posible formular las expresiones para el trabajo virtual interno causado por el esfuerzo empleando las ecuaciones de la energía de deformación elástica desarrolladas en la sección 14.2. Éstas se enlistan en la columna central de la tabla 14-1. Recuerde que cada una de estas expresiones supone que la carga interna **N**, **V**, **M** o **T** se aplica gradualmente desde cero hasta su valor total. En consecuencia, el trabajo realizado por estas resultantes se muestra en las expresiones como *la mitad* del producto de la carga interna y su desplazamiento. Por otra parte, en el caso del método de la fuerza virtual, la carga interna virtual "total" se aplica *antes* de que las cargas reales causen desplazamiento y, por lo tanto, el trabajo de la carga virtual es simplemente el producto de la carga virtual y su desplazamiento real. Si se representan estas cargas internas virtuales (u) mediante los correspondientes caracteres en minúscula n, v, m y t, el trabajo virtual debido a la carga axial, a la fuerza cortante, al momento flexionante y al momento de torsión se muestra en la columna derecha de la tabla 14-1. Por lo tanto, con base en estos resultados, la ecuación del trabajo virtual para un cuerpo sometido a una carga general puede escribirse como

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{nN}{AE}dx + \int \frac{mM}{EI}dx + \int \frac{f_s vV}{GA}dx + \int \frac{tT}{GJ}dx \quad (14\text{-}36)$$

En las siguientes secciones se aplicará la ecuación anterior a problemas que implican el desplazamiento de juntas en armaduras y puntos en vigas y elementos mecánicos. También se incluirá un análisis de cómo manejar los efectos de errores de fabricación y de temperaturas diferenciales. Para su aplicación es importante usar un conjunto consistente de unidades para todos los términos. Por ejemplo, si las cargas reales se expresan en kilonewtons y las dimensiones del cuerpo están en metros, debe aplicarse al cuerpo una fuerza virtual de 1 kN o un par virtual de 1 kN · m. De esta manera se calculará el desplazamiento Δ en metros y la pendiente en radianes.

*14.6 Método de las fuerzas virtuales aplicado a armaduras

En esta sección se aplicará el método de las fuerzas virtuales para determinar el desplazamiento de un nodo en una armadura. Para ilustrar los principios, se determinará el desplazamiento vertical del nodo A en la armadura mostrada en la figura 14-31b. Para ello, debe colocarse una fuerza virtual unitaria en este nodo, figura 14-31a, de modo que cuando se apliquen las cargas reales $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ sobre la armadura, causen el trabajo virtual externo $1 \cdot \Delta$. El trabajo virtual interno en cada elemento es $n\Delta L$. Como cada elemento tiene un área constante A en su sección transversal y n y N son constantes en toda la longitud del elemento, entonces a partir de la tabla 14-1, el trabajo virtual interno en cada elemento es

$$\int_0^L \frac{nN}{AE}dx = \frac{nNL}{AE}$$

Por lo tanto, la ecuación del trabajo virtual para toda la armadura es

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE} \qquad (14\text{-}37)$$

Aquí

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre el nodo de la armadura en la dirección de Δ

Δ = desplazamiento del nodo causado por las cargas reales sobre la armadura

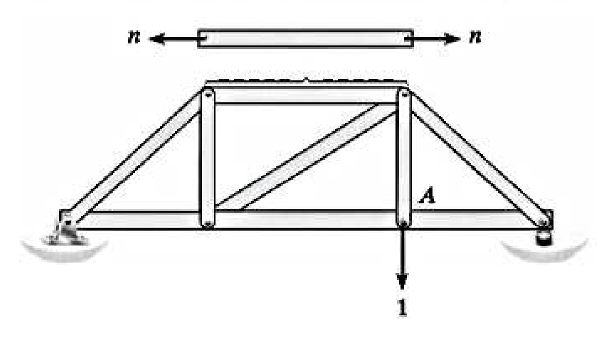
n = fuerza virtual interna en un elemento de armadura causada por la carga unitaria virtual externa

N = fuerza interna en un elemento de armadura causada por las cargas reales

L = longitud de un elemento

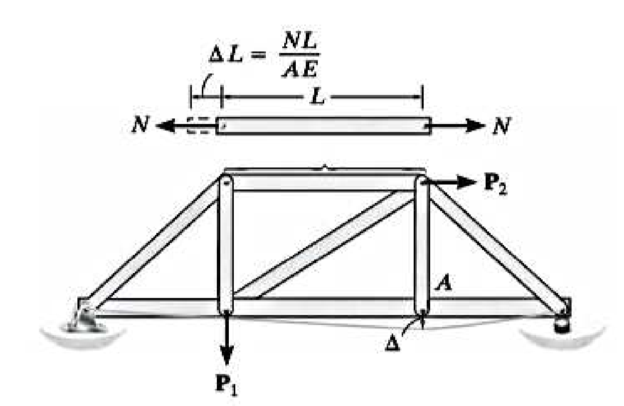
A = área de la sección transversal de un elemento

E = módulo de elasticidad de un elemento



Aplicación de la carga unitaria virtual

(a)



Aplicación de las cargas reales

(b)

Figura 44-31

Cambio de temperatura. La longitud de los elementos de una armadura puede modificarse debido a un cambio en la temperatura. Si α es el coeficiente de expansión térmica para un elemento y ΔT es el cambio en su temperatura, el cambio en la longitud de un elemento es $\Delta L = \alpha\,\Delta TL$ (ecuación 4-4). Por consiguiente, es posible determinar el desplazamiento de un nodo seleccionado en una armadura debido a este cambio de temperatura a partir de la ecuación 14-34, escrita como

$$\boxed{1 \cdot \Delta = \Sigma n\alpha\,\Delta TL} \tag{14-38}$$

Aquí

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre el nodo de una armadura en la dirección de Δ

Δ = desplazamiento del nodo causado por el cambio de temperatura

n = fuerza virtual interna en el elemento de una armadura causada por la carga unitaria virtual externa

α = coeficiente de expansión térmica del material

ΔT = cambio en la temperatura del elemento

L = longitud del elemento

Errores de fabricación. En ocasiones, pueden ocurrir errores en la fabricación de las longitudes de los elementos de una armadura. Si esto sucede, el desplazamiento Δ en una dirección particular de un nodo de la armadura desde su posición esperada puede determinarse mediante la aplicación directa de la ecuación 14-34 escrita como
Aquí

$$\boxed{1 \cdot \Delta = \Sigma n\,\Delta L} \tag{14-39}$$

1 = carga unitaria virtual externa que actúa sobre el nodo de una armadura en la dirección de Δ

Δ = desplazamiento de la junta causado por errores de fabricación

n = fuerza virtual interna en el elemento de una armadura causada por la carga unitaria virtual externa

ΔL = diferencia de la longitud del elemento en relación con su longitud esperada debida a un error de fabricación

Si sobre la armadura actúan cargas externas y algunos de los elementos experimentan un cambio de temperatura, o han sido fabricados con dimensiones incorrectas, será necesario hacer una combinación de los lados derechos de las ecuaciones 14-37 a 14-39.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para determinar el desplazamiento de cualquier nodo en una armadura mediante el método de las fuerzas virtuales.

Fuerzas virtuales *n*.

- Coloque la carga unitaria virtual sobre la armadura en el nodo donde debe determinarse el desplazamiento. La carga debe estar dirigida a lo largo de la línea de acción del desplazamiento.
- Con la carga unitaria colocada de esta forma y todas las cargas reales *retiradas* de la armadura, calcule la fuerza interna n en cada elemento de la armadura. Suponga que las fuerzas de tensión son positivas y las de compresión son negativas.

Fuerzas reales *N*.

- Determine las fuerzas N en cada elemento. Estas fuerzas son causadas sólo por las cargas reales que actúan sobre la armadura. Una vez más, se supone que las fuerzas de tensión son positivas y las de compresión son negativas.

Ecuación del trabajo virtual.

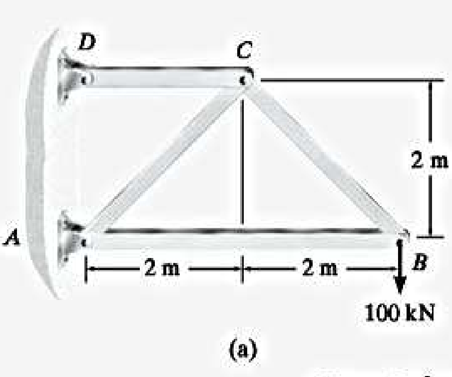
- Aplique la ecuación del trabajo virtual para determinar el desplazamiento deseado. Es importante retener el signo algebraico para cada una de las correspondientes fuerzas n y N al sustituir estos términos en la ecuación.
- Si la suma resultante $\Sigma nNL/AE$ es positiva, el desplazamiento Δ tiene la misma dirección que la carga unitaria virtual. Si resulta un valor negativo, Δ es opuesto a la carga unitaria virtual.
- Al aplicar $1 \cdot \Delta = \Sigma n\alpha \, \Delta TL$, un *aumento* de temperatura, ΔT, será *positivo*; mientras que una *disminución* de temperatura será *negativa*.
- Para $1 \cdot \Delta = \Sigma n \Delta L$, cuando un error de fabricación ocasiona un *aumento* en la longitud de un elemento, ΔL es *positivo*, mientras que una *disminución* de la longitud es *negativa*.
- Al aplicar este método, debe prestarse atención a las unidades de cada cantidad numérica. Sin embargo, observe que la carga unitaria virtual puede tener cualquier unidad arbitraria: libras, kips, newtons, etcétera, ya que las fuerzas n tendrán estas *mismas* unidades y, por consiguiente, las unidades para la carga unitaria virtual y las fuerzas n se cancelarán a ambos lados de la ecuación.

14

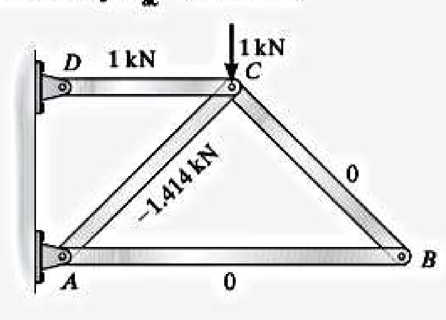
14

EJEMPLO 14.11

Determine el desplazamiento vertical del nodo C en la armadura de acero mostrada en la figura 14.32*a*. El área de la sección transversal de cada elemento es $A = 400\ \text{mm}^2$ y $E_{ac} = 200$ GPa.



(a)



Fuerzas virtuales

(b)

SOLUCIÓN

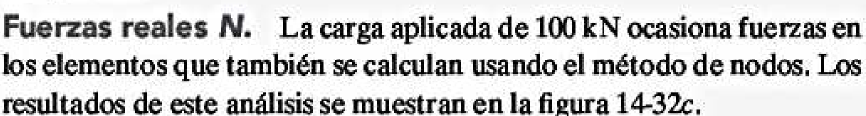
Fuerzas virtuales *n*. Como debe determinarse el desplazamiento vertical en el nodo C, *sólo* se coloca una carga virtual vertical de 1 kN en el nodo C; y la fuerza en cada elemento se calcula empleando el método de nodos. Los resultados de este análisis se muestran en la figura 14-32*b*. Con base en la convención de signos establecida, los números positivos indican fuerzas de tensión y los negativos indican fuerzas de compresión.

D 200 kN C −141.4 kN 141.4 kN A −100 kN B 100 kN

Fuerzas reales

(c)

Figura 14-32



Fuerzas reales *N*. La carga aplicada de 100 kN ocasiona fuerzas en los elementos que también se calculan usando el método de nodos. Los resultados de este análisis se muestran en la figura 14-32*c*.

Ecuación del trabajo virtual. Si se organizan los datos en forma de tabla, se tiene

Elemento	n	N	L	nNL
AB	0	−100	4	0
BC	0	141.4	2.828	0
AC	−1.414	−141.4	2.828	565.7
CD	1	200	2	400
				Σ 965.7 kN$^2\cdot$m

Así,

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{C_v} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{965.7\ \text{kN}^2\cdot\text{m}}{AE}$$

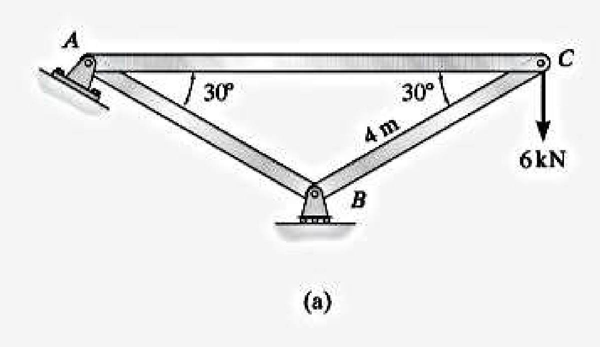
Al sustituir los valores numéricos para A y E, se tiene

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{C_v} = \frac{965.7\ \text{kN}^2\cdot\text{m}}{[400(10^{-6})\ \text{m}^2]\,200(10^6)\ \text{kN/m}^2}$$

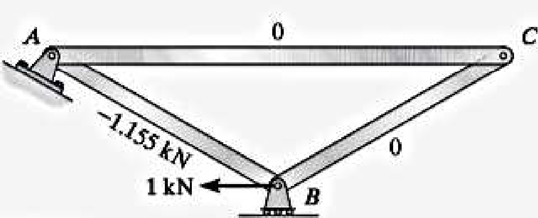
$$\Delta_{C_v} = 0.01207\ \text{m} = 12.1\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 14.12

Determine el desplazamiento horizontal del rodillo en B de la armadura mostrada en la figura 14-33a. Debido al calor radiante, el elemento AB se somete a un *aumento* de temperatura $\Delta T = +60°\text{C}$, y este elemento se ha fabricado 3 mm más corto de lo necesario. Los elementos son de acero, para el cual $\alpha_{ac} = 12(10^{-6})/°\text{C}$ y $E_{ac} = 200$ GPa. La sección transversal de cada elemento es de 250 mm^2.



(a)



Fuerzas virtuales

(b)

SOLUCIÓN

Fuerzas virtuales *n*. Se aplica una carga virtual horizontal de 1 kN a la armadura en el nodo B, y se calculan las fuerzas en cada elemento, figura 14-33b.

Fuerzas reales *N*. Como las fuerzas n en los elementos AC y BC son iguales a *cero*, *no* hay necesidad de determinar las fuerzas N de estos elementos. ¿Por qué? No obstante, a fin de completar la solución al problema, en la figura 14-33c se muestra todo el análisis de las fuerzas "reales".

Ecuación del trabajo virtual. Las cargas, la temperatura y el error de fabricación influyen en el desplazamiento del punto B, por lo tanto deben combinarse las ecuaciones 14-37, 14-38 y 14-39, de donde se obtiene

$$1\text{ kN} \cdot \Delta_{B_h} = \sum \frac{nNL}{AE} + \Sigma n\alpha\,\Delta T L + \Sigma n \Delta L$$

$$= 0 + 0 + \frac{(-1.155\text{ kN})(-12\text{ kN})(4\text{ m})}{[250(10^{-6})\text{ m}^2][200(10^6)\text{ kN/m}^2]}$$

$$+ 0 + 0 + (-1.155\text{ kN})[12(10^{-6})/°\text{C}](60°\text{C})(4\text{ m})$$

$$+ (-1.155\text{ kN})(-0.003\text{ m})$$

$$\Delta_{B_h} = 0.00125\text{ m}$$

$$= 1.25\text{ mm} \leftarrow$$ *Resp.*

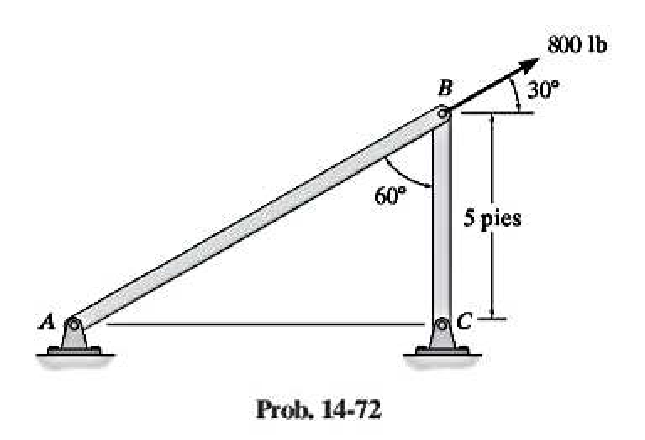
Fuerzas reales

(c)

Figura 14-33

PROBLEMAS

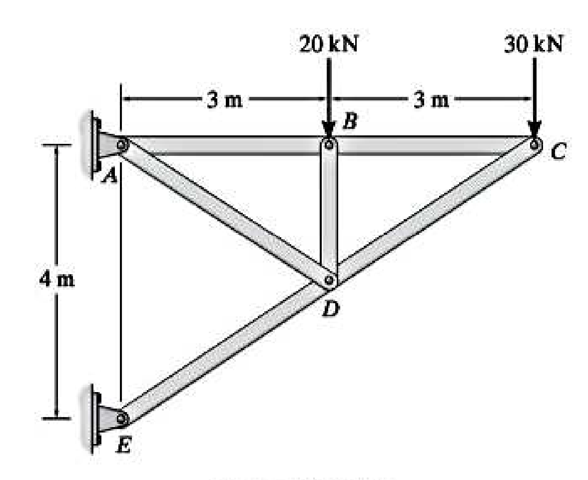
*14-72. Determine el desplazamiento horizontal del nodo B en el bastidor de dos elementos. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 2 pulg^2.



Prob. 14-72

14-75. Determine el desplazamiento vertical del nodo C en la armadura. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de A = 300 mm^2.

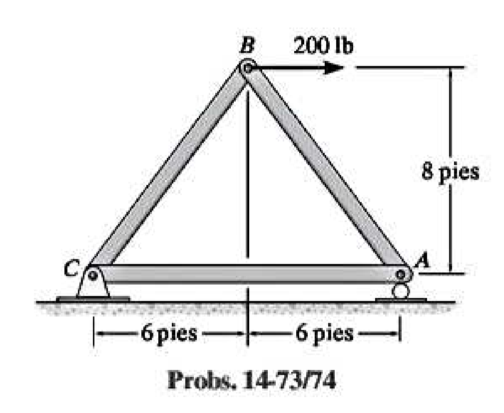
*14-76. Determine el desplazamiento vertical del nodo D en la armadura. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de A = 300 mm^2.



Probs. 14-75/76

•14-73. Determine el desplazamiento horizontal del punto B. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 2 pulg^2.

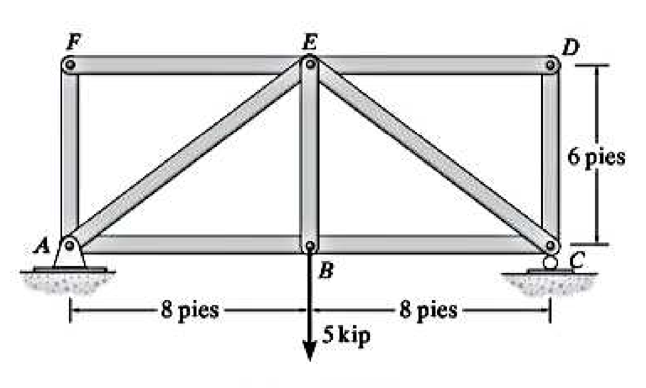
14-74. Determine el desplazamiento vertical del punto B. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 2 pulg^2.



Probs. 14-73/74

•14-77. Determine el desplazamiento vertical del punto B. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 4.5 pulg^2.

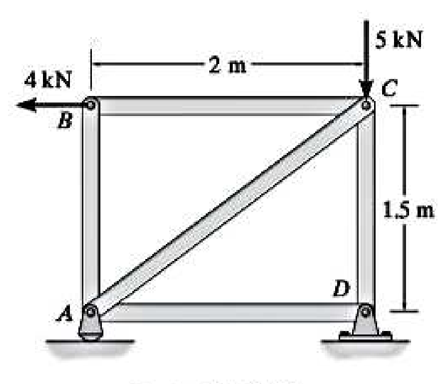
14-78. Determine el desplazamiento vertical del punto E. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 4.5 pulg^2.



Probs. 14-77/78

14-79. Determine el desplazamiento horizontal del nodo *B* en la armadura. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 400 mm².

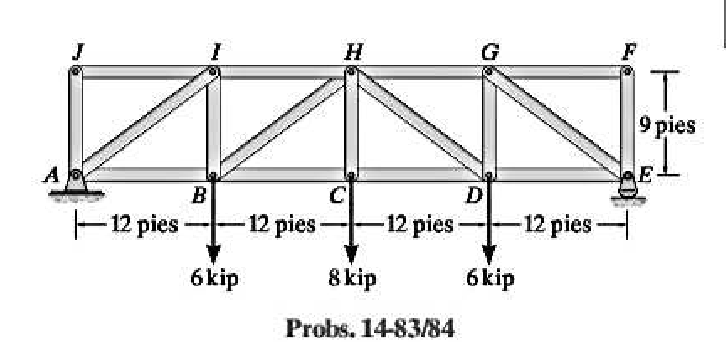
***14-80.** Determine el desplazamiento vertical del nodo *C* en la armadura. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 400 mm².



Probs. 14-79/80

14-83. Determine el desplazamiento vertical del nodo *C*. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 4.5 pulg².

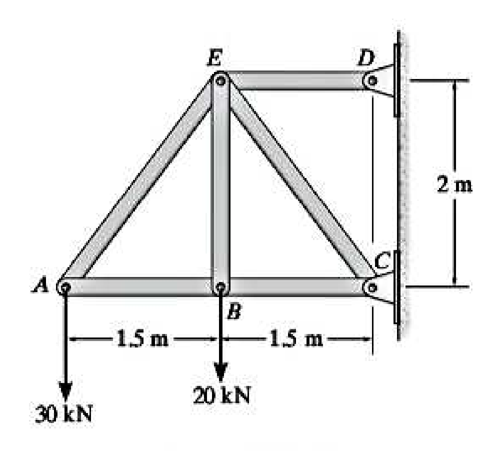
***14-84.** Determine el desplazamiento vertical del nodo *H*. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 4.5 pulg².



Probs. 14-83/84

•**14-81.** Determine el desplazamiento vertical del punto *A*. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 400 mm².

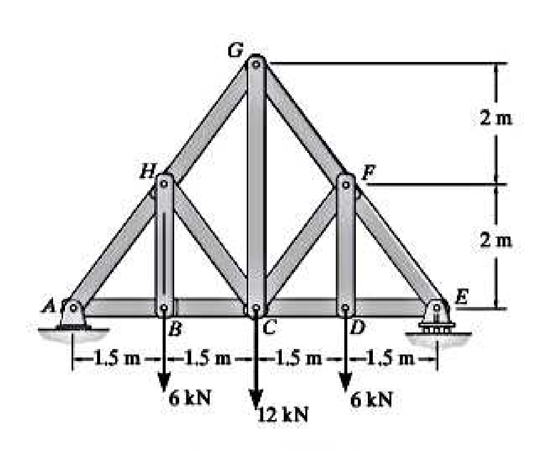
14-82. Determine el desplazamiento vertical del punto *B*. Cada elemento de acero A-36 tiene un área en su sección transversal de 400 mm².



Probs. 14-81/82

•**14-85.** Determine el desplazamiento vertical del nodo *C*. La armadura está fabricada con barras de acero A-36 que tienen un área transversal de 150 mm².

14-86. Determine el desplazamiento vertical del nodo *G*. La armadura está fabricada con barras de acero A-36 que tienen un área transversal de 150 mm².



Probs. 14-85/86

14

*14.7 Método de las fuerzas virtuales aplicado a vigas

En esta sección se aplicará el método de las fuerzas virtuales para determinar el desplazamiento y la pendiente en un punto de una viga. Para ilustrar los principios, se determinará el desplazamiento vertical Δ del punto A de la viga mostrada en la figura 14-34*b*. Para ello, es necesario colocar una carga unitaria vertical en este punto, figura 14-34*a*, de modo que cuando se aplique la carga distribuida "real" w a la viga, se produzca el trabajo virtual interno $1 \cdot \Delta$. Como la carga provoca tanto una fuerza cortante V como un momento M dentro de la viga, en realidad debe considerarse el trabajo virtual interno debido a ambas cargas. Sin embargo, en el ejemplo 14.7 se demostró que las deflexiones de la viga debidas al cortante son insignificantes en comparación con las causadas por la flexión, sobre todo si la viga es larga y delgada. Como en la práctica éste es el tipo de viga que se emplea con mayor frecuencia, sólo se considerará la energía de deformación virtual debida a la flexión, tabla 14-1. Por consiguiente, la carga real hace que el elemento dx se deforme de modo que sus lados giran un ángulo $d\theta = (M/EI)dx$, lo que ocasiona el trabajo virtual interno $m\,d\theta$. Al aplicar la ecuación 14-34, la ecuación del trabajo virtual para toda la viga, se tiene

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx \qquad (14\text{-}40)$$

Aquí

$1 =$ carga unitaria virtual externa que actúa sobre la viga en la dirección de Δ

$\Delta =$ desplazamiento causado por las cargas reales que actúan sobre la viga

$m =$ momento virtual interno en la viga, expresado como una función de x y causado por la carga unitaria virtual externa

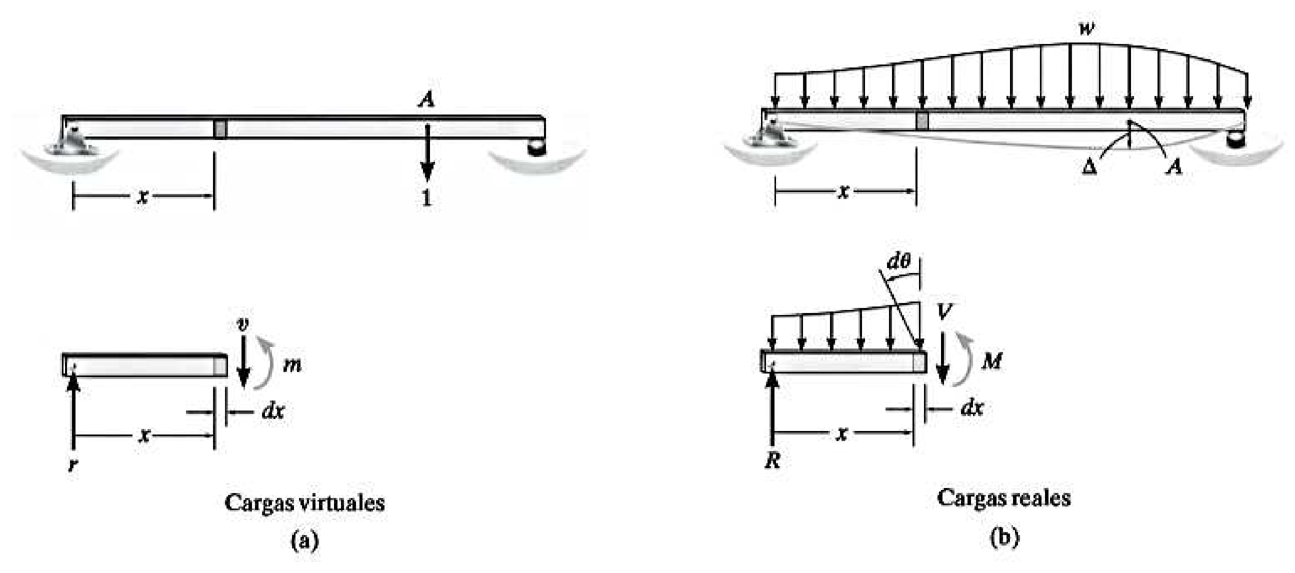
$M =$ momento interno en la viga, expresado como una función de x y causado por las cargas reales

$E =$ módulo de elasticidad del material

$I =$ momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro

De manera similar, si debe determinarse la pendiente θ de la tangente en un punto de la curva elástica de la viga, es necesario aplicar un momento de par unitario virtual en el punto y determinar el correspondiente momento interno virtual m_θ. Si se aplica la ecuación 14-35 para este caso y no se toman en cuenta los efectos de las deformaciones cortantes, se tiene

$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}\,dx \qquad (14\text{-}41)$$



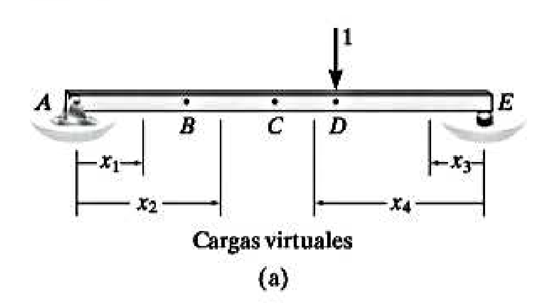
Cargas virtuales
(a)

Cargas reales
(b)

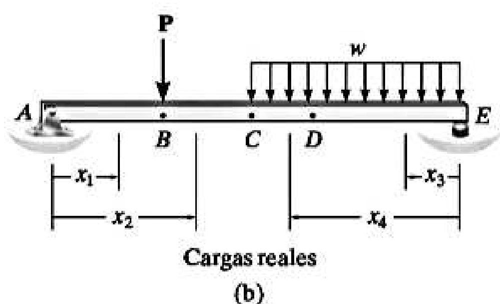
Figura 14-34

Al aplicar estas ecuaciones, tenga en cuenta que las integrales del lado derecho representan la cantidad de energía de deformación flexionante virtual *almacenada* en la viga. Si las fuerzas concentradas o momentos de par actúan sobre la viga o la carga distribuida es discontinua, *no se puede* realizar una sola integración a través de toda la longitud de la viga. En su lugar, deben elegirse por separado coordenadas x dentro de las regiones que no tienen discontinuidad en la carga. Además, no es necesario que cada x tenga el mismo origen; sin embargo, las x seleccionadas para la determinación del momento real M en una región determinada deben ser *iguales* a la x seleccionada para determinar el momento virtual m o m_θ dentro de la misma región. Por ejemplo, considere la viga mostrada en la figura 14-35. Con el fin de determinar el desplazamiento en D, puede usarse x_1 para determinar la energía de deformación en la región AB, x_2 para la región BC, x_3 para la región DE y x_4 para la región de DC. En cualquier caso, cada coordenada x se seleccionará de manera que tanto M como m (o m_θ) puedan formularse con facilidad.

A diferencia de las vigas, como se analizaron aquí, algunos elementos también pueden someterse a la energía de deformación virtual significativa causada por la carga axial, la fuerza cortante y el momento de torsión. Cuando éste es el caso, es necesario incluir en las ecuaciones anteriores los términos de energía para estas cargas, tal como se formula en la ecuación 14-36.



Cargas virtuales
(a)



Cargas reales
(b)

Figura 14-35

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para determinar el desplazamiento y la pendiente en un punto de la curva elástica de una viga mediante el método de las fuerzas virtuales.

Momentos virtuales m o m_θ.

- Coloque una *carga unitaria virtual* sobre la viga en el punto y dirigida a lo largo de la línea de acción del desplazamiento deseado.
- Si debe determinarse la pendiente, coloque un *momento de par unitario virtual* en el punto.
- Establezca las coordenadas x adecuadas que sean válidas dentro de las regiones de la viga, donde no haya discontinuidad ni de las cargas reales ni de las virtuales.
- Con la carga virtual en su sitio y todas las cargas reales *eliminadas* de la viga, calcule el momento interno m o m_θ en función de cada coordenada x.
- Suponga que m o m_θ actúa en la dirección positiva de acuerdo a la convención de signos establecida para el momento positivo en las vigas, figura 6-3.

Momentos reales.

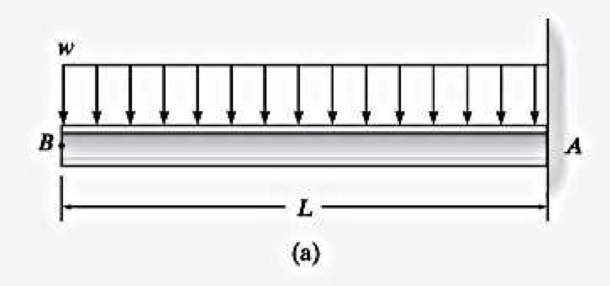
- Use las *mismas* coordenadas x que las establecidas para m o m_θ y determine los momentos internos M causados por las cargas reales.
- Como se supuso que un m o m_θ positivo actúa en la "dirección positiva" convencional, es importante que un M positivo actúe en esta *misma dirección*. Lo anterior es necesario ya que el trabajo virtual interno positivo o negativo depende del sentido direccional *tanto* de la carga virtual, definido por $\pm m$ o $\pm m_\theta$, como del desplazamiento causado por $\pm M$.

Ecuación del trabajo virtual.

- Aplique la ecuación del trabajo virtual para determinar el desplazamiento Δ o la pendiente θ deseados. Es importante conservar el signo algebraico de cada integral calculada dentro de su región específica.
- Si la suma algebraica de todas las integrales para toda la viga es positiva, Δ o θ tienen la misma dirección que la carga unitaria virtual o el momento de par unitario virtual. Si se produce un valor negativo, Δ o θ son opuestos a la carga unitaria virtual o al momento de par unitario virtual.

EJEMPLO 14.13

Determine el desplazamiento del punto B en la viga mostrada en la figura 14-36*a*. EI es constante.



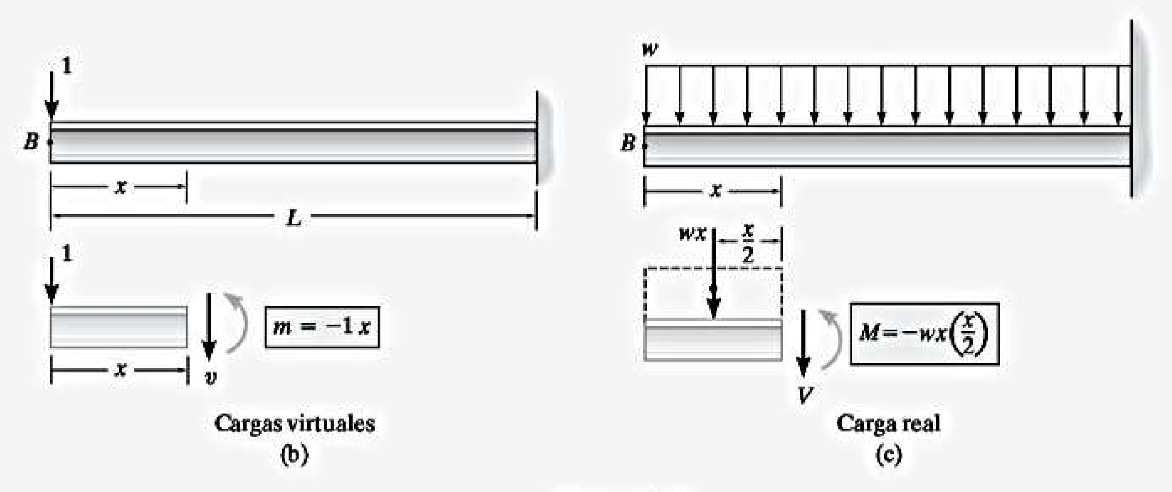


Figura 14-36

SOLUCIÓN

Momento virtual *m*. El desplazamiento vertical del punto B se obtiene al colocar una carga unitaria virtual en B, figura 14-36*b*. Por inspección, no hay discontinuidades de carga en la viga, *tanto* para las cargas reales *como* para las virtuales. Por lo tanto, puede usarse *una sola* coordenada x para determinar la energía de deformación virtual. Esta coordenada se elegirá con origen en B, por lo que no hay necesidad de determinar las reacciones en A a fin de encontrar los momentos internos m y M. Usando el método de las secciones, el momento interno m se muestra en la figura 14-36*b*.

Momento real *M*. Empleando *la misma* coordenada x, el momento interno M es como se muestra en la figura 14-36*c*.

Ecuación del trabajo virtual. Entonces, la pendiente en B es

$$1 \cdot \Delta_B = \int \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^L \frac{(-1x)(-wx^2/2)\,dx}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{wL^4}{8EI} \qquad \textit{Resp.}$$

14

EJEMPLO 14.14

Determine la pendiente en el punto B de la viga mostrada en la figura 14-37a. EI es constante.

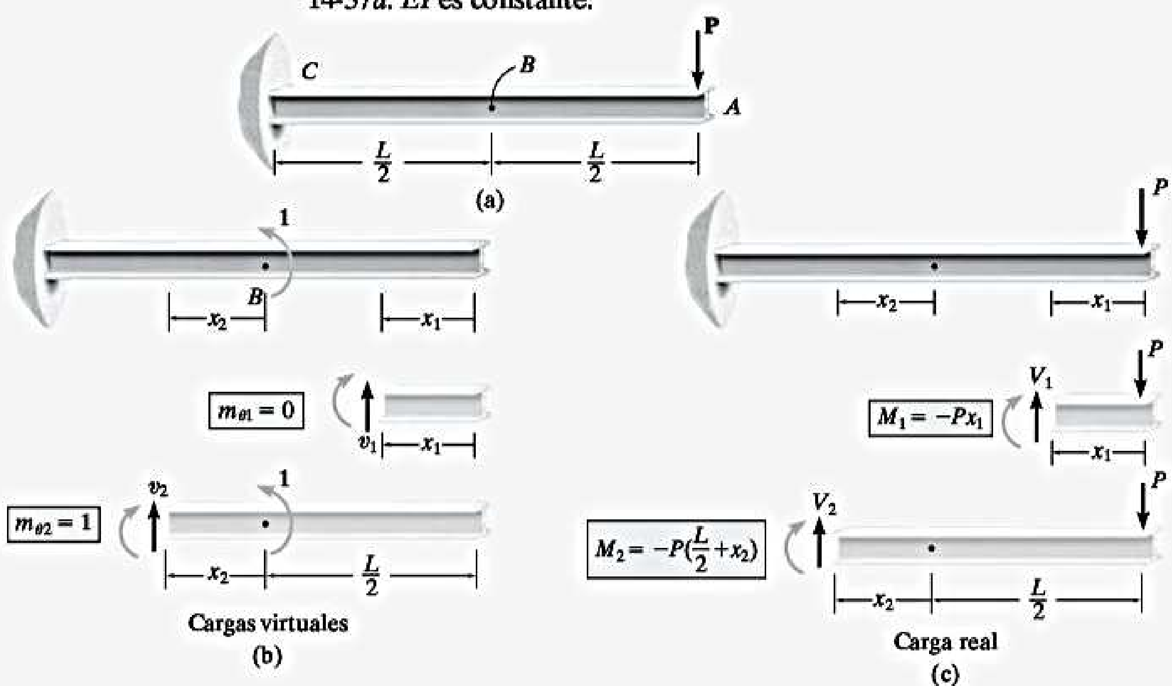


Figura 14-37

SOLUCIÓN

Momentos virtuales m_θ. La pendiente en B se determina al colocar un momento de par unitario virtual en B, figura 14-37b. Deben seleccionarse dos coordenadas x a fin de determinar la energía de deformación virtual total en la viga. La coordenada x_1 tiene en cuenta la energía de deformación dentro del segmento AB y la coordenada x_2 tiene en cuenta la energía de deformación en el segmento BC. Empleando el método de las secciones, los momentos internos m_θ en cada uno de estos segmentos son como se muestran en la figura 14-37b.

Momentos reales M. Usando las *mismas coordenadas* x_1 y x_2 (¿por qué?), los momentos internos M son los mostrados en la figura 14-37c.

Ecuación del trabajo virtual. Entonces, la pendiente en B es

$$1 \cdot \theta_B = \int \frac{m_\theta M}{EI} dx$$

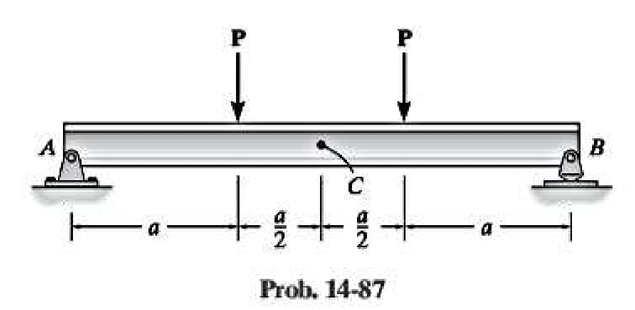
$$= \int_0^{L/2} \frac{0(-Px_1)\, dx_1}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{1\{-P[(L/2) + x_2]\}\, dx_2}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textit{Resp.}$$

El *signo negativo* indica que θ_B es *opuesta* a la dirección del momento de par virtual mostrado en la figura 14-37b.

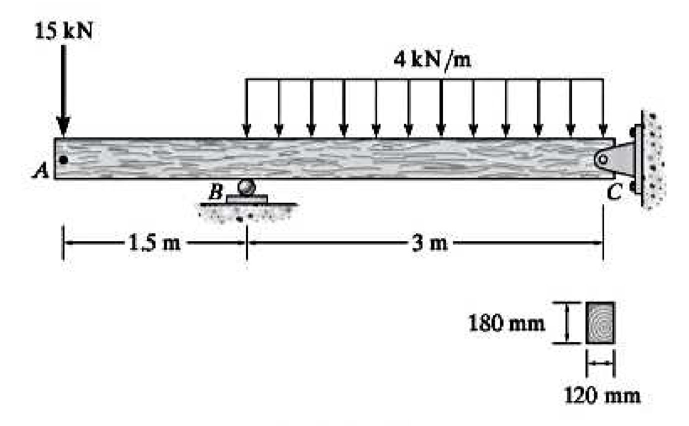
PROBLEMAS

14-87. Determine el desplazamiento en el punto *C*. *EI* es constante.



Prob. 14-87

***14-88.** La viga está fabricada de pino sureño para el cual E_p = 13 GPa. Determine el desplazamiento en *A*.

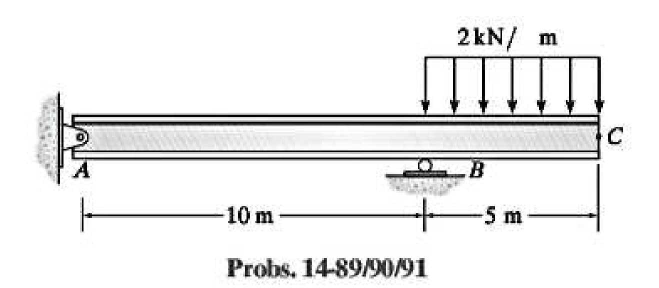


Prob. 14-88

•14-89. Determine el desplazamiento en el punto *C* de la viga de acero A-36. $I = 70(10^6)$ mm^4.

14-90. Determine la pendiente en el punto *A* de la viga de acero A-36. $I = 70(10^6)$ mm^4.

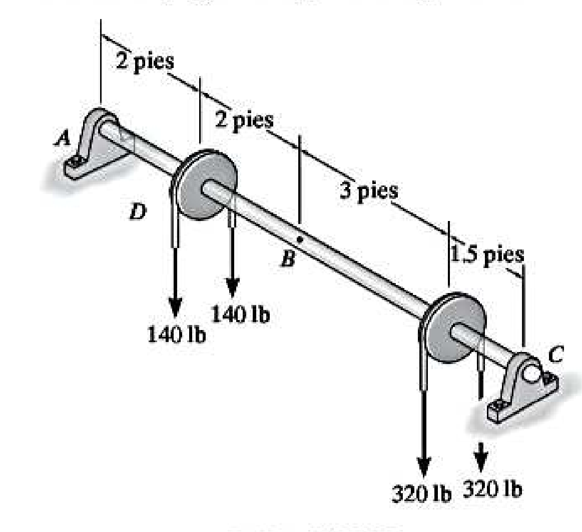
14-91. Determine la pendiente en el punto *B* de la viga de acero A-36. $I = 70(10^6)$ mm^4.



Probs. 14-89/90/91

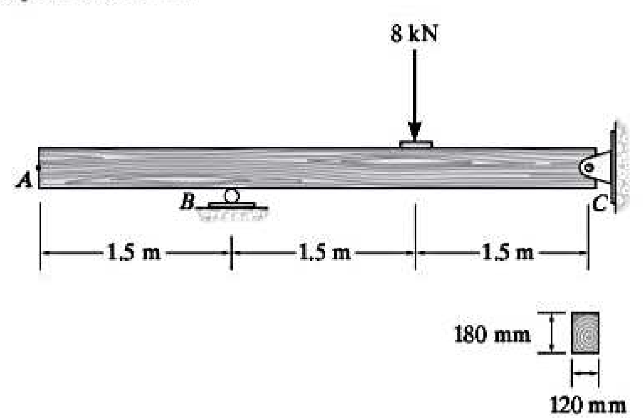
***14-92.** Determine el desplazamiento en el punto *B* del eje de acero A-36 con diámetro de 1.5 pulg.

•14-93. Determine la pendiente del eje de acero A-36 con diámetro de 1.5 pulg, en el soporte de cojinete *A*.



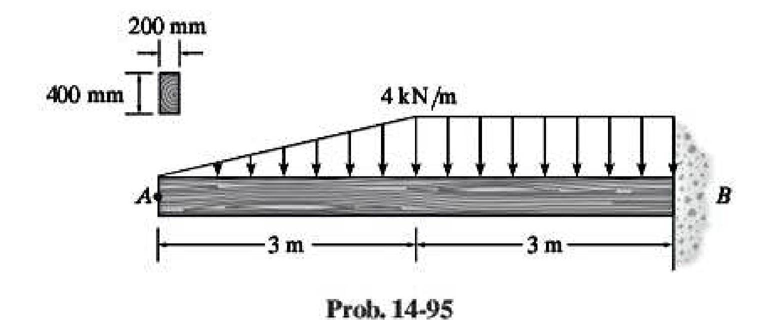
Probs. 14-92/93

14-94. La viga está fabricada de abeto Douglas. Determine la pendiente en *C*.



Prob. 14-94

14-95. La viga está fabricada de roble, para el cual E_o = 11 GPa. Determine la pendiente y el desplazamiento en *A*.

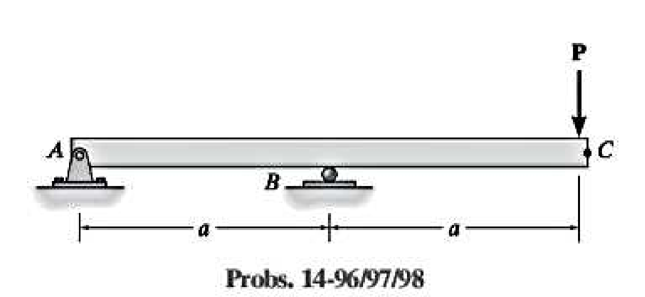


Prob. 14-95

***14-96.** Determine el desplazamiento en el punto *C*. *EI* es constante.

•14-97. Determine la pendiente en el punto *C*. *EI* es constante.

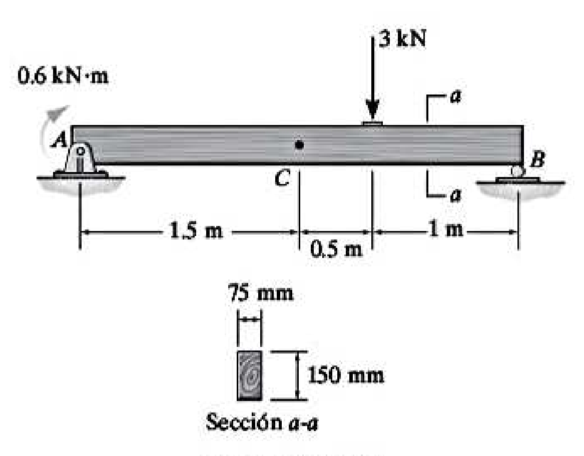
14-98. Determine la pendiente en el punto *A*. *EI* es constante.



Probs. 14-96/97/98

14-99. Determine la pendiente en el punto *A* de la viga simplemente apoyada fabricada de abeto Douglas.

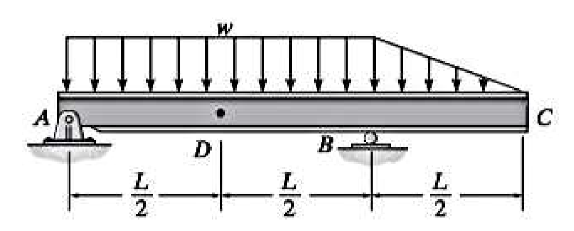
***14-100.** Determine el desplazamiento en el punto *C* de la viga simplemente apoyada fabricada de abeto Douglas.



Probs. 14-99/100

•14-101. Determine la pendiente del extremo *C* en el voladizo de la viga. *EI* es constante.

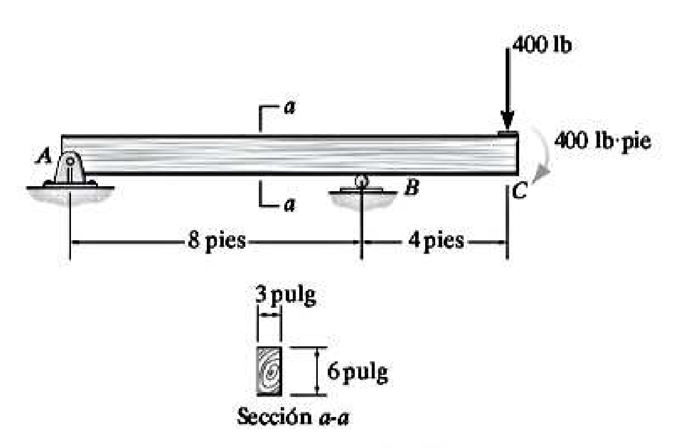
14-102. Determine el desplazamiento del punto *D* de la viga con voladizo. *EI* es constante.



Probs. 14-101/102

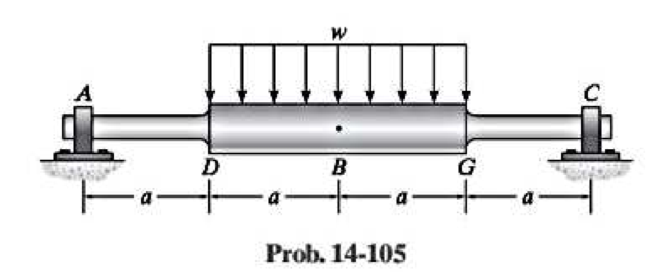
14-103. Determine el desplazamiento del extremo *C* en el voladizo de la viga fabricada de abeto Douglas.

***14-104.** Determine la pendiente en el punto *A* de la viga con voladizo fabricada de abeto blanco.



Probs. 14-103-104

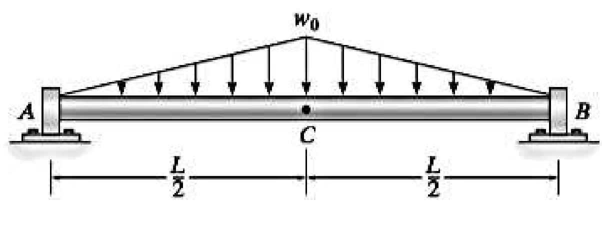
•14-105. Determine el desplazamiento en el punto *B*. El momento de inercia de la porción central *DG* del eje es $2I$, mientras que los segmentos extremos *AD* y *GC* tienen un momento de inercia *I*. El módulo de elasticidad del material es *E*.



Prob. 14-105

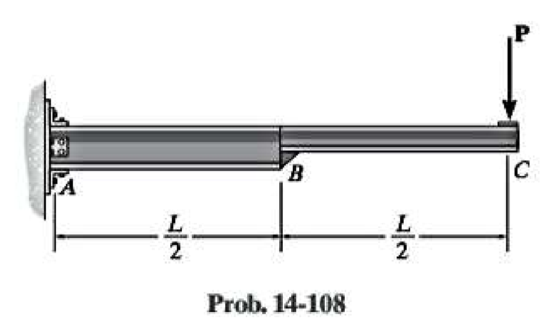
14-106. Determine el desplazamiento del eje en *C*. *EI* es constante.

14-107. Determine la pendiente del eje en el soporte de cojinete *A*. *EI* es constante.



Probs. 14-106/107

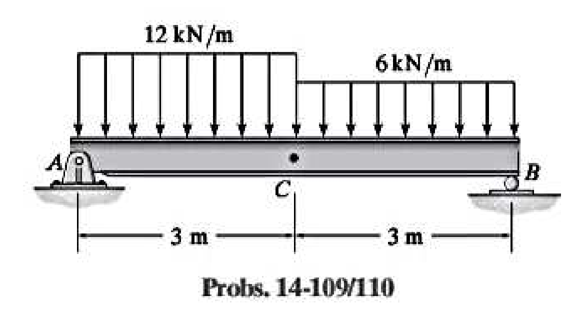
*14-108. Determine la pendiente y el desplazamiento del extremo C de la viga en voladizo. La viga está fabricada de un material que tiene un módulo de elasticidad E. Los momentos de inercia de los segmentos AB y BC de la viga son $2I$ e I, respectivamente.



Prob. 14-108

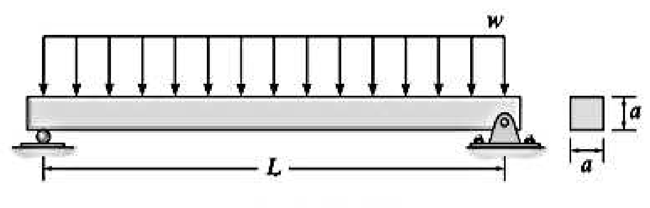
•14-109. Determine la pendiente en el punto A de la viga W200 × 46 simplemente apoyada y fabricada de acero A-36.

14-110. Determine el desplazamiento en el punto C de la viga W200 × 46 simplemente apoyada y fabricada de acero A-36.



Probs. 14-109/110

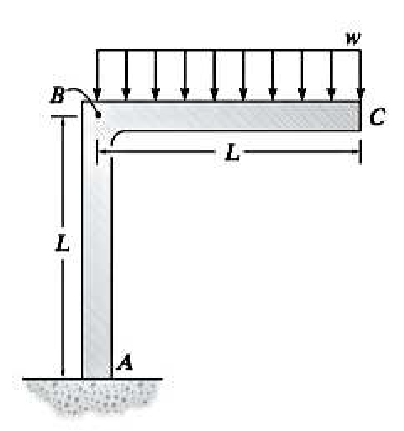
14-111. La viga simplemente apoyada que tiene una sección transversal cuadrada está sometida a una carga uniforme w. Determine la deflexión máxima de la viga causada solamente por la flexión, y causado por la flexión y el cortante. Considere $E = 3G$.



Prob. 14-111

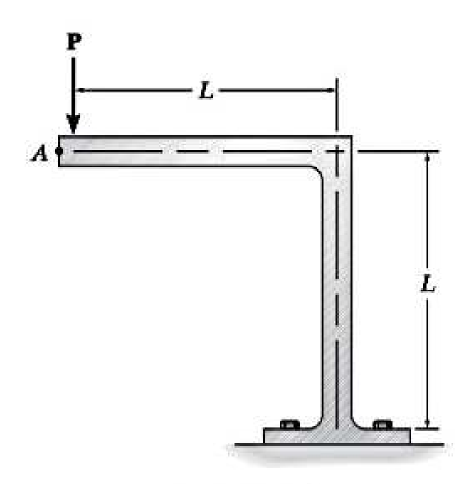
*14-112. El bastidor está fabricado de dos segmentos, cada uno con longitud L y rigidez a la flexión EI. Si se somete a la carga uniforme distribuida, determine el desplazamiento vertical del punto C. Considere sólo el efecto de la flexión.

•14-113. El bastidor está fabricado de dos segmentos, cada uno con longitud L y rigidez a la flexión EI. Si se somete a la carga uniforme distribuida, determine el desplazamiento horizontal del punto B. Considere sólo el efecto de la flexión.



Probs. 14-112/113

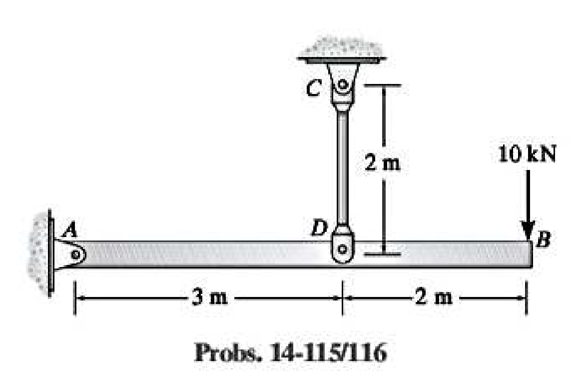
14-114. Determine el desplazamiento vertical del punto A de la ménsula en escuadra debido a la fuerza concentrada **P**. La ménsula está conectada fijamente a su soporte. EI es constante. Considere sólo el efecto de la flexión.



Prob. 14-114

14-115. La viga AB tiene una sección transversal cuadrada de 100 por 100 mm. La barra CD tiene un diámetro de 10 mm. Si ambos miembros están fabricados de acero A-36, determine el desplazamiento vertical del punto B debido a la carga de 10 kN.

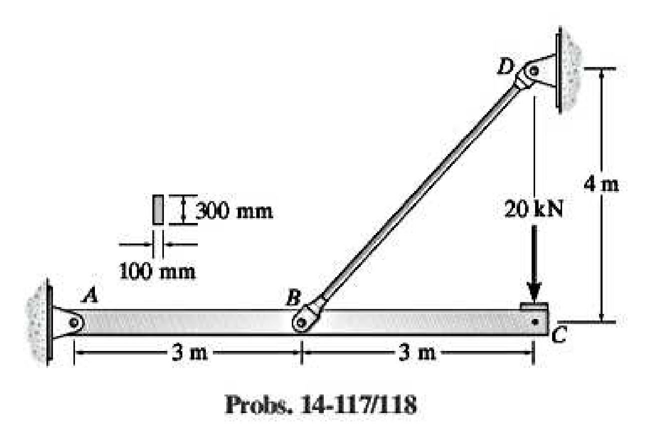
***14-116.** La viga AB tiene una sección transversal cuadrada de 100 por 100 mm. La barra CD tiene un diámetro de 10 mm. Si ambos miembros son de acero A-36, determine la pendiente en A debida a la carga de 10 kN.



Probs. 14-115/116

14-117. La barra ABC tiene una sección transversal rectangular de 300 por 100 mm. El tirante DB tiene un diámetro de 20 mm. Si ambos miembros son de acero A-36, determine el desplazamiento vertical del punto C debido a la carga. Considere sólo el efecto de la flexión en ABC y de la fuerza axial en DB.

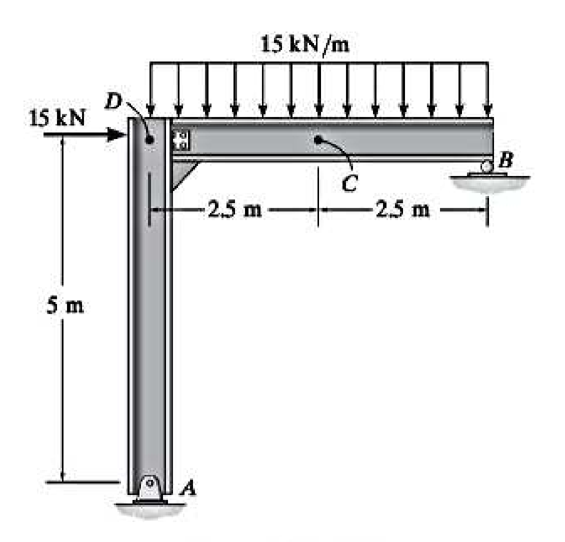
14-118. La barra ABC tiene una sección transversal rectangular de 300 por 100 mm. El tirante DB tiene un diámetro de 20 mm. Si ambos miembros son de acero A-36, determine la pendiente en A debida a la carga. Considere sólo el efecto de la flexión en ABC y de la fuerza axial en DB.



Probs. 14-117/118

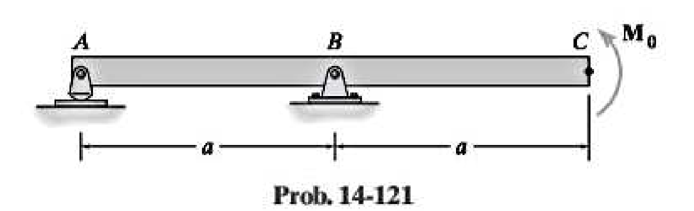
14-119. Determine el desplazamiento vertical del punto C. El bastidor se hizo usando secciones W250 × 45 de acero A-36. Considere sólo los efectos de la flexión.

***14-120.** Determine el desplazamiento horizontal del extremo B. El bastidor se hizo usando secciones W250 × 45 de acero A-36. Considere sólo los efectos de la flexión.



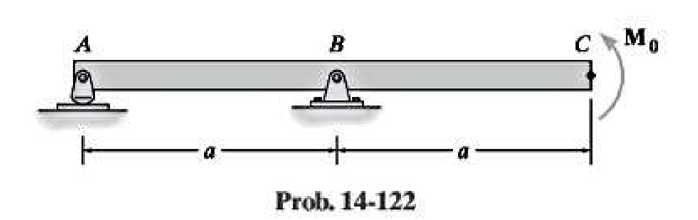
Probs. 14-119/120

•**14-121.** Determine el desplazamiento en el punto C. EI es constante.



Prob. 14-121

14-122. Determine la pendiente en B. EI es constante.



Prob. 14-122

*14.8 Teorema de Castigliano

En 1879, Alberto Castigliano, un ingeniero ferroviario italiano, publicó un libro en el que describía un método para determinar el desplazamiento y la pendiente en un punto de un cuerpo. Este método, que se conoce como el segundo teorema de Castigliano, sólo es aplicable a los cuerpos que tienen temperatura constante y que están fabricados de un material que se comporta en forma elástico lineal. Si debe determinarse el desplazamiento en un punto, el teorema establece que el desplazamiento es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en el cuerpo, con respecto a una fuerza que actúa en el punto y en la dirección del desplazamiento. De manera similar, la pendiente de la tangente en un punto de un cuerpo es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación en el cuerpo con respecto a un momento de par que actúa en el punto y en la dirección del ángulo de la pendiente.

14

Para obtener el segundo teorema de Castigliano, considere un cuerpo de forma arbitraria, que se somete a una serie de n fuerzas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \ldots, \mathbf{P}_n$, figura 14-38. De acuerdo con la conservación de la energía, el trabajo externo realizado por estas fuerzas es igual a la energía de deformación interna almacenada en el cuerpo. Sin embargo, el trabajo externo está en función de las cargas externas, $U_e = \Sigma \int P\,dx$, ecuación 14-1, por lo que el trabajo interno también es una función de las cargas externas. Así,

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad (14\text{-}42)$$

Ahora bien, si cualquiera de las fuerzas externas, por ejemplo P_j, se incrementa en una cantidad diferencial dP_j, el trabajo interno también se incrementará, de forma que la energía de deformación se convierte en

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_j} dP_j \qquad (14\text{-}43)$$

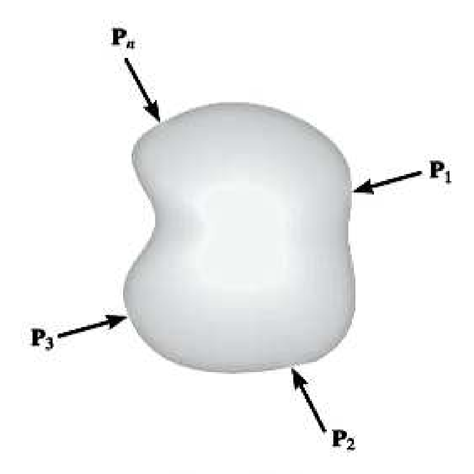


Figura 14-38

Sin embargo, este valor no dependerá de la secuencia en la que se apliquen las n fuerzas al cuerpo. Por ejemplo, *primero* podría aplicarse $d\mathbf{P}_j$ al cuerpo, después aplicar las cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$. En este caso, $d\mathbf{P}_j$ haría que el cuerpo se desplazara una cantidad diferencial $d\Delta_j$ en la dirección de $d\mathbf{P}_j$. Por la ecuación 14-2 ($U_e = \frac{1}{2}P_j\Delta_j$), el incremento de la energía de deformación sería $\frac{1}{2}dP_j d\Delta_j$. Sin embargo, esta cantidad es un diferencial de segundo orden y puede pasarse por alto. Además, la aplicación de las cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ causa que $d\mathbf{P}_j$ se mueva a través del desplazamiento Δ_j de modo que ahora la energía de deformación se convierte en

$$U_i + dU_i = U_i + dP_j\,\Delta_j \qquad (14\text{-}44)$$

Aquí, como antes, U_i es la energía de deformación interna en el cuerpo causada por las cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ y $dP_j\Delta_j$ es la energía de deformación *adicional* causada por $d\mathbf{P}_j$.

En resumen, la ecuación 14-43 representa la energía de deformación en el cuerpo determinada al aplicar primero las cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ y después $d\mathbf{P}_j$; la ecuación 14-44 representa la energía de deformación determinada al aplicar primero $d\mathbf{P}_j$ y después las cargas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$. Como estas dos ecuaciones deben ser iguales, se requiere

$$\Delta_j = \frac{\partial U_i}{\partial P_j} \qquad (14\text{-}45)$$

lo que comprueba el teorema; es decir, el desplazamiento Δ_j en la dirección de $\mathbf{P}_j$ es igual a la primera derivada parcial de la energía de deformación con respecto a $\mathbf{P}_j$.

El segundo teorema de Castigliano, ecuación 14-45, es una declaración sobre los *requisitos de compatibilidad* del cuerpo, puesto que es una condición relacionada con el desplazamiento. Además, la derivación anterior requiere que *sólo* se consideren *las fuerzas conservadoras* en el análisis. Estas fuerzas pueden aplicarse en cualquier orden y, además, realizan un trabajo que es independiente de la trayectoria y, por lo tanto, no crean pérdidas de energía. Siempre que el material tenga un comportamiento elástico lineal, las fuerzas aplicadas serán conservativas y el teorema será válido. El primer teorema de Castigliano es similar al segundo; sin embargo, relaciona la carga P_j con la derivada parcial de la energía de deformación con respecto al desplazamiento correspondiente, es decir, $P_j = \partial U_i/\partial\Delta_j$. La comprobación es similar a la dada anteriormente. Este teorema es otra forma de expresar los *requisitos de equilibrio* para el cuerpo; sin embargo, tiene una aplicación limitada por lo que no se analizará aquí.

*14.9 Teorema de Castigliano aplicado a armaduras

Como un elemento de una armadura sólo se somete a una carga axial, la energía de deformación para el elemento está dada por la ecuación 14-16, $U_i = N^2L/2AE$. Si se sustituye esta ecuación en la ecuación 14-45 y se omite el subíndice i, resulta

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\sum \frac{N^2L}{2AE}$$

Por lo general resulta más fácil hacer la diferenciación antes de la sumatoria. Además, L, A y E son constantes para un elemento dado y, por lo tanto, es posible escribir

$$\Delta = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} \qquad (14\text{-}46)$$

Aquí

Δ = desplazamiento de la junta en la armadura

P = una fuerza externa de *magnitud variable*, aplicada a la junta de la armadura en la dirección de Δ

N = fuerza axial interna en un elemento causada tanto por la fuerza **P** *como* por las cargas reales sobre la armadura

L = longitud de un elemento

A = área de la sección transversal de un elemento

E = módulo de elasticidad del material

Por comparación, la ecuación 14-46 es similar a la empleada para el método de las fuerzas virtuales, ecuación 14-37 ($1 \cdot \Delta = \Sigma nNL/AE$), excepto que n se sustituye por $\partial N/\partial P$. Estos términos, n y $\partial N/\partial P$, son los *mismos*, puesto que representan el cambio de la fuerza axial del elemento con respecto a la carga P o, en otras palabras, la fuerza axial por unidad de carga.

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para determinar el desplazamiento de cualquier junta en una armadura empleando el segundo teorema de Castigliano.

Fuerza externa *P*.

- Coloque una fuerza **P** sobre la armadura en la junta donde debe determinarse el desplazamiento. Se supone que esta fuerza tiene una *magnitud variable* y debe estar dirigida a lo largo de la línea de acción del desplazamiento.

14

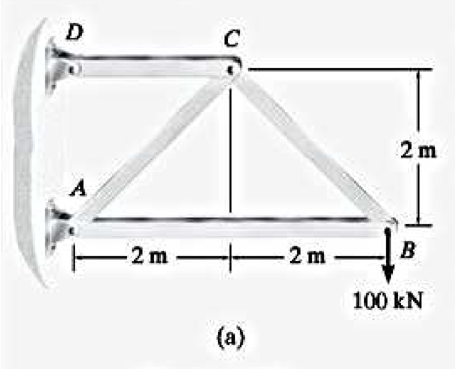
Fuerzas internas *N*.

- Determine la fuerza N en cada elemento en términos de las cargas reales (numéricas) y la fuerza P (variable). Suponga que las fuerzas de tensión son fuerzas positivas y las de compresión son negativas.
- Encuentre la derivada parcial respectiva $\partial N/\partial P$ para cada elemento.
- *Después* de determinar N y $\partial N/\partial P$, asigne a P su valor numérico si en realidad se ha reemplazado una fuerza real en la armadura. De lo contrario, establezca P igual a cero.

Segundo teorema de Castigliano.

- Aplique el segundo teorema de Castigliano para determinar el desplazamiento deseado Δ. Es importante mantener los signos algebraicos para los valores correspondientes de N y $\partial N/\partial P$ al sustituir estos términos en la ecuación.
- Si la suma resultante $\Sigma N(\partial N/\partial P)L/AE$ es positiva, Δ tiene la misma dirección que **P**. Si se produce un valor negativo, Δ es opuesto a **P**.

EJEMPLO 14.15



(a)

Figura. 14-39

Determine el desplazamiento vertical del nodo C en la armadura de acero que se muestra en la figura 14-39*a*. El área de la sección transversal de cada elemento es $A = 400\ \text{mm}^2$ y $E_{ac} = 200$ GPa.

SOLUCIÓN

Fuerza externa *P*. Se aplica una fuerza vertical **P** sobre la armadura en el nodo C, debido a que éste es el punto donde debe determinarse el desplazamiento vertical, figura 14-39*b*.

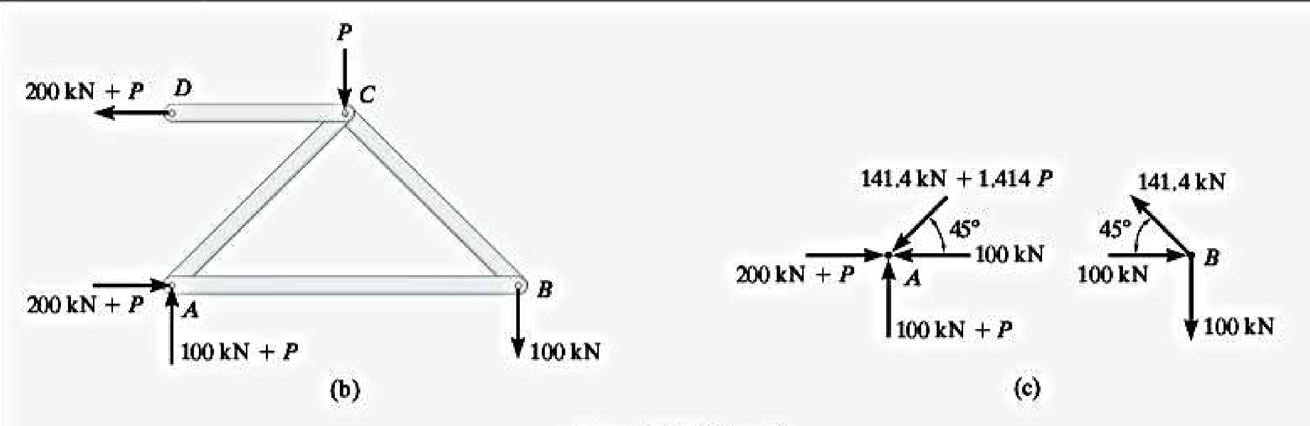


Figura 14-39 (cont.)

Fuerzas internas *N*. Se calculan las reacciones en los soportes A y D de la armadura y los resultados se muestran en la figura 14-39*b*. Empleando el método de nodos, se determinan las fuerzas N en cada elemento, figura 14-39*c*.* Por conveniencia, estos resultados junto con sus derivadas parciales $\partial N/\partial P$ se enlistan en una tabla. Observe que como **P** no existe como una carga real sobre la armadura, se requiere $P = 0$.

Elemento	N	$\dfrac{\partial N}{\partial P}$	$N(P = 0)$	L	$N\left(\dfrac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	-100	0	-100	4	0
BC	141.4	0	141.4	2.828	0
AC	$-(141.4 + 1.414P)$	-1.414	-141.4	2.828	565.7
CD	$200 + P$	1	200	2	400
					Σ 965.7 kN · m

Segundo teorema de Castigliano. Al aplicar la ecuación 14-46, se tiene

$$\Delta_{C_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{965.7\ \text{kN}\cdot\text{m}}{AE}$$

Al sustituir los valores numéricos de A y E, se obtiene

$$\Delta_{C_v} = \frac{965.7\ \text{kN}\cdot\text{m}}{[400(10^{-6})\ \text{m}^2]\,200(10^6)\ \text{kN/m}^2}$$
$$= 0.01207\ \text{m} = 12.1\ \text{mm} \qquad \textit{Resp.}$$

Esta solución debe compararse con la del ejemplo 14.11, donde se usó el método del trabajo virtual.

*Puede resultar más conveniente analizar la armadura sólo con la carga de 100 kN sobre ella, para después analizarla considerando la carga **P**. Los resultados pueden sumarse algebraicamente para obtener las fuerzas N.

PROBLEMAS

14-123. Resuelva el problema 14-72 usando el teorema de Castigliano.

***14-124.** Resuelva el problema 14-73 usando el teorema de Castigliano.

•14-125. Resuelva el problema 14-75 usando el teorema de Castigliano.

14-126. Resuelva el problema 14-76 usando el teorema de Castigliano.

14-127. Resuelva el problema 14-77 usando el teorema de Castigliano.

***14-128.** Resuelva el problema 14-78 usando el teorema de Castigliano.

•14-129. Resuelva el problema 14-79 usando el teorema de Castigliano.

14-130. Resuelva el problema 14-80 usando el teorema de Castigliano.

14-131. Resuelva el problema 14-81 usando el teorema de Castigliano.

***14-132.** Resuelva el problema 14-82 usando el teorema de Castigliano.

•14-133. Resuelva el problema 14-83 usando el teorema de Castigliano.

14-134. Resuelva el problema 14-84 usando el teorema de Castigliano.

*14.10 Teorema de Castigliano aplicado a vigas

La energía de deformación interna para una viga es causada tanto por la flexión como por el cortante. Sin embargo, como se señaló en el ejemplo 14.7, si la viga es larga y delgada, la energía de deformación debida al cortante puede pasarse por alto en comparación con la de flexión. Si se supone que éste es el caso, la energía de deformación interna para una viga está dada por $U_i = \int M^2\,dx/2EI$, ecuación 14-17. Al omitir el subíndice i, el segundo teorema de Castigliano, $\Delta_i = \partial U_i/\partial P_i$, se convierte en

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

En vez de elevar al cuadrado la expresión para el momento interno, integrar y después tomar la derivada parcial, suele ser más fácil diferenciar antes de la integración. Siempre que E e I sean constantes, se tiene

$$\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} \qquad (14\text{-}47)$$

Aquí

Δ = desplazamiento del punto causado por las cargas reales que actúan sobre la viga

P = una fuerza externa de *magnitud variable* aplicada a la viga en el punto y en la dirección de Δ

M = momento interno en la viga, expresado como una función de x y causado tanto por la fuerza P como por las cargas reales sobre la viga

E = módulo de elasticidad del material

I = momento de inercia de la sección transversal respecto al eje neutro

Si debe determinarse la pendiente de la tangente θ en un punto de la curva elástica, es necesario encontrar la derivada parcial del momento interno M con respecto a un *momento de par externo* M' que actúa en el punto. Para este caso,

$$\boxed{\theta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}} \qquad (14\text{-}48)$$

Las ecuaciones anteriores son similares a las usadas para el método de las fuerzas virtuales, ecuaciones 14-40 y 14-41, excepto que m y m_θ se sustituyen por $\partial M/\partial P$ y $\partial M/\partial M'$, respectivamente.

Además, si las cargas axial, cortante y de torsión causan una energía de deformación significativa en el elemento, los efectos de todas estas cargas deben incluirse al aplicar el teorema de Castigliano. Para hacer esto, deben usarse las funciones de la energía de deformación desarrolladas en la sección 14.2, junto con sus derivadas parciales asociadas. El resultado es

$$\Delta = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} + \int_0^L f_s V\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)\frac{dx}{GA} + \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} + \int_0^L T\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\frac{dx}{GJ} \qquad (14\text{-}49)$$

El método para aplicar esta formulación general es similar al usado para aplicar las ecuaciones 14-47 y 14-48.

14

Procedimiento de análisis

El siguiente procedimiento proporciona un método que puede usarse para aplicar el segundo teorema de Castigliano.

Fuerza externa P o momento de par M'.

- Coloque una fuerza **P** sobre la viga en el punto y dirigido a lo largo de la línea de acción del desplazamiento deseado.
- Si debe determinarse la pendiente de la tangente en el punto, coloque un momento de par **M′** en el punto.
- Suponga que **P** y **M′** tienen magnitudes variables.

Momentos internos M.

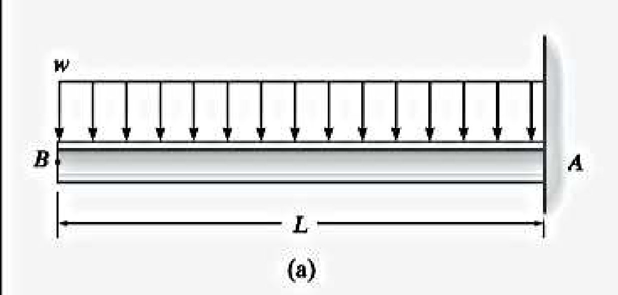
- Establezca coordenadas x adecuadas que sean válidas dentro de las regiones de la viga donde no hay discontinuidad de la fuerza, la carga distribuida o el momento de par.
- Determine los momentos internos M como una función de x, las cargas reales (numéricas) y P o M', y después encuentre las derivadas parciales $\partial M/\partial P$ o $\partial M/\partial M'$ para cada coordenada x.
- *Después* de determinar M y $\partial M/\partial P$ o $\partial M/\partial M'$, asigne a P o M' su valor numérico si en realidad se ha reemplazado una fuerza o momento de par real. De lo contrario, establezca P o M' igual a cero.

Segundo teorema de Castigliano.

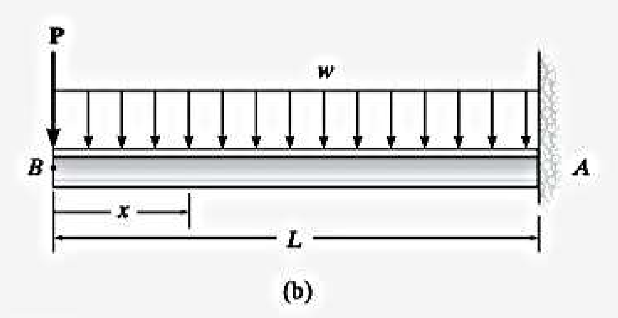
- Aplique la ecuación 14-47 o 14-48 para determinar el desplazamiento deseado Δ o θ. Es importante mantener los signos algebraicos de los valores correspondientes de M y $\partial M/\partial P$ o $\partial M/\partial M'$.
- Si la suma resultante de todas las integrales definidas es positiva, Δ o θ tiene la misma dirección que **P** o **M′**. Si resulta un valor negativo, Δ o θ es opuesto a **P** o **M′**.

EJEMPLO 14.16

Determine el desplazamiento del punto B en la viga mostrada en la figura 14-40*a*. EI es constante.



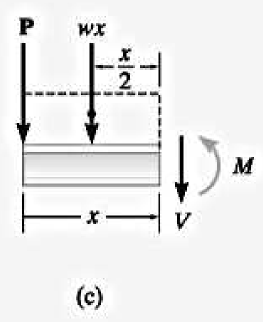
(a)



(b)

Figura 14-40

SOLUCIÓN



(c)

Fuerza externa P. Se coloca una fuerza vertical **P** sobre la viga en B como se muestra en la figura 14-40*b*.

Momentos internos M. Para obtener la solución sólo se requiere una sola coordenada x, ya que no hay discontinuidades de carga entre A y B. Usando el método de las secciones, figura 14-40*c*, el momento interno y su derivada parcial se determinan de la siguiente manera:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) + P(x) = 0$$

$$M = -\frac{wx^2}{2} - Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Si se establece $P = 0$ resulta

$$M = \frac{-wx^2}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

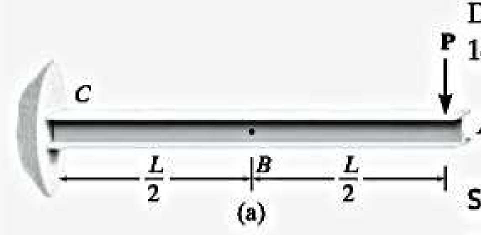
Segundo teorema de Castigliano. Al aplicar la ecuación 14-47, se tiene

$$\Delta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^L \frac{(-wx^2/2)(-x)\,dx}{EI}$$

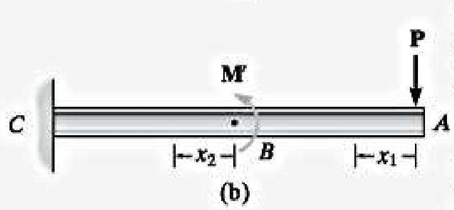
$$= \frac{wL^4}{8EI} \qquad \textit{Resp.}$$

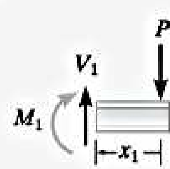
Debe observarse la similitud entre esta solución y la del método del trabajo virtual, ejemplo 14.13.

EJEMPLO 14.17



Determine la pendiente en el punto B de la viga mostrada en la figura 14-41a. EI es constante.





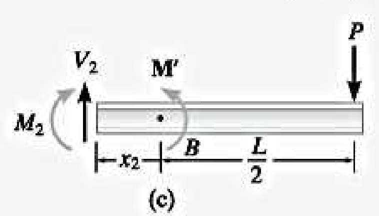


Figura 14-41

SOLUCIÓN

Momento de par externo M′. Como debe determinarse la pendiente en el punto B, se coloca un momento de par externo $\mathbf{M}'$ sobre la viga en este punto, figura 14-41b.

Momentos internos M. Deben usarse dos coordenadas, x_1 y x_2, para describir por completo los momentos internos dentro de la viga, ya que hay una discontinuidad, $\mathbf{M}'$, en B. Como se muestra en la figura 14-41b, x_1 va desde A hasta B y x_2 va desde B hasta C. Usando el método de las secciones, figura 14-41c, los momentos internos y las derivadas parciales para x_1 y x_2 se determinan de la siguiente manera:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M_1 = -Px_1, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial M'} = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M_2 = M' - P\left(\frac{L}{2} + x_2\right), \qquad \frac{\partial M_2}{\partial M'} = 1$$

Segundo teorema de Castigliano. Si se establece $M' = 0$ y se aplica la ecuación 14-48, resulta

$$\theta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{L/2}\frac{(-Px_1)(0)\,dx_1}{EI} + \int_0^{L/2}\frac{-P[(L/2) + x_2](1)\,dx_2}{EI} = -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textit{Resp.}$$

Observe la similitud entre esta solución y la del ejemplo 14.14.

PROBLEMAS

14-135. Resuelva el problema 14-87 usando el teorema de Castigliano.

***14-136.** Resuelva el problema 14-88 usando el teorema de Castigliano.

***14-137.** Resuelva el problema 14-90 usando el teorema de Castigliano.

14-138. Resuelva el problema 14-92 usando el teorema de Castigliano.

14-139. Resuelva el problema 14-93 usando el teorema de Castigliano.

***14-140.** Resuelva el problema 14-96 usando el teorema de Castigliano.

14-141. Resuelva el problema 14-97 usando el teorema de Castigliano.

14-142. Resuelva el problema 14-98 usando el teorema de Castigliano.

14-143. Resuelva el problema 14-112 usando el teorema de Castigliano.

***14-144.** Resuelva el problema 14-114 usando el teorema de Castigliano.

•14-145. Resuelva el problema 14-121 usando el teorema de Castigliano.

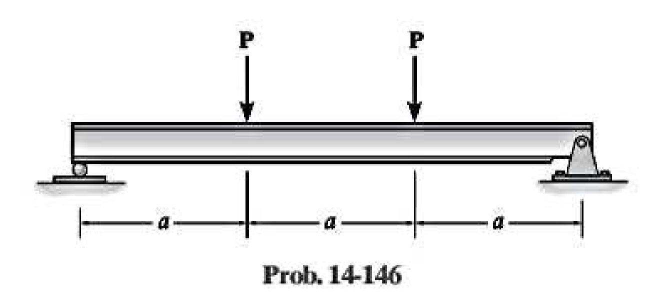
REPASO DE CAPÍTULO

Cuando una fuerza (momento de par) actúa sobre un cuerpo deformable que realizará un trabajo externo mientras se desplaza (rota). Los esfuerzos internos producidos en el cuerpo también experimentan desplazamientos, lo que crea una energía de deformación elástica que se almacena en el material. La conservación de la energía establece que el trabajo externo realizado por la carga es igual a la energía de deformación elástica interna producida por los esfuerzos en el cuerpo.	$U_e = U_i$
La conservación de la energía puede usarse para resolver problemas de impacto elástico, los cuales suponen que el cuerpo en movimiento es rígido y que toda la energía de deformación se almacena en el cuerpo inmóvil. Esto conduce al uso de un factor de impacto n, que es una relación de la carga dinámica sobre la carga estática. Se emplea para determinar el esfuerzo y el desplazamiento máximos del cuerpo en el punto de impacto.	$n = 1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}$ $\sigma_{máx} = n\sigma_{est}$ $\Delta_{máx} = n\Delta_{est}$
El principio del trabajo virtual puede usarse para determinar el desplazamiento de una junta en una armadura o la pendiente y el desplazamiento de puntos en una viga. Esto requiere colocar una fuerza unitaria virtual externa (momento de par unitario virtual) en el punto donde debe determinarse el desplazamiento (rotación). Después, el trabajo virtual externo que se produce por la carga externa se iguala a la energía de deformación virtual interna en la estructura.	$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$ $1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$ $1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx$
El segundo teorema de Castigliano también puede usarse para determinar el desplazamiento de una junta sobre una armadura o la pendiente y el desplazamiento en un punto de una viga. Aquí, se coloca una fuerza variable P (momento de par M') en el punto donde debe determinarse el desplazamiento (la pendiente). La carga interna se determina en función de P (M') y se encuentra su derivada parcial con respecto a P (M'). Luego se aplica el segundo teorema de Castigliano a fin de obtener el desplazamiento deseado (la rotación deseada).	$\Delta = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}$ $\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$ $\theta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}$

14

PROBLEMAS DE REPASO

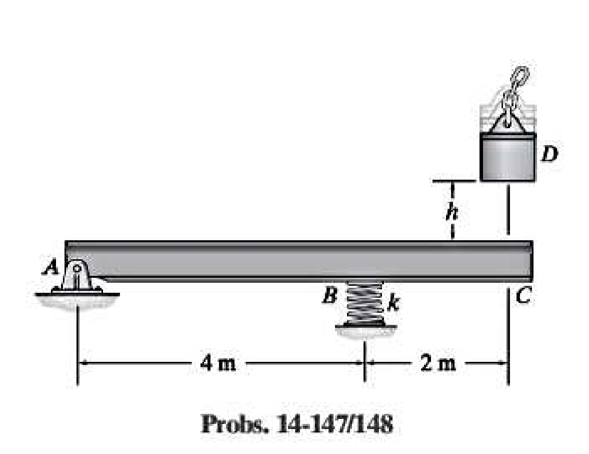
14-146. Determine la energía de deformación flexionante en la viga debida a las cargas mostradas. EI es constante.



Prob. 14-146

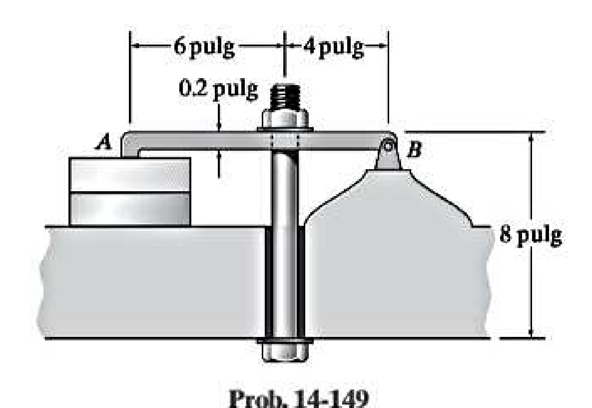
14-147. El bloque D de 200 kg se deja caer desde una altura $h = 1$ m sobre el extremo C con voladizo de la viga W200×36 de acero A-36. Si el resorte en B tiene una rigidez $k = 200$ kN/m, determine el esfuerzo flexionante máximo desarrollado en la viga.

***14-148.** Determine la altura máxima h desde la que puede dejarse caer el bloque D de 200 kg sin causar la cedencia de la viga con voladizo W200×36 de acero A-36. El resorte en B tiene una rigidez $k = 200$ kN/m.



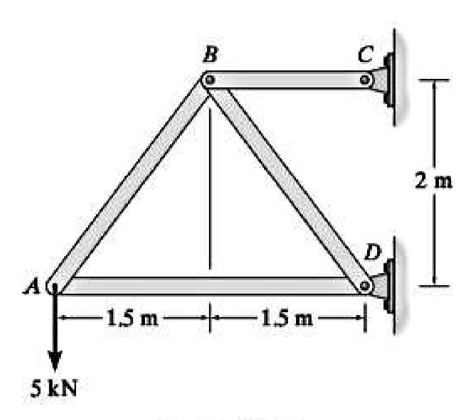
Probs. 14-147/148

•**14-149.** El perno de acero L2 tiene un diámetro de 0.25 pulg y el eslabón AB tiene una sección transversal rectangular con 0.5 pulg de anchura por 0.2 pulg de grosor. Determine la energía de deformación en el eslabón AB debida a la flexión, y en el perno debido a la fuerza axial. El perno se aprieta de modo que tiene una tensión de 350 lb. No tome en cuenta el orificio en el eslabón.



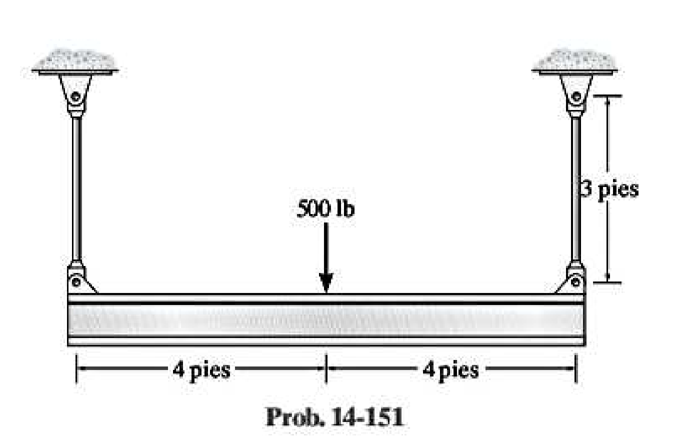
Prob. 14-149

14-150. Determine el desplazamiento vertical de la junta A. Cada barra es de acero A-36 y tiene una sección transversal de 600 mm^2. Use la conservación de la energía.



Prob. 14-150

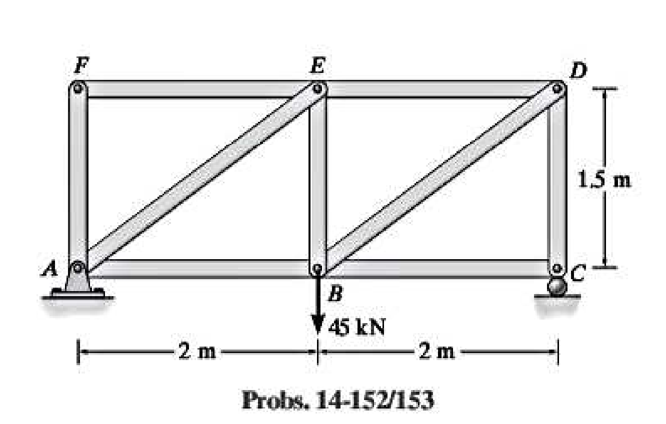
14-151. Determine la energía de deformación total en el ensamble de acero A-36. Considere la energía de deformación axial en las dos barras de 0.5 pulg de diámetro y la energía de deformación flexionante en la viga para la cual $I = 43.4$ pulg^4.



Prob. 14-151

*14-152. Determine el desplazamiento vertical del nodo E. Para cada elemento, $A = 400$ mm^2 y $E = 200$ GPa. Use el método del trabajo virtual.

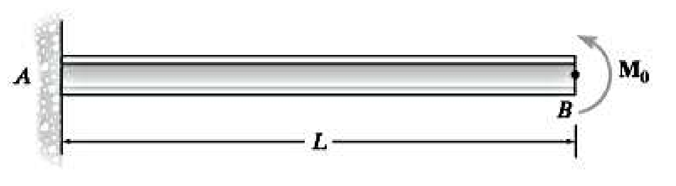
•14-153. Resuelva el problema 14-152 usando el teorema de Castigliano.



Probs. 14-152/153

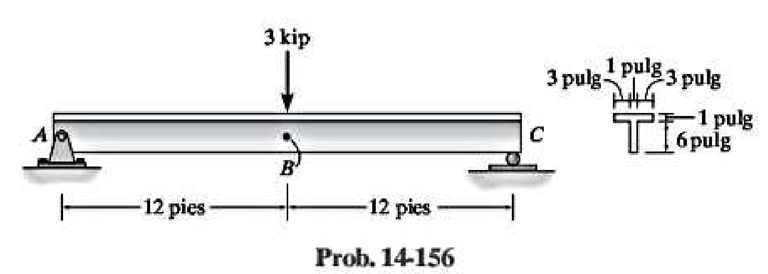
14-154. La viga en voladizo está sometida a un momento de par $\mathbf{M}_0$ que se aplica en su extremo. Determine la pendiente de la viga en B. EI es constante. Use el método del trabajo virtual.

14-155. Resuelva el problema 14-154 usando el teorema de Castigliano.



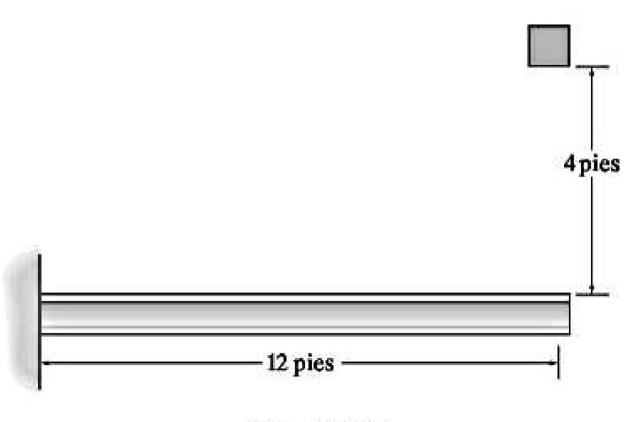
Probs. 14-154/155

*14-156. Determine el desplazamiento del punto B en la viga de aluminio. $E_{al} = 10.6(10^3)$ ksi. Use la conservación de la energía.



Prob. 14-156

14-157. Un peso de 20 lb se deja caer desde una altura de 4 pies sobre el extremo de una viga en voladizo de acero A-36. Si la viga tiene una sección W12 × 50, determine el esfuerzo máximo desarrollado en la viga.



Prob. 14-157



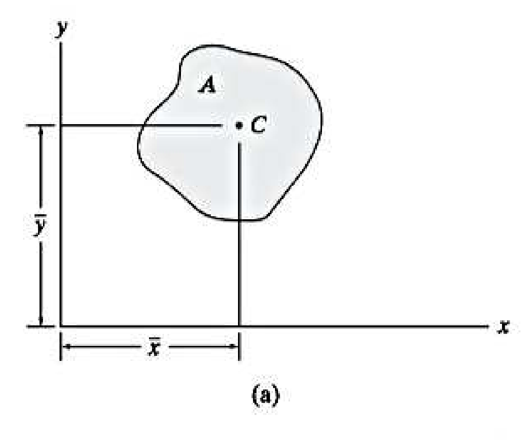
Propiedades geométricas de un área

A.1 Centroide de un área

El ***centroide*** de un área se refiere al punto que define el centro geométrico del área. Si el área tiene una forma arbitraria, como se muestra en la figura A-1*a*, las coordenadas *x* y *y* que definen la ubicación del centroide *C* se determinan mediante las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA} \tag{A-1}$$

Los numeradores de estas ecuaciones son formulaciones del "primer momento" del elemento de área dA respecto a los ejes *y* y *x*, respectivamente, figura A-1*b*; los denominadores representan el área total *A* de la figura.



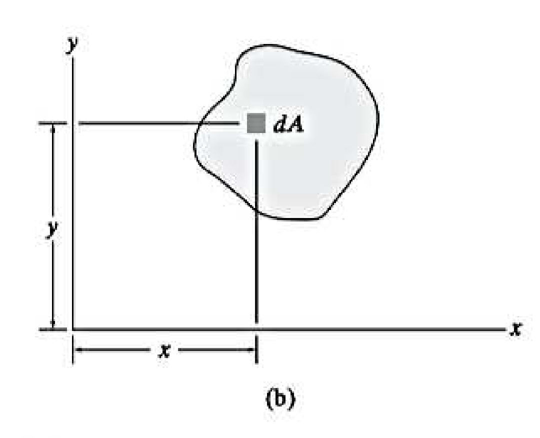


Figura A-1

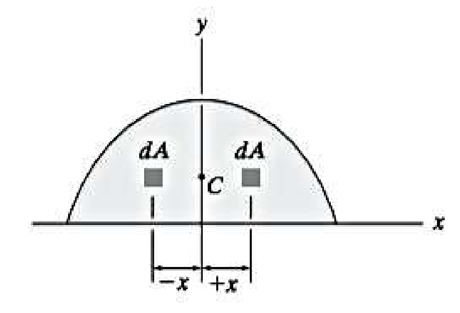


Figura A-2

La ubicación del centroide para algunas áreas puede especificarse parcial o totalmente mediante el uso de las condiciones de simetría. En los casos donde el área tiene un eje de simetría, el centroide del área se encuentra a lo largo de este eje. Por ejemplo, el centroide C del área que se muestra en la figura A-2 debe encontrarse a lo largo del eje y, puesto que para cada área elemental dA a una distancia $+x$ hacia la derecha del eje y, existe un elemento idéntico a una distancia $-x$ hacia la izquierda. Por lo tanto, el momento total de todos los elementos respecto al eje de simetría se cancela; es decir, $\int x\,dA = 0$ (ecuación A-1), de modo que $\bar{x} = 0$. En los casos donde una figura tiene dos ejes de simetría, se deduce que el centroide se encuentra en la intersección de estos ejes, figura A-3. En la parte interior de la portada de este libro se presentan las ubicaciones del centroide para las áreas con figuras comunes, determinadas con base en el principio de simetría, o usando la ecuación A-1.

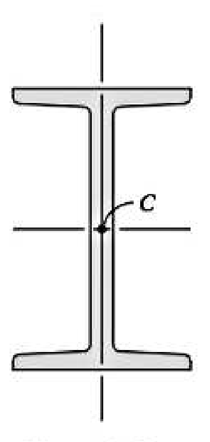


Figura A-3

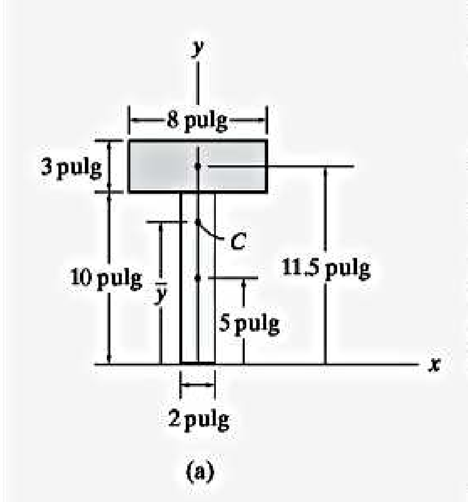
Áreas compuestas. A menudo, un área puede seccionarse o dividirse en varias partes que tienen figuras más simples. Siempre que se conozca el área y la ubicación del centroide de cada una de estas "figuras compuestas", es posible evitar la necesidad de integrar para determinar el centroide de toda el área. En este caso deben usarse ecuaciones análogas a la ecuación A.1, con la excepción de que los signos de integral se sustituyen por signos de sumatoria finita; es decir,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} \tag{A-2}$$

Aquí $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ representan las *distancias algebraicas* o coordenadas x, y para el centroide de cada parte compuesta y ΣA representa la suma de las áreas de las partes compuestas o simplemente el *área total*. En particular, si un orificio o una región geométrica que no tiene material se encuentra dentro de una parte compuesta, el orificio se considera como una parte compuesta adicional que tiene un área *negativa*. Además, como se mencionó anteriormente, si el área total es simétrica respecto a un eje, el centroide del área se encuentra en el eje.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de la ecuación A-2.

EJEMPLO A.1



(a)

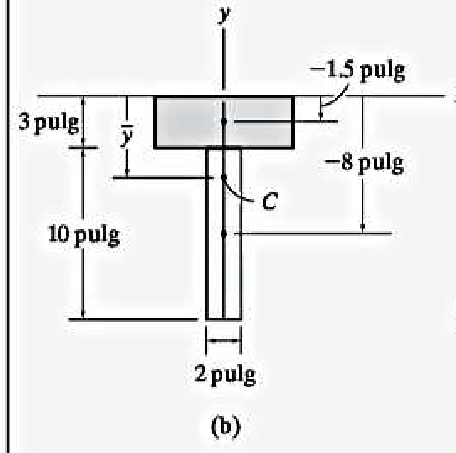
Localice el centroide C del área de la sección transversal de la viga T que se muestra en la figura A-4*a*.

SOLUCIÓN I

El eje y se ubica a lo largo del eje de simetría de modo que $\bar{x} = 0$, figura A-4*a*. Para obtener $\bar{y}$ se establecerá el eje x (eje de referencia) a través de la base del área. Como se muestra en la figura, el área se segmenta en dos rectángulos y se establece la ubicación $\bar{y}$ del centroide para cada uno de ellos. Al aplicar la ecuación A-2, se tiene

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[5 \text{ pulg}](10 \text{ pulg})(2 \text{ pulg}) + [11.5 \text{ pulg}](3 \text{ pulg})(8 \text{ pulg})}{(10 \text{ pulg})(2 \text{ pulg}) + (3 \text{ pulg})(8 \text{ pulg})}$$

$$= 8.55 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$



(b)

SOLUCIÓN II

Si se emplean los mismos dos segmentos, el eje x puede localizarse en la parte superior del área, figura A-4*b*. Aquí

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[-1.5 \text{ pulg}](3 \text{ pulg})(8 \text{ pulg}) + [-8 \text{ pulg}](10 \text{ pulg})(2 \text{ pulg})}{(3 \text{ pulg})(8 \text{ pulg}) + (10 \text{ pulg})(2 \text{ pulg})}$$

$$= -4.45 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que C se encuentra por *debajo* del eje x, como era de esperarse. También observe que con base en las dos respuestas 8.55 pulg + 4.45 pulg = 13.0 pulg, que es el peralte de la viga.

SOLUCIÓN III

También es posible considerar el área de la sección transversal como un rectángulo grande *menos* dos rectángulos pequeños de color gris claro que se muestran en la figura A-4*c*. Aquí se tiene

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[6.5 \text{ pulg}](13 \text{ pulg})(8 \text{ pulg}) - 2[5 \text{ pulg}](10 \text{ pulg})(3 \text{ pulg})}{(13 \text{ pulg})(8 \text{ pulg}) - 2(10 \text{ pulg})(3 \text{ pulg})}$$

$$= 8.55 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

(c)

Figura A-4

A.2 Momento de inercia de un área

A menudo, el momento de inercia de un área aparece en las fórmulas que se usan en la mecánica de materiales. Es una propiedad geométrica que se calcula respecto a un eje, y para los ejes x y y mostrados en la figura A-5, se define como

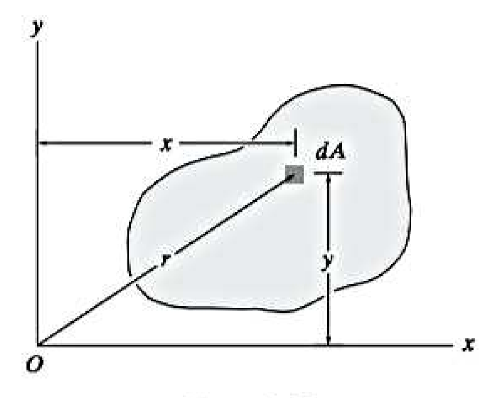


Figura A-5

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$
$$I_y = \int_A x^2\, dA \qquad \text{(A-3)}$$

Estas integrales no tienen sentido físico, pero se llaman así porque tienen una formulación semejante a la del momento de inercia de una masa, que es una propiedad dinámica de la materia.

También es posible calcular el momento de inercia de un área respecto al polo O o el eje z, figura A-5. Esto se conoce como el *momento polar de inercia*,

$$J_O = \int_A r^2\, dA = I_x + I_y \qquad \text{(A-4)}$$

Aquí r es la distancia perpendicular desde el polo (eje z) hasta el elemento dA. Es posible relacionar a J_O con I_x, I_y puesto que $r^2 = x^2 + y^2$, figura A-5.

De las formulaciones anteriores se observa que I_x, I_y y J_O *siempre* serán *positivos*, ya que incluyen el producto de la distancia al cuadrado y el área. Además, las unidades para el momento de inercia implican longitud elevada a la cuarta potencia, por ejemplo m^4, mm^4 o pie^4, pulg^4.

En la portada interior de este libro se presentan los momentos de inercia para algunas áreas con figuras comunes, los cuales se han calculado respecto a su *eje centroidal* empleando las ecuaciones anteriores.

Teorema de los ejes paralelos para un área. Si se conoce el momento de inercia de un área respecto a un eje centroidal, es posible determinar el momento de inercia del área respecto a un eje paralelo correspondiente usando el *teorema de los ejes paralelos*. Para obtener este teorema, considere la determinación del momento de inercia del área de color gris oscuro que se muestra en la figura A-6 respecto al eje x. En este caso, un elemento diferencial dA se encuentra a una distancia y' arbitraria del eje centroidal x', mientras que la *distancia fija* entre los ejes paralelos

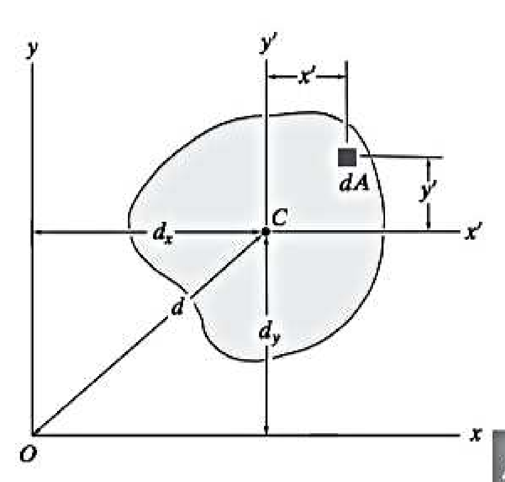


Figura A-6

x y x' es d_y. Como el momento de inercia de dA respecto al eje x es $dI_x = (y' + d_y)^2\,dA$, entonces para toda el área,

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2\,dA = \int_A y'^2\,dA + 2d_y \int_A y'\,dA + d_y^2 \int_A dA$$

El primer término de la derecha representa el momento de inercia del área respecto al eje x', $\bar{I}_{x'}$. El segundo término es cero porque el eje x'pasa a través de centroide C del área, es decir, $\int y'\,dA = \bar{y}'A = 0$, ya que $\bar{y}' = 0$. Por lo tanto, el resultado final es

$$\boxed{I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2} \qquad \text{(A-5)}$$

Es posible escribir una expresión similar para I_y, es decir,

$$\boxed{I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2} \qquad \text{(A-6)}$$

Y, por último, para el momento polar de inercia respecto a un eje perpendicular al plano x-y, que pasa por el polo O (eje z), figura A-6, se tiene

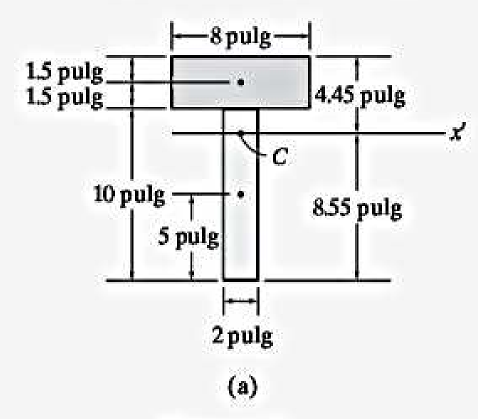
$$\boxed{J_O = \bar{J}_C + Ad^2} \qquad \text{(A-7)}$$

La forma de cada una de las ecuaciones anteriores establece que *el momento de inercia de un área respecto a un eje es igual al momento de inercia del área alrededor de un eje paralelo que pasa por el "centroide" más el producto del área y el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes.*

Áreas compuestas. Muchas áreas transversales consisten en una serie de figuras simples conectadas, tales como rectángulos, triángulos y semicírculos. Con el fin de determinar adecuadamente el momento de inercia de esa área respecto a un eje determinado, primero es necesario dividir el área en sus partes componentes e indicar la distancia perpendicular del eje al eje centroidal paralelo para cada parte. El momento de inercia de cada parte se determina respecto al eje centroidal con base en la tabla que se encuentra en la parte interior de la contraportada de este libro. Si este eje no coincide con el eje especificado, debe usarse el teorema de los ejes paralelos, $I = \bar{I} + Ad^2$, a fin de determinar el momento de inercia de la parte respecto al eje especificado. El momento de inercia de toda el área alrededor de este eje se determina mediante la suma de los resultados de sus partes componentes. En particular, si una parte compuesta tiene un "orificio", el momento de inercia para el área compuesta se encuentra al "restar" el momento de inercia para el orificio del momento de inercia de toda el área incluyendo al orificio.

EJEMPLO A.2

Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga T mostrada en la figura A-7a respecto al eje centroidal x'.



(a)

Figura A-7

SOLUCIÓN I

El área se divide en dos rectángulos como se muestra en la figura A-7*a*, y se determina la distancia desde el eje x' hasta cada eje centroidal. Con base en la tabla de la parte interior de la contraportada de este libro, el momento de inercia de un rectángulo respecto a su eje centroidal es $I = \frac{1}{12}bh^3$. Al aplicar el teorema de los ejes paralelos en cada rectángulo, ecuación A-5, y al sumar los resultados, se tiene

$$I = \Sigma(\bar{I}_{x'} + Ad_y^2)$$

$$= \left[\frac{1}{12}(2\text{ pulg})(10\text{ pulg})^3 + (2\text{ pulg})(10\text{ pulg})(8.55\text{ pulg} - 5\text{ pulg})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(8\text{ pulg})(3\text{ pulg})^3 + (8\text{ pulg})(3\text{ pulg})(4.45\text{ pulg} - 1.5\text{ pulg})^2\right]$$

$$I = 646\text{ pulg}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

SOLUCIÓN II

El área puede considerarse como un rectángulo grande menos dos rectángulos pequeños, que se muestran de color gris claro en la figura A-7*b*. Se tiene

$$I = \Sigma(\bar{I}_{x'} + Ad_y^2)$$

$$= \left[\frac{1}{12}(8\text{ pulg})(13\text{ pulg})^3 + (8\text{ pulg})(13\text{ pulg})(8.55\text{ pulg} - 6.5\text{ pulg})^2\right]$$

$$- 2\left[\frac{1}{12}(3\text{ pulg})(10\text{ pulg})^3 + (3\text{ pulg})(10\text{ pulg})(8.55\text{ pulg} - 5\text{ pulg})^2\right]$$

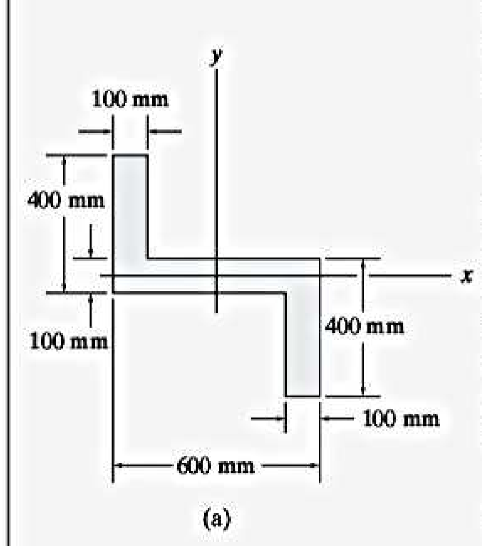
$$I = 646\text{ pulg}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

4.45 pulg
x'
C
13 pulg
10 pulg
8.55 pulg
6.5 pulg
5 pulg
3 pulg 2 pulg 3 pulg

(b)

A

EJEMPLO A.3



(a)

Determine los momentos de inercia del área de la sección transversal de la viga mostrada en la figura A-8*a*, respecto a los ejes centroidales *x* y *y*.

SOLUCIÓN

Puede considerarse que la sección transversal está compuesta por tres áreas rectangulares *A*, *B* y *D*, que se muestran en la figura A-8*b*. Para realizar el cálculo, en la figura se ubica el centroide de cada uno de estos rectángulos. Con base en la tabla de la parte interior de la contraportada, el momento de inercia de un rectángulo respecto a su eje centroidal es $I = \frac{1}{12}bh^3$. Por lo tanto, si se usa el teorema de los ejes paralelos para los rectángulos *A* y *D*, los cálculos son como sigue:

Rectángulo *A*:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(300\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(200\text{ mm})^2$$
$$= 1.425(10^9)\text{ mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300\text{ mm})(100\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(250\text{ mm})^2$$
$$= 1.90(10^9)\text{ mm}^4$$

Rectángulo *B*:

$$I_x = \frac{1}{12}(600\text{ mm})(100\text{ mm})^3 = 0.05(10^9)\text{ mm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(600\text{ mm})^3 = 1.80(10^9)\text{ mm}^4$$

(b)

Figura A-8

Rectángulo *D*:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(300\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(200\text{ mm})^2$$
$$= 1.425(10^9)\text{ mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300\text{ mm})(100\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(250\text{ mm})^2$$
$$= 1.90(10^9)\text{ mm}^4$$

Así, los momentos de inercia para toda la sección transversal son

$$I_x = 1.425(10^9) + 0.05(10^9) + 1.425(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

$$I_y = 1.90(10^9) + 1.80(10^9) + 1.90(10^9)$$
$$= 5.60(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

A.3 Producto de inercia para un área

En general, el momento de inercia de un área es diferente para cada eje respecto el cual se calcula. En algunas aplicaciones de diseño mecánico o estructural, es necesario conocer la orientación de los ejes que dan, respectivamente, los momentos de inercia máximo y mínimo para el área. El método con el que se determina esto se analiza en la sección A.4. Sin embargo, para utilizar este método primero debe determinarse el producto de inercia del área, así como sus momentos de inercia para los ejes x y y dados.

El ***producto de inercia*** del área A mostrada en la figura A-9 se define como

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA \tag{A-8}$$

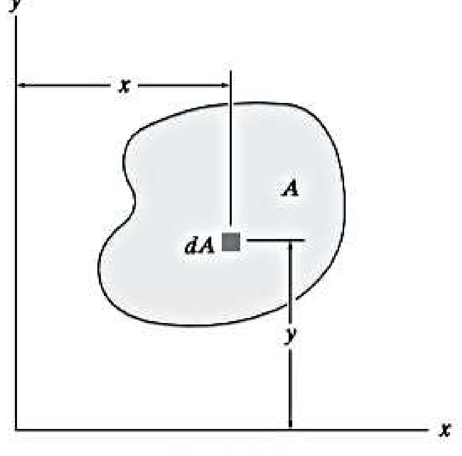


Figura A-9

Al igual que el momento de inercia, el producto de inercia tiene unidades de longitud elevadas a la cuarta potencia, por ejemplo m^4, mm^4 o pie^4, $pulg^4$. Sin embargo, como x o y puede ser una cantidad negativa, mientras que dA es siempre positiva, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de la ubicación y orientación de los ejes de coordenadas. Por ejemplo, el producto de inercia I_{xy} para un área será *cero* si el eje x o y es un eje de *simetría* para el área. Para mostrar esto, considere el área sombreada en la figura A-10, donde para cada elemento dA ubicado en el punto (x, y) hay un elemento dA correspondiente situado en $(x, -y)$. Como los productos de inercia para estos elementos son, respectivamente, $xy\, dA$ y $-xy\, dA$, su suma algebraica o la integración de todos los elementos del área elegida de esta manera se anulan entre sí. En consecuencia, el producto de inercia para el área total se convierte en cero.

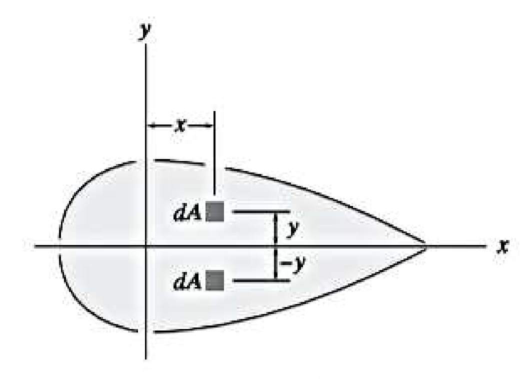


Figura A-10

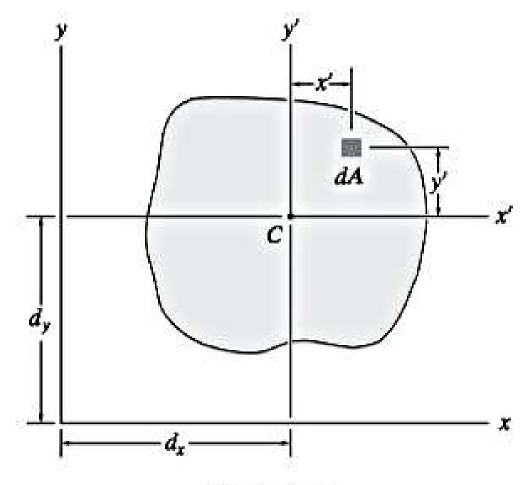


Figura A-11

Teorema de los ejes paralelos. Considere la zona de color gris oscuro que se muestra en la figura A-11, donde x' y y' representan un conjunto de ejes centroidales, y x y y representan un conjunto correspondiente de ejes paralelos. Como el producto de inercia de dA con respecto a los ejes x y y es $dI_{xy} = (x' + d_x)(y' + d_y)\, dA$, entonces para toda el área,

$$I_{xy} = \int_A (x' + d_x)(y' + d_y)\, dA$$
$$= \int_A x'y'\, dA + d_x \int_A y'\, dA + d_y \int_A x'\, dA + d_x d_y \int_A dA$$

El primer término de la derecha representa el producto de inercia del área con respecto al eje centroidal, $\bar{I}_{x'y'}$. Los términos segundo y tercero son iguales a cero ya que los momentos del área se toman respecto al eje centroidal. Por lo tanto, tomando en cuenta que la cuarta integral representa el área total A, se tiene

$$\boxed{I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y} \qquad \text{(A-9)}$$

Debe considerarse la similitud entre esta ecuación y el teorema de los ejes paralelos para los momentos de inercia. En particular, aquí resulta importante mantener los *signos algebraicos* para d_x y d_y al aplicar la ecuación A-9.

A

EJEMPLO A.4

Determine el producto de inercia del área de la sección transversal de la viga que se muestra en la figura A-12*a*, respecto a los ejes centroidales *x* y *y*.

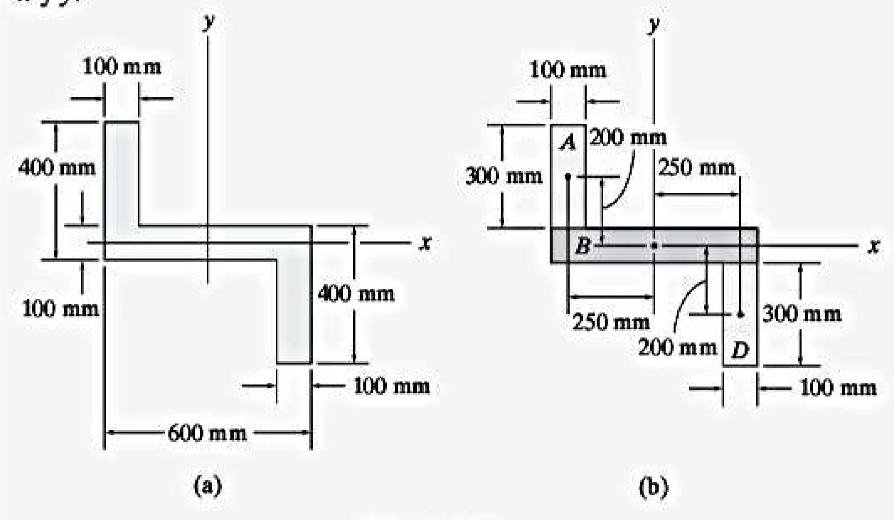


Figura A-12

SOLUCIÓN

Al igual que en el ejemplo A.3, puede considerarse que la sección transversal se compone de tres áreas rectangulares *A*, *B* y *D*, figura A-12*b*. Las coordenadas para el centroide de cada uno de estos rectángulos se muestran en la figura. Debido a la simetría, el producto de inercia de *cada rectángulo* es *igual a cero* respecto a un conjunto de ejes x', y' que pasan por el centroide del rectángulo. Por lo tanto, al aplicar del teorema de los ejes paralelos para cada uno de los rectángulos se obtiene

Rectángulo *A*:

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + Ad_xd_y \\
&= 0 + (300\text{ mm})(100\text{ mm})(-250\text{ mm})(200\text{ mm}) \\
&= -1.50(10^9)\text{ mm}^4
\end{aligned}
$$

Rectángulo *B*:

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= \bar{I}_{x'y} + Ad_xd_y \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Rectángulo *D*:

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= I_{x'y} + Ad_xd_y \\
&= 0 + (300\text{ mm})(100\text{ mm})(250\text{ mm})(-200\text{ mm}) \\
&= -1.50(10^9)\text{ mm}^4
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, el producto de inercia de toda la sección transversal es

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= [-1.50(10^9)\text{ mm}^4] + 0 + [-1.50(10^9)\text{ mm}^4] \\
&= -3.00(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Resp.}
\end{aligned}
$$

A.4 Momentos de inercia para un área respecto a ejes inclinados

En el diseño mecánico o estructural, en ocasiones es necesario calcular los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ para un área con respecto a un conjunto de ejes inclinados x' y y' cuando los valores de θ, I_x, I_y e I_{xy} son *conocidos*. Como se muestra en la figura A-13, las coordenadas del elemento de área dA desde cada uno de los dos sistemas de coordenadas se relacionan mediante las *ecuaciones de transformación*

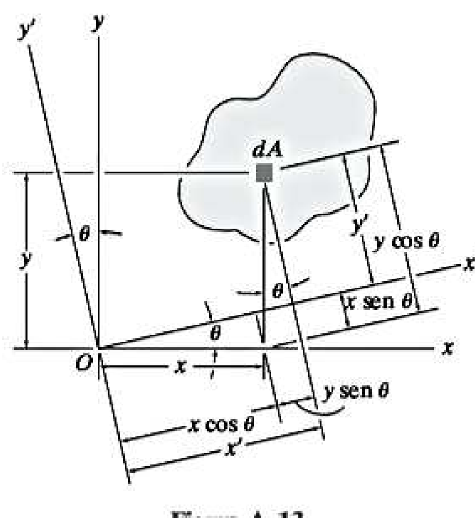


Figura A-13

$$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Usando estas ecuaciones, los momentos y el producto de inercia de dA respecto a los ejes x' y y' se convierten en

$$dI_{x'} = y'^2\,dA = (y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,dA$$
$$dI_{y'} = x'^2\,dA = (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,dA$$
$$dI_{x'y'} = x'y'\,dA = (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)(y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)\,dA$$

Si se expande cada expresión y se integra, tomando en cuenta que $I_x = \int y^2\,dA$, $I_y = \int x^2\,dA$, e $I_{xy} = \int xy\,dA$, se obtiene

$$I_{x'} = I_x\cos^2\theta + I_y\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 2I_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$I_{y'} = I_x\,\mathrm{sen}^2\,\theta + I_y\cos^2\theta + 2I_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$I_{x'y'} = I_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - I_y\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse usando las identidades trigonométricas $2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta$, en cuyo caso

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$
$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta \qquad \text{(A-10)}$$
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Momentos de inercia principales. Observe que $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ dependen del ángulo de inclinación, θ, de los ejes x', y'. Ahora se determinará la orientación de estos ejes respecto a los cuales los momentos de inercia para el área, $I_{x'}$ e $I_{y'}$, son máximo y mínimo. Este conjunto particular de ejes se llama ***ejes principales*** de inercia para el área, y los momentos de inercia correspondientes con respecto a estos ejes se llaman *momentos de inercia principales*. En general, hay un conjunto de ejes principales para cualquier origen O elegido; sin embargo, en la mecánica de materiales el centroide del área es la ubicación más importante para O.

El ángulo $\theta = \theta_p$, que define la orientación de los ejes principales para el área, puede encontrarse al diferenciar la primera ecuación A-10 con respecto a θ y al igualar el resultado a cero. Así,

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Por lo tanto, en $\theta = \theta_{p'}$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} \qquad \text{(A-11)}$$

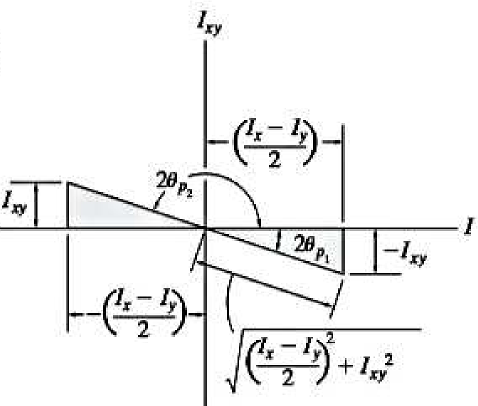


Figura A-14

Esta ecuación tiene dos raíces, θ_{p_1} y θ_{p_2}, que están separadas por 90° y así se especifica la inclinación de cada eje principal.

El seno y el coseno de $2\theta_{p_1}$ y $2\theta_{p_2}$ pueden obtenerse de los triángulos mostrados en la figura A-14, que se basan en la ecuación A-11. Si estas relaciones trigonométricas se sustituyen en la primera o segunda ecuación A-10 y se simplifica, el resultado es

$$I_{\substack{\text{máx} \\ \text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad \text{(A-12)}$$

Dependiendo del signo elegido, este resultado proporciona el momento de inercia máximo o mínimo para el área. Por otra parte, si las relaciones trigonométricas anteriores θ_{p_1} y θ_{p_2} se sustituyen en la tercera ecuación A-10, se verá que $I_{x'y'} = 0$; es decir, *el producto de inercia con respecto a los ejes principales es cero*. Como en la sección A.3 se indicó que el producto de inercia es cero con respecto a cualquier eje de simetría, entonces se deduce que *cualquier eje de simetría y el eje perpendicular a éste representan ejes principales de inercia para el área*. Asimismo, observe que las ecuaciones obtenidas en esta sección son similares a las de transformación del esfuerzo y la deformación desarrolladas en los capítulos 9 y 10, respectivamente.

A

EJEMPLO A.5

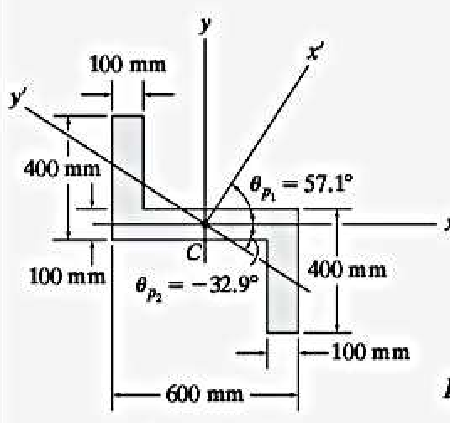


Figura A-15

Determine los momentos de inercia principales para el área de la sección transversal de la viga mostrada en la figura A-15, con respecto a un eje que pasa por el centroide *C*.

SOLUCIÓN

Los momentos y el producto de la inercia de la sección transversal con respecto a los ejes *x*, *y* se determinaron en los ejemplos A.3 y A.4. Los resultados son

$$I_x = 2.90(10^9)\text{ mm}^4 \qquad I_y = 5.60(10^9)\text{ mm}^4 \qquad I_{xy} = -3.00(10^9)\text{ mm}^4$$

Si se usa la ecuación A-11, los ángulos de inclinación de los ejes principales x' y y' son

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{3.00(10^9)}{[2.90(10^9) - 5.60(10^9)]/2} = -2.22$$

$$2\theta_{p_1} = 114.2° \qquad \text{y} \qquad 2\theta_{p_2} = -65.8°$$

Por lo tanto, como se muestra en la figura A-15,

$$\theta_{p_1} = 57.1° \qquad \text{y} \qquad \theta_{p_2} = -32.9°$$

Los momentos de inercia principales con respecto a los ejes x' y y' se determinan mediante el uso de la ecuación A-12.

$$I_{\substack{\text{máx}\\ \text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{2.90(10^9) + 5.60(10^9)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{2.90(10^9) - 5.60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3.00(10^9)]^2}$$

$$= 4.25(10^9) \pm 3.29(10^9)$$

o

$$I_{\text{máx}} = 7.54(10^9)\text{ mm}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 0.960(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

En específico, el momento de inercia máximo, $I_{\text{máx}} = 7.54(10^9)\text{ mm}^4$, se produce con respecto al eje x' (eje mayor), puesto que *por inspección* la mayor parte del área transversal está alejada de este eje. Para mostrar lo anterior, sustituya los datos por $\theta = 57.1°$ en la primera ecuación A-10.

A.5 Círculo de Mohr para momentos de inercia

Las ecuaciones A-10 a A-12 tienen una solución semigráfica cuyo uso es conveniente y en general es fácil de recordar. Al elevar al cuadrado la primera y la tercera ecuación A-10 y sumarlas, se comprueba que

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \qquad \text{(A-13)}$$

En cualquier problema dado, $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ son *variables*, e I_x I_y e I_{xy} son *constantes conocidas*. Por lo tanto, la ecuación anterior puede escribirse en forma compacta como

$$(I_{x'} - a)^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

Cuando se grafica esta ecuación, la gráfica resultante representa un *círculo* de radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

y que tiene su centro ubicado en el punto $(a, 0)$, donde $a = (I_x + I_y)/2$. El círculo construido de esta manera se llama *círculo de Mohr*. Su aplicación es similar al que se usa para la transformación del esfuerzo y la deformación desarrollados en los capítulos 9 y 10, respectivamente.

Procedimiento de análisis

Aquí, el propósito principal del uso del círculo de Mohr es tener un medio conveniente para transformar I_x I_y e I_{xy} en los momentos de inercia principales para el área. El siguiente procedimiento proporciona un método para hacer esto.

Calculo de I_x, I_y, I_{xy}.

Establezca los ejes x, y para el área, con el origen situado en el punto P de interés, por lo general el centroide, y determine I_x I_y e I_{xy}, figura A-16*a*.

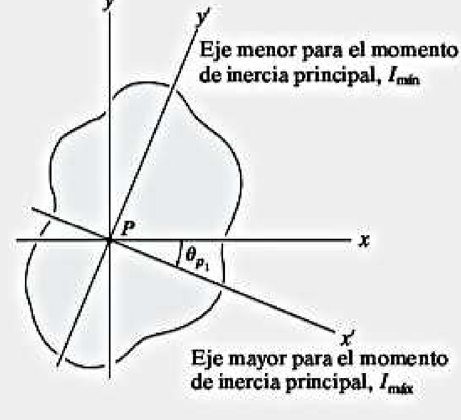
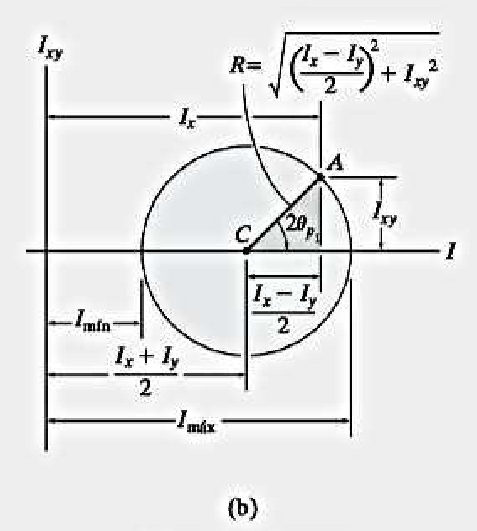


Figura A-16 (a)

Procedimiento de análisis (continuación)

Construcción del círculo.

Establezca un sistema de coordenadas rectangulares de modo que el eje horizontal represente el momento de inercia I, y el eje vertical represente el producto de inercia I_{xy}, figura A-16*b*. Determine el centro del círculo, C, que se encuentra a una distancia $(I_x + I_y)/2$ desde el origen y grafique el "punto de referencia" A que tiene coordenadas (I_x, I_{xy}). Por definición, I_x siempre es positivo, mientras que I_{xy} puede ser positivo o negativo. Conecte el punto de referencia A con el centro del círculo y determine la distancia CA mediante trigonometría. Esta distancia representa el radio del círculo, figura A-16*b*. Por último, dibuje el círculo.



(b)

Figura A-16 (cont.)

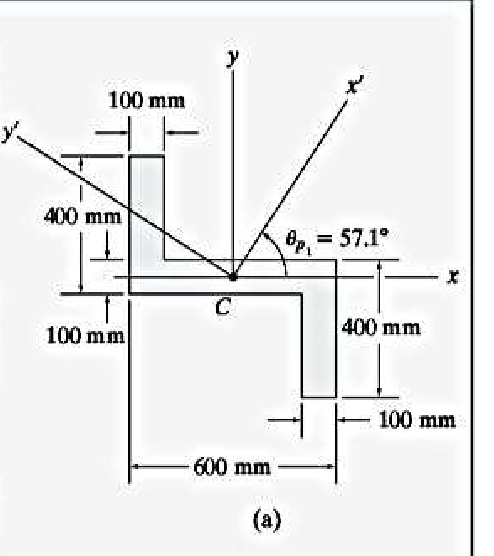
Momentos de inercia principales.

Los puntos donde el círculo interseca al eje I dan los valores de los momentos de inercia principales $I_{mín}$ e $I_{máx}$. Aquí el *producto de inercia será cero en estos puntos*, figura A-16*b*.

Para encontrar la orientación del eje principal mayor, determine mediante trigonometría el ángulo $2\theta_{p_1}$, *medido desde el radio CA hasta el eje I positivo*, figura A-16*b*. Este ángulo representa el doble del ángulo desde el eje x hasta el eje del momento de inercia máximo $I_{máx}$, figura A-16*a*. Tanto el ángulo en el círculo, $2\theta_{p_1}$, como el ángulo en el área, θ_{p_1}, *deben medirse en el mismo sentido*, como se muestra en la figura A-16. El eje menor es para el momento de inercia mínimo $I_{mín}$, que siempre es perpendicular al eje mayor que define a $I_{máx}$.

EJEMPLO A.6

Use el círculo de Mohr para determinar los momentos de inercia principales para el área transversal de la viga, que se muestra en la figura A-17*a*, con respecto a los ejes principales que pasan por el centroide *C*.

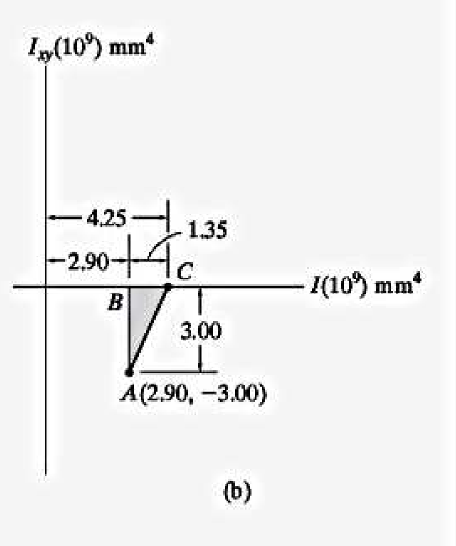


SOLUCIÓN

Cálculo de I_x, I_y, I_{xy}. Los momentos de inercia y el producto de inercia se determinaron en los ejemplos A.3 y A.4 con respecto a los ejes *x*, *y* que se muestran en la figura A-17*a*. Los resultados son $I_x = 2.90(10^9)$ mm⁴, $I_y = 5.60(10^9)$ mm⁴ e $I_{xy} = -3.00(10^9)$ mm⁴.

Construcción del círculo. Los ejes I e I_{xy} se muestran en la figura A-17*b*. El centro del círculo, *C*, se encuentra a una distancia $(I_x + I_y)/2 = (2.90 + 5.60)/2 = 4.25$ del origen. Cuando el punto de referencia *A*(2.90, −3.00) se conecta con el punto *C*, el radio *CA* se determina a partir del triángulo gris oscuro *CBA* usando el teorema de Pitágoras:

$$CA = \sqrt{(1.35)^2 + (-3.00)^2} = 3.29$$



El círculo se construye en la figura A-17*c*.

Momentos de inercia principales. El círculo interseca al eje *I* en los puntos (7.54, 0) y (0.960, 0). Por lo tanto,

$$I_{máx} = 7.54(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

$$I_{mín} = 0.960(10^9)\ \text{mm}^4 \qquad \textit{Resp.}$$

Como se muestra en la figura A-17*c*, el ángulo $2\theta_{p_1}$ se determina a partir del círculo midiendo *en sentido antihorario* desde *CA* hasta el eje *I positivo*. Por lo tanto,

$$2\theta_{p_1} = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{|BA|}{|BC|}\right) = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{3.00}{1.35}\right) = 114.2°$$

$$\theta_{p_1} = 57.1°$$

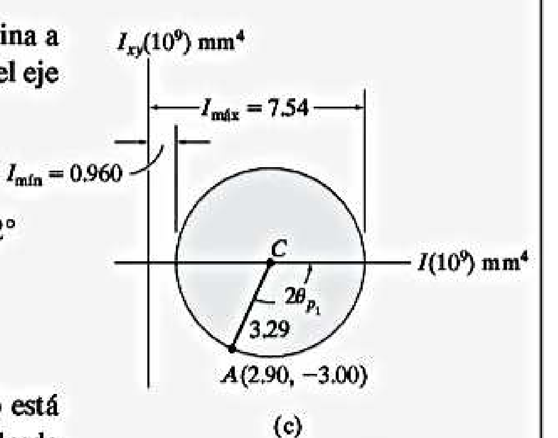


Figura A-17

Por lo tanto, el eje principal mayor (para $I_{máx} = 7.54(10^9)$ mm⁴) está orientado a un ángulo $\theta_{p_1} = 57.1°$, medido *en sentido antihorario*, desde el eje *x positivo*. El eje menor es perpendicular a dicho eje. Los resultados se muestran en la figura A-17*a*.

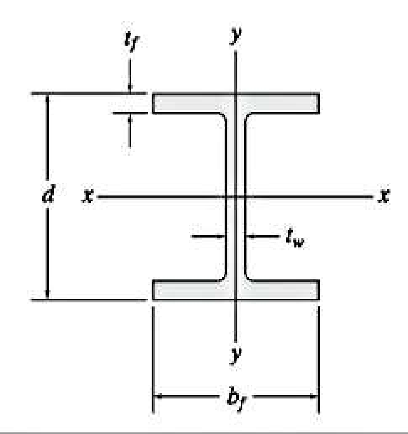
APÉNDICE

B

Propiedades geométricas de perfiles estructurales

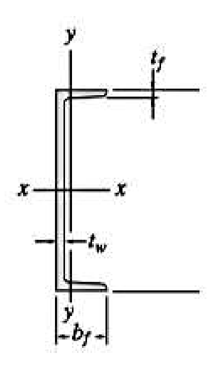
Secciones I de ala ancha o perfiles W — Unidades PLS

Designación	Área A	Peralte d	Grosor del alma t_w	Ala anchura b_f	Ala grosor t_f	Eje x-x I	Eje x-x S	Eje x-x r	Eje y-y I	Eje y-y S	Eje y-y r
pulg × lb/pie	pulg^2	pulg	pulg	pulg	pulg	pulg^4	pulg^3	pulg	pulg^4	pulg^3	pulg
W24 × 104	30.6	24.06	0.500	12.750	0.750	3100	258	10.1	259	40.7	2.91
W24 × 94	27.7	24.31	0.515	9.065	0.875	2700	222	9.87	109	24.0	1.98
W24 × 84	24.7	24.10	0.470	9.020	0.770	2370	196	9.79	94.4	20.9	1.95
W24 × 76	22.4	23.92	0.440	8.990	0.680	2100	176	9.69	82.5	18.4	1.92
W24 × 68	20.1	23.73	0.415	8.965	0.585	1830	154	9.55	70.4	15.7	1.87
W24 × 62	18.2	23.74	0.430	7.040	0.590	1550	131	9.23	34.5	9.80	1.38
W24 × 55	16.2	23.57	0.395	7.005	0.505	1350	114	9.11	29.1	8.30	1.34
W18 × 65	19.1	18.35	0.450	7.590	0.750	1070	117	7.49	54.8	14.4	1.69
W18 × 60	17.6	18.24	0.415	7.555	0.695	984	108	7.47	50.1	13.3	1.69
W18 × 55	16.2	18.11	0.390	7.530	0.630	890	98.3	7.41	44.9	11.9	1.67
W18 × 50	14.7	17.99	0.355	7.495	0.570	800	88.9	7.38	40.1	10.7	1.65
W18 × 46	13.5	18.06	0.360	6.060	0.605	712	78.8	7.25	22.5	7.43	1.29
W18 × 40	11.8	17.90	0.315	6.015	0.525	612	68.4	7.21	19.1	6.35	1.27
W18 × 35	10.3	17.70	0.300	6.000	0.425	510	57.6	7.04	15.3	5.12	1.22
W16 × 57	16.8	16.43	0.430	7.120	0.715	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
W16 × 50	14.7	16.26	0.380	7.070	0.630	659	81.0	6.68	37.2	10.5	1.59
W16 × 45	13.3	16.13	0.345	7.035	0.565	586	72.7	6.65	32.8	9.34	1.57
W16 × 36	10.6	15.86	0.295	6.985	0.430	448	56.5	6.51	24.5	7.00	1.52
W16 × 31	9.12	15.88	0.275	5.525	0.440	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
W16 × 26	7.68	15.69	0.250	5.500	0.345	301	38.4	6.26	9.59	3.49	1.12
W14 × 53	15.6	13.92	0.370	8.060	0.660	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
W14 × 43	12.6	13.66	0.305	7.995	0.530	428	62.7	5.82	45.2	11.3	1.89
W14 × 38	11.2	14.10	0.310	6.770	0.515	385	54.6	5.87	26.7	7.88	1.55
W14 × 34	10.0	13.98	0.285	6.745	0.455	340	48.6	5.83	23.3	6.91	1.53
W14 × 30	8.85	13.84	0.270	6.730	0.385	291	42.0	5.73	19.6	5.82	1.49
W14 × 26	7.69	13.91	0.255	5.025	0.420	245	35.3	5.65	8.91	3.54	1.08
W14 × 22	6.49	13.74	0.230	5.000	0.335	199	29.0	5.54	7.00	2.80	1.04



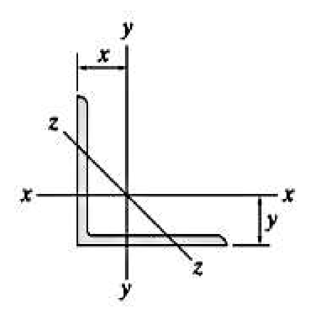
Secciones I de ala ancha o perfiles W Unidades PLS

Designación	Área A	Peralte d	Grosor del alma t_w	Ala: anchura b_f	Ala: grosor t_f	Eje x-x: I	Eje x-x: S	Eje x-x: r	Eje y-y: I	Eje y-y: S	Eje y-y: r
pulg × lb/pie	pulg^2	pulg	pulg	pulg	pulg	pulg^4	pulg^3	pulg	pulg^4	pulg^3	pulg
W12 × 87	25.6	12.53	0.515	12.125	0.810	740	118	5.38	241	39.7	3.07
W12 × 50	14.7	12.19	0.370	8.080	0.640	394	64.7	5.18	56.3	13.9	1.96
W12 × 45	13.2	12.06	0.335	8.045	0.575	350	58.1	5.15	50.0	12.4	1.94
W12 × 26	7.65	12.22	0.230	6.490	0.380	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51
W12 × 22	6.48	12.31	0.260	4.030	0.425	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.847
W12 × 16	4.71	11.99	0.220	3.990	0.265	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.773
W12 × 14	4.16	11.91	0.200	3.970	0.225	88.6	14.9	4.62	2.36	1.19	0.753
W10 × 100	29.4	11.10	0.680	10.340	1.120	623	112	4.60	207	40.0	2.65
W10 × 54	15.8	10.09	0.370	10.030	0.615	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56
W10 × 45	13.3	10.10	0.350	8.020	0.620	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
W10 × 39	11.5	9.92	0.315	7.985	0.530	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98
W10 × 30	8.84	10.47	0.300	5.810	0.510	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
W10 × 19	5.62	10.24	0.250	4.020	0.395	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874
W10 × 15	4.41	9.99	0.230	4.000	0.270	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810
W10 × 12	3.54	9.87	0.190	3.960	0.210	53.8	10.9	3.90	2.18	1.10	0.785
W8 × 67	19.7	9.00	0.570	8.280	0.935	272	60.4	3.72	88.6	21.4	2.12
W8 × 58	17.1	8.75	0.510	8.220	0.810	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10
W8 × 48	14.1	8.50	0.400	8.110	0.685	184	43.3	3.61	60.9	15.0	2.08
W8 × 40	11.7	8.25	0.360	8.070	0.560	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04
W8 × 31	9.13	8.00	0.285	7.995	0.435	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02
W8 × 24	7.08	7.93	0.245	6.495	0.400	82.8	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61
W8 × 15	4.44	8.11	0.245	4.015	0.315	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876
W6 × 25	7.34	6.38	0.320	6.080	0.455	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52
W6 × 20	5.87	6.20	0.260	6.020	0.365	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50
W6 × 16	4.74	6.28	0.260	4.030	0.405	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.966
W6 × 15	4.43	5.99	0.230	5.990	0.260	29.1	9.72	2.56	9.32	3.11	1.46
W6 × 12	3.55	6.03	0.230	4.000	0.280	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918
W6 × 9	2.68	5.90	0.170	3.940	0.215	16.4	5.56	2.47	2.19	1.11	0.905

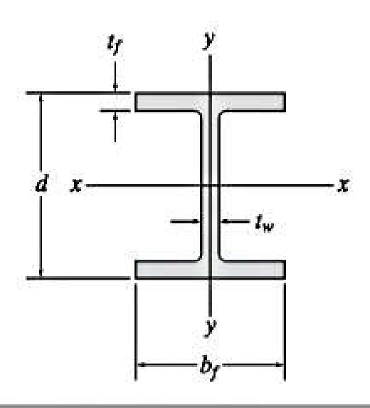


Canales estándar estadounidenses o perfiles C Unidades PLS

Designación	Área A	Peralte d	Grosor del alma t_w		Ala: anchura b_f		Ala: grosor t_f		Eje x-x: I	Eje x-x: S	Eje x-x: r	Eje y-y: I	Eje y-y: S	Eje y-y: r
pulg × lb/pie	$pulg^2$	pulg	pulg		pulg		pulg		$pulg^4$	$pulg^3$	pulg	$pulg^4$	$pulg^3$	pulg
C15 × 50	14.7	15.00	0.716	11/16	3.716	$3\frac{3}{4}$	0.650	5/8	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867
C15 × 40	11.8	15.00	0.520	1/2	3.520	$3\frac{1}{2}$	0.650	5/8	349	46.5	5.44	9.23	3.37	0.886
C15 × 33.9	9.96	15.00	0.400	3/8	3.400	$3\frac{3}{8}$	0.650	5/8	315	42.0	5.62	8.13	3.11	0.904
C12 × 30	8.82	12.00	0.510	1/2	3.170	$3\frac{1}{8}$	0.501	1/2	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763
C12 × 25	7.35	12.00	0.387	3/8	3.047	3	0.501	1/2	144	24.1	4.43	4.47	1.88	0.780
C12 × 20.7	6.09	12.00	0.282	5/16	2.942	3	0.501	1/2	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799
C10 × 30	8.82	10.00	0.673	11/16	3.033	3	0.436	7/16	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669
C10 × 25	7.35	10.00	0.526	1/2	2.886	$2\frac{7}{8}$	0.436	7/16	91.2	18.2	3.52	3.36	1.48	0.676
C10 × 20	5.88	10.00	0.379	3/8	2.739	$2\frac{3}{4}$	0.436	7/16	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.692
C10 × 15.3	4.49	10.00	0.240	1/4	2.600	$2\frac{5}{8}$	0.436	7/16	67.4	13.5	3.87	2.28	1.16	0.713
C9 × 20	5.88	9.00	0.448	7/16	2.648	$2\frac{5}{8}$	0.413	7/16	60.9	13.5	3.22	2.42	1.17	0.642
C9 × 15	4.41	9.00	0.285	5/16	2.485	$2\frac{1}{2}$	0.413	7/16	51.0	11.3	3.40	1.93	1.01	0.661
C9 × 13.4	3.94	9.00	0.233	1/4	2.433	$2\frac{3}{8}$	0.413	7/16	47.9	10.6	3.48	1.76	0.962	0.669
C8 × 18.75	5.51	8.00	0.487	1/2	2.527	$2\frac{1}{2}$	0.390	3/8	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599
C8 × 13.75	4.04	8.00	0.303	5/16	2.343	$2\frac{3}{8}$	0.390	3/8	36.1	9.03	2.99	1.53	0.854	0.615
C8 × 11.5	3.38	8.00	0.220	1/4	2.260	$2\frac{1}{4}$	0.390	3/8	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625
C7 × 14.75	4.33	7.00	0.419	7/16	2.299	$2\frac{1}{4}$	0.366	3/8	27.2	7.78	2.51	1.38	0.779	0.564
C7 × 12.25	3.60	7.00	0.314	5/16	2.194	$2\frac{1}{4}$	0.366	3/8	24.2	6.93	2.60	1.17	0.703	0.571
C7 × 9.8	2.87	7.00	0.210	3/16	2.090	$2\frac{1}{8}$	0.366	3/8	21.3	6.08	2.72	0.968	0.625	0.581
C6 × 13	3.83	6.00	0.437	7/16	2.157	$2\frac{1}{8}$	0.343	5/16	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525
C6 × 10.5	3.09	6.00	0.314	5/16	2.034	2	0.343	5/16	15.2	5.06	2.22	0.866	0.564	0.529
C6 × 8.2	2.40	6.00	0.200	3/16	1.920	$1\frac{7}{8}$	0.343	5/16	13.1	4.38	2.34	0.693	0.492	0.537
C5 × 9	2.64	5.00	0.325	5/16	1.885	$1\frac{7}{8}$	0.320	5/16	8.90	3.56	1.83	0.632	0.450	0.489
C5 × 6.7	1.97	5.00	0.190	3/16	1.750	$1\frac{3}{4}$	0.320	5/16	7.49	3.00	1.95	0.479	0.378	0.493
C4 × 7.25	2.13	4.00	0.321	5/16	1.721	$1\frac{3}{4}$	0.296	5/16	4.59	2.29	1.47	0.433	0.343	0.450
C4 × 5.4	1.59	4.00	0.184	3/16	1.584	$1\frac{5}{8}$	0.296	5/16	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449
C3 × 6	1.76	3.00	0.356	3/8	1.596	$1\frac{5}{8}$	0.273	1/4	2.07	1.38	1.08	0.305	0.268	0.416
C3 × 5	1.47	3.00	0.258	1/4	1.498	$1\frac{1}{2}$	0.273	1/4	1.85	1.24	1.12	0.247	0.233	0.410
C3 × 4.1	1.21	3.00	0.170	3/16	1.410	$1\frac{3}{8}$	0.273	1/4	1.66	1.10	1.17	0.197	0.202	0.404

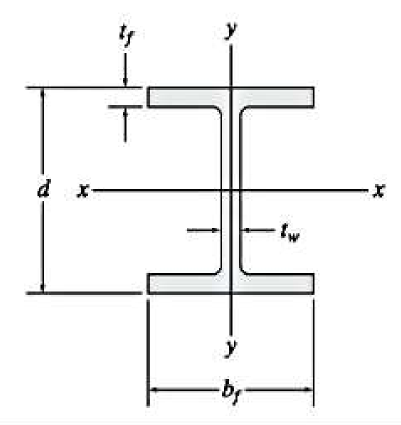


Ángulos que tienen patas iguales Unidades PLS												
Tamaño y grosor	Peso por pie	Área A	Eje x-x				Eje y-y				Eje z-z
			I	*S*	*r*	*y*	*I*	*S*	*r*	*x*	*r*
pulg	lb	pulg^2	pulg^4	pulg^3	pulg	pulg	pulg^4	pulg^3	pulg	pulg	pulg
L8 × 8 × 1	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56
L8 × 8 × $\frac{3}{4}$	38.9	11.4	69.7	12.2	2.47	2.28	69.7	12.2	2.47	2.28	1.58
L8 × 8 × $\frac{1}{2}$	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59
L6 × 6 × 1	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17
L6 × 6 × $\frac{3}{4}$	28.7	8.44	28.2	6.66	1.83	1.78	28.2	6.66	1.83	1.78	1.17
L6 × 6 × $\frac{1}{2}$	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18
L6 × 6 × $\frac{3}{8}$	14.9	4.36	15.4	3.53	1.88	1.64	15.4	3.53	1.88	1.64	1.19
L5 × 5 × $\frac{3}{4}$	23.6	6.94	15.7	4.53	1.51	1.52	15.7	4.53	1.51	1.52	0.975
L5 × 5 × $\frac{1}{2}$	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983
L5 × 5 × $\frac{3}{8}$	12.3	3.61	8.74	2.42	1.56	1.39	8.74	2.42	1.56	1.39	0.990
L4 × 4 × $\frac{3}{4}$	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778
L4 × 4 × $\frac{1}{2}$	12.8	3.75	5.56	1.97	1.22	1.18	5.56	1.97	1.22	1.18	0.782
L4 × 4 × $\frac{3}{8}$	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788
L4 × 4 × $\frac{1}{4}$	6.6	1.94	3.04	1.05	1.25	1.09	3.04	1.05	1.25	1.09	0.795
L3$\frac{1}{2}$ × 3$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$	11.1	3.25	3.64	1.49	1.06	1.06	3.64	1.49	1.06	1.06	0.683
L3$\frac{1}{2}$ × 3$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$	8.5	2.48	2.87	1.15	1.07	1.01	2.87	1.15	1.07	1.01	0.687
L3$\frac{1}{2}$ × 3$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694
L3 × 3 × $\frac{1}{2}$	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584
L3 × 3 × $\frac{3}{8}$	7.2	2.11	1.76	0.833	0.913	0.888	1.76	0.833	0.913	0.888	0.587
L3 × 3 × $\frac{1}{4}$	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592
L2$\frac{1}{2}$ × 2$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$	7.7	2.25	1.23	0.724	0.739	0.806	1.23	0.724	0.739	0.806	0.487
L2$\frac{1}{2}$ × 2$\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	5.9	1.73	0.984	0.566	0.753	0.762	0.984	0.566	0.753	0.762	0.487
L2$\frac{1}{2}$ × 2$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$	4.1	1.19	0.703	0.394	0.769	0.717	0.703	0.394	0.769	0.717	0.491
L2 × 2 × $\frac{3}{8}$	4.7	1.36	0.479	0.351	0.594	0.636	0.479	0.351	0.594	0.636	0.389
L2 × 2 × $\frac{1}{4}$	3.19	0.938	0.348	0.247	0.609	0.592	0.348	0.247	0.609	0.592	0.391
L2 × 2 × $\frac{1}{8}$	1.65	0.484	0.190	0.131	0.626	0.546	0.190	0.131	0.626	0.546	0.398



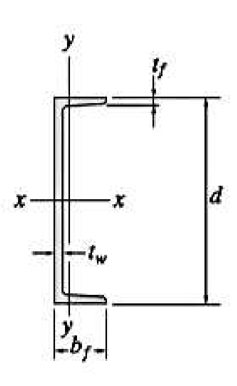
Secciones I de ala ancha o perfiles W Unidades SI

Designación	Área A	Peralte d	Grosor del alma t_w	Ala: anchura b_f	Ala: grosor t_f	Eje x-x: I	Eje x-x: S	Eje x-x: r	Eje y-y: I	Eje y-y: S	Eje y-y: r
mm × kg/m	mm²	mm	mm	mm	mm	10^6 mm⁴	10^3 mm³	mm	10^6 mm⁴	10^3 mm³	mm
W610 × 155	19 800	611	12.70	324.0	19.0	1 290	4 220	255	108	667	73.9
W610 × 140	17 900	617	13.10	230.0	22.2	1 120	3 630	250	45.1	392	50.2
W610 × 125	15 900	612	11.90	229.0	19.6	985	3 220	249	39.3	343	49.7
W610 × 113	14 400	608	11.20	228.0	17.3	875	2 880	247	34.3	301	48.8
W610 × 101	12 900	603	10.50	228.0	14.9	764	2 530	243	29.5	259	47.8
W610 × 92	11 800	603	10.90	179.0	15.0	646	2 140	234	14.4	161	34.9
W610 × 82	10 500	599	10.00	178.0	12.8	560	1 870	231	12.1	136	33.9
W460 × 97	12 300	466	11.40	193.0	19.0	445	1 910	190	22.8	236	43.1
W460 × 89	11 400	463	10.50	192.0	17.7	410	1 770	190	20.9	218	42.8
W460 × 82	10 400	460	9.91	191.0	16.0	370	1 610	189	18.6	195	42.3
W460 × 74	9 460	457	9.02	190.0	14.5	333	1 460	188	16.6	175	41.9
W460 × 68	8 730	459	9.14	154.0	15.4	297	1 290	184	9.41	122	32.8
W460 × 60	7 590	455	8.00	153.0	13.3	255	1 120	183	7.96	104	32.4
W460 × 52	6 640	450	7.62	152.0	10.8	212	942	179	6.34	83.4	30.9
W410 × 85	10 800	417	10.90	181.0	18.2	315	1 510	171	18.0	199	40.8
W410 × 74	9 510	413	9.65	180.0	16.0	275	1 330	170	15.6	173	40.5
W410 × 67	8 560	410	8.76	179.0	14.4	245	1 200	169	13.8	154	40.2
W410 × 53	6 820	403	7.49	177.0	10.9	186	923	165	10.1	114	38.5
W410 × 46	5 890	403	6.99	140.0	11.2	156	774	163	5.14	73.4	29.5
W410 × 39	4 960	399	6.35	140.0	8.8	126	632	159	4.02	57.4	28.5
W360 × 79	10 100	354	9.40	205.0	16.8	227	1 280	150	24.2	236	48.9
W360 × 64	8 150	347	7.75	203.0	13.5	179	1 030	148	18.8	185	48.0
W360 × 57	7 200	358	7.87	172.0	13.1	160	894	149	11.1	129	39.3
W360 × 51	6 450	355	7.24	171.0	11.6	141	794	148	9.68	113	38.7
W360 × 45	5 710	352	6.86	171.0	9.8	121	688	146	8.16	95.4	37.8
W360 × 39	4 960	353	6.48	128.0	10.7	102	578	143	3.75	58.6	27.5
W360 × 33	4 190	349	5.84	127.0	8.5	82.9	475	141	2.91	45.8	26.4



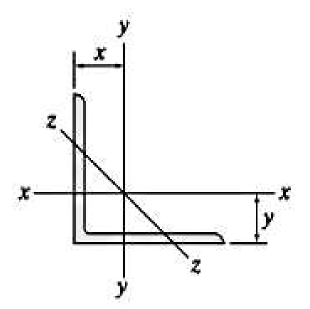
Secciones I de ala ancha o perfiles W Unidades SI

Designación	Área A	Peralte d	Grosor del alma t_w	Ala anchura b_f	Ala grosor t_f	Eje x-x I	Eje x-x S	Eje x-x r	Eje y-y I	Eje y-y S	Eje y-y r
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm
W310 × 129	16 500	318	13.10	308.0	20.6	308	1940	137	100	649	77.8
W310 × 74	9 480	310	9.40	205.0	16.3	165	1060	132	23.4	228	49.7
W310 × 67	8 530	306	8.51	204.0	14.6	145	948	130	20.7	203	49.3
W310 × 39	4 930	310	5.84	165.0	9.7	84.8	547	131	7.23	87.6	38.3
W310 × 33	4 180	313	6.60	102.0	10.8	65.0	415	125	1.92	37.6	21.4
W310 × 24	3 040	305	5.59	101.0	6.7	42.8	281	119	1.16	23.0	19.5
W310 × 21	2 680	303	5.08	101.0	5.7	37.0	244	117	0.986	19.5	19.2
W250 × 149	19 000	282	17.30	263.0	28.4	259	1840	117	86.2	656	67.4
W250 × 80	10 200	256	9.40	255.0	15.6	126	984	111	43.1	338	65.0
W250 × 67	8 560	257	8.89	204.0	15.7	104	809	110	22.2	218	50.9
W250 × 58	7 400	252	8.00	203.0	13.5	87.3	693	109	18.8	185	50.4
W250 × 45	5 700	266	7.62	148.0	13.0	71.1	535	112	7.03	95	35.1
W250 × 28	3 620	260	6.35	102.0	10.0	39.9	307	105	1.78	34.9	22.2
W250 × 22	2 850	254	5.84	102.0	6.9	28.8	227	101	1.22	23.9	20.7
W250 × 18	2 280	251	4.83	101.0	5.3	22.5	179	99.3	0.919	18.2	20.1
W200 × 100	12 700	229	14.50	210.0	23.7	113	987	94.3	36.6	349	53.7
W200 × 86	11 000	222	13.00	209.0	20.6	94.7	853	92.8	31.4	300	53.4
W200 × 71	9 100	216	10.20	206.0	17.4	76.6	709	91.7	25.4	247	52.8
W200 × 59	7 580	210	9.14	205.0	14.2	61.2	583	89.9	20.4	199	51.9
W200 × 46	5 890	203	7.24	203.0	11.0	45.5	448	87.9	15.3	151	51.0
W200 × 36	4 570	201	6.22	165.0	10.2	34.4	342	86.8	7.64	92.6	40.9
W200 × 22	2 860	206	6.22	102.0	8.0	20.0	194	83.6	1.42	27.8	22.3
W150 × 37	4 730	162	8.13	154.0	11.6	22.2	274	68.5	7.07	91.8	38.7
W150 × 30	3 790	157	6.60	153.0	9.3	17.1	218	67.2	5.54	72.4	38.2
W150 × 22	2 860	152	5.84	152.0	6.6	12.1	159	65.0	3.87	50.9	36.8
W150 × 24	3 060	160	6.60	102.0	10.3	13.4	168	66.2	1.83	35.9	24.5
W150 × 18	2 290	153	5.84	102.0	7.1	9.19	120	63.3	1.26	24.7	23.5
W150 × 14	1 730	150	4.32	100.0	5.5	6.84	91.2	62.9	0.912	18.2	23.0



Canales estándar estadounidenses o perfiles C Unidades SI

Designación	Área A	Peralte d	Grosor del alma t_w	Ala: anchura b_f	Ala: grosor t_f	Eje x-x: I	Eje x-x: S	Eje x-x: r	Eje y-y: I	Eje y-y: S	Eje y-y: r
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm
C380 × 74	9480	381.0	18.20	94.4	16.50	168	882	133	4.58	61.8	22.0
C380 × 60	7610	381.0	13.20	89.4	16.50	145	761	138	3.84	55.1	22.5
C380 × 50	6430	381.0	10.20	86.4	16.50	131	688	143	3.38	50.9	22.9
C310 × 45	5690	305.0	13.00	80.5	12.70	67.4	442	109	2.14	33.8	19.4
C310 × 37	4740	305.0	9.83	77.4	12.70	59.9	393	112	1.86	30.9	19.8
C310 × 31	3930	305.0	7.16	74.7	12.70	53.7	352	117	1.61	28.3	20.2
C250 × 45	5690	254.0	17.10	77.0	11.10	42.9	338	86.8	1.61	27.1	17.0
C250 × 37	4740	254.0	13.40	73.3	11.10	38.0	299	89.5	1.40	24.3	17.2
C250 × 30	3790	254.0	9.63	69.6	11.10	32.8	258	93.0	1.17	21.6	17.6
C250 × 23	2900	254.0	6.10	66.0	11.10	28.1	221	98.4	0.949	19.0	18.1
C230 × 30	3790	229.0	11.40	67.3	10.50	25.3	221	81.7	1.01	19.2	16.3
C230 × 22	2850	229.0	7.24	63.1	10.50	21.2	185	86.2	0.803	16.7	16.8
C230 × 20	2540	229.0	5.92	61.8	10.50	19.9	174	88.5	0.733	15.8	17.0
C200 × 28	3550	203.0	12.40	64.2	9.90	18.3	180	71.8	0.824	16.5	15.2
C200 × 20	2610	203.0	7.70	59.5	9.90	15.0	148	75.8	0.637	14.0	15.6
C200 × 17	2180	203.0	5.59	57.4	9.90	13.6	134	79.0	0.549	12.8	15.9
C180 × 22	2790	178.0	10.60	58.4	9.30	11.3	127	63.6	0.574	12.8	14.3
C180 × 18	2320	178.0	7.98	55.7	9.30	10.1	113	66.0	0.487	11.5	14.5
C180 × 15	1850	178.0	5.33	53.1	9.30	8.87	99.7	69.2	0.403	10.2	14.8
C150 × 19	2470	152.0	11.10	54.8	8.70	7.24	95.3	54.1	0.437	10.5	13.3
C150 × 16	1990	152.0	7.98	51.7	8.70	6.33	83.3	56.4	0.360	9.22	13.5
C150 × 12	1550	152.0	5.08	48.8	8.70	5.45	71.7	59.3	0.288	8.04	13.6
C130 × 13	1700	127.0	8.25	47.9	8.10	3.70	58.3	46.7	0.263	7.35	12.4
C130 × 10	1270	127.0	4.83	44.5	8.10	3.12	49.1	49.6	0.199	6.18	12.5
C100 × 11	1370	102.0	8.15	43.7	7.50	1.91	37.5	37.3	0.180	5.62	11.5
C100 × 8	1030	102.0	4.67	40.2	7.50	1.60	31.4	39.4	0.133	4.65	11.4
C75 × 9	1140	76.2	9.04	40.5	6.90	0.862	22.6	27.5	0.127	4.39	10.6
C75 × 7	948	76.2	6.55	38.0	6.90	0.770	20.2	28.5	0.103	3.83	10.4
C75 × 6	781	76.2	4.32	35.8	6.90	0.691	18.1	29.8	0.082	3.32	10.2



Ángulos que tienen patas iguales	Unidades SI										
Tamaño y grosor	Masa por metro	Área	Eje x-x				Eje y-y				Eje z-z
			I	S	r	y	I	S	r	x	r
mm	kg	mm²	10^6 mm⁴	10^6 mm³	mm	mm	10^6 mm⁴	10^6 mm³	mm	mm	mm
L203 × 203 × 25.4	75.9	9 680	36.9	258	61.7	60.1	36.9	258	61.7	60.1	39.6
L203 × 203 × 19.0	57.9	7 380	28.9	199	62.6	57.8	28.9	199	62.6	57.8	40.1
L203 × 203 × 12.7	39.3	5 000	20.2	137	63.6	55.5	20.2	137	63.6	55.5	40.4
L152 × 152 × 25.4	55.7	7 100	14.6	139	45.3	47.2	14.6	139	45.3	47.2	29.7
L152 × 152 × 19.0	42.7	5 440	11.6	108	46.2	45.0	11.6	108	46.2	45.0	29.7
L152 × 152 × 12.7	29.2	3 710	8.22	75.1	47.1	42.7	8.22	75.1	47.1	42.7	30.0
L152 × 152 × 9.5	22.2	2 810	6.35	57.4	47.5	41.5	6.35	57.4	47.5	41.5	30.2
L127 × 127 × 19.0	35.1	4 480	6.54	73.9	38.2	38.7	6.54	73.9	38.2	38.7	24.8
L127 × 127 × 12.7	24.1	3 060	4.68	51.7	39.1	36.4	4.68	51.7	39.1	36.4	25.0
L127 × 127 × 9.5	18.3	2 330	3.64	39.7	39.5	35.3	3.64	39.7	39.5	35.3	25.1
L102 × 102 × 19.0	27.5	3 510	3.23	46.4	30.3	32.4	3.23	46.4	30.3	32.4	19.8
L102 × 102 × 12.7	19.0	2 420	2.34	32.6	31.1	30.2	2.34	32.6	31.1	30.2	19.9
L102 × 102 × 9.5	14.6	1 840	1.84	25.3	31.6	29.0	1.84	25.3	31.6	29.0	20.0
L102 × 102 × 6.4	9.8	1 250	1.28	17.3	32.0	27.9	1.28	17.3	32.0	27.9	20.2
L89 × 89 × 12.7	16.5	2 100	1.52	24.5	26.9	26.9	1.52	24.5	26.9	26.9	17.3
L89 × 89 × 9.5	12.6	1 600	1.20	19.0	27.4	25.8	1.20	19.0	27.4	25.8	17.4
L89 × 89 × 6.4	8.6	1 090	0.840	13.0	27.8	24.6	0.840	13.0	27.8	24.6	17.6
L76 × 76 × 12.7	14.0	1 770	0.915	17.5	22.7	23.6	0.915	17.5	22.7	23.6	14.8
L76 × 76 × 9.5	10.7	1 360	0.726	13.6	23.1	22.5	0.726	13.6	23.1	22.5	14.9
L76 × 76 × 6.4	7.3	927	0.514	9.39	23.5	21.3	0.514	9.39	23.5	21.3	15.0
L64 × 64 × 12.7	11.5	1 450	0.524	12.1	19.0	20.6	0.524	12.1	19.0	20.6	12.4
L64 × 64 × 9.5	8.8	1 120	0.420	9.46	19.4	19.5	0.420	9.46	19.4	19.5	12.4
L64 × 64 × 6.4	6.1	766	0.300	6.59	19.8	18.2	0.300	6.59	19.8	18.2	12.5
L51 × 51 × 9.5	7.0	877	0.202	5.82	15.2	16.2	0.202	5.82	15.2	16.2	9.88
L51 × 51 × 6.4	4.7	605	0.146	4.09	15.6	15.1	0.146	4.09	15.6	15.1	9.93
L51 × 51 × 3.2	2.5	312	0.080	2.16	16.0	13.9	0.080	2.16	16.0	13.9	10.1



Pendientes y deflexiones en vigas

Pendientes y deflexiones de una viga simplemente apoyada

Viga	Pendiente	Deflexión	Curva elástica
	$\theta_{\text{máx}} = \dfrac{-PL^2}{16EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{-PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = \dfrac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \dfrac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\Big\|_{x=a} = \dfrac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \dfrac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = \dfrac{-M_0L}{6EI}$ $\theta_2 = \dfrac{M_0L}{3EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{-M_0L^2}{\sqrt{243}EI}$ en $x = 0.5774L$	$v = \dfrac{-M_0x}{6EIL}(L^2 - x^2)$
	$\theta_{\text{máx}} = \dfrac{-wL^3}{24EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \dfrac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \dfrac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\|_{x=L/2} = \dfrac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{\text{máx}} = -0.006563\dfrac{wL^4}{EI}$ en $x = 0.4598L$	$v = \dfrac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x < L$
	$\theta_1 = \dfrac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \dfrac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{\text{máx}} = -0.00652\dfrac{w_0L^4}{EI}$ en $x = 0.5193L$	$v = \dfrac{-w_0x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

Pendientes y deflexiones de una viga simplemente apoyada

Viga	Pendiente	Deflexión	Curva elástica
	$\theta_{\text{máx}} = \dfrac{-PL^2}{2EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{-PL^3}{3EI}$	$v = \dfrac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_{\text{máx}} = \dfrac{-PL^2}{8EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px^2}{6EI}\left(\frac{3}{2}L - x\right) \quad 0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-PL^2}{24EI}\left(3x - \frac{1}{2}L\right) \quad L/2 \le x \le L$
	$\theta_{\text{máx}} = \dfrac{-wL^3}{6EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{-wL^4}{8EI}$	$v = \dfrac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{\text{máx}} = \dfrac{M_0L}{EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{M_0L^2}{2EI}$	$v = \dfrac{M_0x^2}{2EI}$
	$\theta_{\text{máx}} = \dfrac{-wL^3}{48EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx^2}{24EI}\left(x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2\right)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL^3}{192EI}(4x - L/2)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_{\text{máx}} = \dfrac{-w_0L^3}{24EI}$	$v_{\text{máx}} = \dfrac{-w_0L^4}{30EI}$	$v = \dfrac{-w_0x^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

C

Soluciones y respuestas parciales a los problemas fundamentales

Capítulo 1

F1-1 Toda la viga:

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0;$	$60 - 10(2) - A_y(2) = 0$	$A_y = 20\text{ kN}$	

Segmento izquierdo:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$	$N_C = 0$		*Resp.*
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$	$20 - V_C = 0$	$V_C = 20\text{ kN}$	*Resp.*
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$	$M_C + 60 - 20(1) = 0$	$M_C = -40\text{ kN}\cdot\text{m}$	*Resp.*

F1-2 Toda la viga:

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$	$B_y(3) - 100(1.5)(0.75) - 200(1.5)(2.25) = 0$		
	$B_y = 262.5\text{ N}$		

Segmento derecho:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$	$N_C = 0$		*Resp.*
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$	$V_C + 262.5 - 200(1.5) = 0$	$V_C = 37.5\text{ N}$	*Resp.*
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$	$262.5(1.5) - 200(1.5)(0.75) - M_C = 0$		
	$M_C = 169\text{ N}\cdot\text{m}$		*Resp.*

F1-3 Toda la viga:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$	$B_x = 0$		
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$	$20(2)(1) - B_y(4) = 0$	$B_y = 10\text{ kN}$	

Segmento derecho:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$	$N_C = 0$		*Resp.*
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$	$V_C - 10 = 0$	$V_C = 10\text{ kN}$	*Resp.*
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$	$-M_C - 10(2) = 0$	$M_C = -20\text{ kN}\cdot\text{m}$	*Resp.*

F1-4 Toda la viga:

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0;$	$\frac{1}{2}(10)(3)(2) + 10(3)(4.5) - A_y(6) = 0$	$A_y = 27.5\text{ kN}$	

Segmento izquierdo:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$	$N_C = 0$		*Resp.*
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$	$27.5 - 10(3) - V_C = 0$	$V_C = -2.5\text{ kN}$	*Resp.*
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$	$M_C + 10(3)(1.5) - 27.5(3) = 0$	$M_C = 37.5\text{ kN}\cdot\text{m}$	*Resp.*

F1-5 Toda la viga:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$	$A_x = 0$		
$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0;$	$300(6)(3) - \frac{1}{2}(300)(3)(1) - A_y(6) = 0$	$A_y = 825\text{ lb}$	

Segmento izquierdo:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$	$N_C = 0$		*Resp.*
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$	$825 - 300(3) - V_C = 0$	$V_C = -75\text{ lb}$	*Resp.*
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$	$M_C + 300(3)(1.5) - 825(3) = 0$	$M_C = 1125\text{ lb}\cdot\text{pie}$	*Resp.*

F1-6 Toda la viga:

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$ $F_{BD}\left(\frac{3}{5}\right)(4) - 5(6)(3) = 0$ $F_{BD} = 37.5 \text{ kN}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $37.5\left(\frac{4}{5}\right) - A_x = 0$ $A_x = 30 \text{ kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $A_y + 37.5\left(\frac{3}{5}\right) - 5(6) = 0$ $A_y = 7.5 \text{ kN}$

Segmento izquierdo:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $N_C - 30 = 0$ $N_C = 30 \text{ kN}$ *Resp.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $7.5 - 5(2) - V_C = 0$ $V_C = -2.5 \text{ kN}$ *Resp.*

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$ $M_C + 5(2)(1) - 7.5(2) = 0$ $M_C = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Resp.*

F1-7 Viga:

$\Sigma M_A = 0; T_{CD} = 2w$

$\Sigma F_y = 0; T_{AB} = w$

Barra AB:

$\sigma = \frac{P}{A}; 300(10^3) = \frac{w}{10};$

$w = 3 \text{ N/m}$

Barra CD:

$\sigma = \frac{P}{A}; 300(10^3) = \frac{2w}{15};$

$w = 2.25 \text{ N/m}$ *Resp.*

F1-8 $A = \pi(0.1^2 - 0.08^2) = 3.6(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

$\sigma_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{300(10^3)}{3.6(10^{-3})\pi} = 26.5 \text{ MPa}$ *Resp.*

F1-9 $A = 3[4(1)] = 12 \text{ in}^2$

$\sigma_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{15}{12} = 1.25 \text{ ksi}$ *Resp.*

F1-10 Considere que la sección transversal está formada por un rectángulo y dos triángulos.

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{0.15[(0.3)(0.12)] + (0.1)\left[\frac{1}{2}(0.16)(0.3)\right]}{0.3(0.12) + \frac{1}{2}(0.16)(0.3)}$$

$= 0.13 \text{ m} = 130 \text{ mm}$ *Resp.*

$\sigma_{\text{prom}} = \frac{P}{A} = \frac{600(10^3)}{0.06} = 10 \text{ MPa}$ *Resp.*

F1-11

$A_A = A_C = \frac{\pi}{4}(0.5^2) = 0.0625\pi \text{ pulg}^2, A_B = \frac{\pi}{4}(1^2)$

$= 0.25\pi \text{ pulg}^2$

$\sigma_A = \frac{N_A}{A_A} = \frac{3}{0.0625\pi} = 15.3 \text{ ksi (T)}$ *Resp.*

$\sigma_B = \frac{N_B}{A_B} = \frac{-6}{0.25\pi} = -7.64 \text{ ksi} = 7.64 \text{ ksi (C)}$ *Resp.*

$\sigma_C = \frac{N_C}{A_C} = \frac{2}{0.0625\pi} = 10.2 \text{ ksi (T)}$ *Resp.*

F1-12

$F_{AD} = 50(9.81) \text{ N} = 490.5 \text{ N}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $F_{AC}\left(\frac{3}{5}\right) - 490.5 = 0$ $F_{AC} = 817.5 \text{ N}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $817.5\left(\frac{4}{5}\right) - F_{AB} = 0$ $F_{AB} = 654 \text{ N}$

$A_{AB} = \frac{\pi}{4}(0.008^2) = 16(10^{-6})\pi \text{ m}^2$

$(\sigma_{AB})_{\text{prom}} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{654}{16(10^{-6})\pi} = 13.0 \text{ MPa}$ *Resp.*

F1-13 Anillo C:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $2F \cos 60° - 200(9.81) = 0$ $F = 1962 \text{ N}$

$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{prom}} = \frac{F}{A};$ $150(10^6) = \frac{1962}{\frac{\pi}{4}d^2}$

$d = 0.00408 \text{ m} = 4.08 \text{ mm}$

Use $d = 5 \text{ mm}$ *Resp.*

F1-14 Todo el bastidor:

$\Sigma F_y = 0;\ A_y = 600$ lb

$\Sigma M_B = 0;\ A_x = 800$ lb

$F_A = \sqrt{(600)^2 + (800)^2} = 1000$ lb

$(\tau_A)_{prom} = \dfrac{F_A/2}{A} = \dfrac{1000/2}{\frac{\pi}{4}(0.25)^2} = 10.2$ ksi *Resp.*

F1-15 Doble cortante:

$\Sigma F_x = 0;\quad 4V - 10 = 0 \qquad V = 2.5$ kip

$A = \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 0.140625\pi$ pulg^2

$\tau_{prom} = \dfrac{V}{A} = \dfrac{2.5}{0.140625\pi} = 5.66$ ksi *Resp.*

F1-16 Cortante simple:

$\Sigma F_x = 0;\qquad P - 3V = 0 \qquad V = \dfrac{P}{3}$

$A = \dfrac{\pi}{4}(0.004^2) = 4(10^{-6})\pi$ m^2

$(\tau_{prom})_{perm} = \dfrac{V}{A};\qquad 60(10^6) = \dfrac{\frac{P}{3}}{4(10^{-6})\pi}$

$P = 2.262(10^3)$ N $= 2.26$ kN *Resp.*

F1-17 $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad V - P\cos 60° = 0 \qquad V = 0.5P$

$A = \left(\dfrac{0.05}{\operatorname{sen}60°}\right)(0.025) = 1.4434(10^{-3})$ m^2

$(\tau_{prom})_{perm} = \dfrac{V}{A};\qquad 600(10^3) = \dfrac{0.5P}{1.4434(10^{-3})}$

$P = 1.732(10^3)$ N $= 1.73$ kN *Resp.*

F1-18 La fuerza resultante sobre el pasador es
$F = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ kN.

Aquí se tiene doble cortante:

$V = \dfrac{F}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$ kN

$A = \dfrac{\pi}{4}(0.03^2) = 0.225(10^{-3})\pi$ m^2

$\tau_{prom} = \dfrac{V}{A} = \dfrac{25(10^3)}{0.225(10^{-3})\pi} = 35.4$ MPa *Resp.*

F1-19 $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad 30 - N = 0 \qquad N = 30$ kN

$\sigma_{perm} = \dfrac{\sigma_Y}{\text{F.S.}} = \dfrac{250}{1.5} = 166.67$ MPa

$\sigma_{perm} = \dfrac{N}{A};\qquad 166.67(10^6) = \dfrac{30(10^3)}{\frac{\pi}{4}d^2}$

$d = 15.14$ mm

Use $d = 16$ mm *Resp.*

F1-20

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad N_{AB} - 30 = 0 \qquad N_{AB} = 30$ kip

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad N_{BC} - 15 - 15 - 30 = 0 \quad N_{BC} = 60$ kip

$\sigma_{perm} = \dfrac{\sigma_Y}{\text{F.S.}} = \dfrac{50}{1.5} = 33.33$ ksi

Segmento AB:

$\sigma_{perm} = \dfrac{N_{AB}}{A_{AB}};\qquad 33.33 = \dfrac{30}{h_1(0.5)}$

$h_1 = 1.8$ pulg

Segmento BC:

$\sigma_{perm} = \dfrac{N_{BC}}{A_{BC}};\qquad 33.33 = \dfrac{60}{h_2(0.5)}$

$h_2 = 3.6$ pulg

Use $h_1 = 1\frac{7}{8}$ pulg y $h_2 = 3\frac{5}{8}$ pulg *Resp.*

F1-21 $N = P$

$\sigma_{perm} = \dfrac{\sigma_Y}{\text{F.S.}} = \dfrac{250}{2} = 125$ MPa

$A_r = \dfrac{\pi}{4}(0.04^2) = 1.2566(10^{-3})$ m^2

$A_{a\text{-}a} = 2(0.06 - 0.03)(0.05) = 3(10^{-3})$ m^2

La barra fallará primero.

$\sigma_{perm} = \dfrac{N}{A_r};\qquad 125(10^6) = \dfrac{P}{1.2566(10^{-3})}$

$P = 157.08(10^3)$ N $= 157$ kN *Resp.*

F1-22 $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\qquad 80 - 2V = 0 \qquad V = 40$ kN

$\tau_{perm} = \dfrac{\tau_{falla}}{\text{F.S.}} = \dfrac{100}{2.5} = 40$ MPa

$\tau_{perm} = \dfrac{V}{A};\qquad 40(10^6) = \dfrac{40(10^3)}{\frac{\pi}{4}d^2}$

$d = 0.03568$ m $= 35.68$ mm

Use $d = 36$ mm *Resp.*

F1-23 $V = P$

$\tau_{perm} = \dfrac{\tau_{falla}}{\text{F.S.}} = \dfrac{120}{2.5} = 48$ MPa

Área del plano cortante para la cabeza del perno y la placa:

$A_b = \pi dt = \pi(0.04)(0.075) = 0.003\pi$ m^2

$A_p = \pi dt = \pi(0.08)(0.03) = 0.0024\pi$ m^2

Como el área del plano cortante para la placa es más pequeña,

$$\tau_{perm} = \frac{V}{A_p}; \qquad 48(10^6) = \frac{P}{0.0024\pi}$$

$$P = 361.91(10^3) \text{ N} = 362 \text{ kN} \quad \textit{Resp.}$$

F1-24

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad \frac{1}{2}(300)(9)(6) - 6V(9) = 0 \quad V = 150 \text{ lb}$$

$$\tau_{perm} = \frac{\tau_{falla}}{\text{F.S.}} = \frac{16}{2} = 8 \text{ ksi}$$

$$\tau_{perm} = \frac{V}{A}; \qquad 8(10^3) = \frac{150}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

$$d = 0.1545 \text{ pulg}$$

Use $d = \frac{3}{16}$ pulg *Resp.*

Capítulo 2

F2-1 $\frac{\delta_C}{600} = \frac{0.2}{400}; \quad \delta_C = 0.3$ mm

$$\epsilon_{CD} = \frac{\delta_C}{L_{CD}} = \frac{0.3}{300} = 0.001 \text{ mm/mm} \quad \textit{Resp.}$$

F2-2

$$\theta = \left(\frac{0.02°}{180°}\right)\pi \text{ rad} = 0.3491(10^{-3}) \text{ rad}$$

$$\delta_B = \theta L_{AB} = 0.3491(10^{-3})(600) = 0.2094 \text{ mm}$$

$$\delta_C = \theta L_{AC} = 0.3491(10^{-3})(1200) = 0.4189 \text{ mm}$$

$$\epsilon_{BD} = \frac{\delta_B}{L_{BD}} = \frac{0.2094}{400} = 0.524(10^{-3}) \text{ mm/mm} \quad \textit{Resp.}$$

$$\epsilon_{CE} = \frac{\delta_C}{L_{CE}} = \frac{0.4189}{600} = 0.698(10^{-3}) \text{ mm/mm} \quad \textit{Resp.}$$

F2-3

$$\alpha = \frac{2}{400} = 0.005 \text{ rad} \qquad \beta = \frac{4}{300} = 0.01333 \text{ rad}$$

$$(\gamma_A)_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right)$$

$$= \alpha - \beta$$

$$= 0.005 - 0.01333$$

$$= -0.00833 \text{ rad} \quad \textit{Resp.}$$

F2-4

$$L_{BC} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ mm}$$

$$L_{B'C} = \sqrt{(300 - 3)^2 + (400 + 5)^2} = 502.2290 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{3}{405} = 0.007407 \text{ rad}$$

$$(\epsilon_{BC})_{prom} = \frac{L_{B'C} - L_{BC}}{L_{BC}} = \frac{502.2290 - 500}{500}$$

$$= 0.00446 \text{ mm/mm} \quad \textit{Resp.}$$

$$(\gamma_A)_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\alpha$$

$$= -0.00741 \text{ rad} \quad \textit{Resp.}$$

F2-5

$$L_{AC} = \sqrt{L_{CD}{}^2 + L_{AD}{}^2} = \sqrt{300^2 + 300^2} = 424.2641 \text{ mm}$$

$$L_{A'C'} = \sqrt{L_{C'D'}{}^2 + L_{A'D'}{}^2} = \sqrt{306^2 + 296^2} = 425.7370 \text{ mm}$$

$$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{L_{C'D'}}{L_{A'D'}}\right); \theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{306}{296}\right) = 1.6040 \text{ rad}$$

$$(\epsilon_{AC})_{prom} = \frac{L_{A'C'} - L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{425.7370 - 424.2641}{424.2641}$$

$$= 0.00347 \text{ mm/mm} \quad \textit{Resp.}$$

$$(\gamma_E)_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - 1.6040 = -0.0332 \text{ rad} \quad \textit{Resp.}$$

Capítulo 3

F3-1 El material que tiene propiedades uniformes en toda su extensión. *Resp.*

F3-2 El límite proporcional es A. *Resp.*
El esfuerzo último es D. *Resp.*

F3-3 La pendiente inicial del diagrama σ-ϵ *Resp.*

F3-4 Verdadero. *Resp.*

F3-5 Falso. Use el área de la sección transversal y la longitud *originales*. *Resp.*

F3-6 Falso. Por lo general disminuirá. *Resp.*

F3-7 $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$

$$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE} = \frac{100(10^3)(0.100)}{\frac{\pi}{4}(0.015)^2 200(10^9)}$$

$$= 0.283 \text{ mm} \quad \textit{Resp.}$$

F3-8 $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$

$$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE};$$

$$0.003 = \frac{(10\,000)(8)}{12E}$$

$$E = 2.22(10^6) \text{ psi} \quad \textit{Resp.}$$

F3-9 $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$

$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE} = \frac{6(10^3)4}{\frac{\pi}{4}(0.01)^2\,100(10^9)}$

$= 3.06$ mm *Resp.*

F3-10 $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.02^2)} = 318.31$ MPa

Como $\sigma < \sigma_Y = 450$ MPa, la ley de Hooke es aplicable.

$E = \frac{\sigma_Y}{\epsilon_Y} = \frac{450(10^6)}{0.00225} = 200$ GPa

$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{318.31(10^6)}{200(10^9)} = 0.001592$ mm/mm

$\delta = \epsilon L = 0.001592(50) = 0.0796$ mm *Resp.*

F3-11 $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{150(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.02^2)} = 477.46$ MPa

Como $\sigma > \sigma_Y = 450$ MPa, aplicable.
A partir de la geometría del diagrama de esfuerzo-deformación,

$\frac{\epsilon - 0.00225}{0.03 - 0.00225} = \frac{477.46 - 450}{500 - 450}$

$\epsilon = 0.017493$

Cuando se retira la carga, la deformación se recupera a lo largo de una línea paralela a la línea elástica original.

Aquí $E = \frac{\sigma_Y}{\epsilon_Y} = \frac{450(10^6)}{0.00225} = 200$ GPa.

La recuperación elástica es

$\epsilon_r = \frac{\sigma}{E} = \frac{477.46(10^6)}{200(10^9)} = 0.002387$ mm/mm

$\epsilon_p = \epsilon - \epsilon_r = 0.017493 - 0.002387$

$= 0.01511$ mm/mm

$\delta_p = \epsilon_p L = 0.01511(50) = 0.755$ mm *Resp.*

F3-12 $\epsilon_{BC} = \frac{\delta_{BC}}{L_{BC}} = \frac{0.2}{300} = 0.6667(10^{-3})$ mm/mm

$\sigma_{BC} = E\epsilon_{BC} = 200(10^9)[0.6667(10^{-3})]$

$= 133.33$ MPa

Como $\sigma_{BC} < \sigma_Y = 250$ MPa, la ley de Hooke es válida.

$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}}$; $\quad 133.33(10^6) = \frac{F_{BC}}{\frac{\pi}{4}(0.003^2)}$

$F_{BC} = 942.48$ N

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$; $\quad 942.48(0.4) - P(0.6) = 0$

$P = 628.31$ N $= 628$ N *Resp.*

F3-13 $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.015)^2} = 56.59$ MPa

$\epsilon_{long} = \frac{\sigma}{E} = \frac{56.59(10^6)}{70(10^9)} = 0.808(10^{-3})$

$\epsilon_{lat} = -\nu\epsilon_{long} = -0.35(0.808(10^{-3}))$

$= -0.283(10^{-3})$

$\delta d = (-0.283(10^{-3}))(15 \text{ mm}) = -4.24(10^{-3})$ mm *Resp.*

F3-14 $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{50(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.02^2)} = 159.15$ MPa

$\epsilon_a = \frac{\delta}{L} = \frac{1.40}{600} = 0.002333$ mm/mm

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_a} = \frac{159.15(10^6)}{0.002333} = 68.2$ GPa *Resp.*

$\epsilon_e = \frac{d' - d}{d} = \frac{19.9837 - 20}{20} = -0.815(10^{-3})$ mm/mm

$\nu = -\frac{\epsilon_e}{\epsilon_a} = -\frac{-0.815(10^{-3})}{0.002333} = 0.3493 = 0.349$

$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{68.21}{2(1 + 0.3493)} = 25.3$ GPa *Resp.*

F3-15 $\alpha = \frac{0.5}{150} = 0.003333$ rad

$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$= \alpha = 0.003333$ rad

$\tau = G\gamma = [26(10^9)](0.003333) = 86.67$ MPa

$\tau = \frac{V}{A}$; $\quad 86.67(10^6) = \frac{P}{0.15(0.02)}$

$P = 260$ kN *Resp.*

F3-16 $\alpha = \frac{3}{150} = 0.02$ rad

$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha = 0.02$ rad

Cuando P se retira, la deformación cortante se recupera a lo largo de una línea paralela a la línea elástica original.

$\gamma_r = \gamma_Y = 0.005$ rad

$\gamma_p = \gamma - \gamma_r = 0.02 - 0.005 = 0.015$ rad *Resp.*

Capítulo 4

F4-1 $A = \frac{\pi}{4}(0.02^2) = 0.1(10^{-3})\pi$ m^2

$\delta_C = \frac{1}{AE}\{40(10^3)(400) + [-60(10^3)(600)]\}$

$= \frac{-20(10^6) \text{ N}\cdot\text{mm}}{AE}$

$= -0.318$ mm *Resp.*

F4-2 $A_{AB} = A_{CD} = \frac{\pi}{4}(0.02^2) = 0.1(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

$A_{BC} = \frac{\pi}{4}(0.04^2 - 0.03^2) = 0.175(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

$$\delta_{D/A} = \frac{[-10(10^3)](400)}{[0.1(10^{-3})\pi][68.9(10^9)]} + \frac{[10(10^3)](400)}{[0.175(10^{-3})\pi][68.9(10^9)]} + \frac{[-20(10^3)](400)}{[0.1(10^{-3})\pi][68.9(10^9)]}$$

$= -0.449 \text{ mm}$ *Resp.*

F4-3 $A = \frac{\pi}{4}(0.03^2) = 0.225(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

$$\delta_C = \frac{1}{0.225(10^{-3})\pi[200(10^9)]}\left\{\left[-90(10^3) - 2\left(\frac{4}{5}\right)30(10^3)\right](0.4) + [-90(10^3)(0.6)]\right\}$$

$= -0.772(10^{-3}) \text{ m} = -0.772 \text{ mm}$ *Resp.*

F4-4 $\delta_{A/B} = \frac{PL}{AE} = \frac{[60(10^3)](0.8)}{[0.1(10^{-3})\pi][200(10^9)]}$

$= 0.7639(10^{-3}) \text{ m} \downarrow$

$\delta_B = \frac{F_{sp}}{k} = \frac{60(10^3)}{50(10^6)} = 1.2(10^{-3}) \text{ m} \downarrow$

$+\downarrow \quad \delta_A = \delta_B + \delta_{A/B}$

$\delta_A = 1.2(10^{-3}) + 0.7639(10^{-3})$

$= 1.9639(10^{-3}) \text{ m} = 1.96 \text{ mm} \downarrow$ *Resp.*

F4-5 $A = \frac{\pi}{4}(0.02^2) = 0.1(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

Carga interna $P(x) = 30(10^3)x$

$$\delta_A = \int \frac{P(x)dx}{AE} = \frac{1}{[0.1(10^{-3})\pi][73.1(10^9)]}\int_0^{0.9 \text{ m}} 30(10^3)x\, dx$$

$= 0.529(10^{-3}) \text{ m} = 0.529 \text{ mm}$ *Resp.*

F4-6 Carga distribuida $P(x) = \frac{45(10^3)}{0.9}x = 50(10^3)x \text{ N/m}$

Carga interna $P(x) = \frac{1}{2}(50(10^3))x(x) = 25(10^3)x^2$

$$\delta_A = \int_0^L \frac{P(x)dx}{AE} = \frac{1}{[0.1(10^{-3})\pi][73.1(10^9)]}\int_0^{0.9 \text{ m}} [25(10^3)x^2]dx$$

$= 0.265 \text{ mm}$ *Resp.*

Capítulo 5

F5-1 $J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\tau_A = \tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{5(10^3)(0.04)}{1.28(10^{-6})\pi} = 49.7 \text{ MPa}$ *Resp.*

$\tau_B = \frac{T\rho_B}{J} = \frac{5(10^3)(0.03)}{1.28(10^{-6})\pi} = 37.3 \text{ MPa}$ *Resp.*

F5-2 $J = \frac{\pi}{2}(0.06^4 - 0.04^4) = 5.2(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\tau_B = \tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{10(10^3)(0.06)}{5.2(10^{-6})\pi} = 36.7 \text{ MPa}$ *Resp.*

$\tau_A = \frac{T\rho_A}{J} = \frac{10(10^3)(0.04)}{5.2(10^{-6})\pi} = 24.5 \text{ MPa}$ *Resp.*

F5-3 $J_{AB} = \frac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$J_{BC} = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$(\tau_{AB})_{máx} = \frac{T_{AB}c_{AB}}{J_{AB}} = \frac{[2(10^3)](0.04)}{0.875(10^{-6})\pi} = 29.1 \text{ MPa}$

$(\tau_{BC})_{máx} = \frac{T_{BC}c_{BC}}{J_{BC}} = \frac{[6(10^3)](0.04)}{1.28(10^{-6})\pi}$

$= 59.7 \text{ MPa}$ *Resp.*

F5-4 $T_{AB} = 0, T_{BC} = 600 \text{ N·m}, T_{CD} = 0$

$J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$

$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{600(0.02)}{80(10^{-9})\pi} = 47.7 \text{ MPa}$ *Resp.*

F5-5 $J_{BC} = \frac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$(\tau_{BC})_{máx} = \frac{T_{BC}c_{BC}}{J_{BC}} = \frac{2100(0.04)}{0.875(10^{-6})\pi}$

$= 30.6 \text{ MPa}$ *Resp.*

F5-6 $t = 5(10^3) \text{ N·m/m}$

El par de torsión interno es $T = 5(10^3)(0.8) = 4000 \text{ N·m}$

$J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\tau_A = \frac{T_{AC}}{J} = \frac{4000(0.04)}{1.28(10^{-6})\pi} = 39.8 \text{ MPa}$ *Resp.*

F5-7 $J = \frac{\pi}{2}(0.03^4) = 0.405(10^{-6})\pi\ \text{m}^4$

$\phi_{A/C} = \frac{1}{[0.405(10^{-6})\pi][75(10^9)]}\{[-2(10^3)](0.6)$

$+ 1(10^3)(0.4)\}$

$= -0.00838\ \text{rad} = -0.480°$ *Resp.*

F5-8 $J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi\ \text{m}^4$

$\phi_{B/A} = \frac{600(0.45)}{[80(10^{-9})\pi][75(10^9)]}$

$= 0.01432\ \text{rad} = 0.821°$ *Resp.*

F5-9 $J = \frac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi\ \text{m}^4$

$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} = \frac{3(10^3)(0.9)}{[0.875(10^{-6})\pi][26(10^9)]}$

$= 0.03778\ \text{rad}$

$\phi_B = \frac{T_B}{k} = \frac{3(10^3)}{90(10^3)} = 0.03333\ \text{rad}$

$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B}$

$= 0.03333 + 0.03778$

$= 0.07111\ \text{rad} = 4.07°$ *Resp.*

F5-10 $J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi\ \text{m}^4$

$\phi_{B/A} = \frac{0.2}{[80(10^{-9})\pi][75(10^9)]}[600 + (-300)$

$+ 200 + 500]$

$= 0.01061\ \text{rad} = 0.608°$ *Resp.*

F5-11 $J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi\ \text{m}^4$

$t = 5(10^3)\ \text{N·m/m}$

El par de torsión interno es $5(10^3)x$ N·m

$\phi_{A/B} = \int_0^L \frac{T(x)dx}{JG}$

$= \frac{1}{[1.28(10^{-6})\pi][75(10^9)]}\int_0^{0.8\ \text{m}} 5(10^3)x\,dx$

$= 0.00531\ \text{rad} = 0.304°$ *Resp.*

F5-12 $J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi\ \text{m}^4$

El par de torsión distribuido es $t = \frac{15(10^3)}{0.6}(x)$

$= 25(10^3)x$ N·m/m

El par de torsión interno es $T(x) = \frac{1}{2}(25x)(x)$

$= 12.5(10^3)x^2$ N·m

$\phi_{A/C} = \int_0^L \frac{T(x)dx}{JG} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{JG}$

$= \frac{1}{[1.28(10^{-6})\pi][75(10^9)]}\left[\int_0^{0.6\ \text{m}} 12.5(10^3)x^2dx + 4500(0.4)\right]$

$= 0.008952\ \text{rad} = 0.513°$ *Resp.*

Capítulo 6

F6-1 $+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad -V - 9 = 0\quad V = -9\ \text{kN}$ *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_O = 0;\quad M + 9x = 0\quad M = \{-9x\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Resp.*

F6-2 $+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad -V - 2x = 0\quad V = \{-2x\}\ \text{kip}$ *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_O = 0;\quad M + 2x\left(\frac{x}{2}\right) - 18 = 0$

$M = \{18 - x^2\}\ \text{kip}\cdot\text{pie}$ *Resp.*

F6-3 $+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad -V - \frac{1}{2}(4x)(x) = 0$

$V = \{-2x^2\}\ \text{kN}$ *Resp.*

$\Sigma M_O = 0;\ M + \left[\frac{1}{2}(4x)(x)\right]\left(\frac{x}{3}\right) = 0$

$M = \left\{-\frac{2}{3}x^3\right\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Resp.*

F6-4 $0 \le x < 1.5$ m

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad V = 0$ *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_O = 0;\quad M - 4 = 0\quad M = 4\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Resp.*

$1.5\ \text{m} < x \le 3$ m

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad -V - 9 = 0\quad V = -9\ \text{kN}$ *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_O = 0;\quad M + 9(x - 1.5) - 4 = 0$

$M = \{17.5 - 9x\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Resp.*

F6-5 $\circlearrowleft+\Sigma M_B = 0;\quad A_y(6) - 30 = 0\quad A_y = 5\ \text{kN}$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad -V - 5 = 0\quad V = -5\ \text{kN}$ *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_O = 0;\quad M + 5x = 0\quad M = \{-5x\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Resp.*

F6-6 $\circlearrowleft+\Sigma M_B = 0;\quad A_y(6) + 20 - 50 = 0$

$A_y = 5\ \text{kN}$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad -V - 5 = 0\quad V = -5\ \text{kN}$ *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_O = 0;\quad M + 5x - 50 = 0$

$M = \{50 - 5x\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Resp.*

F6-7 *Diagrama de fuerza cortante.* $V = -4$, $x = 0$. Pendiente cero hasta $x = 6$.

Diagrama de momento. $M = 0$, $x = 0$. Pendiente negativa constante hasta $M = -16$, $x = 4^-$, $M = 8$, $x = 4^+$. Pendiente negativa constante hasta $M = 0$, $x = 6$.

F6-8 *Diagrama de fuerza cortante.* $V = -6$, $x = 0$. Pendiente cero hasta $x = 3$.

Diagrama de momento. $M = 0$, $x = 0$. Pendiente negativa constante hasta $M = -9$, $x = 1.5^-$, $M = -21$, $x = 1.5^+$. Pendiente negativa constante hasta $M = -30$, $x = 3$.

F6-9 *Diagrama de fuerza cortante.* $V = 0$, $x = 0$. Pendiente cero hasta $x = 1.5^-$, $V = 4$, $x = 1.5^+$. Pendiente cero hasta $x = 4.5^-$, $V = 0$, $x = 4.5^+$. Pendiente cero hasta $V = 0$, $x = 6$.

Diagrama de momento. $M = 6$, $x = 0$. Pendiente cero hasta $x = 1.5$. $M = 6$, $x = 1.5$. Pendiente positiva constante hasta $x = 4.5$. $M = 18$, $x = 4.5$. Pendiente cero hasta $M = 18$, $x = 6$.

F6-10 *Diagrama de fuerza cortante.* $V = 16.5$, $x = 0$. Pendiente negativa constante hasta $x = 3$, $V = 0$, $x = 2.75$, $V = -1.5$, $x = 3$. Pendiente negativa decreciente, $V = -10.5$, $x = 6$.

Diagrama de momento. $M = 0$, $x = 0$. Pendiente positivadecreciente. $M = 22.7$, $x = 2.75$. Pendiente negativa decreciente hasta $M = 0$, $x = 6$.

F6-11 *Diagrama de fuerza cortante.* $V = 0$, $x = 0$. Pendiente negativa constante, $V = -6$, $x = 1.5^-$, $V = 0$, $x = 1.5^+$. Pendiente cero hasta $x = 4.5$, $V = 0$, $x = 4.5$. $V = 6$, $x = 4.5^+$. Pendiente negativa constante, $V = 0$, $x = 6$.

Diagrama de momento. $M = 0$, $x = 0$. Pendiente negativa creciente, $M = -4.5$, $x = 4.5$. Pendiente positiva decreciente, $M = 0$, $x = 6$.

F6-12 *Diagrama de fuerza cortante.* $V = 15$, $x = 0$. Pendiente negativa decreciente hasta pendiente cero en $x = 3$. $V = 0$, $x = 0$. Pendiente negativa creciente hasta $V = -15$, $x = 6$.

Diagrama de momento. $M = 0$, $x = 0$. Pendiente positiva decreciente hasta pendiente cero en $x = 3$. $M = 15$, $x = 3$. Pendiente negativa creciente $M = 0$, $x = 6$.

F6-13 *Diagrama de fuerza cortante.* $V = 1050$, $x = 0$. Pendiente negativa constante. $V = 0$, $x = 5.25$, $V = -150$, $x = 6$. Pendiente cero. $V = -150$, $x = 9^-$, $V = -750$, $x = 9^+$. Pendiente cero. $V = -750$, $x = 12$.

Diagrama de momento. $M = 0$, $x = 0$. Pendiente positiva decreciente hasta $x = 5.25$. $M = 2756$, $x = 5.25$. Pendiente positiva creciente hasta $M = 2700$, $x = 6$. Pendiente negativa constante, $M = 2250$, $x = 9$. Pendiente negativa constante, $M = 0$, $x = 12$.

F6-14 *Diagrama de fuerza cortante.* $V = 30$, $x = 0$. Pendiente negativa constante. $V = 0$, $x = 1.5$, $V = -50$, $x = 4^-$. $V = 20$, $x = 4^+$. Pendiente cero, $V = 20$, $x = 6$.

Diagrama de momento. $M = 0$, $x = 0$. Pendiente positiva decreciente hasta pendiente cero en $x = 1.5$. $M = 22.5$, $x = 1.5$. Pendiente negativa creciente, $M = -40$, $x = 4$. Pendiente positiva constante, $M = 0$, $x = 6$.

F6-15
$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.02)(0.2^3)\right] + \frac{1}{12}(0.26)(0.02^3)$$
$$= 26.84(10^{-6})\ \text{m}^4$$
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{20(10^3)(0.1)}{26.84(10^{-6})} = 74.5\ \text{MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

F6-16
$$\bar{y} = \frac{0.3}{3} = 0.1\ \text{m}$$
$$I = \frac{1}{36}(0.3)(0.3^3) = 0.225(10^{-3})\ \text{m}^4$$
$$(\sigma_{\text{máx}})_c = \frac{Mc}{I} = \frac{50(10^3)(0.3 - 0.1)}{0.225(10^{-3})}$$
$$= 44.4\ \text{MPa (C)} \qquad \textit{Resp.}$$
$$(\sigma_{\text{máx}})_t = \frac{My}{I} = \frac{50(10^3)(0.1)}{0.225(10^{-3})} = 22.2\ \text{MPa (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

F6-17
$$I = \frac{1}{12}(0.2)(0.3^3) - \frac{1}{12}(0.18)(0.26^3)$$
$$= 0.18636(10^{-3})\ \text{m}^4$$
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{50(10^3)(0.15)}{0.18636(10^{-3})} = 40.2\ \text{MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

F6-18
$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.03)(0.4^3)\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0.14)(0.03^3) + 0.14(0.03)(0.15^2)\right]$$
$$= 0.50963(10^{-3})\ \text{m}^4$$
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{10(10^3)(0.2)}{0.50963(10^{-3})} = 3.92\ \text{MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

F6-19
$$I = \frac{1}{12}(0.05)(0.4)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(0.025)(0.3)^3\right]$$
$$= 0.37917(10^{-3})\ \text{m}^4$$
$$\sigma_A = \frac{My_A}{I} = -\frac{5(10^3)(-0.15)}{0.37917(10^{-3})} = 1.98\ \text{MPa (T)} \qquad \textit{Resp.}$$

F6-20 $M_y = 50\left(\frac{4}{5}\right) = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$M_z = 50\left(\frac{3}{5}\right) = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$I_y = \frac{1}{12}(0.3)(0.2^3) = 0.2(10^{-3}) \text{ m}^4$

$I_z = \frac{1}{12}(0.2)(0.3^3) = 0.45(10^{-3}) \text{ m}^4$

$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$

$\sigma_A = -\frac{[30(10^3)](-0.15)}{0.45(10^{-3})} + \frac{[40(10^3)](0.1)}{0.2(10^{-3})}$

$= 30 \text{ MPa (T)}$ *Resp.*

$\sigma_B = -\frac{[30(10^3)](0.15)}{0.45(10^{-3})} + \frac{[40(10^3)](0.1)}{0.2(10^{-3})}$

$= 10 \text{ MPa (T)}$ *Resp.*

$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$

$\tan\alpha = \left[\frac{0.45(10^{-3})}{0.2(10^{-3})}\right]\left(\frac{4}{3}\right)$

$\alpha = 71.6°$ *Resp.*

F6-21 El esfuerzo máximo ocurre en D o A.

$(\sigma_{máx})_D = \frac{(50\cos 30°)12(3)}{\frac{1}{12}(4)(6)^3} + \frac{(50\operatorname{sen} 30°)12(2)}{\frac{1}{12}(6)(4)^3}$

$= 40.4 \text{ psi}$ *Resp.*

Capítulo 7

F7-1 $I = 2\left[\frac{1}{12}(0.02)(0.2^3)\right] + \frac{1}{12}(0.26)(0.02^3)$

$= 26.84(10^{-6}) \text{ m}^4$

$Q_A = 0.055(0.09)(0.02) = 99(10^{-6}) \text{ m}^3$

$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{100(10^3)[99(10^{-6})]}{[26.84(10^{-6})](0.02)}$

$= 18.4 \text{ MPa}$ *Resp.*

F7-2 $I = \frac{1}{12}(0.1)(0.3^3) + \frac{1}{12}(0.2)(0.1^3) = 0.24167(10^{-3}) \text{ m}^4$

$Q_A = y'_1A'_1 + y'_2A'_2$

$= \left[\frac{1}{2}(0.05)\right](0.05)(0.3) + 0.1(0.1)(0.1)$

$= 1.375(10^{-3}) \text{ m}^3$

$Q_B = y'_3A'_3 = 0.1(0.1)(0.1) = 1(10^{-3}) \text{ m}^3$

$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{600(10^3)[1.375(10^{-3})]}{[0.24167(10^{-3})](0.3)} = 11.4 \text{ MPa}$ *Resp.*

$\tau_B = \frac{VQ}{It} = \frac{600(10^3)[1(10^{-3})]}{[0.24167(10^{-3})](0.1)} = 24.8 \text{ MPa}$ *Resp.*

F7-3 $V_{máx} = 4.5 \text{ kip}$

$I = \frac{1}{12}(3)(6^3) = 54 \text{ pulg}^4$

$Q_{máx} = y'A' = 1.5(3)(3) = 13.5 \text{ pulg}^3$

$(\tau_{máx})_{abs} = \frac{V_{máx}Q_{máx}}{It} = \frac{4.5(10^3)(13.5)}{54(3)} = 375 \text{ psi}$ *Resp.*

F7-4 $I = 2\left[\frac{1}{12}(0.03)(0.4)^3\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0.14)(0.03)^3 + 0.14(0.03)(0.15^2)\right] = 0.50963(10^{-3}) \text{ m}^4$

$Q_{máx} = 2y'_1A'_1 + y'_2A'_2 = 2(0.1)(0.2)(0.03) + (0.15)(0.14)(0.03) = 1.83(10^{-3}) \text{ m}^3$

$\tau_{máx} = \frac{VQ_{máx}}{It} = \frac{20(10^3)[1.83(10^{-3})]}{0.50963(10^{-3})[2(0.3)]} = 1.20 \text{ MPa}$ *Resp.*

F7-5 $I = \frac{1}{12}(0.05)(0.4)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(0.025)(0.3)^3\right]$

$= 0.37917(10^3) \text{ m}^4$

$Q_{máx} = 2y'_1A'_1 + y'_2A'_2 = 2(0.075)(0.025)(0.15) + (0.1)(0.05)(0.2) = 1.5625(10^{-3}) \text{ m}^3$

$\tau_{máx} = \frac{VQ_{máx}}{It} = \frac{20(10^3)[1.5625(10^{-3})]}{[0.37917(10^{-3})][2(0.025)]}$

$= 1.65 \text{ MPa}$ *Resp.*

F7-6 $I = \frac{1}{12}(0.3)(0.2^3) = 0.2(10^{-3}) \text{ m}^4$

$Q = y'A' = 0.05(0.1)(0.3) = 1.5(10^{-3}) \text{ m}^3$

$q_{perm} = 2\left(\frac{F}{s}\right) = \frac{2[15(10^3)]}{s} = \frac{30(10^3)}{s}$

$q_{perm} = \frac{VQ}{I}; \quad \frac{30(10^3)}{s} = \frac{50(10^3)[1.5(10^{-3})]}{0.2(10^{-3})}$

$s = 0.08 \text{ m} = 80 \text{ mm}$ *Resp.*

F7-7 $I = \frac{1}{12}(0.3)(0.2^3) = 0.2(10^{-3})\text{ m}^4$

$Q = y'A' = 0.05(0.1)(0.3) = 1.5(10^{-3})\text{ m}^3$

$q_{perm} = 2\left(\frac{F}{s}\right) = \frac{2[15(10^3)]}{0.1} = 300(10^3)\text{ N/m}$

$q_{perm} = \frac{VQ}{I};\quad 300(10^3) = \frac{V[1.5(10^{-3})]}{0.2(10^{-3})}$

$V = 40(10^3)\text{ N} = 40\text{ kN}$ *Resp.*

F7-8 $I = \frac{1}{12}(0.2)(0.34^3) - \frac{1}{12}(0.19)(0.28^3)$

$= 0.3075(10^{-3})\text{ m}^4$

$Q = y'A' = 0.16(0.02)(0.2) = 0.64(10^{-3})\text{ m}^3$

$q_{perm} = 2\left(\frac{F}{s}\right) = \frac{2[30(10^3)]}{s} = \frac{60(10^3)}{s}$

$q_{perm} = \frac{VQ}{I};\quad \frac{60(10^3)}{s} = \frac{300(10^3)[0.64(10^{-3})]}{0.3075(10^{-3})}$

$s = 0.09609\text{ m} = 96.1\text{ mm}$

Use $s = 96$ mm *Resp.*

F7-9

$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.025)(0.3^3)\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0.05)(0.2^3) + 0.05(0.2)(0.15^2)\right]$

$= 0.62917(10^{-3})\text{ m}^4$

$Q = y'A' = 0.15(0.2)(0.05) = 1.5(10^{-3})\text{ m}^3$

$q_{perm} = 2\left(\frac{F}{s}\right) = \frac{2[8(10^3)]}{s} = \frac{16(10^3)}{s}$

$q_{perm} = \frac{VQ}{I};\quad \frac{16(10^3)}{s} = \frac{20(10^3)[1.5(10^{-3})]}{0.62917(10^{-3})}$

$s = 0.3356\text{ m} = 335.56\text{ mm}$

Use $s = 335$ mm *Resp.*

F7-10 $I = \frac{1}{12}(1)(6^3) + 4\left[\frac{1}{12}(0.5)(4^3) + 0.5(4)(3^2)\right]$

$= 100.67\text{ pulg}^4$

$Q = y'A' = 3(4)(0.5) = 6\text{ pulg}^3$

$q_{perm} = \frac{F}{s} = \frac{6}{s}$

$q_{perm} = \frac{VQ}{I};\quad \frac{6}{s} = \frac{15(6)}{100.67}$

$s = 6.711$ pulg

Use $s = 6\frac{5}{8}$ pulg *Resp.*

Capítulo 8

F8-1 $+\uparrow\Sigma F_z = (F_R)_z;\ -500 - 300 = P$

$P = -800\text{ kN}$

$\Sigma M_x = 0;\quad 300(0.05) - 500(0.1) = M_x$

$M_x = -35\text{ kN}\cdot\text{m}$

$\Sigma M_y = 0;\quad 300(0.1) - 500(0.1) = M_y$

$M_y = -20\text{ kN}\cdot\text{m}$

$A = 0.3(0.3) = 0.09\text{ m}^2$

$I_x = I_y = \frac{1}{12}(0.3)(0.3^3) = 0.675(10^{-3})\text{ m}^4$

$\sigma_A = \frac{-800(10^3)}{0.09} + \frac{[20(10^3)](0.15)}{0.675(10^{-3})} + \frac{[35(10^3)](0.15)}{0.675(10^{-3})}$

$= 3.3333\text{ MPa} = 3.33\text{ MPa (T)}$ *Resp.*

$\sigma_B = \frac{-800(10^3)}{0.09} + \frac{[20(10^3)](0.15)}{0.675(10^{-3})} - \frac{[35(10^3)](0.15)}{0.675(10^{-3})}$

$= -12.22\text{ MPa} = 12.2\text{ MPa (C)}$ *Resp.*

F8-2 $+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad V - 400 = 0\quad V = 400\text{ kN}$

$\circlearrowleft+\Sigma M_A = 0;\ -M - 400(0.5) = 0\ M = -200\text{ kN}\cdot\text{m}$

$I = \frac{1}{12}(0.1)(0.3^3) = 0.225(10^{-3})\text{ m}^4$

$Q_A = y'A' = 0.1(0.1)(0.1) = 1(10^{-3})\text{ m}^3$

$\sigma_A = \frac{My}{I} = \frac{[200(10^3)](-0.05)}{0.225(10^{-3})}$

$= -44.44\text{ MPa} = 44.4\text{ MPa (C)}$ *Resp.*

$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{400(10^3)[1(10^{-3})]}{0.225(10^{-3})(0.1)} = 17.8\text{ MPa}$ *Resp.*

F8-3 La reacción izquierda es 20 kN.

Segmento izquierdo:

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad 20 - V = 0\quad V = 20\text{ kN}$

$\circlearrowleft+\Sigma M_s = 0;\quad M - 20(0.5) = 0\quad M = 10\text{ kN}\cdot\text{m}$

$I = \frac{1}{12}(0.1)(0.2^3) - \frac{1}{12}(0.09)(0.18^3)$

$= 22.9267(10^{-6})\text{ m}^4$

$Q_A = y_1'A_1' + y_2'A_2' = 0.07(0.04)(0.01)$

$+ 0.095(0.1)(0.01) = 0.123(10^{-3})\text{ m}^3$

$\sigma_A = -\frac{My_A}{I} = -\frac{[10(10^3)](0.05)}{22.9267(10^{-6})}$

$= -21.81\text{ MPa} = 21.8\text{ MPa (C)}$ *Resp.*

$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{20(10^3)[0.123(10^{-3})]}{[22.9267(10^{-6})](0.01)}$

$= 10.7\text{ MPa}$ *Resp.*

F8-4 En la sección a través del eje centroidal:

$N = P$

$V = 0$

$M = (2 + 1)P = 3P$

$\sigma = \dfrac{P}{A} + \dfrac{Mc}{I}$

$30 = \dfrac{P}{2(0.5)} + \dfrac{(3P)(1)}{\frac{1}{12}(0.5)(2)^3}$

$P = 3 \text{ kip}$ *Resp.*

F8-5 En la sección a través de B:

$N = 500 \text{ lb}, V = 400 \text{ lb}$

$M = 400(10) = 4000 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$

Carga axial:

$\sigma_x = \dfrac{P}{A} = \dfrac{500}{4(3)} = 41.667 \text{ psi (T)}$

Carga cortante:

$\tau_{xy} = \dfrac{VQ}{It} = \dfrac{400[(1.5)(3)(1)]}{[\frac{1}{12}(3)(4)^3]3} = 37.5 \text{ psi}$

Momento flexionante:

$\sigma_x = \dfrac{My}{I} = \dfrac{4000(1)}{\frac{1}{12}(3)(4)^3} = 250 \text{ psi (C)}$

Así

$\sigma_x = 41.667 - 250 = 208 \text{ psi (C)}$ *Resp.*

$\sigma_y = 0$ *Resp.*

$\tau_{xy} = 37.5 \text{ psi}$ *Resp.*

F8-6 Segmento superior:

$\Sigma F_y = 0;\quad V_y + 1000 = 0 \quad V_y = -1000 \text{ N}$

$\Sigma F_x = 0;\quad V_x - 1500 = 0 \quad V_x = 1500 \text{ N}$

$\Sigma M_z = 0;\quad T_z - 1500(0.4) = 0 \quad T_z = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$

$\Sigma M_y = 0;\quad M_y - 1500(0.2) = 0 \quad M_y = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$

$\Sigma M_x = 0;\quad M_x - 1000(0.2) = 0 \quad M_x = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$

$I_y = I_x = \dfrac{\pi}{4}(0.02^4) = 40(10^{-9})\pi \text{ m}^4$

$J = \dfrac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$

$(Q_y)_A = \dfrac{4(0.02)}{3\pi}\left[\dfrac{\pi}{2}(0.02^2)\right] = 5.3333(10^{-6}) \text{ m}^3$

$\sigma_A = \dfrac{M_x y}{I_x} + \dfrac{M_y z}{I_y} = \dfrac{200(0)}{40(10^{-9})\pi} + \dfrac{300(0.02)}{40(10^{-9})\pi}$

$= 47.7 \text{ MPa (T)}$ *Resp.*

$[(\tau_{zy})_T]_A = \dfrac{T_z c}{J} = \dfrac{600(0.02)}{80(10^{-9})\pi} = 47.746 \text{ MPa}$

$[(\tau_{zy})_V]_A = \dfrac{V_y(Q_y)_A}{I_x t} = \dfrac{1000[5.3333(10^{-6})]}{[40(10^{-9})\pi](0.04)}$

$= 1.061 \text{ MPa}$

Al combinar estas dos componentes del esfuerzo cortante,

$(\tau_{zy})_A = 47.746 + 1.061 = 48.8 \text{ MPa}$ *Resp.*

F8-7 Segmento derecho:

$\Sigma F_z = 0;\quad V_z - 6 = 0 \quad V_z = 6 \text{ kN}$

$\Sigma M_y = 0;\quad T_y - 6(0.3) = 0 \quad T_y = 1.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$\Sigma M_x = 0;\quad M_x - 6(0.3) = 0 \quad M_x = 1.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$I_x = \dfrac{\pi}{4}(0.05^4 - 0.04^4) = 0.9225(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$J = \dfrac{\pi}{2}(0.05^4 - 0.04^4) = 1.845(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$(Q_z)_A = y_2' A_2' - y_1' A_1'$

$= \dfrac{4(0.05)}{3\pi}\left[\dfrac{\pi}{2}(0.05^2)\right] - \dfrac{4(0.04)}{3\pi}\left[\dfrac{\pi}{2}(0.04^2)\right]$

$= 40.6667(10^{-6}) \text{ m}^3$

$\sigma_A = \dfrac{M_x z}{I_x} = \dfrac{1.8(10^3)}{0.9225(10^{-6})\pi} = 0$ *Resp.*

$[(\tau_{yz})_T]_A = \dfrac{T_y c}{J} = \dfrac{[1.8(10^3)](0.05)}{1.845(10^{-6})\pi} = 15.53 \text{ MPa}$

$[(\tau_{yz})_V]_A = \dfrac{V_z(Q_z)_A}{I_x t} = \dfrac{6(10^3)[40.6667(10^{-6})]}{[0.9225(10^{-6})\pi](0.02)}$

$= 4.210 \text{ MPa}$

Al combinar estas dos componentes del esfuerzo cortante,

$(\tau_{yz})_A = 15.53 - 4.210 = 11.3 \text{ MPa}$ *Resp.*

F8-8 Segmento izquierdo:

$\Sigma F_z = 0;\quad V_z - 900 - 300 = 0 \quad V_z = 1200 \text{ N}$

$\Sigma M_y = 0;\quad T_y + 300(0.1) - 900(0.1) = 0 \quad T_y = 60 \text{ N} \cdot \text{m}$

$\Sigma M_x = 0;\quad M_x + (900 + 300)0.3 = 0 \quad M_x = -360 \text{ N} \cdot \text{m}$

$I_x = \dfrac{\pi}{4}(0.025^4 - 0.02^4) = 57.65625(10^{-9})\pi \text{ m}^4$

$J = \dfrac{\pi}{2}(0.025^4 - 0.02^4) = 0.1153125(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$(Q_y)_A = 0$

$\sigma_A = \dfrac{M_x y}{I_x} = \dfrac{(360)(0.025)}{57.65625(10^{-9})\pi} = 49.7 \text{ MPa}$ *Resp.*

$[(\tau_{xy})_T]_A = \dfrac{T_y \rho_A}{J} = \dfrac{60(0.025)}{0.1153125(10^{-6})\pi} = 4.14 \text{ MPa}$ *Resp.*

$[(\tau_{yz})_V]_A = \dfrac{V_z(Q_z)_A}{I_x t} = 0$ *Resp.*

Capítulo 9

F9-1 $\theta = 120^\circ \quad \sigma_x = 500 \text{ kPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$
Aplique las ecuaciones 9-1, 9-2.
$\sigma_{x'} = 125 \text{ kPa}$ *Resp.*
$\tau_{x'y'} = 217 \text{ kPa}$ *Resp.*

F9-2 $\theta = -45^\circ \quad \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -400 \text{ kPa}$
$\tau_{xy} = -300 \text{ kPa}$
Aplique las ecuaciones 9-1, 9-3, 9-2.
$\sigma_{x'} = 100 \text{ kPa}$ *Resp.*
$\sigma_{y'} = -500 \text{ kPa}$ *Resp.*
$\tau_{x'y'} = 200 \text{ kPa}$ *Resp.*

F9-3 $\sigma_x = 80 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 30 \text{ MPa}$
Aplique las ecuaciones 9-5, 9-4.
$\sigma_1 = 90 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -10 \text{ MPa}$ *Resp.*
$\theta_p = 18.43^\circ$ y 108.43°
A partir de la ecuación 9-1,

$$\sigma_{x'} = \frac{80+0}{2} + \frac{80-0}{2}\cos 2(18.43^\circ) + 30 \operatorname{sen} 2(18.43^\circ) = 90 \text{ MPa} = \sigma_1$$

Así,
$(\theta_p)_1 = 18.4^\circ$ y $(\theta_p)_2 = 108^\circ$ *Resp.*

F9-4 $\sigma_x = 100 \text{ kPa} \quad \sigma_y = 700 \text{ kPa}$
$\tau_{xy} = -400 \text{ kPa}$
Aplique las ecuaciones 9-7, 9-8.
$\tau_{\text{máx en el plano}} = 500 \text{ kPa}$ *Resp.*
$\sigma_{\text{prom}} = 400 \text{ kPa}$ *Resp.*

F9-5 En la sección transversal a través de B:
$N = 4 \text{ kN} \quad V = 2 \text{ kN}$
$M = 2(2) = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{4(10^3)}{0.03(0.06)} + \frac{4(10^3)(0.03)}{\frac{1}{12}(0.03)(0.06)^3} = 224 \text{ MPa (T)}$$

Observe que $\tau_B = 0$ puesto que $Q = 0$.
Así
$\sigma_1 = 224 \text{ MPa}$ *Resp.*
$\sigma_2 = 0$

F9-6 $A_y = B_y = 12 \text{ kN}$
Segmento AC:
$V_C = 0 \quad M_C = 24 \text{ kN}\cdot\text{m}$
$\tau_C = 0$ (puesto que $V_C = 0$)
$\sigma_C = 0$ (puesto que C está en el eje neutro)
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ *Resp.*

F9-7 $\sigma_{\text{prom}} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{500+0}{2} = 250 \text{ kPa}$

Las coordenadas del centro C del círculo y el punto de referencia A son
$A(500, 0) \qquad C(250, 0)$
$R = CA = 500 - 250 = 250 \text{ kPa}$
$\theta = 120^\circ$ (antihorario). Gire la línea radial CA en sentido antihorario $2\theta = 240^\circ$ hacia las coordenadas del punto $P(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$.
$\alpha = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$
$\sigma_{x'} = 250 - 250 \cos 60^\circ = 125 \text{ kPa}$ *Resp.*
$\tau_{x'y'} = 250 \operatorname{sen} 60^\circ = 217 \text{ kPa}$ *Resp.*

F9-8 $\sigma_{\text{prom}} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{80+0}{2} = 40 \text{ kPa}$

Las coordenadas del centro C del círculo y el punto de referencia A son
$A(80, 30) \qquad C(40, 0)$
$R = CA = \sqrt{(80-40)^2 + 30^2} = 50 \text{ MPa}$
$\sigma_1 = 40 + 50 = 90 \text{ MPa}$ *Resp.*
$\sigma_2 = 40 - 50 = -10 \text{ MPa}$ *Resp.*
$\tan 2(\theta_p)_1 = \dfrac{30}{80-40} = 0.75$
$(\theta_p)_1 = 18.4^\circ$ (antihorario) *Resp.*

F9-9 $J = \dfrac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{4(10^3)(0.04)}{0.875(10^{-6})\pi} = 58.21 \text{ MPa}$$

$\sigma_x = \sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = -58.21 \text{ MPa}$
$\sigma_{\text{prom}} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0$
Las coordenadas del punto de referencia A y el centro C del círculo son
$A(0, -58.21) \qquad C(0, 0)$
$R = CA = 58.21 \text{ MPa}$
$\sigma_1 = 0 + 58.21 = 58.2 \text{ MPa}$ *Resp.*
$\sigma_2 = 0 - 58.21 = -58.2 \text{ MPa}$ *Resp.*

F9-10
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V - 30 = 0 \quad V = 30 \text{ kN}$
$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \quad -M - 30(0.3) = 0 \quad M = -9 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$$I = \frac{1}{12}(0.05)(0.15^3) = 14.0625(10^{-6})\ \text{m}^4$$

$$Q_A = y'A' = 0.05(0.05)(0.05) = 0.125(10^{-3})\ \text{m}^3$$

$$\sigma_A = -\frac{My_A}{I} = \frac{[-9(10^3)](0.025)}{14.0625(10^{-6})} = 16\ \text{MPa (T)}$$

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{30(10^3)[0.125(10^{-3})]}{14.0625(10^{-6})(0.05)} = 5.333\ \text{MPa}$$

$\sigma_x = 16$ MPa, $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = -5.333$ MPa

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{16 + 0}{2} = 8\ \text{MPa}$$

Las coordenadas del punto de referencia A y del centro C del círculo son

$A\ (16, -5.333) \qquad C(8, 0)$

$$R = CA = \sqrt{(16 - 8)^2 + (-5.333)^2} = 9.615\ \text{MPa}$$

$\sigma_1 = 8 + 9.615 = 17.6$ MPa *Resp.*

$\sigma_2 = 8 - 9.615 = -1.61$ MPa *Resp.*

F9-11

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 60(1) - A_y(1.5) = 0 \quad A_y = 40$ kN

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 40 - V = 0 \quad V = 40$ kN

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \quad M - 40(0.5) = 0 \quad M = 20$ kN · m

$$I = \frac{1}{12}(0.1)(0.2^3) - \frac{1}{12}(0.09)(0.18^3) = 22.9267(10^{-6})\ \text{m}^4$$

$$Q_A = y'A' = 0.095(0.01)(0.1) = 95(10^{-6})\ \text{m}^3$$

$$\sigma_A = -\frac{My_A}{I} = -\frac{[20(10^3)](0.09)}{22.9267(10^{-6})} = -78.51\ \text{MPa}$$

$$= 78.51\ \text{MPa (C)}$$

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{40(10^3)[95(10^{-6})]}{[22.9267(10^{-6})](0.01)} = 16.57\ \text{MPa}$$

$\sigma_x = -78.51$ MPa, $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = -16.57$ MPa

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-78.51 + 0}{2} = -39.26\ \text{MPa}$$

Las coordenadas del punto de referencia A y del centro C del círculo son

$A(-78.51, -16.57) \qquad C(-39.26, 0)$

$$R = CA = \sqrt{[-78.51 - (-39.26)]^2 + (-16.57)^2}$$
$$= 42.61\ \text{MPa}$$

$\tau_{\text{máx en el plano}} = |R| = 42.6$ MPa *Resp.*

Capítulo 11

F11-1

$V_{\text{máx}} = 12$ kN $\qquad M_{\text{máx}} = 18$ kN · m

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{M_{\text{máx}}c}{I}; \qquad 10(10^6) = \frac{18(10^3)(a)}{\frac{2}{3}a^4}$$

$$a = 0.1392\ \text{m} = 139.2\ \text{mm}$$

Use $a = 140$ mm *Resp.*

$$I = \frac{2}{3}(0.14^4) = 0.2561(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$Q_{\text{máx}} = \frac{0.14}{2}(0.14)(0.14) = 1.372(10^{-3})\ \text{m}^3$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}Q_{\text{máx}}}{It} = \frac{12(10^3)[1.372(10^{-3})]}{[0.2561(10^{-3})](0.14)}$$

$$= 0.459\ \text{MPa} < \tau_{\text{perm}} = 1\ \text{MPa (OK)}$$

F11-2

$V_{\text{máx}} = 3$ kip $\qquad M_{\text{máx}} = 12$ kip · pie

$$I = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{M_{\text{máx}}c}{I}; \qquad 20 = \frac{12(12)\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{\pi d^4}{64}}$$

$$d = 4.19\ \text{pulg}$$

Use $d = 4\frac{1}{4}$ pulg *Resp.*

$$I = \frac{\pi}{64}(4.25^4) = 16.015\ \text{pulg}^4$$

$$Q_{\text{máx}} = \frac{4(4.25/2)}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)(4.25^2)\right] = 6.397\ \text{pulg}^3$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{máx}}Q_{\text{máx}}}{It} = \frac{3(6.397)}{16.015(4.25)}$$

$$= 0.282\ \text{ksi} < \tau_{\text{perm}} = 10\ \text{ksi (OK)}$$

F11-3

$V_{\text{máx}} = 10$ kN $\qquad M_{\text{máx}} = 5$ kN · m

$$I = \frac{1}{12}(a)(2a)^3 = \frac{2}{3}a^4$$

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{M_{\text{máx}}c}{I}; \qquad 12(10^6) = \frac{5(10^3)(a)}{\frac{2}{3}a^4}$$

$$a = 0.0855\ \text{m} = 85.5\ \text{mm}$$

Use $a = 86$ mm *Resp.*

$I = \frac{2}{3}(0.086^4) = 36.4672(10^{-6})\ \text{m}^4$

$Q_{máx} = \frac{0.086}{2}(0.086)(0.086)$

$= 0.318028(10^{-3})\ \text{m}^3$

$\tau_{máx} = \frac{V_{máx}Q_{máx}}{It} = \frac{10(10^3)[0.318028(10^{-3})]}{[36.4672(10^{-6})](0.086)}$

$= 1.01\ \text{MPa} < \tau_{perm} = 1.5\ \text{MPa (OK)}$

F11-4

$V_{máx} = 4.5\ \text{kip} \qquad M_{máx} = 6.75\ \text{kip}\cdot\text{pie}$

$I = \frac{1}{12}(4)(h^3) = \frac{h^3}{3}$

$\sigma_{perm} = \frac{M_{máx}c}{I}; \qquad 2 = \frac{6.75(12)\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h^3}{3}}$

$h = 7.794\ \text{pulg}$

$Q_{máx} = y'A' = \frac{h}{4}\left(\frac{h}{2}\right)(4) = \frac{h^2}{2}$

$\tau_{máx} = \frac{V_{máx}Q_{máx}}{It}; \ 0.2 = \frac{4.5\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\frac{h^3}{3}(4)}$

$h = 8.4375\ \text{pulg (controla)}$

Use $h = 8\frac{1}{2}$ pulg *Resp.*

F11-5

$V_{máx} = 25\ \text{kN} \qquad M_{máx} = 20\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$I = \frac{1}{12}(b)(3b)^3 = 2.25b^4$

$\sigma_{perm} = \frac{M_{máx}c}{I}; \qquad 12(10^6) = \frac{20(10^3)(1.5b)}{2.25b^4}$

$b = 0.1036\ \text{m} = 103.6\ \text{mm}$

Use $b = 104$ mm *Resp.*

$I = 2.25(0.104^4) = 0.2632(10^{-3})\ \text{m}^4$

$Q_{máx} = 0.75(0.104)[1.5(0.104)(0.104)] = 1.2655(10^{-3})\ \text{m}^3$

$\tau_{máx} = \frac{V_{máx}Q_{máx}}{It} = \frac{25(10^3)[1.2655(10^{-3})]}{[0.2632(10^{-3})](0.104)}$

$= 1.156\ \text{MPa} < \tau_{perm} = 1.5\ \text{MPa (OK)}.$

F11-6

$V_{máx} = 150\ \text{kN} \qquad M_{máx} = 150\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$S_{req} = \frac{M_{máx}}{\sigma_{perm}} = \frac{150(10^3)}{150(10^6)} = 0.001\ \text{m}^3 = 1000(10^3)\ \text{mm}^3$

Seleccione W410 × 67 [$S_x = 1200(10^3)\ \text{mm}^3, d = 410$ mm, y $t_w = 8.76$ mm]. *Resp.*

$\tau_{máx} = \frac{V}{t_w d} = \frac{150(10^3)}{0.00876(0.41)}$

$= 41.76\ \text{MPa} < \tau_{perm} = 75\ \text{MPa (OK)}$

Capítulo 12

F12-1

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad M(x) = 30\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 30$

$EI\frac{dv}{dx} = 30x + C_1$

$EIv = 15x^2 + C_1x + C_2$

En $x = 3$ m, $\frac{dv}{dx} = 0$.

$C_1 = -90\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$

En $x = 3$ m, $v = 0$.

$C_2 = 135\ \text{kN}\cdot\text{m}^3$

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(30x - 90)$

$v = \frac{1}{EI}(15x^2 - 90x + 135)$

Para el extremo A, $x = 0$

$\theta_A = \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=0} = -\frac{90(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = -0.00692\ \text{rad}$

Resp.

$v_A = v|_{x=0} = \frac{135(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = 0.01038\ \text{m} = 10.4\ \text{mm}$

Resp.

F12-2

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad M(x) = (-10x - 10)\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$EI\frac{d^2x}{dx^2} = -10x - 10$

$EI\frac{dv}{dx} = -5x^2 - 10x + C_1$

$EIv = -\frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + C_1x + C_2$

En $x = 3$ m, $\frac{dv}{dx} = 0$.

$EI(0) = -5(3^2) - 10(3) + C_1 \qquad C_1 = 75\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$

En $x = 3$ m, $v = 0$.

$EI(0) = -\frac{5}{3}(3^3) - 5(3^2) + 75(3) + C_2 \quad C_2 = -135\ \text{kN}\cdot\text{m}^3$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(-5x^2 - 10x + 75)$$
$$v = \frac{1}{EI}\left(-\frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 75x - 135\right)$$
Para el extremo $A, x = 0$
$$\theta_A = \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{EI}[-5(0) - 10(0) + 75]$$
$$= \frac{75(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = 0.00577 \text{ rad} \qquad \textit{Resp.}$$
$$v_A = v|_{x=0} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{5}{3}(0^3) - 5(0^2) + 75(0) - 135\right]$$
$$= -\frac{135(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = -0.01038 \text{ m} = -10.4 \text{ mm}$$
Resp.

F12-3

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad M(x) = \left(-\frac{3}{2}x^2 - 10x\right) \text{kN} \cdot \text{m}$
$$EI\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{3}{2}x^2 - 10x$$
$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + C_1$$
En $x = 3$ m, $\frac{dv}{dx} = 0.$
$$EI(0) = -\frac{1}{2}(3^3) - 5(3^2) + C_1 \qquad C_1 = 58.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 58.5\right)$$
Para el extremo $A, x = 0$
$$\theta_A = \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{58.5(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = 0.0045 \text{ rad} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-4

$A_y = 600$ lb
$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad M(x) = (600x - 50x^2) \text{ lb} \cdot \text{pie}$
$$EI\frac{d^2x}{dx^2} = 600x - 50x^2$$
$$EI\frac{dv}{dx} = 300x^2 - 16.667x^3 + C_1$$
$$EIv = 100x^3 - 4.1667x^4 + C_1x + C_2$$
En $x = 0, v = 0.$
$$EI(0) = 100(0^3) - 4.1667(0^4) + C_1(0) + C_2 \qquad C_2 = 0$$
En $x = 12$ pies, $v = 0.$
$$EI(0) = 100(12^3) - 4.1667(12^4) + C_1(12)$$
$$C_1 = -7200 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(300x^2 - 16.667x^3 - 7200)$$
$$v = \frac{1}{EI}(100x^3 - 4.1667x^4 - 7200x)$$
$v_{máx}$ ocurre donde $\frac{dv}{dx} = 0.$
$$300x^2 - 16.667x^3 - 7200 = 0$$
$x = 6$ pies *Resp.*
$$v = \frac{1}{EI}[100(6^3) - 4.1667(6^4) - 7200(6)]$$
$$= \frac{-27\,000(12 \text{ pulg/pie})^3}{1.5(10^6)\left[\frac{1}{12}(3)(6^3)\right]}$$
$$= -0.576 \text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

F12-5

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad M(x) = (40 - 5x) \text{ kN} \cdot \text{m}$
$$EI\frac{d^2x}{dx^2} = 40 - 5x$$
$$EI\frac{dv}{dx} = 40x - 2.5x^2 + C_1$$
$$EIv = 20x^2 - 0.8333x^3 + C_1x + C_2$$
En $x = 0, v = 0.$
$$EI(0) = 20(0^2) - 0.8333(0^3) + C_1(0) + C_2 \qquad C_2 = 0$$
En $x = 6$ m, $v = 0.$
$$EI(0) = 20(6^2) - 0.8333(6^3) + C_1(6) + 0$$
$$C_1 = -90 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(40x - 2.5x^2 - 90)$$
$$v = \frac{1}{EI}(20x^2 - 0.8333x^3 - 90x)$$
$v_{máx}$ ocurre donde $\frac{dv}{dx} = 0.$
$$40x - 2.5x^2 - 90 = 0$$
$$x = 2.7085 \text{ m}$$
$$v = \frac{1}{EI}[20(2.7085^2) - 0.83333(2.7085^3) - 90(2.7085)]$$
$$= -\frac{113.60(10^3)}{200(10^9)[39.9(10^{-6})]} = -0.01424 \text{ m} = -14.2 \text{ mm}$$
Resp.

F12-6

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad M(x) = (10x + 10) \text{ kN} \cdot \text{m}$
$$EI\frac{d^2x}{dx^2} = 10x + 10$$
$$EI\frac{dv}{dx} = 5x^2 + 10x + C_1$$
Debido a la simetría $\frac{dv}{dx} = 0$ en $x = 3$ m.

$EI(0) = 5(3^2) + 10(3) + C_1 \quad C_1 = -75 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}[5x^2 + 10x - 75]$

En $x = 0$,

$\frac{dv}{dx} = \frac{-75(10^3)}{200(10^9)(39.9(10^{-6}))} = -9.40(10^{-3})$ rad *Resp.*

F12-7

Como B es un soporte fijo, $\theta_B = 0$.

$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \frac{1}{2}\left(\frac{38}{EI} + \frac{20}{EI}\right)(3) = \frac{87 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$

$= \frac{87(10^3)}{200(10^9)[65(10^{-6})]} = 0.00669$ rad *Resp.*

$\Delta_A = |t_{A/B}| = (1.5)\left[\frac{20}{EI}(3)\right] + 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{18}{EI}\right)(3)\right]$

$= \frac{144(10^3)}{200(10^9)[65(10^{-6})]} = 0.01108 \text{ m} = 11.1 \text{ mm}$ *Resp.*

F12-8

Como B es un soporte fijo, $\theta_B = 0$.

$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{EI} + \frac{20}{EI}\right)(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{20}{EI}\right)(1) = \frac{45 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$

$= \frac{45(10^3)}{200(10^9)[126(10^{-6})]} = 0.00179$ rad *Resp.*

$\Delta_A = |t_{A/B}| =$

$(1.6667)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{30}{EI}\right)(1)\right] + 1.5\left[\frac{20}{EI}(1)\right] + 0.6667\left[\frac{1}{2}\left(\frac{20}{EI}\right)(1)\right]$

$= \frac{61.667 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} = \frac{61.667(10^3)}{200(10^9)[126(10^{-6})]}$

$= 0.002447 \text{ m} = 2.48 \text{ mm}$ *Resp.*

F12-9

Como B es un soporte fijo, $\theta_B = 0$.

$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \frac{1}{2}\left[\frac{60}{EI}(1)\right] + \frac{30}{EI}(2) = \frac{90 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$

$= \frac{90(10^3)}{200(10^9)[121(10^{-6})]} = 0.00372$ rad *Resp.*

$\Delta_A = |t_{A/B}| = 1.6667\left[\frac{1}{2}\left(\frac{60}{EI}\right)(1)\right] + (1)\left[\frac{30}{EI}(2)\right]$

$= \frac{110 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$

$= \frac{110(10^3)}{200(10^9)[121(10^{-6})]} = 0.004545 \text{ m} = 4.55 \text{ mm}$ *Resp.*

F12-10

Como B es un soporte fijo, $\theta_B = 0$.

$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{EI}\right)(6) + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{EI}\right)(3) = \frac{63 \text{ kip} \cdot \text{pie}^2}{EI}$

$= \frac{63(12^2)}{29(10^3)(245)} = 0.00128$ rad *Resp.*

$\Delta_A = |t_{A/B}| = 4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{18}{EI}\right)(6)\right] + (3 + 2.25)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{9}{EI}\right)(3)\right]$

$= \frac{263.25 \text{ kip} \cdot \text{pie}^3}{EI} = \frac{263.25(12^3)}{29(10^3)(245)} = 0.0640$ pulg *Resp.*

F12-11

Debido a la simetría, la pendiente en el segmento medio de la viga (punto C) es cero, es decir $\theta_C = 0$.

$\Delta_{máx} = \Delta_C = |t_{A/C}| = (2)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{30}{EI}\right)(3)\right] + 1.5\left[\frac{10}{EI}(3)\right]$

$= \frac{135 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$

$= \frac{135(10^3)}{200(10^9)[42.8(10^{-6})]} = 0.0158 \text{ m} = 15.8 \text{ mm} \downarrow$ *Resp.*

F12-12

$t_{A/B} = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{30}{EI}\right)(6)\right] + 3\left[\frac{10}{EI}(6)\right] = \frac{360}{EI}$

$\theta_B = \frac{|t_{A/B}|}{L} = \frac{\frac{360}{EI}}{6} = \frac{60}{EI}$

La deflexión máxima ocurre en el punto C donde la pendiente de la curva elástica es cero.

$\theta_B = \theta_{B/C}$

$\frac{60}{EI} = \left(\frac{10}{EI}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{5x}{EI}\right)x$

$2.5x^2 + 10x - 60 = 0$

$x = 3.2915$ m

$\Delta_{máx} = |t_{B/C}| =$

$\frac{2}{3}(3.2915)\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{5(3.2915)}{EI}\right](3.2915)\right\} + \frac{1}{2}(3.2915)\left[\frac{10}{EI}(3.2915)\right]$

$= \frac{113.60 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$

$= \frac{113.60(10^3)}{200(10^9)[39.9(10^{-6})]} = 0.01424 \text{ m} = 14.2 \text{ mm} \downarrow$ *Resp.*

F12-13

$(v_B)_1 = \dfrac{Px^2}{6EI}(3L - x) = \dfrac{40(4^2)}{6EI}[3(6) - 4] = \dfrac{1493.33}{EI}\downarrow$

$(v_B)_2 = \dfrac{PL^3}{3EI} = \dfrac{B_y(4^3)}{3EI} = \dfrac{21.33B_y}{EI}\uparrow$

$(+\uparrow)v_B = 0 = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$0 = -\dfrac{1493.33}{EI} + \dfrac{21.33B_y}{EI}$

$B_y = 70$ kN *Resp.*

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ *Resp.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad 70 - 40 - A_y = 0 \quad A_y = 30$ kN *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_A = 0;\quad 70(4) - 40(6) - M_A = 0$

$M_A = 40$ kN·m *Resp.*

F12-14

Para usar las tablas de deflexión, considere a la carga como una superposición de una carga uniforme distribuida menos una carga triangular.

$(v_B)_1 = \dfrac{w_0L^4}{8EI}\downarrow \quad (v_B)_2 = \dfrac{w_0L^4}{30EI}\uparrow \quad (v_B)_3 = \dfrac{B_yL^3}{3EI}\uparrow$

$(+\uparrow)\quad v_B = 0 = (v_B)_1 + (v_B)_2 + (v_B)_3$

$0 = -\dfrac{w_0L^4}{8EI} + \dfrac{w_0L^4}{30EI} + \dfrac{B_yL^3}{3EI}$

$B_y = \dfrac{11w_0L}{40}$ *Resp.*

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ *Resp.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad A_y + \dfrac{11w_0L}{40} - \dfrac{1}{2}w_0L = 0$

$A_y = \dfrac{9w_0L}{40}$ *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_A = 0;\quad M_A + \dfrac{11w_0L}{40}(L) - \dfrac{1}{2}w_0L\left(\dfrac{2}{3}L\right) = 0$

$M_A = \dfrac{7w_0L^2}{120}$ *Resp.*

F12-15

$(v_B)_1 = \dfrac{wL^4}{8EI} = \dfrac{[10(10^3)](6^4)}{8[200(10^9)][65.0(10^{-6})]} = 0.12461\text{ m}\downarrow$

$(v_B)_2 = \dfrac{B_yL^3}{3EI} = \dfrac{B_y(6^3)}{3[200(10^9)][65.0(10^{-6})]} = 5.5385(10^{-6})B_y\uparrow$

$(+\downarrow)\quad v_B = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$0.002 = 0.12461 - 5.5385(10^{-6})B_y$

$B_y = 22.14(10^3)\text{ N} = 22.1$ kN *Resp.*

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ *Resp.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad A_y + 22.14 - 10(6) = 0 \quad A_y = 37.9$ kN *Resp.*

$\circlearrowleft+\Sigma M_A = 0;\quad M_A + 22.14(6) - 10(6)(3) = 0$

$M_A = 47.2$ kN·m *Resp.*

F12-16

$(v_B)_1 = \dfrac{M_OL}{6EI(2L)}[(2L)^2 - L^2] = \dfrac{M_OL^2}{4EI}\downarrow$

$(v_B)_2 = \dfrac{B_y(2L)^3}{48EI} = \dfrac{B_yL^3}{6EI}\uparrow$

$(+\uparrow)\quad v_B = 0 = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$0 = -\dfrac{M_OL^2}{4EI} + \dfrac{B_yL^3}{6EI}$

$B_y = \dfrac{3M_O}{2L}$ *Resp.*

F12-17

$(v_B)_1 = \dfrac{Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2) = \dfrac{50(4)(6)}{6EI(12)}(12^2 - 4^2 - 6^2)$

$= \dfrac{1533.3\text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$

$(v_B)_2 = \dfrac{B_yL^3}{48EI} = \dfrac{B_y(12^3)}{48EI} = \dfrac{36B_y}{EI}\uparrow$

$(+\uparrow)\quad v_B = 0 = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$0 = -\dfrac{1533.3\text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + \dfrac{36B_y}{EI}$

$B_y = 42.6$ kN *Resp.*

F12-18

$(v_B)_1 = \dfrac{5wL^4}{384EI} = \dfrac{5[10(10^3)](12^4)}{384[200(10^9)][65.0(10^{-6})]} = 0.20769\downarrow$

$(v_B)_2 = \dfrac{B_yL^3}{48EI} = \dfrac{B_y(12^3)}{48[200(10^9)][65.0(10^{-6})]} = 2.7692(10^{-6})B_y\uparrow$

$(+\uparrow)\quad v_B = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$0.005 = 0.20769 - 2.7692(10^{-6})B_y$

$B_y = 73.19(10^3)\text{ N} = 73.2$ kN *Resp.*

Capítulo 13

F13-1

$P = \dfrac{\pi^2EI}{(KL)^2} = \dfrac{\pi^2(29(10^3))(\frac{\pi}{4}(0.5)^4)}{[0.5(50)]^2} = 22.5$ kip *Resp.*

$\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{22.5}{\pi(0.5)^2} = 28.6\text{ ksi} < \sigma_Y$ (OK)

F13-2

$$P = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2(1.6)(10^3)[\frac{1}{12}(4)(2)^3]}{[1(12)(12)]^2}$$

$$= 2.03 \text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

F13-3

Para el pandeo respecto al eje x, $K_x = 1$ y $L_x = 12$ m.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)^2} = \frac{\pi^2[200(10^9)][87.3(10^{-6})]}{[1(12)]^2} = 1.197(10^6) \text{ N}$$

Para el pandeo respecto al eje x, $L = 6$ m y $K_y = 1$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)^2} = \frac{\pi^2[200(10^9)][18.8(10^{-6})]}{[1(6)]^2}$$

$$= 1.031(10^6) \text{ N (controla)}$$

$$P_{perm} = \frac{P_{cr}}{\text{F.S.}} = \frac{1.031(10^6)}{2} = 515 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{1.031(10^6)}{7.4(10^{-3})} = 139.30 \text{ MPa} < \sigma_Y = 250 \text{ MPa}$$

(OK)

F13-4

$$A = \pi((0.025)^2 - (0.015)^2) = 1.257\ (10^{-3}) \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{4}\pi((0.025)^4 - (0.015)^4) = 267.04(10^{-9}) \text{ m}^4$$

$$P = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2(200(10^9))(267.04)(10^{-9})}{[0.5(5)]^2} = 84.3 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{84.3(10^3)}{1.257(10^{-3})} = 67.1 \text{ MPa} < 250 \text{ MP} \qquad \text{(OK)}$$

F13-5

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{AB}\left(\frac{3}{5}\right) - P = 0 \qquad F_{AB} = 1.6667P \text{ (T)}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 1.6667P\left(\frac{4}{5}\right) - F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = 1.3333P \text{ (C)}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(2^2) = \pi \text{ pulg}^2 \qquad I = \frac{\pi}{4}(1^4) = \frac{\pi}{4} \text{ pulg}^4$$

$$P_{cr} = F_{AC}(\text{F.S.}) = 1.3333P(2) = 2.6667P$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$2.6667P = \frac{\pi^2[29(10^3)]\left[\frac{\pi}{4}\right]}{[1(4)(12)]^2}$$

$$P = 36.59 \text{ kip} = 36.6 \text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{2.6667(36.59)}{\pi} = 31.06 \text{ ksi} < \sigma_Y = 36 \text{ ksi}$$

(OK)

F13-6

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad w(6)(3) - F_{BC}(6) = 0 \qquad F_{BC} = 3w$$

$$A = \frac{\pi}{4}(0.05^2) = 0.625(10^{-3})\pi \text{ m}^2 \quad I = \frac{\pi}{4}(0.025^4)$$

$$= 97.65625(10^{-9})\pi \text{ m}^4$$

$$P_{cr} = F_{BC}(\text{F.S.}) = 3w(2) = 6w$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$6w = \frac{\pi^2[200(10^9)][97.65625(10^{-9})\pi]}{[1(3)]^2}$$

$$w = 11.215(10^3) \text{ N/m} = 11.2 \text{ kN/m} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{6[11.215(10^3)]}{0.625(10^{-3})\pi} = 34.27 \text{ MPa} < \sigma_Y = 250 \text{ MPa}$$

(Verificado)

Respuestas a los problemas seleccionados

Capítulo 1

1-1. (a) $F_A = 13.8$ kip, (b) $F_A = 34.9$ kN

1-2. $T_C = 250$ N · m, $T_D = 0$

1-3. $T_B = 150$ lb · pie, $T_C = 500$ lb · pie

1-5. $9.00(4) - A_y(12) = 0$, $A_y = 3.00$ kip,
$B_y = 6.00$ kip, $N_D = 0$, $V_D = 0.750$ kip,
$M_D = 13.5$ kip · pie, $N_E = 0$, $V_E = -9.00$ kip,
$M_E = -24.0$ kip · pie

1-6. $N_C = -30.0$ kN, $V_C = -8.00$ kN,
$M_C = 6.00$ kN · m

1-7. $P = 0.533$ kN, $N_C = -2.00$ kN,
$V_C = -0.533$ kN, $M_C = 0.400$ kN · m

1-9. $B_y = 3.00$ kN, $N_D = 0$, $V_D = -1.875$ kN,
$M_D = 3.94$ kN · m

1-10. $N_A = 0$, $V_A = 450$ lb, $M_A = -1.125$ kip · pie
$N_B = 0$, $V_B = 850$ lb, $M_B = -6.325$ kip · pie
$V_C = 0$, $N_C = -1.20$ kip, $M_C = -8.125$ kip · pie

1-11. $V_A = 77.3$ lb, $N_A = 20.7$ lb, $M_A = 14.5$ lb · pulg

1-13. $N_B = -0.4$ kip, $V_B = 0.960$ kip,
$-M_B - 0.16(2) - 0.8(4.25) + 0.4(1.5) = 0$,
$M_B = -3.12$ kip · pie

1-14. $N_C = -0.4$ kip, $V_C = 1.08$ kip,
$M_C = -6.18$ kip · pie, $N_D = 0$, $V_D = 1.45$ kip,
$M_D = -15.7$ kip · pie

1-15. $V_C = 60$ N, $N_C = 0$, $M_C = 0.9$ N · m

1-17. $N_B = 5.303$ kN, $N_{a-a} = -3.75$ kN,
$V_{a-a} = 1.25$ kN, $M_{a-a} = 3.75$ kN · m,
$N_{b-b} = -1.77$ kN, $V_{b-b} = 3.54$ kN,
$M_{b-b} = 3.75$ kN · m

1-18. $N_C = -80$ lb, $V_C = 0$, $M_C = -480$ lb · pulg

1-19. $N_C = 0$, $V_C = 4.50$ kip, $M_C = 31.5$ kip · pie

1-21. $N_{a-a} = 779$ N, $V_{a-a} = 450$ N,
$900(0.2) - M_{a-a} = 0$, $M_{a-a} = 180$ N · m

1-22. $N_G = 9.81$ kN, $V_G = 0$, $M_G = 0$

1-23. $N_H = -2.71$ kN, $V_H = -20.6$ kN,
$M_H = -4.12$ kN · m

1-25. $(V_B)_x = 105$ lb, $(V_B)_y = 0$, $(N_B)_z = 0$,
$(M_B)_x = 0$, $(M_B)_y - 105(7.5) = 0$;
$(M_B)_y = 788$ lb · pie, $(T_B)_z - 105(0.5) = 0$;
$(T_B)_z = 52.5$ lb · pie

1-26. $(V_C)_x = -250$ N, $(N_C)_y = 0$,
$(V_C)_z = -240$ N,
$(M_C)_x = -108$ N · m,
$(T_C)_y = 0$, $(M_C)_z = -138$ N · m

1-27. $(N_B)_x = 0$, $(V_B)_y = 0$, $(V_B)_z = 70.6$ N,
$(T_B)_x = 9.42$ N · m, $(M_B)_y = 6.23$ N · m,
$(M_B)_z = 0$

1-29. $P\cos\theta - N_A = 0$, $N_A = P\cos\theta$,
$V_A - P\,\text{sen}\,\theta = 0$, $V_A = P\,\text{sen}\,\theta$,
$M_A - P[r(1-\cos\theta)] = 0$,
$M_A = Pr(1-\cos\theta)$

1-31. $\sigma = 1.82$ MPa

1-33. $V = P\cos\theta$, $N = P\,\text{sen}\,\theta$,
$\sigma = \dfrac{P}{A}\text{sen}^2\theta$, $\tau_{\text{prom}} = \dfrac{P}{2A}\text{sen}\,2\theta$

1-34. $\sigma_D = 13.3$ MPa (C), $\sigma_E = 70.7$ MPa (T)

1-35. Nodo A: $\sigma_{AB} = 10.7$ ksi (T),
$\sigma_{AE} = 8.53$ ksi (C),
Nodo E: $\sigma_{ED} = 8.53$ ksi (C),
$\sigma_{EB} = 4.80$ ksi (T)
Nodo B: $\sigma_{BC} = 23.5$ ksi (T),
$\sigma_{BD} = 18.7$ ksi (C)

1-37. $dF = 7.5(10^6)\,x^{1/2}\,dx$,
$P = 40$ MN, $d = 2.40$ m

1-38. $\sigma = 66.7$ psi, $\tau = 115$ psi

1-39. $\sigma_{\text{prom}} = 5$ MPa

1-41. $D_y = 650$ lb, $E_x = 500$ lb, $E_y = 350$ lb,
$C_y = 150$ lb, $B_y = 150$ lb,
$F_B = F_C = 594.24$ lb,
$(\tau_B)_{\text{prom}} = 12.1$ ksi

1-42. $(\tau_D)_{\text{prom}} = 6.62$ ksi, $(\tau_E)_{\text{prom}} = 6.22$ ksi

1-43. $(\tau_D)_{\text{prom}} = 13.2$ ksi, $(\tau_E)_{\text{prom}} = 12.4$ ksi

1-45. Nodo B: $\sigma_{AB} = \dfrac{F_{AB}}{A_{AB}} = \dfrac{625}{1.5} = 417$ psi (C),
$\sigma_{BC} = 469$ psi (T)
Nodo A: $\sigma_{AC} = 833$ psi (T)

1-46. $\sigma = 339$ MPa

1-47. $\tau_A = 138$ MPa

1-49. $A_x = 9.5263P$, $A_y = 5.5P$, $F_A = 11P$, $P = 3.70$ kN
1-50. $(\sigma_{a-a})_{prom} = 66.7$ kPa, $(\tau_{a-a})_{prom} = 115$ kPa
1-51. $P = 4$ kip, $(\tau_{a-a})_{prom} = 250$ psi
1-53. $V_b = P/4$, $V_p = P/4$, $P = 9.05$ kN
1-54. $(\sigma_{prom})_s = 56.6$ MPa, $(\sigma_{prom})_b = 31.8$ MPa
1-55. $(\sigma_{prom})_{AB} = 118$ MPa, $(\sigma_{prom})_{BC} = 58.8$ MPa
1-57. $V = 12.19$ kip, $N = 15.603$ kip, Plano inclinado: $\sigma' = 62.6$ ksi, $\tau'_{prom} = 48.9$ ksi, Sección transversal: $\sigma = 101$ ksi, $\tau_{prom} = 0$
1-58. $P = 68.3$ kN
1-59. $\sigma = 3.125$ ksi, $\tau_{prom} = 1.80$ ksi
1-61. $A_x = 1.732P$, $A_y = P$, $F_A = 2P$, $P = 15.3$ kN
1-62. $(\tau_A)_{prom} = 3.71$ ksi
1-63. $(\tau_B)_{prom} = 1.59$ ksi
1-65. $V = 636.40$ N, $\tau_{prom} = 509$ kPa
1-66. $P = 62.5$ kN
1-67. $\sigma = \dfrac{w_0}{2aA}(2a^2 - x^2)$
1-69. $A = 7.069$ pulg^2, $N = 720$ lb, $\sigma = 102$ psi
1-70. $r = r_1 e^{\left(\frac{\rho g \pi r_1^2}{2P}\right)z}$
1-71. $\sigma_{a-a} = 1.39$ ksi, $\tau_{b-b} = 600$ psi
1-73. $h = 2.74$ pulg, $h = 2\frac{3}{4}$ pulg
1-74. $d = 5.71$ mm
1-75. $d = 13.5$ mm
1-77. Limitación cortante, $t = 167$ mm, Limitación de tensión, $b = 33.3$ mm
1-78. $a = 6\frac{1}{2}$ pulg
1-79. $d_A = 27.6$ mm
1-81. $V = 1.696$ kip, $P = 3.39$ kip, $N = 2.827$ kip, $P = 3.26$ kip
1-82. $d_{BD} = 7.00$ mm, $d_{AB} = 6.50$ mm, $d_{BC} = 6.00$ mm
1-83. $P = 4.43$ kN
1-85. $T = 1178.10$ lb, $F_{AB} = 1442.9$ lb, $W = 431$ lb
1-86. $d = 1\frac{1}{16}$ pulg
1-87. $P = 90$ kN, $A = 6.19(10^{-3})$ m^2, $P_{máx} = 155$ kN
1-89. $21.0(10^3) = \dfrac{5(10^3)}{\frac{\pi}{4}d^2}$, $d = \frac{5}{8}$ pulg, $5(10^3) = \dfrac{5(10^3)}{\pi(1)(h)}$, $h = \frac{3}{8}$ pulg
1-90. $d_B = 7.08$ mm, $d_C = 6.29$ mm
1-91. $(F.S.)_B = 2.24$, $(F.S.)_C = 2.13$
1-93. $\sigma_{barra} = 13.26$ ksi, $(F.S.)_{barra} = 2.71$, $\tau_{pasadores} = 11.79$ ksi, $(F.S.)_{pasadores} = 1.53$
1-94. $w = 0.530$ kip/pie
1-95. $a_{A'} = 130$ mm, $a_{B'} = 300$ mm
1-97. $F_{CD} = 6.70$ kN, $F_{AB} = 8.30$ kN, $d_{AB} = 6.02$ mm, $d_{CD} = 5.41$ mm
1-98. $h = 1.74$ pulg
1-99. $P = 55.0$ kN
1-101. $N_{a-a} = 259.81$ kN, $V_{a-a} = 150$ kN, $(\sigma_{a-a})_{prom} = 7.16$ MPa, $(\tau_{a-a})_{prom} = 4.13$ MPa
1-102. $\sigma_s = 208$ MPa, $(\tau_{prom})_a = 4.72$ MPa, $(\tau_{prom})_b = 45.5$ MPa
1-103. $t = \frac{1}{4}$ pulg, $d_A = 1\frac{1}{8}$ pulg, $d_B = \frac{13}{16}$ pulg
1-105. $F = 3678.75$ N, $\tau_{prom} = 61.3$ MPa
1-106. $\sigma_{a-a} = 200$ kPa, $\tau_{a-a} = 115$ kPa
1-107. $\sigma_{40} = 3.98$ MPa, $\sigma_{30} = 7.07$ MPa, $\tau_{prom} = 5.09$ MPa

Capítulo 2

2-1. $\epsilon = 0.167$ pulg/pulg
2-2. $\epsilon = 0.0472$ pulg/pulg
2-3. $\epsilon_{CE} = 0.00250$ mm/mm, $\epsilon_{BD} = 0.00107$ mm/mm
2-5. $\delta_B = 4$ mm, $(\epsilon_{prom})_{BD} = 0.00267$ mm/mm, $(\epsilon_{prom})_{CE} = 0.005$ mm/mm
2-6. $\gamma = 0.197$ rad
2-7. $\epsilon_{avg} = 0.0689$ pulg/pulg
2-9. $AB = 500$ mm, $AB' = 501.75$ mm, $\Delta_D = 4.38$ mm
2-10. $(\gamma_{xy})_A = 0.206$ rad, $(\gamma_{xy})_B = -0.206$ rad
2-11. $(\epsilon_{prom})_{AB} = -0.0889$ mm/mm, $(\epsilon_{prom})_{BD} = -0.1875$ mm/mm
2-13. $AD' = 400.01125$ mm, $AB' = 300.00667$, $D'B' = 496.6014$ mm, $DB = 500$ mm, $\epsilon_{DB} = -0.00680$ mm/mm, $\epsilon_{AD} = 0.0281(10^{-3})$ mm/mm
2-14. $x = -0.192$ pulg, $y = -0.218$ pulg

2-15. $\epsilon_{AB} = 0.152$ pulg/pulg, $\epsilon_{AC} = 0.0274$ pulg/pulg

2-17. $L_{DB'} = L\sqrt{1 + (2\epsilon_{AB}\cos^2\theta + 2\epsilon_{CB}\operatorname{sen}^2\theta)}$,
$\epsilon_{DB} = \epsilon_{AB}\cos^2\theta + \epsilon_{CB}\operatorname{sen}^2\theta$

2-18. $(\gamma_B)_{xy} = 11.6(10^{-3})$ rad,
$(\gamma_A)_{xy} = -11.6(10^{-3})$ rad

2-19. $(\gamma_C)_{xy} = -11.6(10^{-3})$ rad,
$(\gamma_D)_{xy} = 11.6(10^{-3})$ rad

2-21. $L_{B'D} = 0.6155$ m, $\epsilon_{prom} = 0.0258$ mm/mm

2-22. $(\gamma_A)_{xy} = 5.24(10^{-3})$ rad

2-23. $\epsilon_{AC} = 16.7(10^{-3})$ mm/mm,
$\epsilon_{BD} = 11.3(10^{-3})$ mm/mm

2-25. $A'B' = 5.08416$ m, $AB = 5.00$ m,
$\epsilon_{AB} = 16.8(10^{-3})$ mm/mm

2-26. $(\epsilon_{prom})_{AC} = 0.0112$ mm/mm,
$(\epsilon_{prom})_{CD} = 0.125$ mm/mm,
$(\gamma_{xy})_F = 0.245$ rad,
$(\epsilon_{prom})_{BE} = 0.0635$ mm/mm

2-27. $(\epsilon_{prom})_{AD} = 0.132$ mm/mm,
$(\epsilon_{prom})_{CF} = -0.0687$ mm/mm

2-29. $\epsilon = 0.05\cos\theta$, $\Delta L = \int_0^{90°} (0.05\cos\theta)(2\,d\theta)$,
$\Delta L = 0.100$ pie

2-30. $\Delta L = 0.16$ pie

2-31. $\epsilon_{prom} = 0.479$ pie/pie

2-33. $\epsilon_{AB} = \left[1 + \dfrac{2(v_B\operatorname{sen}\theta - u_A\cos\theta)}{L}\right]^{\frac{1}{2}} - 1$,
$\epsilon_{AB} = \dfrac{v_B\operatorname{sen}\theta}{L} - \dfrac{u_A\cos\theta}{L}$

Capítulo 3

3-1. $E_{aprox} = \dfrac{1.31 - 0}{0.0004 - 0} = 3.275(10^3)$ ksi

3-2. $E = 55.3(10^3)$ ksi, $u_r = 9.96\ \dfrac{\text{pulg}\cdot\text{lb}}{\text{pulg}^3}$

3-3. $(u_r)_{aprox} = 85.0\ \dfrac{\text{pulg}\cdot\text{lb}}{\text{pulg}^3}$

3-5. $(u_t)_{aprox} = 117$ MJ/m^3

3-6. $E = 8.83(10^3)$ ksi

3-7. $A = 0.209$ pulg^2, $P = 1.62$ kip

3-9. $\sigma = 1.50$ ksi, $\epsilon = 0.035$ pulg/pulg, $\delta = 0.228$ pulg

3-10. $E = 30.0(10^3)$ ksi, $P_Y = 11.8$ kip, $P_{últ} = 19.6$ kip

3-11. Recuperación elástica = 0.003 pulg/pulg
$\Delta L = 0.094$ pulg

3-13. $\sigma = 11.43$ ksi, $\epsilon = 0.000400$ pulg/pulg,
$E = 28.6(10^3)$ ksi

3-14. $\delta_{BD} = 0.0632$ pulg

3-15. $P = 570$ lb

3-17. $\sigma_{pl} = 44$ ksi, $\sigma_Y = 60$ ksi, $E = 11.0(10^3)$ ksi

3-18. $(U_i)_r = 88\ \dfrac{\text{pulg}\cdot\text{lb}}{\text{pulg}^3}$, $[(U_i)_t]_{aprox} = 6.50(10^3)\ \dfrac{\text{pulg}\cdot\text{lb}}{\text{pulg}^3}$

3-19. $\sigma = 2.22$ MPa

3-21. $\sigma_{AB} = 31.83$ MPa, $\epsilon_{AB} = 0.009885$ mm/mm,
$\sigma_{CD} = 7.958$ MPa, $\epsilon_{CD} = 0.002471$ mm/mm,
$\alpha = 0.708°$

3-22. $P = 11.3$ kN

3-23. Con base en el diagrama de esfuerzo-deformación, el *copolímero* cumplirá con los requisitos de esfuerzo y deformación.

3-25. $\sigma = 1.697$ MPa,
$\delta = 0.126$ mm, $\Delta d = -0.00377$ mm

3-26. (a) $\delta = -0.577(10^{-3})$ pulg
(b) $d' = 0.5000673$ pulg

3-27. $\nu = 0.300$

3-29. $\epsilon_{long} = -0.0002667$, $\epsilon_{lat} = 0.0000880$, $\nu = 0.330$,
$h' = 2.000176$ pulg

3-30. $\epsilon_y = -0.0150$ pulg/pulg, $\epsilon_x = 0.00540$ pulg/pulg,
$\gamma_{xy} = -0.00524$ rad

3-31. $P = 53.0$ kip, $E = 28.6(10^3)$ ksi

3-33. $\tau_{prom} = 4166.67$ Pa, $\gamma = 0.02083$ rad,
$\delta = 0.833$ mm

3-34. $\delta = \dfrac{Pa}{2bhG}$

3-35. $G_{al} = 4.31(10^3)$ ksi

3-37. $E = 5.5$ psi, $u_t = 19.25$ psi, $u_r = 11$ psi

3-38. $\delta = -0.0173$ mm, $d' = 20.0016$ mm

3-39. $x = 1.53$ m, $d'_A = 30.008$ mm

3-41. $\tau = 148.89$ kPa, $G = 1.481$ MPa, $\delta_h = 3.02$ mm

3-42. $\epsilon_{DE} = 0.00116$ pulg/pulg, $W = 112$ lb,
$\epsilon_{BC} = 0.00193$ pulg/pulg

3-43. $\epsilon_b = 0.00227$ mm/mm,
$\epsilon_r = 0.000884$ mm/mm

Capítulo 4

4-1. $\delta_A = \dfrac{-5.00(10^3)(8)}{\frac{\pi}{4}(0.4^2 - 0.3^2)200(10^9)} = -3.64(10^{-3})$ mm

4-2. $\delta_{A/D} = 0.766(10^{-3})$ pulg

4-3. $\delta_D = 0.850$ mm

4-5. $\delta_A = 6.14$ mm

4-6. $\delta_A = 0.0128$ pulg
4-7. $\delta_P = 0.0350$ pulg ↓
4-9. $\delta_C = 0.0055172$ pulg, $\delta_A = 0.0110344$ pulg, $\delta_{F/E} = 0.0020690$ pulg, $\delta'_E = 0.0036782$ pulg, $\delta_F = 0.0113$ pulg
4-10. $\theta = 0.00878°$
4-11. $\delta_t = 0.0260$ pulg
4-13. $\delta = \frac{1}{AE}\int_0^L (\gamma Ax + P)\,dx = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{PL}{AE}$
4-14. $\delta_{A/B} = -0.864$ mm
4-15. $\delta_{A/B} = -1.03$ mm
4-17. $\delta = -0.4310(10^{-3})P$, $P = 46.4$ kip
4-18. $\delta_F = 0.0230$ pulg ↓
4-19. $\theta = 0.439(10^{-3})$ rad
4-21. $\delta_D = 0.1374$ mm, $\delta_{A/B} = 0.3958$ mm, $\delta_C = 0.5332$ mm, $\delta_{tot} = 33.9$ mm
4-22. $W = 9.69$ kN
4-25. $\delta = 0.360$ mm
4-26. $\delta = \frac{\gamma L^2}{6E}$
4-27. $\delta = -\frac{P}{2a\pi r_0^2 E}\left(1 - e^{-2aL}\right)$
4-29. $A = \pi r^2 = \pi(r_0 \cos\theta)^2 = \pi r_0^2 \cos^2\theta$, $y = r_0 \operatorname{sen}\theta$; $dy = r_0 \cos\theta\, d\theta$, Cuando $y = \frac{r_0}{4}$: $\theta = 14.48°$, $\delta = \frac{0.511P}{\pi r_0 E}$
4-30. $p_0 = 250$ kN/m, $\delta = 2.93$ mm
4-31. $\sigma_{ac} = 3.14$ ksi, $\sigma_{con} = 0.455$ ksi
4-33. $P_{ac} = 57.47$ kN, $P_{con} = 22.53$ kN, $\sigma_{ac} = 48.8$ MPa, $\sigma_{con} = 5.85$ MPa
4-34. $\sigma_{br} = 0.341$ ksi, $\sigma_{ac} = 0.654$ ksi
4-35. $d = 2.39$ pulg
4-37. $F_D = 107.89$ kN, $\delta_{A/B} = 0.335$ mm
4-38. $\sigma_{ac} = 1.66$ ksi, $\sigma_{con} = 0.240$ ksi, $\delta = 0.0055$ pulg
4-39. $A_{ac} = 18.2$ pulg^2, $\delta = 0.00545$ pulg
4-41. $P_{con} = 36.552\, P_{ac}$, $\sigma_{con} = 8.42$ MPa, $\sigma_{ac} = 67.3$ MPa
4-42. $d = 24.6$ mm
4-43. $\sigma_{AB} = 26.5$ MPa, $\sigma_{EF} = 33.8$ MPa
4-45. $F_b = 10.17\,(10^3)$ N, $F_t = 29.83\,(10^3)$ N, $\sigma_b = 32.4$ MPa, $\sigma_t = 34.5$ MPa
4-46. $F_D = 20.4$ kN, $F_A = 180$ kN
4-47. $T_{AB} = 361$ lb, $T_{A'B'} = 289$ lb
4-49. $y = 3 - 0.025x$, $F_A = 4.09$ kip, $F_B = 2.91$ kip
4-50. $x = 28.9$ pulg, $P = 60.4$ kip
4-51. $T_{CD} = 27.2$ kip, $T_{CD} = 9.06$ kip
4-53. $F_{ac} = 1.822$ kip, $F_{al} = 3.644$ kip, $\sigma_{barra} = 9.28$ ksi, $\sigma_{cil} = 1.16$ ksi
4-54. $\theta = 698°$
4-55. $\sigma_{BE} = 96.3$ MPa, $\sigma_{AD} = 79.6$ MPa, $\sigma_{CF} = 113$ MPa
4-57. $F_{CD} = 614.73$ lb, $F_{BC} = 454.69$ lb, $\theta = 0.0633°$
4-58. $F_A = 5.79$ kN, $F_B = 9.64$ kN, $F_C = 11.6$ kN
4-59. $\theta = 1.14(10^{-3})°$
4-61. Suponga falla de AB y EF: $F = 42\,300$ N, Suponga falla de CD: $F_{CD} = 81\,000$ N, $w = 45.9$ kN/m
4-62. $\sigma_D = 13.4$ MPa, $\sigma_{BC} = 9.55$ MPa
4-63. $\theta = 0.00365°$
4-65. $0.02 = \delta_t + \delta_b$, $P = 1.16$ kN
4-66. $a = 0.120$ mm
4-67. $\sigma_{AB} = \frac{7P}{12A}, \sigma_{CD} = \frac{P}{3A}, \sigma_{EF} = \frac{P}{12A}$
4-69. $0 = \Delta_T - \delta$, $F = 4.20$ kN
4-70. $F = 0.509$ kip
4-71. $F = 116$ kip
4-73. $0 = \delta_T - \delta_F$, $F = 19.14A$, $\sigma = 19.1$ ksi
4-74. $F = 7.60$ kip
4-75. $\delta = 0.348$ pulg, $F = 19.5$ kip
4-77. $0 = \Delta_T - \delta_F$, $F = \frac{\alpha AE}{2}(T_B - T_A)$
4-78. $F_B = 183$ kN, $F_A = 383$ kN
4-79. $P = 188$ kN
4-81. $620.136 = 75F_{AB} + 48F_{AD}$, $F_{AD} = 6.54$ kip, $F_{AC} = F_{AB} = 4.09$ kip
4-82. $\delta_A = 0.0407$ pulg ↑
4-83. $F_{AC} = 10.0$ lb, $F_{AD} = 136$ lb
4-85. $F = 107\,442.47$ N, $T = 172°$ C
4-86. $\sigma_s = 40.1$ MPa, $\sigma_b = 29.5$ MPa
4-87. $\sigma_{máx} = 190$ MPa
4-89. $K = 2.45$, $w = 2.49$ pulg
4-90. $P = 77.1$ kN, $\delta = 0.429$ mm
4-91. $P = 1.21$ kip
4-93. Esfuerzo normal máximo en el filete: $K = 1.4$, Esfuerzo normal máximo en el orificio: $K = 2.65$, $\sigma_{máx} = 88.3$ MPa
4-94. $P = 15$ kip, $K = 1.60$

4-95. $P = 16.8$ kip, $K = 1.29$

4-97. $P_{al} = 156.91$ kip, $P_{ac} = 143.09$ kip, $\sigma_{ac} = 36.0$ ksi, $\sigma_{al} = 19.8$ ksi

4-98. $\delta_C = 0.432$ pulg

4-99. $w = 21.9$ kN/m, $\delta_G = 4.24$ mm

4-101. $F_{CD} = 1800$ N, $F_{AB} = 3600$ N, $F_{AB} = 3.14$ kN, $F_{CD} = 2.72$ kN, $\delta_{CD} = 0.324$ mm, $\delta_{AB} = 0.649$ mm

4-102. (a) $P = 2.62$ kN, (b) $P = 3.14$ kN

4-103. $P = \sigma_Y A(2\cos\theta + 1)$, $\delta_A = \dfrac{\sigma_Y L}{E\cos\theta}$

4-105. $\sigma_{CF} = 250$ MPa (T), $F_{CF} = 122\ 718.46$ N, $F_{BE} = 91\ 844.61$ N, $F_{AD} = 15\ 436.93$ N, $(\sigma_{CF})_r = 17.7$ MPa (C), $(\sigma_{BE})_r = 53.2$ MPa (T), $(\sigma_{AD})_r = 35.5$ MPa (C)

4-106. $\sigma_A = 53.33$ ksi, $\delta = 8.69$ pulg

4-107. $w = 10.9$ kip/pie

4-109. $(F_{al})_Y = 56.55$ kN, $F_{ac} = 146.9$ kN, $d_B = 17.8$ mm

4-110. (a) $\delta_D = 0.375$ pulg (b) $\delta_D = 6.40$ pulg

4-111. $P = 126$ kip, $\Delta\delta = 0.00720$ pulg ←

4-113. $\delta = \dfrac{1}{A^2c^2}\displaystyle\int_0^L (\gamma Ax)^2\,dx$, $\delta = \dfrac{\gamma^3 L^3}{3c^2}$

4-114. $F_B = 2.13$ kip, $F_A = 2.14$ kip

4-115. $P = 4.85$ kip

4-117. $P = 46.4$ kip, $\sigma_{AB} = 145$ ksi

4-118. $P = 56.5$ kN, $\delta_{B/A} = 0.0918$ mm

4-119. $\theta = \dfrac{3E_2L(T_2 - T_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{d(5E_2 + E_1)}$

Capítulo 5

5-1. (a) $T = 7.95$ kip · pulg, (b) $T' = 6.38$ kip · pulg

$$\tau_{\rho=0.5\,\text{pulg}} = \frac{6.381(0.5)}{\frac{\pi}{2}(0.75^4 - 0.5^4)} = 8.00 \text{ ksi}$$

5-2. (a) $r' = 0.841r$, (b) $r' = 0.841r$

5-3. $\tau_B = 6.04$ MPa, $\tau_A = 6.04$ MPa

5-5. $\tau_{máx} = 26.7$ MPa

5-6. $(\tau_{BC})_{máx} = 5.07$ ksi, $(\tau_{DE})_{máx} = 3.62$ ksi

5-7. $(\tau_{EF})_{máx} = 0$, $(\tau_{CD})_{máx} = 2.17$ ksi

5-9. $J = 2.545(10^{-6})$ m^4, $\tau_{máx} = 11.9$ MPa

5-10. $n = \dfrac{2r^3}{Rd^2}$

5-11. $\tau_{AB} = 7.82$ ksi, $\tau_{BC} = 2.36$ ksi

5-13. $F = 600$ N, $T_A = 30.0$ N · m, $(\tau_{EA})_{máx} = 5.66$ MPa, $(\tau_{CD})_{máx} = 8.91$ MPa

5-14. $(\tau_{máx})_{abs} = 10.2$ MPa

5-15. $d = 33$ mm

5-17. $T_A = 960$ lb · pulg, $J = 0.03125\pi$ pulg^4, $\tau_{máx} = 4.89$ ksi

5-18. $\tau_{máx} = 7.33$ ksi

5-19. $(\tau_{máx})_{AB} = 41.4$ MPa, $(\tau_{máx})_{BC} = 82.8$ MPa

5-21. $T_{AB} = (2000x - 1200)$ N · m, $d = 0.9$ m, $\tau_{min} = 0$, $d = 0$, $\tau_{máx} = 42.4$ MPa

5-22. $d = 57$ mm

5-25. $T_{máx} = 260.42$ lb · pie, $\underset{abs}{\tau_{máx}} = 3.59$ ksi

5-26. $\tau_{máx} = \dfrac{T}{2\pi r_i^2 h}$

5-27. $(\tau_{AB})_{máx} = 23.9$ MPa, $(\tau_{BC})_{máx} = 15.9$ MPa

5-29. $T_A + \dfrac{1}{2}t_A L - T_B = 0$, $T_B = \dfrac{2T_A + t_A L}{2}$, $\tau_{máx} = \dfrac{(2T_A + t_A L)r_o}{\pi(r_o^4 - r_i^4)}$

5-30. $c = (2.98\ x)$ mm

5-31. $(\tau_{AB})_{máx} = 1.04$ MPa, $(\tau_{BC})_{máx} = 3.11$ MPa

5-33. $P = 1100$ pie · lb/s, $T = 280.11$ lb · pulg, $\tau_{máx} = 1.43$ ksi

5-34. $d = \dfrac{7}{8}$ pulg

5-35. $\omega = 21.7$ rad/s

5-37. $P = 990\ 000$ pie · lb/s, $T = 6302.54$ lb · pie, $\tau_{máx} = 6.02$ ksi

5-38. $d_A = 12.4$ mm, $d_B = 16.8$ mm

5-39. $(\tau_{máx})_{CF} = 12.5$ MPa, $(\tau_{máx})_{BC} = 7.26$ MPa

5-41. $T = 625$ N · m, $t = 2.5$ mm

5-42. $\omega = 17.7$ rad/s

5-43. $d = 2\dfrac{1}{2}$ pulg

5-45. $T = 525.21$ lb · pie, $r_i = 1.1460$ pulg, $t = 0.104$ pulg

5-46. $d = \frac{7}{8}$ pulg

5-47. $\tau_{máx} = 44.3$ MPa, $\phi = 11.9°$

5-49. $T_{AB} = -85$ N·m, $T_{BC} = -85$ N·m, $\phi_{A/D} = 0.879°$

5-50. $\tau_{máx} = 2.83$ ksi, $\phi = 4.43°$

5-51. $d = 2.75$ pulg

5-53. $T_{BC} = -80$ N·m, $T_{CD} = -60$ N·m, $T_{DA} = -90$ N·m, $\phi_B = |5.74°|$

5-54. $\phi_D = 1.01°$

5-55. $\phi_C = 0.227°$

5-57. $T_M = 175.07$ lb·pie, $T_C = 109.42$ lb·pie, $T_D = 65.65$ lb·pie, $d = 1\frac{1}{4}$ pulg

5-58. $\underset{abs}{\tau_{máx}} = 3.17$ ksi, $\phi_{C/D} = 0.0661°$

5-59. $\phi_{B/D} = 1.15°$

5-61. $\phi_E = 0.01778$ rad, $\phi_F = 0.02667$ rad, $\phi_B = 1.53°$

5-62. $\phi_A = 1.78°$

5-63. $(\tau_{BC})_{máx} = 10.2$ ksi, $(\tau_{BA})_{máx} = 1.86$ ksi, $\phi_C = 2.66°$

5-65. $\phi_B = 0.001852$ rad, $\phi_{C/B} = -0.0001119$ rad, $\phi_C = 0.113°$

5-66. $\phi_A = 2.66°$, $\phi_C = 2.30°$

5-67. $\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B}$, $\phi_C = \phi_B + \phi_{C/B}$, $T_1 = 2.19$ kN·m, $T_2 = 3.28$ kN·m

5-69. $\phi_B = 0.01194$ rad, $\phi_C = 0.008952$ rad, $\phi_E = 1.20°$

5-70. $\phi_D = 1.42°$

5-73. $J(x) = \frac{\pi r^4}{2L^4}(L + x)^4$, $\phi = \frac{7TL}{12\pi r^4 G}$

5-74. $t_o = \frac{4\,pd}{L}$, $\phi = \frac{4PLd}{3\pi r^4 G}$

5-75. $\phi = \frac{2L(t_0 L + 3T_A)}{3\pi(r_o^4 - r_i^4)G}$

5-77. $T_A = 200$ N·m, $T_B = 100$ N·m, $(\tau_{AC})_{máx} = 8.15$ MPa, $(\tau_{CB})_{máx} = 4.07$ MPa

5-78. $\tau_{AC} = 9.77$ MPa

5-79. $\tau_{AC} = 29.3$ ksi

5-81. $T_A = 1.498$ kN·m, $T_B = 0.502$ kN·m, $\tau_{CD} = 24.9$ MPa

5-82. $\phi_C = 0.116°$, $(\tau_{ac})_{máx} = 395$ psi, $(\gamma_{ac})_{máx} = 34.3(10^{-6})$ rad, $(\tau_{br})_{máx} = 96.1$ psi, $(\gamma_{bt})_{máx} = 17.2(10^{-6})$ rad

5-83. $(\tau_{BC})_{máx} = 1.47$ ksi, $(\tau_{BD})_{máx} = 1.96$ ksi, $\phi = 0.338°$

5-85. $T_R = (300x - 2.5x^2)$ lb·pulg, $\phi_B = 1.75°$, $\underset{abs}{\tau_{máx}} = 13.3$ ksi

5-86. $T_B = 222$ N·m, $T_A = 55.6$ N·m

5-87. $\phi_E = 1.66°$

5-89. $F = 4.412$ kip, $T_E = 4.412$ kip·pie, $T_A = 12.79$ kip·pie, $\phi_B = 0.955°$

5-90. $(\tau_{BD})_{máx} = 4.35$ ksi, $(\tau_{AC})_{máx} = 2.17$ ksi

5-91. $\underset{abs}{\tau_{máx}} = 5.50$ ksi

5-93. $J(x) = \frac{\pi c^4}{2L^4}(L + x)^4$, $T_B = \frac{37}{189}T$, $T_A = \frac{152}{189}T$

5-94. $T_B = \frac{7t_0 L}{12}$,
$T_A = \frac{3t_0 L}{4}$

5-95. $(\tau_c)_{máx} = 525$ psi,
$(\tau_r)_{máx} = 713$ psi,
$\phi_c = 0.0582°$,
$\phi_r = 0.0657°$

5-97. $(\tau_{máx})_c = \frac{16T}{\pi d^3}$,
$(\tau_{máx})_c = \frac{16T}{\pi k^2 d^3}$,
Factor de incremento del esfuerzo cortante $= \frac{1}{k^2}$

5-98. $(\tau_{BC})_{máx} = 0.955$ MPa,
$(\tau_{AC})_{máx} = 1.59$ MPa,
$\phi_{B/A} = 0.207°$

5-99. $(\tau_{BC})_{máx} = 0.955$ MPa,
$(\tau_{AC})_{máx} = 1.59$ MPa,
$\phi_{B/C} = |0.0643°|$

5-101. Para el segmento AB, $T = 3180.86$ N · m,
Para el segmento BC, $T = 11\,366.94$ N · m,
$T = 2.80$ kN · m

5-102. $T_B = 32$ lb · pie,
$T_A = 48$ lb · pie,
$\phi_C = 0.0925°$

5-103. $(\tau_{máx})_A = 308$ MPa

5-105. $T = 1663.2$ lb · pulg, $F = 104$ lb

5-106. $\tau_{máx} = 2.31$ ksi,
$\delta_F = 0.0303$ pulg

5-107. $t = 0.104$ pulg

5-109. $A_m = 1.4498$ pulg^2,
$A_m' = 2.4002$ pulg^2,
Factor $= 1.66$

5-110. El factor de incremento $= 2.85$

5-111. $q_{ac} = \frac{\pi}{4} q_{ct}$

5-113. $A_m = 7959.50$ pulg^2,
$t = \frac{5}{16}$ pulg,
$\phi = 0.0536°$

5-114. $\phi = 5134$ kip · pie

5-115. $(\tau_{prom})_A = 15.6$ MPa,
$(\tau_{prom})_B = 10.4$ MPa

5-117. $A_m = 1.8927$ m^2,
$T = 4.73$ MN · m,
$\phi = 0.428°$/m

5-118. $\tau_{prom} = 119$ MPa,
$\phi = 0.407°$/m

5-119. $(\tau_{prom})_A = (\tau_{prom})_B = 357$ kPa

5-121. $K = 1.28$,
$r = 7.98$ mm,
No, no es posible.

5-122. $P = 101$ kW

5-123. $(\tau_{máx})_f = 50.6$ MPa

5-125. $K = 1.40$, $r = 0.075$ pulg

5-127. $T = 2.71$ kip · pie,
$T_P = 2.79$ kip · pie

5-129. $T = 20.8$ kN · m,
$\phi = 34.4°$,
$G = 40$ GPa,
$\phi' = 0.3875$ rad,
$\phi_r = 12.2°$

5-130. $T = 14.4$ kip · pie

5-131. $T_Y = 12.6$ kN · m,
$T_P = 16.8$ kN · m

5-133. $T = 110$ lb · pie

5-134. $T_P = \frac{2}{3}\pi\tau_Y(c_o^3 - c_i^3)$,
$\phi = \frac{\tau_Y L}{c_i G}$,
$\gamma_{máx} = \frac{c_o \tau_Y}{c_i G}$

5-135. $T_C = 9.3$ kN · m, $T_A = 5.70$ kN · m

5-137. $\rho_Y = 0.00625$ m,
$\tau_1 = 8(10^9)\rho$,
$\tau_2 = 4(10^9)\rho + 25(10^6)$,
$T = 3.27$ kN · m,
$\phi = 34.4°$

5-138. $T = 39.2$ kip · pie, $\phi_P = 0.413°$

5-139. $T = 41.2$ kip · pie, en 3 pulg, $\tau = 2.44$ ksi,
en 1.5 pulg, $\tau = -3.78$ ksi

5-141. Elástico, $T_t = 9256.95$ N · m, $T_c = 5743.05$ N · m,
$T_t > (T_Y)_t$, Elástico, $T_t = 7.39$ kN m,
$T_c = 7.61$ kN · m

5-142. $\tau_{máx} = \frac{19T}{12\pi r^3}$

5-145. $r_o = 0.0625$ m, $r_i = 0.0575$ m,
Ec. 5–7: $\tau_{\rho=0.06\,m} = 88.27$ MPa,
Ec. 5–18: $\tau_{prom} = 88.42$ MPa,
Ec. 5–15: $\phi = 4.495°$,
Ec. 5–20: $\phi = 4.503°$

5-146. $T = 331\ \text{N}\cdot\text{m}$
5-147. $t = 8\ \text{mm}$
5-149. $T = 71.5\ \text{N}\cdot\text{m}$, $\tau_{\text{máx}} = 23.3\ \text{MPa}$
5-150. $\tau_{\text{máx}} = 82.0\ \text{MPa}$
5-151. $F = 26.2\ \text{N}$, $\phi = 1.86°$

Capítulo 6

6-1. $x = 0.25^-, V = -24, M = -6$
6-2. $x = 2^-, V = 1, M = 2, x = 4^-, V = 1, M = 6$
6-3. $x = 3^-, V = -2000, M = -6000$
6-5. $x = 2^+, V = 8, M = -39$
6-6. $x = 1.5, V = 0, M = 9, x = 4^-,$
$V = -20, M = -16$
6-7. $x = 4^-, V = -6, M = -24$
6-9. $x = 4^+, V = -3.33, M = 46.7$
6-10. $x = 1.5^-, V = 150, M = 225$
6-11. $x = 6^-, V = -800, M = -4800$
6-13. $x = 3a^-, V = -P, M = -Pa$
6-14. $x = 14^+, V = 115, M = -3875$
6-17. $x = 6, V = -900, M = -3000,$
$V = \{-300 - 16.67x^2\}\ \text{lb},$
$M = \{-300x - 5.556x^3\}\ \text{lb}\cdot\text{pie}$
6-18. $V = \{30.0 - 2x\}\ \text{kip},$
$M = \{-x^2 + 30.0x - 216\}\ \text{kip}\cdot\text{pie},$
$V = 8.00\ \text{kip}$
$M = \{8.00x - 120\}\ \text{kip}\cdot\text{pie}$
6-19. $x = 5^-, V = -10, M = -25$
6-21. $x = 0.75, V = 0, M = 0.5625,$
$F_{BC} = 7.5\ \text{kN},$
$A_y = 1.5\ \text{kN}$
6-22. $x = 3^-, V = -10, M = -18$
6-23. $x = L, V = -wL, M = 0$
6-25. $x = L, V = 0, M = 0$
6-27. $x = (L/3)^-, V = -w_0L/18,$
$M = -0.00617w_0L^2$
6-29. $x = 4.11, V = 0, M = 25.7,$
en $x = 4.108\ \text{m}$, $M = 25.67\ \text{kN}\cdot\text{m}$,
en $x = 4.5\ \text{m}$, $M = 25.31\ \text{kN}\cdot\text{m}$
6-30. $x = 2.54, V = 0, M = 346$
6-31. $V = \frac{w_0}{4}(3L - 4x),$
$M = \frac{w_0}{24}(-12x^2 + 18Lx - 7L^2),$
$V = \frac{w_0}{L}(L - x)^2, M = -\frac{w_0}{3L}(L - x)^3$

6-33. $w = 40.0\ \text{lb/pie},$
$V = 30.0\ \text{lb},$
$M = 15.0\ \text{lb}\cdot\text{pie}$
6-34. $x = 3^-, V = -11.5, M = -21$
6-35. $V = 200\ \text{N}, M = (200\,x)\ \text{N}\cdot\text{m},$
$V = \left\{-\frac{100}{3}x^2 + 500\right\}\ \text{N},$
$M = \left\{-\frac{100}{9}x^3 + 500x - 600\right\}\ \text{N}\cdot\text{m}$
6-37. $x = 4.5, V = 0, M = 169$
6-38. $A_y = 9.375\ \text{kip}, A_x = 0$
6-39. $x = L, V = -\frac{23}{54}wL, M = -\frac{5}{54}wL^2$
6-41. $x = 4^-, V = -2.8, M = -2.4$
6-42. $x = 1, V = 0, M = 2.50$
6-43. $x = 14, V = 0, M = 24$
6-45. $x = 0.630L, V = 0, M = 0.0394w_0L^2,$
$M = \frac{w_0Lx}{12} - \frac{w_0x^4}{12L^2}$
6-46. $x = 0, V = 2w_0L/\pi, M = -w_0L^2/\pi$
6-47. $\sigma_{\text{máx}} = 120\ \text{MPa},$
$\sigma_{\text{máx}} = 90\ \text{MPa}$
6-49. $\bar{y} = 3.40\ \text{pulg},$
$I_{NA} = 91.73\ \text{pulg}^4,$
$(\sigma_t)_{\text{máx}} = 3.72\ \text{ksi}, (\sigma_c)_{\text{máx}} = 1.78\ \text{ksi}$
6-50. $\sigma_A = 6.81\ \text{MPa},$
$\sigma_B = 1.01\ \text{MPa},$
$\sigma_C = 4.14\ \text{MPa}$
6-51. $M = 771\ \text{N}\cdot\text{m}$
6-53. $I = 91.14583(10^{-6})\ \text{m}^4,$
$M = 36.5\ \text{kN}\cdot\text{m}, \sigma_{\text{máx}} = 40.0\ \text{MPa}$
6-54. $\sigma_{\text{máx}} = 2.06\ \text{MPa}$
6-55. $F = 4.56\ \text{kN}$
6-57. $I = 17.8133(10^{-6})\ \text{m}^4,$
$\sigma_{\text{máx}} = 49.4\ \text{MPa}$
6-58. $(\sigma_{\text{máx}})_T = 23.8\ \text{ksi (T)},$
$(\sigma_{\text{máx}})_C = 20.0\ \text{ksi (C)}$
6-59. $M = 101\ \text{kip}\cdot\text{pie}$
6-61. $\bar{y} = 9.3043\ \text{pulg}, I = 1093.07\ \text{pulg}^4,$
$\sigma_A = 2.0544\ \text{ksi}, \sigma_D = 0.2978\ \text{ksi},$
$(F_R)_C = 11.8\ \text{kip}$
6-62. $\sigma_A = 6.21\ \text{MPa (C)},$
$\sigma_B = 5.17\ \text{MPa (T)}$
6-63. $a = 1.68r$

6-65. $I = 1863 \text{ pulg}^4, \sigma_{\text{máx}} = 193 \text{ psi}, \sigma = 155 \text{ psi}$

6-66. $F_R = 3.13 \text{ kip}$

6-67. $\sigma_{\text{máx}} = 158 \text{ MPa}$

6-69. $I_a = 0.21645(10^{-3}) \text{ m}^4$,
$I_b = 0.36135(10^{-3}) \text{ m}^4$,
$\sigma_{\text{máx}} = 74.7 \text{ MPa}$

6-70. $\sigma_{\text{máx}} = 22.1 \text{ ksi}$

6-71. $\sigma_{\text{máx}} = 12.2 \text{ ksi}$

6-73. $I = 152.344 \text{ pulg}^4, \sigma_{\text{máx}} = 10.0 \text{ ksi}$

6-74. $\sigma_{\text{máx}} = 21.1 \text{ ksi}$

6-75. $\sigma_{\text{perm}} = 52.8 \text{ MPa}$

6-77. $I = 152.344 \text{ pulg}^4, w = 1.65 \text{ kip/pie}$

6-78. $\sigma_{\text{máx}} = 66.8 \text{ ksi}$

6-79. $\sigma_{\text{máx}} = 15.6 \text{ ksi}$

6-81. $w = 3.75 \text{ kip/pie}, \sigma_{\text{máx}} = 1.25 \text{ ksi}$

6-82. $t = 5\frac{1}{2} \text{ pulg}$

6-83. $\sigma_{\text{máx}} = 129 \text{ MPa}$

6-85. $b = 53.1 \text{ mm}$

6-86. $\sigma_{\text{máx}} = 19.1 \text{ ksi}$

6-87. $d = 2 \text{ pulg}$

6-89. $M_{\text{máx}} = 7.50 \text{ kN} \cdot \text{m}, a = 66.9 \text{ mm}$

6-90. $\sigma_{\text{máx}} = \dfrac{23w_0L^2}{36bh^2}$

6-91. $\sigma_{\text{máx}} = 119 \text{ MPa}$

6-93. $\bar{y} = 0.012848 \text{ m}, I = 0.79925(10^{-6}) \text{ m}^4$,
$\epsilon_{\text{máx}} = 0.711(10^{-3}) \text{ mm/mm}$

6-94. $d = 116 \text{ mm}$

6-95. $d = 199 \text{ mm}$

6-97. $M_{\text{máx}} = 2P, P = 119 \text{ lb}$

6-98. $\sigma_{\text{máx}} = 7.59 \text{ ksi}$

6-99. $\sigma_{\text{máx}} = 5.60 \text{ ksi}$

6-101. $I = 204.84375 \text{ pulg}^4, \sigma_{\text{máx}} = 19.8 \text{ ksi}$

6-102. $\sigma_B = 13.3 \text{ ksi}, \sigma_A = 11.8 \text{ ksi}$

6-103. $\omega = 11.25 \text{ kN/m}$

6-105. $I = \frac{2}{3}b^4, b = 7\frac{1}{2} \text{ pulg}$

6-106. $\sigma_{\text{máx}} = 147 \text{ psi}$

6-107. $c = \dfrac{h\sqrt{E_c}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}}$,
$(\sigma_{\text{máx}})_t = \dfrac{3M}{b\,h^2}\left(\dfrac{\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}}{\sqrt{E_c}}\right)$

6-109. $M_y = -14.14 \text{ kip} \cdot \text{pie}, M_z = -14.14 \text{ kip} \cdot \text{pie}$,
$I_y = 736 \text{ pulg}^4, I_z = 1584 \text{ pulg}^4$,
$\sigma_{\text{máx}} = 2.01 \text{ ksi (T)}, \sigma_{\text{máx}} = 2.01 \text{ ksi (C)}$,
$\alpha = 65.1°$

6-110. $M = 119 \text{ kip} \cdot \text{pie}$

6-111. $\bar{y} = 57.4 \text{ mm}, \sigma_A = 1.30 \text{ MPa (C)}$,
$\sigma_B = 0.587 \text{ MPa (T)}$,
$\alpha = -3.74°$

6-114. $\sigma_A = 8.95 \text{ ksi}$

6-115. $\sigma_B = 7.81 \text{ ksi}$

6-117. $M_z = -1039.23 \text{ N} \cdot \text{m}, M_y = -600.0 \text{ N} \cdot \text{m}$,
$I_z = 28.44583(10^{-6}) \text{ m}^4$,
$I_y = 13.34583(10^{-6}) \text{ m}^4, \sigma_A = 7.60 \text{ MPa (T)}$

6-118. $\sigma_B = 131 \text{ MPa (C)}, \alpha = -66.5°$

6-119. $M = 1186 \text{ kN} \cdot \text{m}$

6-121. $M_{\text{máx}} = 427.2 \text{ N} \cdot \text{m}, \sigma_{\text{máx}} = 161 \text{ MPa}$

6-122. $\sigma_A = 293 \text{ kPa (C)}$

6-123. $\sigma_A = 293 \text{ kPa (C)}$

6-125. $z'_A = 1.155 \text{ pulg}, y'_A = -2.828 \text{ pulg}$,
$\sigma_A = 21.0 \text{ ksi (C)}$

6-126. $\sigma_A = 21.0 \text{ ksi}$

6-127. $h = 41.3 \text{ mm}$,
$M = 6.60 \text{ kN} \cdot \text{m}$

6-129. $M_{\text{máx}} = 25.3125 \text{ kip} \cdot \text{pie}, \bar{y} = 2.3030 \text{ pulg}$,
$I = 30.8991 \text{ pulg}^4, (\sigma_{\text{máx}})_{\text{ac}} = 22.6 \text{ ksi}$,
$(\sigma_{\text{máx}})_{\text{al}} = 13.3 \text{ ksi}$

6-130. $w = 0.875 \text{ kip/pie}$

6-131. $(\sigma_{\text{máx}})_{\text{ac}} = 8.51 \text{ ksi}, (\sigma_{\text{máx}})_{\text{w}} = 0.558 \text{ ksi}$

6-133. $\bar{y} = 2.5247 \text{ pulg}, I_{NA} = 85.4170 \text{ pulg}^4$,
$M = 16.4 \text{ kip} \cdot \text{pie}$

6-134. $(\sigma_{\text{ac}})_{\text{máx}} = 20.1 \text{ MPa}$

6-135. $(\sigma_{\text{ac}})_{\text{máx}} = 1.40 \text{ ksi}, (\sigma_{\text{w}})_{\text{máx}} = 77.0 \text{ psi}$

6-137. $\bar{y} = 0.1882 \text{ m}, I = 18.08(10^{-6}) \text{ m}^4$,
$(\sigma_{\text{máx}})_{\text{ac}} = 154 \text{ MPa}, (\sigma_{\text{máx}})_{\text{al}} = 171 \text{ MPa}$

6-138. $d = 531 \text{ mm}, M = 98.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$

6-139. $(\sigma_{\text{máx}})_{\text{pvc}} = 1.53 \text{ ksi}$

6-141. $M_{\text{máx}} = 40 \text{ kip} \cdot \text{pie}, A_{\text{ac}} = 2.3562 \text{ pulg}^2$,
$h' = 5.517 \text{ pulg}, I = 1358.78 \text{ pulg}^4$,
$(\sigma_{\text{con}})_{\text{máx}} = 1.95 \text{ ksi}, (\sigma_{\text{ac}})_{\text{máx}} = 18.3 \text{ ksi}$

6-142. $M = 97.5$ kip · pie

6-145. $A = 0.0028125\pi$ m^2, $\int_A \frac{dA}{r} = 0.053049301$ m, $M = 14.0$ kN · m

6-146. $P = 55.2$ kN

6-147. $(\sigma_{máx})_t = 4.51$ MPa, $(\sigma_{máx})_c = -5.44$ MPa

6-149. $\Sigma A = 0.00425$ m^2, $\bar{r} = 0.5150$ m, $\Sigma \int_A \frac{dA}{r} = 8.348614(10^{-3})$ m, $\sigma_C = 2.66$ MPa (T)

6-150. $(\sigma_{máx})_t = 204$ psi (T), $(\sigma_{máx})_c = 120$ psi (C)

6-151. $\sigma_A = 10.6$ ksi (T), $\sigma_B = 12.7$ ksi (C)

6-153. $\bar{r} = 1.235$ m, $\Sigma \int_A \frac{dA}{r} = 6.479051(10^{-3})$ m, $A = 0.008$ m^2, $\sigma_B = 26.2$ MPa (C)

6-154. $\sigma_t = 2.01$ MPa (T)

6-155. $P = 3.09$ N

6-157. $K = 2.60$, $M = 15.0$ kip · pie

6-158. $\sigma_{máx} = 12.0$ ksi

6-159. $r = 5.00$ mm

6-161. $K = 1.92$, $P = 122$ lb

6-162. $\sigma_{máx} = 29.5$ ksi

6-163. $L = 950$ mm

6-165. $I_z = 82.78333(10^{-6})$ m^4, $M_p = 211.25$ kN · m, $\sigma_{superior} = \sigma_{inferior} = 43.5$ MPa

6-166. $k = \frac{3h}{2}\left[\frac{4bt(h-t) + t(h-2t)^2}{bh^3 - (b-t)(h-2t)^3}\right]$

6-167. $k = 1.71$

6-169. $M_p = 289\,062.5$ N · m, $I = 91.14583(10^{-6})$ m^4, $\sigma'_{superior} = \sigma'_{inferior} = 67.1$ MPa

6-170. $k = 1.17$

6-171. $k = 1.70$

6-173. $I_x = 26.8(10^{-6})$ m^4, $M_p = 0.00042\sigma_Y$, $M_Y = 0.000268\sigma_Y$, $k = 1.57$

6-174. $\sigma_T = \sigma_B = 142$ MPa

6-175. $k = 1.71$

6-177. $M_Y = 87.83\sigma_Y$, $M_p = 121.33\sigma_Y$, $k = 1.38$

6-178. $k = \frac{16r_o(r_o^3 - r_i^3)}{3\pi(r_o^4 - r_i^4)}$

6-179. $k = 2$

6-181. $d = \frac{2}{3}h$, $M = \frac{11ah^2}{54}\sigma_Y$

6-182. (a) $w_0 = 18.0$ kip/pie, (b) $w_0 = 22.8$ kip/pie

6-183. (a) $P = 37.3$ kip, (b) $P = 45.5$ kip

6-185. $\sigma - 50\sigma d - 3500(10^6)d = 0$, $M = 94.7$ N · m

6-186. (a) $M = 35.0$ kip · pie, (b) $M = 59.8$ kip · pie

6-187. $M = 251$ N · m

6-189. $\sigma = 82$ ksi, $M = 73.5$ kip · pie

6-190. $F_R = 5.88$ kN

6-191. $(\sigma_{máx})_t = 3.43$ MPa (T), $(\sigma_{máx})_c = 1.62$ MPa (C)

6-193. $n = 18.182$, $I = 0.130578(10^{-3})$ m^4, $M = 14.9$ kN · m

6-194. $M = 26.4$ kN · m

6-195. (a) $\sigma_{máx} = 0.410$ MPa, (b) $\sigma_{máx} = 0.410$ MPa

6-197. $\int_A \frac{dA}{r} = 0.012908358$ m, $A = 6.25(10^{-3})$ m^2, $\sigma_A = 225$ kPa (C), $\sigma_B = 265$ kPa (T)

6-198. $V = 20 - 2x$, $M = -x^2 + 20x - 166$

6-199. $x = 0.6^-$, $V = -233$, $M = -50$

6-201. $\sigma = \frac{6M}{a^3}(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$, $\frac{d\sigma}{d\theta} = 0$, $\theta = 45°$, $\alpha = 45°$

Capítulo 7

7-1. $I = 0.2501(10^{-3})$ m^4, $Q_A = 0.64(10^{-3})$ m^3, $\tau_A = 2.56$ MPa

7-2. $\tau_{máx} = 3.46$ MPa

7-3. $V_w = 19.0$ kN

7-5. $\bar{y} = 3.30$ pulg, $I_{NA} = 390.60$ pulg^4, $Q = 65.34 - 6y^2$, $V_f = 3.82$ kip

7-6. $\tau_A = 1.99$ MPa, $\tau_B = 1.65$ MPa

7-7. $\tau_{máx} = 4.62$ MPa

7-9. $\bar{y} = 1.1667$ pulg, $I = 6.75$ pulg^4, $V = 32.1$ kip

7-10. $\tau_{máx} = 4.48$ ksi

7-11. $V = 100$ kN

7-13. $\bar{y} = 0.080196$ m, $I = 4.8646(10^{-6})$ m^4, $\tau_{máx} = 4.22$ MPa

7-14. $V = 190$ kN

7-15. El factor $= \frac{4}{3}$

7-17. $I = 0.175275(10^{-3})$ m^4, $Q_{máx} = 1.09125(10^{-3})$ m^3, $\tau_{máx} = 37.4$ MPa

7-18. $V = 723$ kN

7-19. $(\tau_f)_{máx} = 9.24$ MPa, $(\tau_w)_{máx} = 37.4$ MPa

7-21. $I = 4\pi$ pulg^4, $Q = \frac{2}{3}(4 - y^2)^{3/2}$, $\tau_A = 2.39$ ksi

7-22. $\tau_B = 4.41$ MPa

7-23. $\tau_{máx} = 4.85$ MPa

7-25. $V_C = -13.75$ kN, $I = 27.0(10^{-6})$ m^4, $Q_{máx} = 0.216(10^{-3})$ m^3, $\tau_{máx} = 3.67$ MPa

7-26. $\tau_{máx} = 280$ psi

7-27. $\tau_C = 1.43$ ksi, $\tau_D = 1.17$ ksi

7-33. $I = 32.0$ pulg^4, $Q = 12.0$ pulg^4, $F = 675$ lb

7-34. $V = 1.35$ kip

7-35. $V = 1.80$ kip, $s = 2\frac{1}{8}$ pulg

7-37. $I_{NA} = 93.25$ pulg^4, $Q = 10.125$ pulg^3, $V = 34.5$ kip

7-38. $\tau_n = 35.2$ MPa

7-39. $F = 12.5$ kN

7-41. $I_{NA} = 2902$ pulg^4, $Q = 168$ pulg^2, $Q_{máx} = 208.5$ pulg^3, $P = 6.91$ kip

7-42. $V = 8.82$ kip, $s = 1\frac{1}{8}$ pulg

7-43. $(\tau_{calvo})_{prom} = 119$ MPa

7-45. $I_{NA} = 72.0(10^{-6})$ m^4, $Q = 0.450(10^{-3})$ m^3, $P = 6.60$ kN

7-47. $s = 8.66$ pulg, $s' = 1.21$ pulg

7-50. $q_A = 228$ kN/m, $q_B = 462$ kN/m

7-51. $q_C = 0$, $q_D = 601$ kN/m

7-53. $I_{NA} = 125.17(10^{-6})$ m^4, $Q_C = 0.5375(10^{-3})$ m^3, $q_C = 38.6$ kN/m

7-54. $q_A = 1.39$ kN/m, $q_B = 1.25$ kN/m

7-55. $q_{máx} = 1.63$ kN/m

7-57. $\bar{y} = 3.70946$ pulg, $I = 145.98$ pulg^4, $q_{máx} = 414$ lb/pulg

7-58. $q_A = 215$ kN/m

7-59. $q_{máx} = 232$ kN/m

7-61. $\bar{y} = 2.8362$ pulg, $I = 92.569$ pulg^4, $q_A = 196$ lb/pulg, $q_B = 452$ lb/pulg, $q_{máx} = 641$ lb/pulg

7-62. $\tau = \frac{V}{\pi R^2 t}\sqrt{R^2 - y^2}$

7-63. $e = \frac{3(b_2^2 - b_1^2)}{h + 6(b_1 + b_2)}$

7-65. $I = \frac{10}{3}a^3 t$, $Q_1 = \frac{t}{2}y^2$, $Q_2 = \frac{at}{2}(a + 2x)$, $e = \frac{7}{10}a$

7-66. $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

7-67. $e = 0$

7-69. $Pe = F(h) + 2V(b)$, $I = \frac{t}{12}(2h^3 + 6bh^2 - (h - 2h_1)^3)$, $e = \frac{b(6h_1h^2 + 3h^2b - 8h_1^3)}{2h^3 + 6bh^2 - (h - 2h_1)^3}$

7-70. $e = \frac{4r\,(\text{sen}\,\alpha - \alpha\cos\alpha)}{2\alpha - \text{sen}\,2\alpha}$

7-71. $V_{AB} = 9.96$ kip

7-73. $\bar{y} = 0.08798$ m, $I_{NA} = 86.93913(10^{-6})$ m^4, $Q_A = 0$, $Q_C = 0.16424(10^{-3})$ m^3, $q_A = 0$, $q_B = 1.21$ kN/m, $q_C = 3.78$ kN/m

7-74. $V = 4.10$ kip

7-75. $V = 749$ lb

Capítulo 8

8-1. $t = 18.8$ mm

8-2. $r_o = 75.5$ pulg

8-3. Caso (a): $\sigma_1 = 1.04$ ksi, $\sigma_2 = 0$
Caso (b): $\sigma_1 = 1.04$ ksi, $\sigma_2 = 520$ psi

8-5. $\sigma = 133$ MPa, $P_b = 35.56(10^3)\pi$ N, $\sigma_b = 228$ MPa

8-6. $t = 26.7$ mm, $n = 820$ pernos

8-7. (a) $\sigma_1 = 127$ MPa, (b) $\sigma_1' = 79.1$ MPa, (c) $(\tau_{prom})_r = 322$ MPa

8-9. $t_c = 40$ mm, $t_s = 20$ mm, $(P_b)_{perm} = 122.72(10^3)$ N, $n_s = 308$ pernos

8-10. $s = 33.3$ pulg

8-11. $\sigma_h = 432$ psi, $\sigma_b = 8.80$ ksi

8-13. $\delta_F - \delta_T = 0$, $\sigma_c = 2.69$ ksi

8-14. $\delta_{r_i} = \frac{p r_i^2}{E(r_o - r_i)}$

8-15. $p = \frac{E(r_2 - r_3)}{\frac{r_2^2}{r_2 - r_1} + \frac{r_3^2}{r_4 - r_3}}$

8-17. $\sigma_{fil} = \frac{pr}{t + t'} + \frac{T}{wt'}$, $\sigma_w = \frac{pr}{t + t'} - \frac{T}{wt}$

8-18. $d = 66.7$ mm

8-19. $\sigma_L = 66.7$ MPa (C), $\sigma_R = 33.3$ MPa (T)

8-21. $\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = 123$ MPa, $\sigma_B = 62.5$ MPa

8-22. $\sigma_{\text{máx}} = 1.07$ MPa

8-23. $\sigma_{\text{máx}} = 1.07$ MPa

8-25. $N = 606.218$ lb, $V = 350$ lb, $M = 175$ lb · pulg, $\sigma_B = 5.35$ ksi, $\tau_B = 0$

8-26. $w = 79.7$ mm

8-27. $P = 109$ kN

8-29. $A = 0.375$ pulg^2, $Q_A = 0.0234375$ pulg^3, $I = 0.0078125$ pulg^4, $\sigma_A = 533$ psi (T), $\sigma_B = 1067$ psi (C), $\tau_A = 600$ psi, $\tau_B = 0$

8-30. $\sigma_A = 504$ kPa (C), $\tau_A = 14.9$ kPa

8-31. $d = 66.7$ mm

8-33. $I = 1.0667(10^{-3})$ pulg^4, $Q_B = 0$, $Q_C = 4(10^{-3})$ pulg^3, $\sigma_B = 5.56$ ksi (T), $\tau_B = 0$, $\sigma_C = 62.5$ psi (C), $\tau_C = 162$ psi

8-34. $\sigma_D = 0$, $\tau_D = 667$ psi, $\sigma_E = 23.3$ ksi (T), $\tau_E = 0$

8-35. $\sigma_A = -9.41$ ksi, $\tau_A = 0$, $\sigma_B = 2.69$ ksi, $\tau_B = 0.869$ ksi

8-37. $A = 25\pi(10^{-6})$ m^2, $I_z = 0.15625\pi(10^{-9})$ m^4, $J = 0.3125\pi(10^{-9})$ m^4, $\sigma_B = 1.53$ MPa (C), $\tau_B = 100$ MPa

8-38. $T = 2.16$ kip

8-39. $T = 2.16$ kip

8-41. $A = 9.00\ (10^{-3})$ m^2, $I = 82.8\ (10^{-6})$ m, $Q_B = 0$, $\sigma_B = 0.522$ MPa (C), $\tau_B = 0$

8-42. $\sigma = 17.9$ MPa (C), $\tau = 1.06$ MPa

8-43. $\sigma = 23.9$ MPa (C), $\tau = 0.796$ MPa

8-45. $A = 18.0$ pulg^2, $I_y = 13.5$ pulg^4, $I_z = 54.0$ pulg^4, $\sigma_A = 1.00$ ksi (C), $\sigma_B = 3.00$ ksi (C)

8-46. $\sigma_{\text{máx}} = \frac{1.33P}{a^2}$ (C), $\sigma_{\text{mín}} = \frac{P}{3a^2}$ (T)

8-47. $\sigma_{\text{máx}} = \frac{0.368P}{r^2}$ (C), $\sigma_{\text{mín}} = \frac{0.0796P}{r^2}$ (T)

8-49. $R = 0.080889$ m, $N = -24.525$ N, $M = 14.2463$ N · m, $\sigma_A = 89.1$ MPa (C), $\sigma_B = 79.3$ kPa (T)

8-50. $(\sigma_t)_{\text{máx}} = 8.37$ ksi, $(\sigma_c)_{\text{máx}} = -6.95$ ksi

8-51. $6e_y + 18e_z < 5a$

8-53. $A = 13.5$ m^2, $I_x = 22.78125$ m^4, $I_y = 10.125$ m^4, $y = 0.75 - 1.5x$

8-54. $\sigma_A = 9.88$ kPa (T), $\sigma_B = 49.4$ kPa (C), $\sigma_C = 128$ kPa (C), $\sigma_D = 69.1$ kPa (C)

8-55. $\sigma_A = 11.9$ MPa (T), $\tau_A = -0.318$ MPa

8-57. $N_y = 800$ lb, $V_z = -600$ lb, $V_x = -500$ lb, $T_y = -7200$ lb · pulg, $M_x = 4800$ lb · pulg, $\sigma = 17.6$ ksi (T), $\tau = 4.84$ ksi

8-58. $\sigma = 5.86$ ksi (C), $\tau = 4.80$ ksi

8-59. $\sigma_{\text{máx}} = 71.0$ MPa (C)

8-61. $A = 0.7854$ pulg^2, $J = 0.098175$ pulg^4, $I = 0.049087$ pulg^4, $(Q_A)_x = 0$, $(Q_A)_z = 0.08333$ pulg^3, $\sigma_A = 16.2$ ksi (T), $\tau_A = -2.84$ ksi

8-62. $\sigma_B = 7.80$ ksi (T), $\tau_B = 3.40$ ksi

8-63. $\sigma_C = 15.6$ ksi (T), $\sigma_D = 124$ ksi (T), $\tau_D = 62.4$ ksi, $\tau_C = -52.4$ ksi

8-65. $T = -519.62$ lb · pulg, $M_y = 250$ lb · pulg, $M_z = -433.01$ lb · pulg, $I_y = I_z = 0.53689$ pulg^4, $J = 1.07379$ pulg^4, $(Q_y)_A = 0$, $(Q_z)_A = 0.38542$ pulg^3, $\sigma_A = 605$ psi (T), $\tau_A = 327$ psi

8-66. $\sigma_B = 466$ psi (C), $\tau_B = 422$ psi

8-67. $\sigma = -\frac{2P}{bh^3}(h^2 + 18e_y y)$, $-\frac{h}{6} \leq e_y \leq \frac{h}{12}$

8-69. $I = 0.1256637\ (10^{-6})$ m^4, $A = 1.256637\ (10^{-3})$ m^2, $Q_B = 0$, $\sigma_B = -21.7$ MPa, $\tau_B = 0$

8-70. $\tau_A = 0$, $\sigma_A = 30.2$ ksi (C)

8-71. $\sigma_B = 0$, $\tau_B = 0.377$ ksi

8-73. $R = 1.74103$ pulg, $e = 0.0089746$ pulg, $I = 0.9765625(10^{-3})\pi$ pulg^4, $Q_B = 0.0104167$ pulg^3, $\sigma = 1.62$ psi (T), $\tau = 384$ psi

8-74. $\sigma_A = -21.3$ psi, $\sigma_B = -12.2$ psi

8-75. $\sigma_E = 802$ kPa, $\tau_E = 69.8$ kPa

8-77. $\int_A \frac{dA}{r} = 0.035774$ pulg, $A = 0.049087$ pulg^2, $(\sigma_t)_{\text{máx}} = 49.0$ ksi (T), $(\sigma_c)_{\text{máx}} = 40.8$ ksi (C)

8-78. $(\sigma_t)_{\text{máx}} = 28.8$ ksi (T), $(\sigma_c)_{\text{máx}} = 24.0$ ksi (C)

8-79. $\sigma_{\text{máx}} = 236$ psi (C)

8-81. $p = 12(10^6)$ MPa, $F = 30(10^3)\pi$, $P = 94.2$ kN

8-82. $\sigma_{\text{máx}} = 44.0$ ksi (T)

8-83. $\sigma_1 = 7.07$ MPa, $\sigma_2 = 0$

8-85. $p = 3.60$ MPa, $F_b = 6.3617(10^6)$ N, $n = 113$ pernos

8-86. $\sigma_1 = 50.0$ MPa, $\sigma_2 = 25.0$ MPa, $F_b = 133$ kN

Capítulo 9

9-2. $\sigma_{x'} = -3.48$ ksi, $\tau_{x'y'} = 4.63$ ksi

9-3. $\sigma_{x'} = -678$ psi, $\tau_{x'y'} = 41.5$ psi

9-5. $\sigma_x = -650$ psi, $\sigma_y = 400$ psi, $\tau_{xy} = 0$, $\theta = 30°$,
$\sigma_{x'} = -388$ psi, $\tau_{x'y'} = 455$ psi

9-6. $\sigma_{x'} = 49.7$ MPa, $\tau_{x'y'} = -34.8$ MPa

9-7. $\sigma_{x'} = 49.7$ MPa, $\tau_{x'y'} = -34.8$ MPa

9-9. $\theta = +135°$, $\sigma_x = 80$ MPa,
$\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 45$ MPa,
$\sigma_{x'} = -5$ MPa, $\tau_{x'y'} = 40$ MPa

9-10. $\sigma_{x'} = -2.71$ ksi, $\tau_{x'y'} = 4.17$ ksi

9-11. $\sigma_{x'} = -2.71$ ksi, $\tau_{x'y'} = 4.17$ ksi

9-13. $\theta = -60°$, $\sigma_x = 200$ psi,
$\sigma_y = -350$ psi, $\tau_{xy} = 75$ psi,
$\sigma_{x'} = -277$ psi, $\sigma_{y'} = 127$ psi, $\tau_{x'y'} = 201$ psi

9-14. (a) $\sigma_1 = 4.21$ ksi, $\sigma_2 = -34.2$ ksi,
$\theta_{p_2} = 19.3°$, $\theta_{p_1} = -70.7°$
(b) $\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 19.2$ ksi, $\sigma_{\text{prom}} = -15$ ksi,
$\theta_s = -25.7°, 64.3°$

9-15. $\sigma_1 = -19.0$ MPa, $\sigma_2 = -121$ MPa,
$(\theta_p)_1 = 39.3°$ $(\theta_p)_2 = -50.7°$,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 51.0$ MPa, $\theta_s = -5.65°, 84.3°$

9-17. $\sigma_x = 125$ MPa, $\sigma_y = -75$ MPa,
$\tau_{xy} = -50$ MPa,
$\sigma_1 = 137$ MPa, $\sigma_2 = -86.8$ MPa,
$(\theta_p)_1 = -13.3°$, $(\theta_p)_2 = 76.7°$,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 112$ MPa, $\sigma_{\text{prom}} = 25$ MPa

9-18. $\sigma_x = -193$ MPa, $\sigma_y = -357$ MPa,
$\tau_{xy} = 102$ MPa

9-19. $\sigma_1 = 224$ MPa, $\sigma_2 = -64.2$ MPa,
$(\theta_p)_1 = -61.8°$, $(\theta_p)_2 = 28.2°$,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 144$ MPa, $\theta_s = -16.8°, 73.2°$,
$\sigma_{\text{prom}} = 80$ MPa

9-21. $\sigma_x = 51.962$ ksi, $\tau_{xy} = 30$ ksi,
$\sigma_1 = 80.1$ ksi, $\sigma_2 = 19.9$ ksi

9-22. $\sigma_1 = 4.93$ MPa, $\sigma_2 = -111$ MPa,
$(\theta_p)_1 = 78.1°$, $(\theta_p)_2 = -11.9°$

9-23. $I = 0.45(10^{-3})$ m^4, $Q_A = 1.6875(10^{-3})$ m^3,
$\sigma_{x'} = 0.507$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0.958$ MPa

9-25. $N = 400$ N, $M = 100$ N·m,
$A = 0.1(10^{-3})\pi$ m^2, $I = 2.5(10^{-9})\pi$ m^4,
$\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -126$ MPa,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 63.0$ MPa, $\sigma_{\text{prom}} = -63.0$ MPa

9-26. $\sigma_1 = 29.8$ ksi, $\sigma_2 = 0$,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 14.9$ ksi, $\theta_s = -45°, 45°$,
$\sigma_{\text{prom}} = 14.9$ ksi

9-27. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -22.9$ ksi,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 11.5$ ksi, $\theta_s = 45°, 135°$,
$\sigma_{\text{prom}} = -11.5$ ksi

9-29. $V = 70.5$ kN, $M = 39.15$ kN·m,
$I = 49.175(10^{-6})$ m^4, $Q_A = 0.255(10^{-3})$ m^3,
$\sigma_1 = 64.9$ MPa, $\sigma_2 = -5.15$ MPa,
$(\theta_p)_1 = 15.7°$, $(\theta_p)_2 = -74.3°$

9-30. Punto A: $\sigma_1 = 1.50$ ksi, $\sigma_2 = -0.0235$ ksi,
Punto B: $\sigma_1 = 0.0723$ ksi, $\sigma_2 = -0.683$ ksi

9-31. $\sigma_1 = 6.38$ MPa, $\sigma_2 = -0.360$ MPa,
$(\theta_p)_1 = 13.4°$, $(\theta_p)_2 = 103°$

9-33. $I = 0.3125(10^{-6})$ m^4, $Q_A = 0$,
$Q_B = 9.375(10^{-6})$ m^3,
$\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -192$ MPa,
$\sigma_1 = 24.0$, $\sigma_2 = -24.0$ MPa,
$\theta_{p_1} = -15.0°$, $\theta_{p_2} = 45.0°$

9-34. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1.34$ ksi,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 668$ psi, $\theta_s = 45°, -45°$

9-35. $\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 5$ kPa, $\sigma_{\text{prom}} = 0$

9-37. $A = \frac{\pi}{4}d^2$, $I = \frac{\pi}{64}d^4$, $Q_A = 0$,
$\sigma_1 = \frac{4}{\pi d^2}\left(\frac{2PL}{d} - F\right)$, $\sigma_2 = 0$,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = \frac{2}{\pi d^2}\left(\frac{2PL}{d} - F\right)$

9-38. $\tau_{x'y'} = -47.5$ kPa

9-39. $\sigma_x = 82.3$ kPa

9-41. $\bar{y} = 0.0991$ m, $I = 7.4862(10^{-6})$ m^4,
$A = 3.75(10^{-3})$ m^2,
$\sigma_1 = 21.2$ MPa, $\sigma_2 = -0.380$ MPa, $\theta_p = -7.63°$

9-42. $\sigma_1 = 2.97$ ksi, $\sigma_2 = -4.12$ ksi,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{en el plano}}} = 3.55$ ksi

9-43. $\sigma_1 = 1.27$ MPa, $\sigma_2 = -62.4$ MPa,
$(\theta_p)_1 = 81.9°$, $(\theta_p)_2 = -8.11°$

9-45. $V = 2$ kip, $M = 13$ kip · pie, $I = 86.6667$ pulg^4, $Q_A = 0$, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 2.70$ ksi, $\sigma_{\text{prom}} = -2.70$ ksi, $\theta_s = 45°, -45°$

9-46. $\sigma_1 = 219$ psi, $\sigma_2 = -219$ psi, $(\theta_p)_1 = 45°$, $(\theta_p)_2 = -45°$

9-47. $\sigma_1 = 5.50$ MPa, $\sigma_2 = -0.611$ MPa

9-49. $I_z = 0.350(10^{-3})$ m^4, $I_y = 68.75(10^{-6})$ m^4, $(Q_A)_y = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -77.4$ MPa, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 38.7$ MPa

9-50. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -20$ kPa, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 10$ kPa

9-51. $\sigma_{x'} = -388$ psi, $\tau_{x'y'} = 455$ psi

9-53. $R = 19.21$ ksi, $\sigma_1 = 4.21$ ksi, $\sigma_2 = -34.2$ ksi, $\theta_{p2} = 19.3°$, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 19.2$ ksi, $\sigma_{\text{prom}} = -15$ ksi, $\theta_{s2} = 64.3°$

9-54. $\sigma_1 = 53.0$ MPa, $\sigma_2 = -68.0$ MPa, $\theta_{p1} = 14.9°$ en sentido antihorario, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 60.5$ MPa, $\sigma_{\text{prom}} = -7.50$ MPa, $\theta_{s1} = 30.1°$ en sentido horario

9-55. $\sigma_{x'} = -19.9$ ksi, $\tau_{x'y'} = 7.70$ ksi, $\sigma_{y'} = 9.89$ ksi

9-58. $\sigma_{x'} = -421$ MPa, $\tau_{x'y'} = -354$ MPa, $\sigma_{y'} = 421$ MPa

9-59. $\sigma_{x'} = 4.99$ ksi, $\tau_{x'y'} = -1.46$ ksi, $\sigma_{y'} = -3.99$ ksi

9-61. $\sigma_{\text{prom}} = -155$ MPa, $R = 569.23$ MPa, $\sigma_{x'} = -299$ MPa, $\tau_{x'y'} = 551$ MPa, $\sigma_{y'} = -11.1$ MPa

9-62. $\sigma_{x'} = 0.250$ ksi, $\tau_{x'y'} = 3.03$ ksi, $\sigma_{y'} = -3.25$ ksi

9-63. $\sigma_{\text{prom}} = 7.50$ ksi
(a) $\sigma_1 = 16.5$ ksi, $\sigma_2 = -1.51$ ksi, $\theta_{p_1} = 16.8°$ (*Horario*)
(b) $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = -9.01$ ksi, $\theta_s = 28.2°$ (*Antihorario*)

9-65. $R = 192.094$, $\sigma_1 = 342$ psi, $\sigma_2 = -42.1$ psi, $\theta_p = 19.3°$, $\sigma_{\text{prom}} = 150$ psi, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 192$ psi, $\theta_s = -25.7°$

9-66. (a) $\sigma_1 = 88.1$ MPa, $\sigma_2 = -13.1$ MPa
(b) $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 50.6$ MPa, $\sigma_{\text{prom}} = 37.5$ MPa, $\theta_2 = 42.7°$

9-67. (a) $\sigma_1 = 646$ MPa, $\sigma_2 = -496$ MPa, $\theta_{p_1} = 30.6°$ (*Antihorario*)
(b) $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 571$ MPa, $\theta_s = 14.4°$ (*Horario*)

9-69. $\sigma_{x'} = 11.0$ kPa, $\tau_{x'y'} = -22.6$ kPa

9-70. $\sigma_{x'} = -12.5$ kPa, $\tau_{x'y'} = 21.7$ kPa

9-71. $\sigma_1 = 68.6$ psi, $\sigma_2 = -206$ psi

9-73. $A = 18.0$ pulg^2, $I = 54.0$ pulg^4, $Q_A = 10.125$ pulg^3, $\sigma_1 = 1.50$ ksi, $\sigma_2 = -0.0235$ ksi

9-74. $\sigma_1 = 0.0723$ ksi, $\sigma_2 = -0.683$ ksi

9-75. $\sigma_1 = 4.38$ ksi, $\sigma_2 = -1.20$ ksi, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 2.79$ ksi

9-77. $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.80$ ksi

9-78. $\sigma_{x'} = 500$ MPa, $\tau_{x'y'} = 167$ MPa

9-79. $\tau = 0.2222$ MPa, $\sigma_{\text{prom}} = 0.5556$ MPa, $R = 0.5984$ MPa, $\sigma_{x'} = 470$ kPa, $\tau_{x'y'} = 592$ kPa

9-81. $N = 900$ N, $V = 900$ N, $M = 675$ N · m, $A = 1.4(10^{-3})$ m^2, $I = 1.7367(10^{-6})$ m^4, $\sigma_1 = 9.18$ MPa, $\sigma_2 = -0.104$ MPa, $(\theta_p)_1 = 6.08°$ (*Antihorario*)

9-82. $\sigma_1 = 32.5$ MPa, $\sigma_2 = -0.118$ MPa, $(\theta_p)_1 = 3.44°$ (*Antihorario*)

9-83. $\sigma_1 = 7.52$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{en el plano}}} = 3.76$ MPa, $\theta_s = 45°$ (*Antihorario*)

9-85. $\sigma_{\text{mín}} = -300$ psi, $\sigma_{\text{int}} = 0$, $\sigma_{\text{máx}} = 400$ psi

9-86. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 137$ MPa, $\sigma_3 = -46.8$ MPa, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{abs}}} = 91.8$ MPa

9-87. $\sigma_{\text{máx}} = 158$ psi, $\sigma_{\text{min}} = -8.22$ psi, $\sigma_{\text{int}} = 0$ psi, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{abs}}} = 83.2$ psi

9-89. $\sigma_1 = 222$ MPa, $\sigma_2 = 0$ MPa,
$\sigma_3 = -102$ MPa,
$\tau_{\substack{máx\\abs}} = 162$ MPa

9-90. $\sigma_1 = 6.73$ ksi, $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = -4.23$ ksi,
$\tau_{\substack{máx\\abs}} = 5.48$ ksi

9-93. $\sigma_{máx} = 100$ MPa, $\sigma_{int} = 50$ MPa, $\sigma_{mín} = 0$,
$\tau_{\substack{máx\\abs}} = 50$ MPa

9-94. $\sigma_{máx} = 582$ psi, $\sigma_{int} = 0, \sigma_{mín} = -926$ psi,
$\tau_{\substack{máx\\abs}} = 755$ psi

9-95. $\sigma_{máx} = 10.9$ ksi, $\sigma_{int} = \sigma_{mín} = 0$,
$\tau_{\substack{máx\\abs}} = 5.46$ ksi

9-97. $P = 0.900(10^6)$ N·m/s, $T_0 = 60.0(10^3)$ N·m,
$A = 0.015625\pi$ m^2, $J = 0.3835(10^{-3})$ m^4,
$\tau_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 23.2$ MPa

9-98. $\sigma_1 = 119$ psi, $\sigma_2 = -119$ psi

9-99. $\sigma_1 = 329$ psi, $\sigma_2 = -72.1$ psi

9-101. $\sigma_1 = \dfrac{2}{\pi d^2}\left(-F + \sqrt{F^2 + \dfrac{64T_0^2}{d^2}}\right)$,
$\sigma_2 = -\dfrac{2}{\pi d^2}\left(F + \sqrt{F^2 + \dfrac{64T_0^2}{d^2}}\right)$,
$\tau_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = \dfrac{2}{\pi d^2}\sqrt{F^2 + \dfrac{64T_0^2}{d^2}}$

9-102. $\sigma_{x'} = -63.3$ MPa, $\tau_{x'y'} = 35.7$ MPa

9-103. $\sigma_1 = 3.29$ MPa,
$\sigma_2 = -4.30$ MPa,
$(\theta_p)_2 = 41.1°$ (*Horario*)

9-105. $Q_C = 31.25(10^{-6})$ m^3, $I = 2.0833(10^{-6})$ m^4,
$\tau = 26.4$ kPa, $\sigma_1 = 26.4$ kPa, $\sigma_2 = -26.4$ kPa,
$\theta_{p_1} = -45°$; $\theta_{p_2} = 45°$

9-106. $\sigma_{x'} = -22.9$ kPa, $\tau_{x'y'} = -13.2$ kPa

Capítulo 10

10-2. $\epsilon_{x'} = 248(10^{-6}), \gamma_{x'y'} = -233(10^{-6})$,
$\epsilon_{y'} = -348(10^{-6})$

10-3. $P = 111$ hp

10-5. (a) $\epsilon_1 = 441(10^{-6}), \epsilon_2 = -641(10^{-6})$,
$\theta_{p1} = -24.8°, \theta_{p2} = 65.2°$
(b) $\gamma_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 1.08(10^{-3})$,
$\epsilon_{prom} = -100(10^{-6})$

10-6. $\epsilon_{x'} = 145(10^{-6}), \gamma_{x'y'} = 583(10^{-6})$,
$\epsilon_{y'} = 155(10^{-6})$

10-7. $\epsilon_{x'} = 215(10^{-6}), \gamma_{x'y'} = -248(10^{-6})$,
$\epsilon_{y'} = 185(10^{-6})$

10-9. $\epsilon_1 = 188(10^{-6}), \epsilon_2 = -128(10^{-6})$,
$(\theta_p)_1 = -9.22°, (\theta_p)_2 = 80.8°$,
$\gamma_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 316(10^{-6})$,
$\theta_s = 35.8°, -54.2°, \epsilon_{prom} = 30(10^{-6})$

10-10. $\epsilon_{x'} = 103(10^{-6}), \epsilon_{y'} = 46.7(10^{-6})$,
$\gamma_{x'y'} = 718(10^{-6})$

10-11. $\epsilon_1 = -79.3(10^{-6}), \epsilon_2 = -221(10^{-6})$,
$(\theta_p)_1 = 22.5°, (\theta_p)_2 = -67.5°$,
$\gamma_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 141(10^{-6}), \theta_s = -22.5°, 67.5°$,
$\epsilon_{prom} = -150(10^{-6})$

10-13. $\epsilon_1 = 17.7(10^{-6}), \epsilon_2 = -318(10^{-6})$,
$(\theta_p)_1 = 76.7°, (\theta_p)_2 = -13.3°$,
$\gamma_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 335(10^{-6}), \theta_s = 31.7°, 122°$,
$\epsilon_{prom} = -150(10^{-6})$

10-14. (a) $\epsilon_1 = 368(10^{-6}), \epsilon_2 = 182(10^{-6})$,
$\theta_{p1} = -52.8°, \theta_{p2} = 37.2°$
(b) $\gamma_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 187(10^{-6})$
$\theta_s = -7.76°,\ 82.2°, \epsilon_{prom} = 275(10^{-6})$

10-17. $R = 167.71(10^{-6}), \epsilon_1 = 138(10^{-6})$,
$\epsilon_2 = -198(10^{-6}), \theta_p = 13.3°$

10-18. $(\gamma_{xy})_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 335(10^{-6})$ $\epsilon_{prom} = -30(10^{-6})$,
$\theta_s = -31.7°$

10-19. $\epsilon_{x'} = -309(10^{-6}), \epsilon_{y'} = -541(10^{-6})$,
$\gamma_{x'y'} = -423(10^{-6})$

10-21. (a) $R = 93.408, \epsilon_1 = 368(10^{-6})$,
$\epsilon_2 = 182(10^{-6}), \theta_{p1} = -52.8°, \theta_{p2} = 37.2°$
(b) $\gamma_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 187(10^{-6})$,
$\theta_s = -7.76°,\ 82.2°, \epsilon_{prom} = 275(10^{-6})$

10-22. (a) $\epsilon_1 = 773(10^{-6}), \epsilon_2 = 76.8(10^{-6})$
(b) $\gamma_{\substack{máx\\\text{en el plano}}} = 696(10^{-6})$
(c) $\gamma_{\substack{máx\\abs}} = 773(10^{-6})$

10-23. (a) $\epsilon_1 = 192(10^{-6}), \epsilon_2 = -152(10^{-6})$
(b, c) $\gamma_{\substack{\text{máx}\\\text{abs}}} = \gamma_{\substack{\text{máx}\\\text{en el plano}}} = 344(10^{-6})$

10-25. $\epsilon_1 = 308(10^{-6}), \epsilon_2 = -108(10^{-6})$,
$(\theta_p)_2 = 8.05°$ (*Horario*), $R = 208.17(10^{-6})$,
$\gamma_{\substack{\text{máx}\\\text{en el plano}}} = 416(10^{-6}), \epsilon_{\text{prom}} = 100(10^{-6})$,
$\theta_s = 36.9°$ (*Antihorario*)

10-26. $\epsilon_1 = 451(10^{-6}), \epsilon_2 = -451(10^{-6})$,
$(\theta_p)_1 = 28.2°$(*Antihorario*),
$\gamma_{\substack{\text{máx}\\\text{en el plano}}} = 902(10^{-6})$ $\epsilon_{\text{prom}} = 0$,
$\theta_s = 16.8°$ (*Horario*)

10-27. $\epsilon_1 = 339(10^{-6}), \epsilon_2 = -489(10^{-6})$,
$(\theta_p)_1 = 32.5°$ (*Antihorario*),
$\gamma_{\substack{\text{máx}\\\text{en el plano}}} = 828(10^{-6})$,
$\epsilon_{\text{prom}} = -75(10^{-6})$,
$\theta_s = 12.5°$ (*Horario*)

10-33. $\sigma_3 = 0, \sigma_1 = 10.2$ ksi, $\sigma_2 = 7.38$ ksi

10-34. $\gamma_{\substack{\text{máx}\\\text{abs}}} = 41.1(10^{-6})$

10-35. $\epsilon_{\text{máx}} = 30.5(10^{-6}), \epsilon_{\text{int}} = \epsilon_{\text{mín}} = -10.7(10^{-6})$

10-37. (a) $K_r = 3.33$ ksi,
(b) $K_g = 5.13(10^3)$ ksi

10-38. $\epsilon_{\text{máx}} = 546(10^{-6}), \epsilon_{\text{int}} = 364(10^{-6})$,
$\epsilon_{\text{mín}} = -910(10^{-6})$

10-39. $p = 3.43$ MPa,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{en el plano}}} = 0$,
$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{abs}}} = 85.7$ MPa

10-41. $\sigma_z = -\dfrac{12\,My}{bh^3}, \epsilon_y = \dfrac{12\,\nu My}{Ebh^3}$,
$\Delta L_{AB} = \dfrac{3\,\nu M}{2Ebh}$,
$\Delta L_{CD} = \dfrac{6\,\nu M}{Eh^2}$

10-42. $\epsilon_x = 2.35(10^{-3}), \epsilon_y = -0.972(10^{-3})$,
$\epsilon_z = -2.44(10^{-3})$

10-43. $P = 390$ lb

10-45. $t_h = 0.206$ pulg

10-46. $\sigma_1 = 8.37$ ksi, $\sigma_2 = 6.26$ ksi

10-47. $\epsilon_1 = 833(10^{-6}), \epsilon_2 = 168(10^{-6})$,
$\epsilon_3 = -763(10^{-6})$

10-49. $\epsilon_x = 0.3125(10^{-3})$, y $\epsilon_y = 0.25(10^{-3}), \sigma_z = 0$,
$\sigma_x = 15.5$ ksi (C), $\sigma_y = 16.8$ ksi (C)

10-50. $w_y = -184$ kN/m, $w_x = 723$ kN/m

10-51. $E = 67.7$ GPa, $\nu = 0.335$,
$G = 25.0$ GPa

10-53. $0 = \sigma_x - 0.35\sigma_y - 0.35\sigma_z + 26.2$,
$0 = \sigma_y - 0.35\sigma_z - 0.35\sigma_x + 26.2$,
$0 = \sigma_z - 0.35\sigma_x - 0.35\sigma_y + 6.20$,
$\sigma_x = \sigma_y = -70.0$ ksi, $\sigma_z = -55.2$ ksi

10-54. $\epsilon_x = \epsilon_y = 0, \epsilon_z = 5.44(10^{-3})$

10-57. $E_{\text{ef}} = \dfrac{E}{1 - \nu^2}$

10-58. $k = 1.35$

10-59. $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_Y^2$

10-61. $\omega = 80\,\pi$ rad/s, $T = \dfrac{3300}{x}$ lb · pulg,
$d = 0.833$ pulg

10-62. $d = 0.794$ pulg

10-63. $d = 1.88$ pulg

10-65. $\sigma = \dfrac{450}{a^3}, a = 1.78$ pulg

10-66. $T_e = \sqrt{\dfrac{4}{3}M^2 + T^2}$

10-67. $M_e = \sqrt{M^2 + \dfrac{3}{4}T^2}$

10-69. $\sigma_1 = 50 + 197.23 = 247$ MPa,
$\sigma_2 = 50 - 197.23 = -147$ MPa,
Sí.

10-70. $M_e = \sqrt{M^2 + T^2}$

10-71. No.

10-73. $\sigma = -9.549$ ksi, $\tau = 30.56$ ksi,
Sí.

10-74. No.

10-75. F.S. = 1.43

10-77. $\sigma_1 = 7.314$ ksi, $\sigma_2 = -15.314$ ksi,
F.S. = 1.59

10-78. F.S. = 1.80

10-79. $\sigma_2 = 38.9$ ksi

10-81. $\sigma_2 = \dfrac{\sigma_x}{2}, \sigma_x = 121$ ksi

10-82. $\sigma_Y = 94.3$ ksi

10-83. $\sigma_Y = 91.0$ ksi

10-85. $\sigma_1 = 8.8489$ ksi, $\sigma_2 = -10.8489$ ksi,
$\sigma_Y = 19.7$ ksi

10-86. (a) $p = \frac{1}{r}\sigma_Y$
(b) $p = \frac{2t}{\sqrt{3}r}\sigma_Y$

10-89. $(\tau_{máx})_h = 8626.28T$, $(\tau_{máx})_s = 9947.18T$,
$\sigma_1 = 9947.18T$, $\sigma_2 = -9947.18T$,
$T = 838$ kN·m

10-90. $T = 9.67$ kN·m

10-91. $d = 1.50$ pulg

10-93. $\sigma_{perm} = 166.67(10^6)$ Pa,
(a) $t = 22.5$ mm
(b) $t = 19.5$ mm

10-94. $\epsilon = \frac{pr}{2Et}(1 - \nu)$

10-95. (a) $\epsilon_1 = 482(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 168(10^{-6})$
(b) $\gamma_{\substack{máx \\ \text{en el plano}}} = 313(10^{-6})$
(c) $\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 482(10^{-6})$

10-97. $\sigma_1 = 350.42$ MPa, $\sigma_2 = -65.42$ MPa, No.

10-98. $\epsilon_{prom} = 83.3(10^{-6})$,
(a) $\epsilon_1 = 880(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -713(10^{-6})$,
$\theta_p = 54.8°$ (*Horario*)
(b) $\gamma_{\substack{máx \\ \text{en el plano}}} = -1593(10^{-6})$,
$\theta_s = 9.78°$ (*Horario*)

10-99. $T = 736$ N·m

10-101. $\epsilon_1 = 996(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 374(10^{-6})$,
$(\theta_p)_1 = 15.8°$ (*Horario*),
$\gamma_{\substack{máx \\ \text{en el plano}}} = -622(10^{-6})$, $\epsilon_{prom} = 685(10^{-6})$,
$\theta_s = 29.2°$ (*Antihorario*)

10-102. $\epsilon_{x'} = 480(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 23.2(10^{-6})$,
$\epsilon_{y'} = 120(10^{-6})$

10-103. $\epsilon_{prom} = 300(10^{-6})$, $\epsilon_1 = 480(10^{-6})$,
$\epsilon_2 = 120(10^{-6})$, $(\theta_p)_1 = 28.2°$ (*Horario*),
$\gamma_{\substack{máx \\ \text{en el plano}}} = -361(10^{-6})$,
$\theta_s = 16.8°$ (*Antihorario*)

Capítulo 11

11-1. $I_x = 0.16276b^4$, $Q_{máx} = 0.1953125b^3$,
$b = 211$ mm, $h = 264$ mm

11-2. Use W12 × 22

11-3. Use $b = 4.25$ pulg

11-5. $S_{req} = 15.0$ pulg^3,
Use W12 × 16

11-6. El elemento AB: Use W10 × 12,
El elemento BC: Use W6 × 9

11-7. $w = 6.12$ kN/m

11-9. $S_{req} = 29.45$ pulg^3,
$\tau_{máx} = 2.67$ ksi,
Use W12 × 26

11-10. Use W14 × 43

11-11. $P = 2.49$ kN

11-13. $S_{req} = 32.73$ pulg^3,
Use W12 × 26

11-14. Use W14 × 30

11-15. $b = 15.5$ pulg

11-17. $S = 65.23$ pulg^3, $\sigma_{máx} = 26.5$ ksi. No, la viga falla debido al criterio del esfuerzo flexionante.

11-18. $d = 11.4$ mm

11-19. $d_i = 13.0$ mm

11-21. $\sigma_{máx} = 17.46$ ksi, Sí.

11-22. Use $h = 9\frac{1}{8}$ pulg

11-23. $w = 3.02$ kN/m,
$s_{ext} = 16.7$ mm,
$s_{med} = 50.2$ mm

11-25. $h = 0.643$ pulg,
Sí, la vigueta soportará la carga con seguridad.

11-26. Use W14 × 22

11-27. $w = 10.8$ kN/m

11-29. $P = 83.33h^2$, $h = 7.20$ pulg,
$P = 4.32$ kip

11-30. Use $s = 3\frac{3}{4}$ pulg, $s' = 5\frac{3}{4}$ pulg,
$s'' = 11\frac{1}{2}$ pulg. Sí, puede soportar la carga.

11-31. $\sigma_{máx} = \frac{3PL}{8bh_0^2}$

11-33. $S = \frac{b_0 r^2}{3L}x$, $\sigma = \frac{3PL}{2b_0 t^2}$. El esfuerzo flexionante es constante a través del segmento.

11-34. $h = \dfrac{h_0}{L^{3/2}}(3L^2x - 4x^3)^{1/2}$

11-35. $\sigma_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = \dfrac{0.155w_0L^2}{bh_0^2}$

11-37. $\sigma_{\text{perm}} = \dfrac{Px}{b_0d^2/6}, d = d_0\sqrt{\dfrac{x}{L}}$

11-38. $b = \dfrac{b_0}{L^2}x^2$

11-39. Use $d = 20$ mm

11-41. $T = 100$ N · m, $c = 0.01421$, Use $d = 29$ mm

11-42. $T = 100$ N · m, Use $d = 33$ mm

11-43. Use $d = 1\frac{1}{4}$ pulg

11-45. $M = 496.1$ N · m, $c = 0.0176$ m, Use $d = 36$ mm

11-46. $d = 34.3$ mm

11-47. Use $d = 21$ mm

11-49. $M = 1274.75$ N · m, Use $d = 44$ mm

11-50. Use $d = 41$ mm

11-51. Use W10 × 12

11-53. $S = \dfrac{bh_0^2}{6L^2}(2x + L)^2, \sigma_{\text{máx}} = \dfrac{wL^2}{4bh_0^2}$

11-54. Use $d = 21$ mm

11-55. Use $d = 19$ mm

Capítulo 12

12-1. $\sigma_{\text{máx}} = \dfrac{c}{\rho}E = 100$ MPa

12-2. $\sigma = 582$ MPa

12-3. $W = 113$ lb

12-5. $M(x_1) = -\dfrac{P}{2}x_1, M(x_2) = -Px_2,$

$v_1 = \dfrac{P}{12EI}(-x_1^3 + L^2x_1),$

$v_2 = \dfrac{P}{24EI}(-4x_2^3 + 7L^2x_2 - 3L^3)$

12-6. $v_1 = \dfrac{Px_1}{12EI}(-x_1^3 + L^2),$

$v_3 = \dfrac{P}{12EI}(2x_3^3 - 9Lx_3^3 + 10L^2x_3 - 3L^3),$

$v_{\text{máx}} = \dfrac{PL^3}{8EI}$

12-7. $v_{\text{máx}} = \dfrac{P}{3EI_{AB}}\left\{\left(1 - \dfrac{I_{AB}}{I_{AC}}\right)l^3 - L^3\right\}$

12-9. $M_1 = \dfrac{Pb}{L}x_1, M_2 = Pa\left(1 - \dfrac{x_2}{L}\right),$

$v_1 = \dfrac{Pb}{6EIL}(x_1^3 - (L^2 - b^2)x_1),$

$v_2 = \dfrac{Pa}{6EIL}(3x_2^2L - x_2^3 - (2L^2 + a^2)x_2 + a^2L)$

12-10. $\theta_{\text{máx}} = \dfrac{M_0L}{3EI},$

$v_{\text{máx}} = -\dfrac{\sqrt{3}M_0L^2}{27EI}$

12-11. $v_1 = \dfrac{P}{9EI}(x_1^3 - 5a^2x_1),$

$v_2 = \dfrac{P}{18EI}(-x_2^3 + 9ax_2^2 - 19a^2x_2 + 3a^3),$

$v_{\text{máx}} = \dfrac{0.484\, Pa^3}{EI}\downarrow$

12-13. $\theta_A = -\dfrac{3}{8}\dfrac{PL^2}{EI}, v_C = \dfrac{-PL^3}{6EI}$

12-14. $v_{\text{máx}} = \dfrac{3PL^3}{256EI}\downarrow$

12-15. $\theta_A = \dfrac{Pab}{2EI}, v_1 = \dfrac{P}{6EI}[-x_1^3 + 3a(a + b)x_1 - a^2(2a + 3b)],$

$v_3 = \dfrac{Pax_3}{2EI}(-x_3 + b), v_C = \dfrac{Pab^2}{8EI}$

12-17. $M(x_1) = \dfrac{M_0}{L}x_1, M(x_2) = M_0,$

$\theta_A = \dfrac{M_0L}{6EI} ⦪, v_1 = \dfrac{M_0}{6EIL}(x_1^3 - L^2x_1),$

$v_2 = \dfrac{M_0}{24EI}(12x_2^2 - 20Lx_2 + 7L^2),$

$v_C = \dfrac{7M_0L^2}{24EI}\uparrow$

12-18. $\theta_A = -\dfrac{M_0L}{6EI}, v = \dfrac{M_0}{6EIL}(3Lx^2 - 2x^3 - L^2x),$

$v_{\text{máx}} = \dfrac{0.0160\, M_0L^2}{EI}\downarrow, v_{\text{máx}} = \dfrac{0.0160\, M_0L^2}{EI}\uparrow$

12-19. $\theta_B = \dfrac{M_0L}{6EI}$ ⦪, $v|_{x=\frac{L}{2}} = 0$

12-21. $M(x_1) = -\dfrac{wL}{8}x_1, M(x_2) = -\dfrac{w}{2}x_2^2,$

$v_C = \dfrac{11wL^4}{384EI}\downarrow$

12-22. $\theta_{\text{máx}} = 0.00466$ rad, $v_{\text{máx}} = 0.369$ pulg $\downarrow$

12-23. $\theta_{máx} = \dfrac{w_0L^3}{45EI}$

12-25. $M(x) = \left(36x - \dfrac{1}{3}x^3\right)\text{kN}\cdot\text{m}$,

$\theta_A = \dfrac{540\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$ ⦩,

$v = \dfrac{1}{EI}\left(6x^3 - \dfrac{1}{60}x^5 - 540x\right)\text{kN}\cdot\text{m}^3$,

$v_{máx} = \dfrac{2074\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$

12-26. $\theta_B = -\dfrac{wa^3}{6EI}$,

$v_1 = \dfrac{w}{24EI}\left(-x_1^4 + 4ax_1^3 - 6a^2x_1^2\right)$,

$v_2 = \dfrac{wa^3}{24EI}(-4x_2 + a)$,

$v_B = \dfrac{wa^3}{24EI}(-4L + a)$

12-27. $\theta_A = 0.0611$ rad, $v_A = -3.52$ pulg

12-29. $I(x) = \dfrac{bh^3}{12L^3}x^3$, $\theta_A = \dfrac{2\gamma L^3}{h^2E}$,

$v_A|_{x=0} = \dfrac{\gamma L^4}{h^2E}$

12-30. $I = \left(\dfrac{2Lc}{L}\right)x$,

$\theta_A = \dfrac{\gamma L^3}{3r^2E}$,

$v_A|_{x=0} = -\dfrac{\gamma L^4}{6r^2E}$

12-31. $v_{máx} = -\dfrac{PL^3}{2EI_0}$

12-33. $I = \left(\dfrac{2Ic}{L}\right)x$, $v_C = -\dfrac{PL^3}{32EI_C}$

12-34. $\sigma_{máx} = \dfrac{3PL}{2nbt^2}$

12-35. $v_{máx} = -3.64$ mm

12-37. $M = 180x - 150\langle x - 0.25\rangle - 60\langle x - 0.5\rangle$
$- 150\langle x - 0.75\rangle$, $v_C = v_E = -0.501$ mm,
$v_D = -0.698$ mm, $v_E = -0.501$ mm

12-38. $v = \dfrac{1}{EI}[-1.67x^3 - 6.67\langle x - 20\rangle^3 +$
$18.3\ x\ -\ 40\ ^3 + 4000x]\ \text{lb}\cdot\text{pulg}^3$

12-39. $v = \dfrac{1}{EI}[4.1667x^3 - 5\langle x - 2\rangle^3$
$- 2.5\langle x - 4\rangle^3 - 93.333x]$,
$v_{máx} = 13.3$ mm ↓

12-41. $M = M_0\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^0 - M_0\left\langle x - \dfrac{2}{3}L\right\rangle$,

$v = \dfrac{M_0}{6EI}\left[3\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^2 - 3\left\langle x - \dfrac{2}{3}L\right\rangle^2 - Lx\right]$,

$v_{máx} = \dfrac{5M_0L^2}{72EI}\downarrow$

12-42. $\theta_A = \dfrac{PL^2}{9EI}$,

$v = \dfrac{P}{18EI}\left[3x^3 - 3\left\langle x - \dfrac{L}{3}\right\rangle^3 - 3\left\langle x - \dfrac{2}{3}L\right\rangle^3 - 2L^2x\right]$,

$v_{máx} = \dfrac{23PL^3}{648\,EI}\downarrow$

12-43. $v = \dfrac{1}{EI}\left[6.25x^3 - 33.75x^2 - \dfrac{1}{6}x^5 + \dfrac{1}{6}\langle x - 1.5\rangle^5 + \dfrac{5}{4}\langle x - 1.5\rangle^4\right]$,

$v_{máx} = 12.9$ mm ↓

12-45. $M = 24.6x - 1.5x^2 + 1.5\langle x - 4\rangle^2 - 50\langle x - 7\rangle$,

$\theta_A = -\dfrac{279\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$,

$v|_{x=7\text{ m}} = -\dfrac{835\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$

12-46. $v = \dfrac{1}{EI}\left[3.75x^3 - \dfrac{10}{3}\langle x - 1.5\rangle^3 - 0.625\langle x - 3\rangle^4 + \dfrac{1}{24}\langle x - 3\rangle^5 - 77.625x\right]$,

$v_{máx} = 11.0$ mm ↓

12-47. $\theta_B = -0.705°$, $v_B = -51.7$ mm

12-49. $M = 2400x - 600\langle x - 9\rangle$
$- 250x^2 + 250\langle x - 6\rangle^2$,

$v = \dfrac{1}{EI}\left[400x^3 - 100\langle x - 9\rangle^3 - \dfrac{125}{6}x^4 + \dfrac{125}{6}\langle x - 6\rangle^4 - 23625x\right]$,

$v_{máx} = 1.76$ pulg ↓

12-50. $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\{0.100x^2 - 0.333x^3$
$+ 0.333(x - 5)^3 + 8.90\,(x - 5)^2$
$+ 9.58\}\ \text{kN}\cdot\text{m}^2,$
$v = \frac{1}{EI}\{0.0333x^3 - 0.0833x^4$
$+ 0.833(x - 5)^4 + 2.97(x - 5)^2$
$+ 9.58x\}\ \text{kN}\cdot\text{m}^3$

12-51. $v = \frac{1}{EI}[-0.25x^4 + 0.208(x - 1.5)^3$
$+ 0.25(x - 1.5)^4 + 4.625(x - 4.5)^3$
$+ 25.1x - 36.4]\ \text{kN}\cdot\text{m}^3$

12-53. $\theta_A = \frac{302\ \text{kip}\cdot\text{pie}^2}{EI},$
$v_C = -\frac{3110\ \text{kip}\cdot\text{pie}^3}{EI}$

12-54. $v = \frac{1}{EI}[-0.00556x^5 + 12.9(x - 9)^3$
$+ 0.00556(x - 9)^5$
$- 256x + 2637]\ \text{kip}\cdot\text{pie}^3$

12-55. $\theta_C = \frac{3937.5}{EI},\ \Delta_C = \frac{50\,625}{EI}$

12-57. $\theta_B = |\theta_{B/A}| = \frac{5PL^2}{8EI},$
$\Delta_B = |t_{B/A}| = \frac{7PL^3}{16EI}\downarrow,$

12-58. $\theta_A = \frac{120\ \text{kip}\cdot\text{pie}^2}{EI}\ \measuredangle,$
$v_{\text{máx}} = v_C = \frac{1080\ \text{kip}\cdot\text{pie}}{EI}\downarrow$

12-59. $\theta_C = \frac{240\ \text{kip}\cdot\text{pie}^2}{EI}\ \triangledown,$
$v_C = \frac{1080\ \text{kip}\cdot\text{pie}^3}{EI}\downarrow$

12-61. $\theta_{C/A} = \frac{M_0L}{2EI}, \theta_{\text{máx}} = \theta_A = \frac{M_0L}{2EI},$
$\Delta_{\text{máx}} = |t_{B/C}| = \frac{M_0L^2}{8EI}$

12-62. $\Delta_C = \frac{5M_0L^2}{6EI}, \theta_C = \frac{4M_0L}{3EI}$

12-63. $\theta_A = 0.00879$ rad

12-65. $\Delta_C = |t_{C/A}| - \frac{|t_{B/A}|}{a}L, \theta_A = \frac{|t_{B/A}|}{a},$
$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ a = 0.858L$

12-66. $\theta_A = \frac{4PL^2}{81EI}$

12-67. $F = \frac{P}{4}$

12-69. $\theta_A = \theta_{A/C} = \frac{5Pa^2}{2EI}, \Delta_C = t_{A/C} = \frac{19Pa^3}{6EI}\downarrow$

12-70. $\Delta_C = \frac{PL^3}{12EI}, \theta_A = \frac{PL^2}{24EI}, \theta_B = \frac{PL^2}{12EI}$

12-71. $\Delta_{\text{máx}} = \frac{0.00802PL^3}{EI}$

12-73. $t_{B/A} = -\frac{5M_0a^2}{6EI}, t_{C/A} = -\frac{M_0a^2}{6EI},$
$\theta_A = \frac{|t_{B/A}|}{L} = \frac{5M_0a}{12EI},$
$\Delta_C = \left|\frac{1}{2}t_{B/A}\right| - |t_{C/A}| = \frac{M_0a^2}{4EI}\uparrow$

12-74. $v_{\text{máx}} = \frac{3048\ \text{kip}\cdot\text{pie}^3}{EI}\downarrow$

12-75. $E = \frac{Pa}{24\Delta I}(3L^2 - 4a^2)$

12-77. $\theta_{A/C} = -\frac{5Pa^2}{2EI}, t_{B/C} = -\frac{2Pa^3}{EI},$
$t_{A/C} = -\frac{13Pa^3}{3EI}, \theta_A = |\theta_{A/C}| = \frac{5Pa^2}{2EI},$
$\Delta_A = |t_{A/C}| - |t_{B/C}| = \frac{7Pa^3}{3EI}\downarrow$

12-78. $\theta_{\text{máx}} = \frac{5PL^2}{16EI}, \Delta_{\text{máx}} = \frac{3PL^3}{16EI}$

12-79. $\theta_D = \frac{PL^2}{16EI}, \Delta_C = \frac{5PL^3}{384EI}$

12-81. $\Delta_C = |t_{C/A}| - \frac{|t_{B/A}|}{a}L, \theta_A = \frac{|t_{B/A}|}{a} = \frac{M_0a}{6EI},$
$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \Delta_D = |t_{A/D}| = \frac{\sqrt{3}M_0a^2}{27EI},$
$a = 0.865L$

12-82. $\theta_B = 0.00778$ rad ⦩, $v_B = 0.981$ pulg ↓

12-83. $\theta_C = \dfrac{a^2}{6EI}(12P + wa)$,

$\Delta_C = \dfrac{a^3}{24EI}(64P + 7wa)\downarrow$

12-85. $\theta_B = |\theta_{B/C}| = 0.00160$ rad,

$\Delta_C = |t_{A/C}| = 0.0371$ pulg ↓

12-86. $\theta_A = 0.175°$

12-87. $\Delta_C = 0.895$ pulg ↓

12-89. $(\theta_C)_1 = (\theta_B)_1 = \dfrac{wa^3}{3EI}, (\Delta_C)_1 = \dfrac{wa^4}{3EI}\uparrow$,

$(\theta_C)_2 = \dfrac{wa^3}{6EI}, (\Delta_C)_2 = \dfrac{wa^4}{8EI}\downarrow$,

$(\Delta_C)_3 = (\theta_B)_3(a) = \dfrac{wa^4}{3EI}\downarrow$,

$\theta_C = \dfrac{wa^3}{6EI}, \Delta_C = \dfrac{wa^4}{8EI}\downarrow$

12-90. $\theta_A = \dfrac{wa^3}{6EI}, \Delta_D = \dfrac{wa^4}{12EI}\downarrow$

12-91. $\theta_B = 0.00722$ rad, $\Delta_C = 13.3$ mm ↓

12-93. $(\Delta_C)_1 = \dfrac{2560}{EI}\downarrow$,

$\Delta_2(x) = \dfrac{Mx}{6LEI}(L^2 - x^2)$,

$(\Delta_C)_2 = \dfrac{80}{EI}\downarrow, \Delta_C = 1.90$ pulg

12-94. $\Delta_A = \dfrac{72}{EI}, \theta_A = \dfrac{36}{EI}$

12-95. $\Delta_C = 23.2$ m ↓

12-97. $\Delta_B = \dfrac{PL^3}{24EI}, (\Delta_A)_1 = \dfrac{PL^3}{24EI}, \theta = \dfrac{PL^2}{4JG}$,

$(\Delta_A)_2 = \dfrac{PL^3}{8JG}, \Delta_A = PL^3\left(\dfrac{1}{12EI} + \dfrac{1}{8JG}\right)$

12-98. $\Delta_A = \dfrac{Pa^2(3b + a)}{3EI}$

12-99. $\theta_A = \dfrac{1053 \text{ lb}\cdot\text{pulg}^2}{EI}$,

$(\Delta_A)_v = \dfrac{4000 \text{ lb}\cdot\text{pulg}^3}{EI}\downarrow$

12-101. $y_{máx} = \dfrac{P\cos\theta\, L^3}{3EI_x}; x_{máx} = \dfrac{P \operatorname{sen}\theta\, L^3}{3EI_y}$,

$\dfrac{x_{máx}}{y_{máx}} = \dfrac{I_x}{I_y}\tan\theta, y_{máx} = 0.736$ pulg,

$x_{máx} = 3.09$ pulg

12-102. Use W14 × 34

12-103. $A_y = \dfrac{3M_0}{2L}, B_y = \dfrac{3M_0}{2L}, M_B = \dfrac{M_0}{2}$

12-105. $M(x_1) = C_y x_1, M(x_2) = C_y x_2 - Px_2 + \dfrac{PL}{2}$,

$C_y = \dfrac{5}{16}P, B_y = \dfrac{11}{8}P, A_y = \dfrac{5}{16}P$

12-106. $M_A = \dfrac{PL}{2}, A_y = \dfrac{3P}{2}, B_y = \dfrac{5P}{2}$

12-107. $M_A = \dfrac{Pa}{L}(L - a), M_B = \dfrac{Pa}{L}(L - a)$

12-109. $M(x) = C_y x + B_y\langle x - 10\rangle - \dfrac{3}{2}\langle x - 10\rangle^2$,

$B_y = 14.4$ kip, $C_y = 1.07$ kip ↓, $A_y = 10.7$ kip

12-110. $A_x = 0, C_y = \dfrac{w_0L}{10}, B_y = \dfrac{4w_0L}{5}, A_y = \dfrac{w_0L}{10}$

12-111. $A_x = 0, A_y = \dfrac{7wL}{16}, C_y = -\dfrac{wL}{16}, B_y = \dfrac{5wL}{8}$

12-113. $M_a = \dfrac{wL_1^2}{2} - T_{AC}L_1$,

$T_{AC} = \dfrac{3A_2E_2wL_1^4}{8(A_2E_2L_1^3 + 3E_1I_1L_2)}$

12-114. $A_x = 0$, $F_C = 112$ kN,

$A_y = 34.0$ kN, $B_y = 34.0$ kN

12-115. $A_x = 0, B_y = \dfrac{3M_0}{2L}, A_y = \dfrac{3M_0}{2L}, M_A = \dfrac{M_0}{2}$

12-117. $(t_{A/B})_1 = \dfrac{-P(L - a)^2(2L + a)}{6EI}$,

$(t_{A/B})_2 = \dfrac{A_yL^3}{3EI}, A_y = \dfrac{P(L - a)^2(2L + a)}{2L^3}$,

$a = 0.414L$

12-118. $A_y = \dfrac{3M_0}{2L}, C_y = \dfrac{3M_0}{2L}, B_y = \dfrac{3M_0}{L}, C_x = 0$

12-119. $B_x = 0, B_y = \dfrac{11P}{16}, C_y = \dfrac{13P}{32}, A_y = \dfrac{3P}{32}$

12-121. $v_B' = \dfrac{366.67 \text{ N}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$,

$v_B'' = \dfrac{1.3333B_y \text{ m}^3}{EI}\uparrow$,

$B_y = 550$ N, $A_y = 125$ N, $C_y = 125$ N

12-122. $B_y = \dfrac{7P}{4}, A_y = \dfrac{3P}{4}, M_A = \dfrac{PL}{4}$

12-123. $C_x = 0$, $B_y = 30.75$ kip,

$A_y = 2.625$ kip, $C_y = 14.625$ kip

12-125. $C_x = 0, (v_p)_1 = (v_p)_2 = \dfrac{247.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow,$
$(v_B)_y = \dfrac{36B_y}{EI}\uparrow, B_y = 13.75 \text{ kN},$
$A_y = C_y = 3.125 \text{ kN}$

12-126. $A_x = 0, B_y = \dfrac{3M_0}{2L}, A_y = \dfrac{3M_0}{2L}, M_A = \dfrac{M_0}{2}$

12-127. $C_x = 0,\ C_y = \dfrac{P}{3}$

12-129. $(\Delta_A)' = \dfrac{wL_1^4}{8E_1I_1}; \Delta_A = \dfrac{T_{AC}L_2}{A_2E_2}, \delta_A = \dfrac{T_{AC}L_1^3}{3E_1I_1},$
$T_{AC} = \dfrac{3wA_2E_2L_1^4}{8[3E_1I_1L_2 + A_2E_2L_1^3]}$

12-130. $M_A = \dfrac{PL}{8}, M_B = \dfrac{3PL}{8}, B_x = 0, B_y = P$

12-131. $M = \left(\dfrac{PL}{8} - \dfrac{2EI}{L}\alpha\right), \Delta_{\text{máx}} = \dfrac{PL^3}{192EI} + \dfrac{\alpha L}{4}$

12-133. $\Delta = \dfrac{w_0(L-a)^4}{8EI} - \dfrac{R(L-a)^3}{3EI},$
$R = \left(\dfrac{8\Delta EIw_0^3}{9}\right)^{\frac{1}{4}}, a = L - \left(\dfrac{72\Delta EI}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}}$

12-134. $A_x = 0, F_B = 220 \text{ kN},$
$A_y = C_y = 70.1 \text{ kN}$

12-135. $B_y = 634 \text{ lb}, A_y = 243 \text{ lb}, C_y = 76.8 \text{ lb}$

12-137. $M = -180x + 277.5\langle x-12\rangle - 70\langle x-24\rangle,$
$v = \dfrac{1}{EI}[-30x^3 + 46.25\langle x-12\rangle^3$
$- 11.7\langle x-24\rangle^3 + 38\,700x - 412\,560]$

12-138. $v_1 = \dfrac{1}{EI}(4.44x_1^3 - 640x_1) \text{ lb}\cdot\text{pulg}^3,$
$v_2 = \dfrac{1}{EI}(-4.44x_2^3 + 640x_2) \text{ lb}\cdot\text{pulg}^3$

12-139. $\Delta_C = 1.90 \text{ pulg} \downarrow$

12-141. $\Delta_B = \Delta_C = \dfrac{11wL^4}{12EI}, \Delta_{BB} = \Delta_{CC} = \dfrac{4B_yL^3}{9EI},$
$\Delta_{BC} = \Delta_{CB} = \dfrac{7B_yL^3}{18EI}, B_y = C_y = \dfrac{11wL}{10},$
$A_y = \dfrac{2wL}{5}, D_y = \dfrac{2wL}{5}, D_x = 0$

12-142. $M_B = \dfrac{w_0L^2}{30}, M_A = \dfrac{w_0L^2}{20}$

12-143. $v_A = \dfrac{w_0L^4}{Eth_0^3}\downarrow$

12-145. $\Delta_D = \dfrac{6400 \text{ lb}\cdot\text{pie}^3}{EI}\downarrow, (\Delta_C)_1 = \dfrac{3200 \text{ lb}\cdot\text{pie}^3}{EI}\downarrow,$
$(\Delta_C)_2 = \dfrac{27\,000 \text{ lb}\cdot\text{pie}^3}{EI}\downarrow, \Delta_C = 0.644 \text{ pulg}\downarrow$

12-146. $M_{\text{máx}} = \dfrac{\pi^2 bt\gamma\omega^2 r^3}{108g}$

Capítulo 13

13-1. $F = 2P\theta, F_s = \dfrac{kL\theta}{2}, P_{cr} = \dfrac{kL}{4}$

13-2. $P_{cr} = \dfrac{5}{9}kL$

13-3. $P_{cr} = \dfrac{4k}{L}$

13-5. $A = 1.10(10^{-3}) \text{ m}^2,$
$I_x = I_y = 0.184167(10^{-6}) \text{ m}^4, P_{cr} = 22.7 \text{ kN}$

13-6. $P_{cr} = 46.4 \text{ kN}$

13-7. $P_{cr} = 158 \text{ kip}$

13-9. $P_{cr} = 33.17 \text{ kip}$, F.S. = 2.21

13-10. $P_{cr} = 271 \text{ kip}$

13-11. $P_{cr} = 20.4 \text{ kip}$

13-13. $I = 0.86167(10^{-6}) \text{ m}^4, P_{cr} = 272 \text{ kN}$

13-14. $d = 8.43 \text{ pulg}, P_{cr} = 245 \text{ kip}$

13-15. $L = 15.1 \text{ pies}$

13-17. $A = 8.00 \text{ pulg}^2, I_x = 10.667 \text{ pulg}^4,$
$I_y = 2.6667 \text{ pulg}^4, P_{cr} = 2.92 \text{ kip}$

13-18. $P_{cr} = 5.97 \text{ kip}$

13-19. $P = 29.9 \text{ kN}$

13-21. $P_{cr} = 1886.92 \text{ kip}$, No.

13-22. F.S. = 2.19

13-23. $P = 475 \text{ kip}$

13-25. $A = 8.85 \text{ pulg}^2, I_y = 19.6 \text{ pulg}^4, P = 62.3 \text{ kip}$

13-26. $P = 2.42 \text{ kip}$

13-27. $w = 5.55 \text{ kN/m}$

13-29. $F_{BC} = 20 \text{ kip}, P_{cr} = 178.9 \text{ kip},$
eje x-x: F.S. = 8.94, eje y-y: F.S. = 3.98

13-30. $P = 23.9 \text{ kip}$

13-31. $w = 32.5 \text{ kip/pie}$

13-33. $F_{AB} = 15 \text{ kN}, A = 3.2(10^{-3}) \text{ m}^2,$
$I_y = 0.4267(10^{-6}) \text{ m}^4, P_{cr} = 33.69 \text{ kN},$
F.S. = 2.25

13-34. $P = 46.5$ kN
13-35. $P = 110$ kN
13-37. $F_{AB} = 26.8014m$, $A = 0.625(10^{-3})\pi$ m^2, $I = 97.65625(10^{-9})\pi$m^4, $m = 7.06$ kg
13-38. $P = 4.57$ kip
13-39. $P = 2.34$ kip
13-41. $M(x) = \frac{w}{2}(x^2 - Lx) - Pv$,

$$v_{máx} = \frac{wEI}{P^2}\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - \frac{PL^2}{8EI} - 1\right],$$

$$M_{máx} = -\frac{wEI}{P}\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right]$$

13-42. $$v_{máx} = \frac{F}{2P}\left[\sqrt{\frac{EI}{P}}\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - \frac{L}{2}\right],$$

$$M_{máx} = -\frac{F}{2}\sqrt{\frac{EI}{P}}\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

13-43. $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4L^2}$
13-45. $M(x) = R'(L - x) - Pv$
13-46. $P = 26.5$ kip
13-47. $P = 5.87$ kN, $v_{máx} = 42.1$ mm
13-49. $A = 0.61575(10^{-3})$ m^2, $I = 64.1152(10^{-9})$ m^4, $P_{máx} = P_{cr} = 18.98$ kN, $P = 6.75$ kN
13-50. $P = 20.1$ kN
13-51. $P = 73.5$ kip
13-53. $P_{cr} = 98.70$ kN, $P_{perm} = 49.35$ kN, $P_{perm} = 26.3$ kN
13-54. $\sigma_{máx} = 130$ MPa
13-55. La columna es adecuada.
13-57. El eje fuerte controla la cedencia. $P_{perm} = 89.0$ kN
13-58. $P_{cr} = 199$ kN, $e = 175$ mm
13-59. $\sigma_{máx} = 199$ MPa, $v_{máx} = 24.3$ mm
13-61. La columna es adecuada
13-62. $e = 0.15$ m, $P_{perm} = 346.92$ kN, $P_{perm} = 268$ kN
13-63. $\sigma_{máx} = 6.22$ ksi
13-65. $(KL)_x = (KL)_y = 3$ m, $P_{cr} = 83.5$ kN
13-66. F.S. = 1.56
13-67. La columna no falla por cedencia.
13-69. $(KL)_y = (KL)_x = 210$ pulg, $P = 18.3$ kip
13-70. $E_t = 14.6\ (10^3)$ ksi
13-71. $P_{cr} = 110$ kip
13-73. $\dfrac{KL}{r} < 49.7$: $\dfrac{P}{A} = \dfrac{0.4935(10^6)}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$ MPa,

$49.7 < \dfrac{KL}{r} < 99.3$: $\dfrac{P}{A} = 200$ MPa,

$\dfrac{KL}{r} > 99.3$: $\dfrac{P}{A} = \dfrac{1.974(10^6)}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$ MPa

13-75. $P_{cr} = 1323$ kN
13-77. $E_1 = 200$ GPa, $E_2 = 150$ GPa, $r = 0.02$ m, $P_{cr} = 2700$ kN
13-78. $L = 3.56$ m
13-79. $L = 10.9$ pies
13-81. $\sigma_{perm} = 11.28$ ksi, Use W6 × 15
13-82. Use W6 × 9
13-83. Use W8 × 24
13-85. $\left(\dfrac{KL}{r}\right)_x = 105.26$, $\left(\dfrac{KL}{r}\right)_y = 111.80$, $P_{perm} = 80.9$ kip
13-86. Sí.
13-87. $d = 1.42$ pulg
13-89. $A = 0.0151$ m^2, $I_y = 90.025833(10^{-6})$ m^4. La columna es adecuada.
13-90. $L = 4.46$ m
13-91. $b = 0.704$ pulg
13-93. $A = 5.55(10^{-3})$ m^2, $I_x = 31.86625(10^{-6})$ m^4, $I_y = 2.5478(10^{-6})$ m^4, $P_{perm} = 422$ kN
13-94. $L = 3.08$ m
13-95. $P_{perm} = 108$ kip
13-97. $A = 5.57$ pulg^2, $I = 31.7448$ pulg^4, $P_{perm} = 129$ kip
13-98. $P_{perm} = 143$ kip
13-99. $P_{perm} = 109$ kip
13-101. $\sigma_{perm} = 0.4783$ ksi, $P_{perm} = 8.61$ kip
13-102. $L = 8.89$ pies
13-103. Use $a = 7\frac{1}{2}$ pulg
13-105. $\dfrac{KL}{d} = 1.00L$, $L = 3.87$ pies
13-106. $P_{perm} = 1.875$ kip
13-107. $P = 7.83$ kip

13-109. $\frac{KL}{r_y} = 69.231$, $(\sigma_a)_{perm} = 16.510$ ksi, $P = 80.3$ kip

13-110. $P = 79.4$ kip

13-111. $P = 4.07$ kip

13-113. $\left(\frac{KL}{r}\right)_x = 133.33$ (controla), $\left(\frac{KL}{r}\right)_y = 100.30$, $P = 8.60$ kip

13-114. $P = 14.6$ kip

13-115. La columna no es adecuada.

13-117. $A = 12\text{ pulg}^2$, $I_x = 166\text{ pulg}^4$, $I_y = 42.75\text{ pulg}^4$, $P = 95.7$ kip

13-118. $P = 98.6$ kip

13-119. $P = 2.79$ kip

13-121. $A = 24.0\text{ pulg}^2$, $I_x = 72.0\text{ pulg}^4$, $I_y = 32.0\text{ pulg}^4$, $P = 98.0$ kip

13-122. $P = 132$ kip

13-123. $P = 2.48$ kip

13-125. $\frac{KL}{d} = 43.2$ pulg, Sí.

13-126. $P = 1.69$ kip

13-127. $P = 3.44$ kip

13-129. $B_x = 0$, $B_y = \frac{2M}{L \operatorname{sen} \theta}$, $M = \frac{PL}{2} \operatorname{sen} \theta$, $M = \frac{PL}{2}\theta$, $P_{cr} = \frac{2k}{L}$

13-130. $w = 4.63$ kN/m

13-131. $P = 25.0$ kip

13-133. $\left(\frac{KL}{r}\right)_x = 56.25$, $\left(\frac{KL}{r}\right)_y = 128.21$ (controla), Sí.

13-134. $P_{perm} = 57.6$ kip

13-135. $P_{cr} = 839$ kN

13-137. $\bar{x} = 0.06722$ m, $I_y = 20.615278(10^{-6})\text{ m}^4$, $I_z = 7.5125(10^{-4})\text{ m}^4$, No.

Capítulo 14

14-1. $\frac{U_i}{V} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$

14-3. $(U_i)_a = 3.28$ J

14-5. $N_{AB} = 3$ kN, $N_{BC} = 7$ kN, $N_{CD} = -3$ kN, $U_i = 0.372$ J

14-6. $(U_i)_a = 43.2$ J

14-7. $P = 375$ kN, $(U_i)_a = 1.69$ kJ

14-9. $T = 8.0\text{ kN}\cdot\text{m}$, $T = 2.0\text{ kN}\cdot\text{m}$, $T = -10.0\text{ kN}\cdot\text{m}$, $U_i = 149$ J

14-10. $(U_i)_t = \frac{7T^2L}{24\pi r_0^4 G}$

14-11. $(U_i)_t = 0.0637$ J

14-13. $V = -P$, $M = -Px$, $\frac{(U_i)_y}{(U_i)_b} = \frac{3(1+\nu)}{5}\left(\frac{h}{L}\right)^2$

14-14. $U_i = \frac{M_0^2 L}{24EI}$

14-15. $(U_i)_b = \frac{P^2L^3}{48EI}$

14-17. $M(x) = \left(9x - \frac{1}{4}x^3\right)\text{kN}\cdot\text{m}$, $(U_i)_b = 33.6$ J

14-18. $(U_i)_b = 29.3$ J

14-19. $U_i = \frac{P^2r^3}{JG}\left(\frac{3\pi}{8} - 1\right)$

14-21. $T_y = \frac{PL}{2}$, $M_x = Py$, $U_i = P^2L^3\left[\frac{3}{16EI} + \frac{1}{8JG}\right]$

14-22. $U_i = \frac{3P^2L^3}{bh^3E}$, 1.5 veces mayor que para una sección transversal

14-23. (a) $U_i = \frac{w^2L^5}{40EI}$, (b) $U_i = \frac{w^2L^5}{40EI}$

14-25. $F_{AD} = 2.50$ kip (T), $F_{AB} = 1.50$ kip (C), $F_{DB} = 2.50$ kip (C), $F_{DC} = 3.00$ kip (T), $(\Delta_A)_h = 0.0142$ pulg

14-26. $(\Delta_C)_h = \frac{2PL}{AE}$

14-27. $\Delta_C = \frac{2PL}{AE}$

14-29. $U_e = \frac{1}{2}(M_0\theta_B)$, $\theta_B = \frac{M_0 L}{EI}$

14-30. $U_i = 0.726\text{ pulg}\cdot\text{kip}$, $\Delta_C = 0.0145$ pulg

14-31. $\theta_B = 0.00100$ rad

14-33. $U_i = \frac{65\,625}{EI}$, $U_e = 150\,\theta_E$, $\theta_E = 3.15°$

14-34. $\Delta_B = 2.67$ pulg

14-35. $\Delta_B = 11.7$ mm

14-37. $T = PR\cos\theta$, $M = PR\,\text{sen}\,\theta$,
$\sigma_{máx} = \frac{16PR}{\pi d^3}[\text{sen}\,\theta + 1]$

14-38. $\Delta = \frac{64nPR^3}{d^4G}$

14-39. $\Delta_C = 2.13$ mm

14-41. $M_1 = -20(10^3)x_1$, $M_2 = 60(10^3)$ N · m,
$\Delta_B = 15.2$ mm

14-42. (a) $U_i = 4.52$ kJ, (b) $U_i = 3.31$ kJ

14-43. $d = 5.35$ pulg

14-45. $\Delta_{ac} = 9.8139(10^{-6})$ m, $\sigma_{máx} = 359$ MPa

14-46. $h = 69.6$ mm

14-47. $\sigma_{máx} = 216$ MPa

14-49. $\Delta_{ac} = 0.613125(10^{-3})$ m, $k = 160(10^6)$ N/m,
$\sigma_{máx} = 237$ MPa, $\Delta_{máx} = 3.95$ mm

14-50. $\sigma_{máx} = 85.7$ MPa

14-51. $h = 0.571$ m

14-53. $\sigma_{ac} = 0.3123$ MPa, $L = 325$ mm

14-54. $\sigma_{máx} = 207$ MPa

14-55. $\sigma_{máx} = 43.6$ ksi

14-57. $\sigma_{ac} = 153.78$ psi, $n = 195.08$, $h = 11.6$ pies

14-58. $(\Delta_A)_{máx} = 15.4$ pulg

14-59. $h = \frac{\sigma_{máx}L^2}{3Ec}\left[\frac{\sigma_{máx}I}{WLc} - 2\right]$

14-61. $n = 209.13$, $h = 2.23$ m

14-62. $\sigma_{máx} = 5.88$ ksi

14-63. $h = 3.73$ pulg

14-65. $k_{viga} = 1.7700$ kip/pulg, $n = 16.7$

14-66. $\sigma_{máx} = 47.8$ MPa

14-67. $h = 6.57$ m

14-69. $k_b = 49.3425(10^6)$ N/m, $\Delta_b = 0.050342$ m,
$v = 5.75$ m/s

14-70. $\Delta_{viga} = 0.481$ pulg, $\sigma_{máx} = 10.1$ ksi

14-71. $\Delta_{máx} = 23.3$ mm, $\sigma_{máx} = 4.89$ MPa

14-73. $1\text{ lb}\cdot(\Delta_B)_h = \frac{40\,533.33\text{ lb}^2\cdot\text{pulg}}{AE}$,
$(\Delta_B)_h = 0.699(10^{-3})$ pulg →

14-74. $(\Delta_B)_v = 0.0931(10^{-3})$ pulg ↓

14-75. $\Delta_{C_v} = 20.4$ mm

14-77. $1\text{ kip}\cdot(\Delta_B)_v = \frac{1620\text{ kip}^2\cdot\text{pulg}}{AE}$,
$(\Delta_B)_v = 0.0124$ pulg ↓

14-78. $(\Delta_E)_v = 0.00966$ pulg ↓

14-79. $\Delta_{B_h} = 0.367$ mm

14-81. $1\text{ N}\cdot(\Delta_A)_v = \frac{498.125(10^3)\text{ N}^2\cdot\text{m}}{AE}$,
$(\Delta_A)_v = 6.23$ mm ↓

14-82. $(\Delta_B)_v = 3.79$ mm ↓

14-83. $\Delta_{C_v} = 0.163$ pulg

14-85. $1\text{ N}\cdot(\Delta_C)_v = \frac{174.28125(10^3)}{0.15(10^{-3})[200(10^9)]}$,
$(\Delta_C)_v = 5.81$ mm ↓

14-86. $(\Delta_G)_v = 3.41$ mm ↓

14-87. $\Delta_C = \frac{23Pa^3}{24EI}$

14-89. $\Delta_C = \frac{572.92\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$,
$M(x_1) = 2.50x_1$, $M(x_2) = x_2^2$,
$m(x_1) = 0.50x_1$, $m(x_2) = x_2$,
$\Delta_C = 40.9$ mm ↓

14-90. $\theta_A = 0.00298$ rad

14-91. $\theta_B = 0.00595$ rad

14-93. $M = 327.06x_1$, $M = 654.12 + 47.06x_2$,
$m_\theta = 1 - 0.1176x_1$, $m_\theta = 0.1176x_3$,
$\theta_A = 2.73°$

14-94. $\theta_C = 5.89(10^{-3})$ rad

14-95. $\Delta_A = 27.4$ mm ↓, $\theta_A = 5.75(10^{-3})$ rad

14-97. $M_1 = Px$, $M_2 = Px_2$,
$m_\theta = \frac{x_1}{a}$, $m_\theta = 1$,
$\theta_C = \frac{5Pa^2}{6EI}$

14-98. $\theta_A = \frac{Pa^2}{6EI}$

14-99. $\theta_A = 0.00700$ rad

14-101. $M(x_1) = \frac{w}{24}(11Lx_1 - 12x_1^2)$, $M(x_2) = \frac{w}{3L}x_2^3$,
$m_\theta(x_1) = -\frac{x_1}{L}$, $m_\theta(x_2) = 1$, $\theta_C = \frac{13wL^3}{576EI}$

14-102. $\Delta_D = \frac{wL^4}{96EI}$ ↓

14-103. $\Delta_C = 0.557$ pulg ↓

14-105. $M(x_2) = wa(a + x_2) - \frac{w}{2}x_2^2$, $M(x_1) = wax_1$,
$m(x_2) = \frac{1}{2}(x_2 + a)$, $m(x_1) = \frac{x_1}{2}$, $\Delta_B = \frac{65wa^4}{48EI}\downarrow$

14-106. $\Delta_C = \frac{w_0L^4}{120EI}$

14-107. $\theta_A = \frac{5w_0L^3}{192EI}$

14-109. $M(x_1) = (31.5x_1 - 6x_1^2)\text{ kN}\cdot\text{m}$,
$M(x_2) = (22.5x_2 - 3x_2^2)\text{ kN}\cdot\text{m}$,
$m_\theta(x_1) = (1 - 0.1667x_1)\text{ kN}\cdot\text{m}$,
$m_\theta(x_2) = (0.1667x_2)\text{ kN}\cdot\text{m}$,
$\theta_A = 0.00927\text{ rad}$

14-110. $\Delta_C = 16.7\text{ mm}\downarrow$

14-111. Flexión y cortante:
$\Delta = \left(\frac{w}{G}\right)\left(\frac{L}{a}\right)^2\left[\left(\frac{5}{96}\right)\left(\frac{L}{a}\right)^2 + \frac{3}{20}\right]$,
Sólo flexión: $\Delta = \frac{5w}{96G}\left(\frac{L}{a}\right)^4$

14-113. $M(x_1) = \frac{w}{2}x_1^2$, $M(x_2) = \frac{wL^2}{2}$,
$m(x_1) = 0$, $m(x_2) = 1.0L - 1.0x_4$,
$(\Delta_B)_h = \frac{wL^4}{4EI}\rightarrow$

14-114. $\Delta_{A_v} = \frac{4PL^3}{3EI}$

14-115. $\Delta_B = 43.5\text{ mm}\downarrow$

14-117. $\Delta_C = 17.9\text{ mm}\downarrow$

14-118. $\theta_A = 0.991(10^{-3})\text{ rad}$

14-119. $(\Delta_C)_v = 16.8\text{ mm}\downarrow$

14-121. $M = \frac{M_0}{a}$, $M = M_0$,
$m = 1x$, $m = 1x$, $\Delta_C = \frac{5M_0a^2}{6EI}$

14-122. $\theta_B = \frac{M_0a}{3EI}$

14-123. $\Delta_{B_h} = 0.00191\text{ pulg}$

14-125. $\Delta_{C_v} = \frac{1225.26(10^3)}{300(10^{-6})(200)(10^9)} = 20.4\text{ mm}$

14-126. $\Delta_{D_v} = 4.88\text{ mm}$

14-127. $(\Delta_B)_v = 0.0124\text{ pulg}\downarrow$

14-129. $\Delta_{B_h} = \frac{29.375(10^3)}{400(10^{-6})(200)(10^9)} = 0.367\text{ mm}$

14-130. $\Delta_{C_v} = 0.0375\text{ mm}$

14-131. $(\Delta_A)_v = 6.23\text{ mm}\downarrow$

14-133. $\Delta_{C_v} = \frac{21\,232}{4.5(29)(10^3)} = 0.163\text{ pulg}$

14-134. $\Delta_{H_v} = 0.156\text{ pulg}$

14-135. $\Delta_C = \frac{23Pa^3}{24EI}$

14-137. $\theta_A = \frac{41.667(10^3)}{200(10^9)\left[70(10^{-6})\right]} = 0.00298\text{ rad}$

14-138. $\Delta_B = 1.54\text{ pulg}$

14-139. $\theta_A = 2.73°$

14-141. $\theta_C = \frac{5Pa^2}{6EI}$

14-142. $\theta_A = \frac{Pa^2}{6EI}$

14-143. $(\Delta_C)_v = \frac{5wL^4}{8EI}\downarrow$

14-145. $M = \frac{M_0}{a}x$, $M = M_0$, $M = Px$, $M = Px$,
$\Delta_C = \frac{5M_0a^2}{6EI}$

14-146. $U_i = \frac{5P^2a^3}{6EI}$

14-147. $\sigma_{máx} = 116\text{ MPa}$

14-149. Energía de deformación flexionante:
$(U_b)_i = \frac{1.176(10^6)}{29(10^6)(\frac{1}{12})(0.5)(0.2^3)} = 10.1\text{ pie}\cdot\text{lb}$,
Energía de deformación de la fuerza axial:
$(U_a)_i = \frac{(350)^2(8)}{2(29)(10^6)(\frac{\pi}{4})(0.25^2)} = 0.344\text{ pulg}\cdot\text{lb}$

14-150. $\Delta_A = 0.536\text{ mm}$

14-151. $(U_i)_t = 2.23\text{ pulg}\cdot\text{lb}$

14-153. $\Delta_{E_v} = \frac{236.25(10^3)}{400(10^{-6})(200)(10^9)} = 2.95\text{ mm}$

14-154. $\theta_B = \frac{M_0L}{EI}$

14-155. $\theta_B = \frac{M_0L}{EI}$

14-157. $\sigma_{máx} = 10.5\text{ ksi}$

Índice

F

Propiedades mecánicas promedio para materiales de ingeniería típicos[a]

(Unidades del SI)

Materiales		Densidad ρ (Mg/m^3)	Módulo de elasticidad E (GPa)	Módulo de rigidez G (GPa)	Resistencia a la cedencia (MPa) σ_Y			Resistencia última (MPa) σ_u			% de elongación en probeta de 50 mm	Razón de Poisson ν	Coeficiente de expansión térmica α (10^{-6})/°C
					Tens.	Comp.[b]	Cortante	Tens.	Comp.[b]	Cortante			
Metálicos													
Aleaciones de aluminio forjado	2014-T6	2.79	73.1	27	414	414	172	469	469	290	10	0.35	23
	6061-T6	2.71	68.9	26	255	255	131	290	290	186	12	0.35	24
Aleaciones de hierro fundido	Gris ASTM 20	7.19	67.0	27	–	–	–	179	669	–	0.6	0.28	12
	Maleable ASTM A-197	7.28	172	68	–	–	–	276	572	–	5	0.28	12
Aleaciones de cobre	Latón rojo C83400	8.74	101	37	70.0	70.0	–	241	241	–	35	0.35	18
	Bronce C86100	8.83	103	38	345	345	–	655	655	–	20	0.34	17
Aleaciones de magnesio	[Am 1004-T61]	1.83	44.7	18	152	152	–	276	276	152	1	0.30	26
Aleaciones de acero	Estructural A36	7.85	200	75	250	250	–	400	400	–	30	0.32	12
	Inoxidable 304	7.86	193	75	207	207	–	517	517	–	40	0.27	17
	De herramienta L2	8.16	200	75	703	703	–	800	800	–	22	0.32	12
Aleación de titanio	[Ti-6Al-4V]	4.43	120	44	924	924	–	1,000	1,000	–	16	0.36	9.4
No metálicos													
Concreto	De baja resistencia	2.38	22.1	–	–	–	12	–	–	–	–	0.15	11
	De alta resistencia	2.38	29.0	–	–	–	38	–	–	–	–	0.15	11
Plástico reforzado	Kevlar 49	1.45	131	–	–	–	–	717	483	20.3	2.8	0.34	–
	Vidrio al 30%	1.45	72.4	–	–	–	–	90	131	–	–	0.34	–
Madera de grado estructural	Abeto Douglas	0.47	13.1	–	–	–	–	2.1[c]	26[d]	6.2[d]	–	0.29[e]	–
	Abeto blanco	3.60	9.65	–	–	–	–	2.5[c]	36[d]	6.7[d]	–	0.31[e]	–

[a] Algunos valores específicos pueden variar para un material particular debido a la composición mineral de la aleación, el trabajo mecánico de la probeta o el tratamiento térmico. Para obtener un valor más exacto deben consultarse los manuales de referencia para el material.

[b] Puede suponerse que la resistencia a la cedencia y la resistencia última para los materiales dúctiles son iguales en tensión y en compresión.

[c] Se mide perpendicular a la fibra.

[d] Se mide paralela a la fibra.

[e] Deformación medida en forma perpendicular a la fibra cuando la carga se aplica a lo largo de ésta.

Propiedades mecánicas promedio para materiales de ingeniería típicos[a]

(Unidades de uso común en Estados Unidos)

Materiales	Peso específico γ (lb/pulg^3)	Módulo de elasticidad E (10^3) ksi	Módulo de rigidez G (10^3) ksi	Resistencia a la cedencia (ksi) σ_y			Resistencia última (ksi) σ_u			% de elongación en probeta de 2 pulg	Razón de Poisson ν	Coeficiente de expansión térmica α (10^{-6})/°F
				Tens.	Comp.[b]	Cortante	Tens.	Comp.[b]	Cortante			
Metálicos												
Aleaciones de aluminio forjado — 2014-T6	0.101	10.6	3.9	60	60	25	68	68	42	10	0.35	12.8
Aleaciones de aluminio forjado — 6061-T6	0.098	10.0	3.7	37	37	19	42	42	27	12	0.35	13.1
Aleaciones de hierro fundido — Gris ASTM 20	0.260	10.0	3.9	–	–	–	26	97	–	0.6	0.28	6.70
Aleaciones de hierro fundido — Maleable ASTM A-197	0.263	25.0	9.8	–	–	–	40	83	–	5	0.28	6.60
Aleaciones de cobre — Latón rojo C83400	0.316	14.6	5.4	11.4	11.4	–	35	35	–	35	0.35	9.80
Aleaciones de cobre — Bronce C86100	0.319	15.0	5.6	50	50	–	95	95	–	20	0.34	9.60
Aleaciones de magnesio [Am 1004-T61]	0.066	6.48	2.5	22	22	–	40	40	22	1	0.30	14.3
Aleaciones de acero — Estructural A36	0.284	29.0	11.0	36	36	–	58	58	–	30	0.32	6.60
Aleaciones de acero — Inoxidable 304	0.284	28.0	11.0	30	30	–	75	75	–	40	0.27	9.60
Aleaciones de acero — De herramienta L2	0.295	29.0	11.0	102	102	–	116	116	–	22	0.32	6.50
Aleación de titanio [Ti-6Al-4V]	0.160	17.4	6.4	134	134	–	145	145	–	16	0.36	5.20
No metálicos												
Concreto — De baja resistencia	0.086	3.20	–	–	–	1.8	–	–	–	–	0.15	6.0
Concreto — De alta resistencia	0.086	4.20	–	–	–	5.5	–	–	–	–	0.15	6.0
Plástico reforzado — Kevlar 4	0.0524	19.0	–	–	–	–	104	70	10.2	2.8	0.34	–
Plástico reforzado — Vidrio al 30%	0.0524	10.5	–	–	–	–	13	19	–	–	0.34	–
Madera de grado estructural — Abeto Douglas	0.017	1.90	–	–	–	–	0.30[c]	3.78[d]	0.90[d]	–	0.29[c]	–
Madera de grado estructural — Abeto blanco	0.130	1.40	–	–	–	–	0.36[c]	5.18[d]	0.97[d]	–	0.31[c]	–

[a] Algunos valores específicos pueden variar para un material en particular debido a la composición mineral de la aleación, el trabajo mecánico de la probeta o el tratamiento térmico. Para obtener un valor más exacto deben consultarse los manuales de referencia para el material.

[b] Puede suponerse que la resistencia a la cedencia y la resistencia última para los materiales dúctiles son iguales en tensión y en compresión.

[c] Se mide perpendicular a la fibra.

[d] Se mide paralela a la fibra.

[e] Deformación medida en forma perpendicular a la fibra cuando la carga se aplica a lo largo de ésta.

Este libro ofrece al estudiante una presentación clara y completa de la teoría y las aplicaciones de los principios de la mecánica de materiales.

La octava edición ha sido mejorada de manera significativa, por lo que tanto profesores como estudiantes se beneficiarán en gran medida con estos cambios.

Entre lo nuevo que encontrará destaca lo siguiente:

- **Contenido actualizado.** Algunas partes del libro fueron reescritas a fin de lograr mayor claridad. Se han agregado ejemplos nuevos y otros se han modificado para dar mayor énfasis a conceptos importantes. Además, se han mejorado las ilustraciones en todo el libro.
- **Fotos nuevas.** 44 fotos nuevas ejemplifican los principios más importantes en situaciones reales y la forma en que se comportan los materiales bajo cierta carga.
- **Problemas fundamentales.** Estos problemas ofrecen a los estudiantes aplicaciones simples de los conceptos, lo que le da a los estudiantes la oportunidad de probar sus habilidades antes de intentar solucionar algunos de los problemas estándar.
- **Problemas conceptuales.** Estos problemas están planteados para que los estudiantes razonen sobre una situación de la vida real ejemplificada en una fotografía.
- **Problemas nuevos.** Esta edición incluye aproximadamente 550 problemas nuevos, algunos con aplicaciones a campos recientes de la ingeniería.
- **Problemas con sugerencias.** Esta sección motiva mucho a los estudiantes para resolver problemas por su cuenta al proporcionarles formas adicionales de verificar la solución.

Para obtener mayor información sobre este libro, visite:

www.pearsoneducacion.net/hibbeler

Prentice Hall
es una marca de



Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net

ISBN 978-607-32-0559-7
90000
9 786073 205597